ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΙ
ΚΟΙΝΩΝΙΚΑΙ
ΤΕΧΝΙΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΑΙ

ΜΗΝΙΑΙΑ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ
ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΙΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΗΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΣΧΟΛΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΝ ΕΤΟΣ 1955—1956	ΜΑΡΤΙΟΣ — ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1956	ΣΤ' ΤΟΜΟΣ	ΑΡΙΘ. ΤΕΥΧΟΥΣ 7-8

ΕΠΙ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΟΣ

Δρος ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ Ι. ΠΑΠΠΑ

Τακτικοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Ε.Μ.Π. καὶ τοῦ Κ.Σ.Ε.

Πρὶν ἐξετάσομε τὴν ἔννοια τοῦ ἐπιστημονικοῦ ὅρου «πιθανότης» εἶναι ἀνάγκη νὰ διακρίνομε δύο τελείως διαφορετικὲς ἔννοιες τῆς λέξεως πιθανότης.

Ἡ λέξις πιθανότης ποὺ συναντᾶται π.χ. εἰς τὶς φράσεις :

—Ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ ἔχη συγγράψει ὁ Ὅμηρος τὴν Ὀδύσσεια.

—Ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐκραγῇ πόλεμος μεταξὺ Ρωσίας καὶ Ἀμερικῆς.

—Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ὁ Α ἔνοχος φόνου.

Σημαίνει βαθμὸ ἀληθοφανείας ἢ πιστευτότητος γεγονότος ποὺ δὲν ἐπιδέχεται συχνὴ ἐπανάληψι καὶ μπορεῖ γαλλικὰ νὰ ἀποδοθῇ μὲ τὴν λέξι **vraissemblance.**

Ἡ ἔννοια αὐτὴ δὲν ἔχει καμιὰ σχέσι μὲ τὸν ὅρο πιθανότης ποὺ περιλαμβάνεται π.χ. στὴν φράσι :

—Ποία εἶναι ἡ πιθανότης τοῦ ἑξαριοῦ ἂν ριχθῇ ἕνα ζάρι, ἡ ὁποία ἀναφέρεται πάντοτε σὲ γεγονότα ποὺ μπορεῖ νὰ ἐπαναληφθοῦν ἢ τουλάχιστον μπορεῖ νὰ φαντασθοῦμε ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπαναληφθοῦν σὲ μιὰ μεγάλη σειρὰ μετρήσεων.

Οἱ δύο ἔννοιες ἐκφράζονται μὲ τὴν ἴδια λέξι, ἀλλὰ εἶναι τελείως διαφορετικές. Πρόκειται περὶ ἁπλῆς συνωνυμίας, ὅπως συνώνυμες εἶναι οἱ λέξεις πλάνη (ἐργαλεῖον) καὶ πλάνη (ἀπάτη).

Ἡ συνωνυμία ὅμως αὐτὴ ἔχει συχνὰ ἐπιφέρει σύγχυσι καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνει ἡ διάκρισις.

Δὲν θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ τὴν πρώτη ἔννοια τῆς λέξεως πιθανότης (βαθμὸς ἀληθοφανείας), διότι, ὅπως ὀρθῶς παρετήρησε ὁ **von Mises** ἐπὶ τοῦ ἔργου τοῦ **Carnap (Logical foundations of probability 1950)** ἡ ἔννοια αὐτὴ δὲν ὑπόκειται εἰς μαθηματικὸ λογισμὸ καὶ δὲν εἶναι ἐπιστημονικὰ ἐκμεταλλεύσιμη, ἀφοῦ δὲν μπορεῖ νὰ χρησιμεύσει γιὰ καμιὰ ἐπιστημονικὴ πρόβλεψι καὶ διότι, ἐπαναλαμβάνομε, εἶναι βασικὰ διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν ἔννοια τοῦ φυσικοῦ ὅρου πιθανότης.

Ὁ ἐπιστημονικὸς ὅρος πιθανότης ἐμφανίζεται ἀφ᾿ ὅτου ἐγεννήθη ἡ θεωρία πιθανοτήτων καί, σύμφωνα μὲ τὸν κλασικὸ ὁρισμό, εἶναι ὁ λόγος τῶν εὐνοϊκῶν περιστώσεων νὰ συμβῇ ἕνα γεγονὸς πρὸς τὸ σύνολον τῶν καθ᾿ ὅλου δυνατῶν περιπτώσεων ἐφ᾿ ὅσον ὅλες οἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξ ἴσου δυνατές.

Μὲ τὸν ὁρισμὸ αὐτὸν δὲν θὰ ἦταν ἀνάγκη καθόλου νὰ ἀσχοληθῶ διότι ἔχει ἐγκαταλειφθῆ πιὰ ἀπὸ ὅλους τοὺς νεωτέρους ἐπιστήμονες, ἂν δὲν εἶχα σκοπὸ νὰ ἐντάξω καὶ αὐτὸν εἰς τὸν ὁρισμὸ τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος, πού, ὅπως προτίθεμαι νὰ ἀποδείξω, συμπίπτει ἀπόλυτα μὲ τὴν ἔννοια τῆς προβλεπομένης συχνότητος σὲ μεγάλο ἀριθμὸ δοκιμῶν, ἐνῶ ὅλοι οἱ ἄλλοι ὁρισμοὶ δὲν ἀποτελοῦν ὁρισμοὺς ἀλλὰ τρόπους ὑπολογισμοῦ τῆς πιθανότητος.

Τοῦτο βεβαίως δὲν σημαίνει ὅτι προϋπόθεσις ἐφαρμογῆς τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος εἶναι ἡ ἐκτέλεσις μεγάλου ἀριθμοῦ δοκιμῶν, διότι ἡ πιθανότης μπορεῖ νὰ ἀναφέρεται εἰς τὸ ἀποτέλεσμα μιᾶς καὶ μόνης μετρήσεως, ἀλλὰ ὅτι ὅταν λέγομε : ἡ πιθανότης ἑνὸς γεγονότος εἶναι p, τοῦτο εἶναι ταυτόσημον μὲ τό : ἡ συχνότης θὰ ἦταν p ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν δοκιμῶν ἦταν μεγάλος.

Δὲν θὰ ἀναφέρω ἐδῶ ὅλες τὶς κριτικὲς ποὺ ἔχουν διατυπωθῆ ἐπὶ τοῦ κλασικοῦ ὁρισμοῦ. Ὡς γνωστὸν ἡ κυριότερη εἶναι ὅτι εἶναι ὁρισμὸς διὰ τοῦ ὁριστέου, διότι οἱ λέξεις δυνατὲς (περιπτώσεις) καὶ δυνατῶν ποὺ περιέχει εἶναι συνώνυμες μὲ τὶς λέξεις πιθανὲς καὶ πιθανῶν. Ὅμως διὰ τὸν σκοπὸ ποὺ ἀνέφερα ἀνωτέρω, θὰ προσθέσω, μᾶλλον θὰ προεκτείνω μιά.

Γιὰ νὰ ποῦμε στὸ παιγνίδι κορῶνα - γράμματα ὅτι τὸ γεγονὸς ἢ ἡ τιμὴ [1] κορῶνα ἔχει πιθανότητα 1/2 πρέπει νὰ παραδεχθοῦμε ὅτι οἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξ ἴσου πιθανὲς ἢ δυνατές. Ἂν κάποιος φέρει τὴν ἀντίρρησι ὅτι τὸ νόμισμα δὲν ἔχει τὸ κέντρον βάρους του στὸ γεωμετρικό του κέντρον ἢ γενικότερα ὅτι δὲν εἶναι τελείως ὁμογενὲς καὶ ἑπομένως οἱ περιπτώσεις δὲν εἶναι ἐξ ἴσου δυνατὲς μπορεῖ νὰ ἀλλάξομε τὸ νόμισμα ἢ τὸ ἴδιο νὰ τὸ καταστήσομε ὁμοιογενές.

Ἀφοῦ ὅμως κάνομε ὅτι εἶναι ἐπιστημονικὰ δυνατὸν διὰ νὰ καταστήσομε τὸ νόμισμα γεωμετρικῶς, φυσικῶς καὶ χημικῶς ὁμοιογενὲς δύο τινὰ μποροῦν νὰ παρουσιασθοῦν :

1ον) Μὲ ὅλα τὰ σήμερα δυνατὰ μέσα ἐλέγχου δὲν θὰ μπορεῖ νὰ διακριθῆ ἡ ὄψις κορῶνα ἀπὸ τὴν ὄψι γράμματα. Στὴν περίπτωσι αὐτὴ ἀφοῦ μὲ κανένα τρόπο δὲν θὰ μπορεῖ νὰ διακριθῆ ἡ μιὰ ὄψις ἀπὸ τὴν ἄλλη τὸ παιγνίδι κορῶνα - γράμματα θὰ παύσει νὰ ἔχει νόημα καὶ ἡ πιθανότης τοῦ γεγονότος κορῶνα ἐπίσης, ἀφοῦ δὲν θὰ ὑπάρχει πιὰ τότε οὔτε γεγονὸς κορῶνα οὔτε γεγονὸς γράμματα.

2ον) Θὰ μποροῦν νὰ διακριθοῦν οἱ δύο ὄψεις ἀπὸ κάποια ἐλαχίστη διαφορά, ἕνα ἐλάχιστο σημαδάκι π. χ.

Ἂν ὅμως κάποιος ἰσχυρισθῆ ὅτι καὶ τὸ ἐλάχιστο αὐτὸ σημαδάκι μπορεῖ νὰ ἔχει ἐπίδρασι στὸ ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος καὶ ὅτι οἱ περιπτώσεις δὲν εἶναι ἐξ ἴσου δυνατές, δὲν ὑπάρχει κανένα θεωρητικὸ ἐπιστημονικὸ ἐπιχείρημα γιὰ νὰ τὸν πείσομε ὅτι ὁ ἰσχυρισμός του εἶναι ἀστήρικτος ἢ ὑπερβολικός. Οἱαδήποτε θεωρητικὴ συζήτησις δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει ἀποτέλεσμα, διότι εἶναι ἀδύνατον μὲ θεωρητικοὺς συλλογισμοὺς νὰ κριθῆ ποιὰ διαφορὰ ἢ ποιᾶς τάξεως μεγέθους διαφορὰ μπορεῖ νὰ ἔχη ἐπίδρασι καὶ ποιὰ ὄχι. Ὁ μόνος τρόπος νὰ κριθῆ ἡ δια-

1) Διὰ τὶς ἐπιστημονικὲς ἐφαρμογὲς τῆς πιθανότητος, γεγονὸς εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ἡ πιθανότης εἶναι γενικὰ ἡ ἐμφάνισις μιᾶς τιμῆς ἢ τιμῆς ἐντὸς ὡρισμένης περιοχῆς τιμῶν ἑνὸς μονοδιαστάτου ἢ πολυδιαστάτου μεγέθους τὸ ὁποῖον ὑπόκειται εἰς μέτρησιν. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως μπορεῖ νὰ μὴν ἐκφράζεται πάντοτε δι' ἀριθμοῦ, ἀλλὰ μπορεῖ σὲ κάθε κλίμακα διαβαθμίσεως (π.χ. χρωμάτων ἢ διανοητικῆς ἱκανότητος ἀνθρώπων) νὰ ἀντιστοιχίσομε ἀριθμοὺς ἢ τιμὲς ποὺ ἐκφράζουν τὴν διαβάθμισι.

φορὰ γνωμῶν εἶναι τὸ πείραμα. Ἂν δηλαδὴ μὲ τὸ νόμισμα αὐτὸ γίνει ἕνας μεγάλος ἀριθμὸς N πειραμάτων καὶ παρουσιασθῆ N/2 φορὲς ἡ τιμὴ κορῶνα (ποὺ εἶχε τὸ ἐλάχιστο σημαδάκι) τότε ἀναμφισβήτητα θὰ γίνει παραδεκτὸ ὅτι οἱ δύο τιμὲς ἦταν ἐξ ἴσου πιθανές. Ἂν ἀντιθέτως, μετὰ ἕνα ἀρκετὰ μεγάλο ἀριθμὸ δοκιμῶν, ἡ συχνότης τῆς κορώνας εἶναι μικρότερη ἢ μεγαλύτερη ἀπὸ 1/2 καὶ μένει σταθερὴ ὅσο αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν δοκιμῶν θὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ ἐλάχιστο σημαδάκι εἶχε ἐπίδρασι καὶ ἄρα ὅτι τὰ γεγονότα δὲν ἦταν ἐξ ἴσου πιθανά.

Γενικὰ ἂν μὲ τὸν ὁρισμὸ τῆς κλασικῆς πιθανότητος ἢ μὲ ὁποιοδήποτε ἄλλο θεωρητικὸ τρόπο ὑπολογισθῆ ἡ πιθανότης p ἑνὸς γεγονότος καὶ ἀποδειχθῆ, εἴτε καὶ παραδεχθοῦμε, ὅτι ἡ συχνότης τοῦ γεγονότος σὲ ἕνα μεγάλο ἀριθμὸ δοκιμῶν θὰ εἶναι διαφορετικὴ τοῦ p ὁ θεωρητικὸς συλλογισμὸς ἔχει ἀμέσως καταπέσει.

Ἀλλὰ καὶ ἀντίστροφα ἐὰν καθ' οἱονδήποτε τρόπο ὑπολογισθῆ ἡ πιθανότης p ἑνὸς γεγονότος καὶ δεχθοῦμε ὅτι ἡ προβλεπομένη συχνότης θὰ εἶναι p τότε ἀναμφισβήτητα δεχόμεθα ἐπίσης ὅτι σωστὰ ὑπολογίσθηκε ἡ πιθανότης.

Ἔτσι ἀποδεικνύεται ὅτι μὲ ὁποιοδήποτε θεωρητικὸ συλλογισμὸ καὶ ἂν ὑπολογίσομε πιθανότητα δὲν κάνομε τίποτα ἄλλο παρὰ νὰ προδικάσομε τὸ ἀποτέλεσμα πειράματος καὶ δὴ κάνομε πρόβλεψι τῆς συχνότητος σὲ μεγάλο ἀριθμὸ δοκιμῶν. Δηλαδὴ τόσο στὸν κλασικὸ ὁρισμὸ ὅσο καὶ σὲ κάθε ἄλλο θεωρητικὸ συλλογισμό, ποὺ ὁδηγεῖ σὲ ὑπολογισμὸ πιθανότητος, ἄδηλα ἡ ἔννοια τῆς πιθανότητος συμπίπτει μὲ τὴν ἔννοια τῆς προβλεπομένης συχνότητος σὲ μεγάλο ἀριθμὸ δοκιμῶν. (Θὰ παραλείπω στὸ ἑξῆς τό: σὲ μεγάλο ἀριθμὸ δοκιμῶν).

Ὅμως ἂν καὶ σύμφωνα πρὸς τὰ ἀνωτέρω ὁ κλασικὸς ὁρισμὸς εἶναι ἄχρηστος καὶ ἀστήρικτος ὡς ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος εἶναι χρήσιμος ὡς τρόπος ὑπολογισμοῦ.

Δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει κανένα ἐννοιολογικὸ ἐμπόδιο νὰ γίνει ὁ προϋπολογισμὸς τῆς συχνότητος μὲ τὴν βοήθεια τοῦ κλασικοῦ ὁρισμοῦ στὶς περιπτώσεις ποὺ αὐτὸ εἶναι δυνατὸν καὶ δὴ ὅταν λογικὰ βάσιμα μπορεῖ νὰ θεωρηθοῦν οἱ περιπτώσεις ἐξ ἴσου πιθανές.

Οἱ ἐννοιολογικὲς ἀτέλειες τοῦ κλασικοῦ ὁρισμοῦ δὲν εἶχαν γίνει ἀντιληπτὲς ἐφ' ὅσον ἡ θεωρία πιθανοτήτων εἶχε ἐφαρμογὲς μόνο στὰ τυχερὰ παιγνίδια καὶ σὲ παραπλήσια προβλήματα, διότι, προφανῶς, ἀπαραίτητη προϋπόθεσις κάθε τυχεροῦ παιγνιδιοῦ εἶναι οἱ ἐξ ἴσου δυνατὲς περιπτώσεις, ἀφοῦ κανένας δὲν θὰ ἐδέχετο νὰ παίξει ζάρια π. χ. μὲ ἕνα ζάρι ἐὰν ἤξερε ἢ καὶ ὑποψιαζόταν ὅτι οἱ ἕξη τιμὲς τοῦ ζαριοῦ δὲν εἶναι ἐξ ἴσου πιθανές. Ὅταν ὅμως ἡ θεωρία πιθανοτήτων ἄρχισε νὰ χρησιμοποιεῖται σὲ ἄλλα πεδία ἐφαρμογῶν, ὅπου οἱ τιμὲς οὔτε κατὰ προσέγγισι μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ἐξ ἴσου πιθανές, παρουσιάσθηκαν πολλὲς δυσκολίες ἢ ἐμπόδια λογιστικὰ καὶ ἐννοιολογικὰ —τὰ δεύτερα μᾶς ἐνδιαφέρουν ἐδῶ— κατὰ τὴν λύσι τῶν σχετικῶν προβλημάτων μὲ τὴν χρῆσι τοῦ κλασικοῦ ὁρισμοῦ.

Οἱ δυσκολίες αὐτὲς κατεβλήθη προσπάθεια νὰ παρακαμφθοῦν κατὰ διαφόρους τρόπους ἀπὸ διαφόρους ἐπιστήμονας, μὲ μπαλλώματα τῆς κλασικῆς θεωρίας ἢ καί, πρὸ τοῦ ἀδιεξόδου, μὲ ἄρνησι κάθε βασικοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος, ὅπως π.χ. εἶναι ὁ ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος ὡς ποσότητος ἡ ὁποία πληροῖ τὶς δύο βασικὲς ἀρχὲς τῶν ὁλικῶν καὶ τῶν συνθέτων πιθανοτήτων.

Τὸ ἀδιέξοδο ἦταν τέτοιο ὥστε ὁ H. Poincaré ἔγραφε: εἶναι ἀδύνατον νὰ δοθῇ ἱκανοποιητικὸς ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος. Ὑπάρχει ἐδῶ κάτι τὸ μυστηριῶδες καὶ ἀπροσπέλαστο εἰς τὸν μαθηματικὸ (H. Poincaré. Calcul des probabilités. 1896 σελ. 1 καὶ 11).

Τὸ ἀδιέξοδον ἔλυσε ριζοσπαστικὰ ὁ von Mises εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει ἀναμφισβήτητα ἡ τιμὴ ὅτι ἔδωσε τελείως νέο ὁρισμὸ τῆς πιθανότητος, ποὺ μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῇ ἰσότιμα σὲ ὅλες τὶς ἐπιστημονικὲς ἐφαρμογὲς τῆς θεωρίας πιθανοτήτων. (Von Mises. Wahrscheinlichkeit Statistik und Wahrheit. Wien 1896 καὶ προηγούμενες ἐργασίες).

Ὁ von Mises ὡς γνωστὸν ὁρίζει τὴν πιθανότητα ὡς ὅριον τῆς συχνότητος μέσα σὲ ἕνα πιθανοσύνολον (Kollektiv).

Δὲν θὰ ἐκθέσομε ἐδῶ τὸν ἀξιωματισμὸ στὸν ὁποῖον ὁ von Mises θεμελιώνει τὸν ὁρισμό του οὔτε τὶς ἀντιρρήσεις ἢ συμπληρώσεις ποὺ ἔγιναν στὴν θεωρία του ἀπὸ διαφόρους ἐπιστήμονες.

Εἰς τὶς ἀντιρρήσεις ἔχει ἀπαντήσει ὁ von Mises νομίζω ἐπαρκῶς. Συμπληρώσεις δὲ εἶναι φυσικὸ νὰ χρειάζονται σὲ μιὰ νέα θεωρία καὶ δὲν θὰ διατυπώσω ἐδῶ λεπτομεριακὲς παρατηρήσεις, ἀλλὰ μόνο μιὰ ἐννοιολογικὴ διαφορά.

Ὁ von Mises, ὡς ἐξετέθη, ὁρίζει τὴν πιθανότητα ὡς ὅριον τῆς συχνότητος μέσα σὲ ἕνα πιθανοσύνολο. Αὐτὸς ὅμως ἐπίσης δὲν εἶναι ὁρισμὸς ἀλλὰ τρόπος ὑπολογισμοῦ πιθανότητος.

Βέβαια στὶς περισσότερες περιπτώσεις εἶναι ὁ μόνος τρόπος ὑπολογισμοῦ πιθανότητος, ἀλλὰ ὅπως εἴδαμε δὲν εἶναι πάντοτε καὶ ὁ μόνος. Δηλαδὴ ὅταν δὲν ὑπάρχει ἄλλη δυνατότης ὑπολογισμοῦ, ἡ πιθανότης θὰ ὑπολογισθῇ ἐπὶ τῇ βάσει ἑνὸς πλήθους πειραματικῶν δεδομένων, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληροῖ ὁρισμένες συνθῆκες καὶ ποὺ ὅταν τὶς πληροῖ ἢ ὑποτεθῇ ὅτι τὶς πληροῖ καλεῖται πιθανοσύνολον.

Ἀλλὰ παρόμοια συμβαίνουν σὲ ὅλη τὴν ἐπιστήμη. Ὅταν ἕνα μέγεθος δὲν ὑπάρχει τρόπος νὰ ὑπολογισθῇ ἀλλοιῶς ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει πειραματικῶν δεδομένων, ποὺ πρέπει νὰ ἔχουν προκύψει ὑπὸ ὁρισμένες συνθῆκες, καὶ ὁ ὑπολογισμὸς προφανῶς μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ πρόβλεψι ἐφ' ὅσον ἰσχύουν οἱ προϋποθέσεις τοῦ ὑπολογισμοῦ, δηλαδὴ πάλιν διὰ ὁρισμένες συνθῆκες.

Οὔτε ὅμως ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ οὔτε οἱ συνθῆκες αὐτὲς ἀποτελοῦν ἐννοιολογικὸ ὁρισμὸ τοῦ μεγέθους.

Ἐὰν ὑπάρχει ἕνα πλῆθος πειραματικῶν δεδομένων, τὰ ὁποῖα προέκυψαν ὑπὸ πειραματικὲς συνθῆκες[1] ποὺ ἦταν σταθερὲς ἢ διεκυμάνθησαν ἐντὸς γνωστῶν καὶ παραδεκτῶν (διὰ τὴν περίπτωσι) ὁρίων καὶ γενικότερα ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν δεδομένων ἀποτελεῖ πιθανοσύνολον —μὲ τὸν ὁρισμὸ τοῦ von Mises ἢ καὶ ἄλλον τροποποιημένο — εἶναι ἀπόλυτα λογικὸ τὸ συμπέρασμα ὅτι: ἀφοῦ μὲ τὶς A πειραματικὲς συνθῆκες ἡ συχνότης μιᾶς τιμῆς ἢ περιοχῆς τιμῶν (μονοδιαστάτου ἢ καὶ πολυδιαστάτου μεγέθους) ἦταν p, ἐὰν συνεχισθοῦν ἢ ξαναγίνουν μετρήσεις μὲ τὶς ἴδιες συνθῆκες ἡ συχνότης θὰ εἶναι πάλι p.

---

1) Πειραματικὲς συνθῆκες ὀνομάζομε ὄχι μόνο τὶς συνθῆκες τῶν μετρήσεων, ἀλλὰ κάθε τί ποὺ μπορεῖ νὰ ἔχῃ ἐπίδρασι στὸ ἀποτέλεσμα τῶν μετρήσεων.

Δηλαδὴ γίνεται πρόβλεψις τῆς συχνότητος ἐπὶ τῇ βάσει πειραματικῶν δεδομένων, ὅπως γενικὰ ἐπὶ τῇ βάσει πειραματικῶν δεδομένων (ποὺ ἔχουν ἢ ὄχι ἐκφρασθῆ μὲ ἐμπειρικὲς σχέσεις) γίνεται πρόβλεψις τῆς τιμῆς τῶν φυσικῶν μεγεθῶν. Ἀλλὰ ὁ τρόπος αὐτὸς ὑπολογισμοῦ δὲν μπορεῖ νὰ ἀποτελέσει ὁρισμό.

Στὴν ἐπιστήμη ὑπάρχουν βέβαια μεγέθη ποὺ ὁρίζονται ὡς γινόμενον ἢ ὡς λόγος ἄλλων μεγεθῶν ἢ γενικὰ ὁρίζονται μὲ τὸν τρόπο ὑπολογισμοῦ των. Ἀλλὰ πρῶτον μὲν τὰ μεγέθη αὐτὰ εἶναι σύνθετα καὶ ὄχι βασικὰ ἢ πρωταρχικὰ καὶ δεύτερον ὁ καθοριζόμενος τρόπος ὑπολογισμοῦ εἶναι ἕνας καὶ μόνος. Ἡ πιθανότης οὔτε σύνθετον μέγεθος εἶναι οὔτε καὶ ἕνας μοναδικὸς τρόπος ὑπολογισμοῦ της ὑπάρχει.

Ἔτσι ἐννοιολογικὰ καὶ ὁ ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος τοῦ von Mises δὲν εἶναι ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος, ἀλλὰ τρόπος ὑπολογισμοῦ τῆς πιθανότητος τῆς ὁποίας ἡ ἔννοια καὶ μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ὑπολογισμοῦ συμπίπτει πλήρως μὲ τὴν ἔννοια τῆς προβλεπομένης συχνότητος.

Ὁ ἀξιωματισμὸς ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐθεμελίωσε τὸν ὁρισμό του ὁ von Mises εἶναι πολυτιμότατος διὰ τὸν τρόπο ὑπολογισμοῦ, δὲν θεμελιώνει ὅμως ὁρισμὸ ἀφοῦ καὶ μὲ διαφορετικοὺς ἀξιωματισμούς, ὅπως ἔχει ἀποδειχθῆ ἀπὸ ἄλλους ἐπιστήμονας (1), μπορεῖ νὰ ὑπολογισθῆ πιθανότης.

Ὁ von Mises ἀποκλείει κάθε ἄλλον ὁρισμὸ τῆς πιθανότητος. Καὶ εἶναι μὲν ἀληθὲς ὅτι ὁ ὁρισμὸς (τρόπος ὑπολογισμοῦ) τοῦ von Mises ἐφαρμόζεται σὲ ὅλες τὶς ἐπιστημονικὰ χρήσιμες περιπτώσεις. Ἀλλὰ ὑπάρχουν περιπτώσεις ὅπου εἶναι δυνατοὶ καὶ ἄλλοι τρόποι ὑπολογισμοῦ τῆς προβλεπομένης συχνότητος. Εἴδαμε ἤδη, στὴν περίπτωσι τῶν ἐξ ἴσου δυνατῶν περιπτώσεων, ὅτι μπορεῖ νὰ ὑπολογισθῆ ἡ συχνότης σύμφωνα μὲ τὸν κλασικὸ ὁρισμό, ποὺ καὶ αὐτὸς δὲν εἶναι ὁρισμὸς ἀλλὰ τρόπος ὑπολογισμοῦ.

Ὁ von Mises ὀρθῶς τὸν ἀπορρίπτει ὡς ὁρισμό. Ἀλλὰ ὡς τρόπος ὑπολογισμοῦ μιᾶς πιθανότητος δὲν ὑπάρχει κανένας λόγος νὰ μὴ χρησιμοποιηθῆ ὅταν εἶναι δυνατόν, δηλαδὴ ὅταν δι' αὐτοῦ μπορεῖ νὰ προβλεφθῆ ἡ συχνότης.

Ἐὰν ὑπολογισθῆ ἡ πιθανότης τῆς κορώνας ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὑποθέσεως τῶν ἐξ ἴσου δυνατῶν περιπτώσεων μὲ θεωρητικὸ συλλογισμὸ ὅτι εἶναι 1/2 καὶ ἔπειτα σὲ ἕνα μεγάλο ἀριθμὸ δοκιμῶν ἀποδειχθῆ ὅτι θὰ εἶναι διάφορος, αὐτὸ δὲν σημαίνει τίποτα ἄλλο παρὰ ὅτι οἱ προϋποθέσεις τοῦ ὑπολογισμοῦ δὲν ἦταν ἀληθεῖς, δὲν παρουσιάζει ὅμως καμιὰ ἐννοιολογικὴ ἀντίφασι ἢ δυσκολία.

Ἡ περίπτωσις αὐτὴ μπορεῖ νὰ παρουσιασθῆ σὲ οἱονδήποτε τρόπο ὑπολογισμοῦ οἱουδήποτε φυσικοῦ μεγέθους, μπορεῖ δὲ ἐπίσης νὰ παρουσιασθῆ στὸν τρόπο ὑπολογισμοῦ τοῦ von Mises. Ἐὰν ἡ συχνότης σὲ ἕνα μεγάλο ἀριθμὸ πειραμάτων ἀποδειχθῆ διάφορος τῆς προϋπολογισθείσης ἀπὸ ἕνα πιθανοσύνολον αὐτὸ δὲν θὰ σημαίνει τίποτα ἄλλο παρὰ ὅτι οἱ τιμὲς τῶν νέων μετρήσεων δὲν θὰ ἀνήκουν στὸ ἴδιο πιθανοσύνολο μὲ ἐκεῖνες ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων ὑπελογίσθη ἡ συχνότης, δηλαδὴ ὅτι μετεβλήθησαν οἱ πειραματικὲς συνθῆκες, ἐνῷ βασικὴ προϋ-

---

1) Cramer, Mathematical methods of statistics 1946. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1933. Feller, An Introduction to probability theory 1950. Tornier, Wahrscheinlichkeitsrechnung 1936.

πόθεσις εἶναι ὅτι ἡ πιθανότης ἰσχύει μέσα σὲ ἕνα ὁρισμένο πιθανοσύνολο.

Ἀλλὰ ἀκόμη συνηθέστατα μιὰ πιθανότης ὑπολογίζεται συγχρόνως καὶ ἐπὶ τῇ βάσει πειραματικῶν δεδομένων καὶ θεωρητικῶν συλλογισμῶν. Δηλαδὴ συχνότατα πρόβλεψις συχνότητος γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει καὶ διὰ συνδυασμοῦ πειραματικῶν δεδομένων, θεωρητικῶν συλλογισμῶν, ὑποθέσεων καὶ παραδοχῶν.

Μιὰ πιθανότης p ποὺ θὰ ἔχει ὑπολογισθῆ ἔτσι δὲν ἐμπίπτει σὲ κανένα ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς ὁρισμούς, ἐν τούτοις εἶναι καὶ λαμβάνεται ὡς πιθανότης καὶ ἐὰν ἡ τιμή της εἶναι p τοῦτο σημαίνει ἀναμφισβήτητα ὅτι προβλέπεται ὅτι ἡ συχνότης θὰ εἶναι p, εἶναι δὲ περιττὸν νὰ προστεθῆ, ἐφ' ὅσον τὰ πειραματικὰ δεδομένα εἶναι ἀκριβῆ, ἐφ' ὅσον οἱ θεωρητικοὶ συλλογισμοὶ εἶναι ὀρθοὶ καὶ ἐφ' ὅσον πληροῦνται οἱ παραδοχὲς ἢ ὑποθέσεις ποὺ ἔγιναν, διότι αὐτὰ ἰσχύουν πάντοτε σὲ ὁποιαδήποτε περίπτωσι ὑπολογισμοῦ.

Ὁ ὁρισμὸς ὅμως τῆς πιθανότητος ὡς προβλεπομένης συχνότητος ὄχι μόνον εἶναι ἐννοιολογικὰ σαφής, εὔληπτος καί, ὅπως ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω προκύπτει, ἄδηλα ἐνυπάρχει σὲ ὅλους τοὺς ὁρισμούς, ἀλλὰ καὶ θεμελιώνεται μὲ τὸ θεώρημα τῶν μεγάλων ἀριθμῶν τοῦ Bernoulli.

Κατὰ τὸ θεώρημα αὐτὸ ἡ συχνότης τείνει πρὸς τὴν πιθανότητα ὅσο ὁ ἀριθμὸς τῶν δοκιμῶν αὐξάνει.

Τί ἄλλο ὅμως σημαίνει αὐτὸ παρὰ ὅτι ἡ πιθανότης ἰσοῦται πρὸς τὴν προβλεπομένη συχνότητα σὲ ἕνα μεγάλο ἀριθμὸ δοκιμῶν;

Ἐν συμπεράσματι ὁ μόνος ἐννοιολογικὰ σαφὴς ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος ποὺ ἰσχύει γενικότατα εἶναι ὁ ἑξῆς:

Πιθανότης ἑνὸς γεγονότος εἶναι ἡ προβλεπομένη συχνότης ἐμφανίσεως τοῦ γεγονότος σὲ ἕνα μεγάλο ἀριθμὸ δοκιμῶν.

Ἡ πρόβλεψις μπορεῖ, ὅπως εἴπαμε, νὰ γίνη κατὰ διαφόρους τρόπους καὶ εἶναι περιττὸ νὰ προστεθῆ ὅτι θὰ εἶναι τόσο πιὸ ὀρθὴ καὶ ἀσφαλὴς ὅσο εἶναι ὀρθότεροι οἱ συλλογισμοὶ καὶ ὅσο πληρέστερα ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις ποὺ ἐτέθησαν εἴτε διὰ τὸν ὑπολογισμὸ εἴτε διὰ τὶς πειραματικὲς συνθῆκες τῶν δοκιμῶν.

Ἡ πιθανότης, πρέπει νὰ ἐπαναλάβομε, δὲν ἰσχύει μόνο διὰ μεγάλο ἀριθμὸ προβλεπομένων δοκιμῶν, ἀλλὰ ἀκόμη καὶ διὰ μιὰ καὶ μόνη, ἡ ἀκρίβεια ὅμως ὑπολογισμοῦ της δὲν μπορεῖ νὰ ἐλεγχθῆ παρὰ ἂν γίνει μεγάλος ἀριθμὸς δοκιμῶν μὲ τὶς τεθεῖσες προϋποθέσεις.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς δὲν ἀποκλείει οὔτε βρίσκεται εἰς ἀντίφασι μὲ κανένα τρόπο ὑπολογισμοῦ εἴτε θεωρητικὸ εἴτε πειραματικὸ εἴτε μικτό. Ἐπίσης θέλω νὰ τονίσω ὅτι δὲν ἀποτελεῖ μετάθεσι τοῦ ὁρισμοῦ, δηλαδὴ ὁρισμὸ μέσω ἄλλης πάλι ἀγνώστου ἐννοίας, διότι ἡ συχνότης εἶναι ἔννοια κοινότατα γνωστή, σαφεστάτη καὶ μονοσήμαντα ὁρισμένη.

Τέλος θέλω ἀκόμα νὰ προσθέσω ὅτι μὲ τὸν τιθέμενο ὁρισμὸ τῆς πιθανότητος ἡ ἀπόδειξις τῶν βασικῶν ἀρχῶν ὁλικῶν καὶ συνθέτων πιθανοτήτων ὡς θεωρημάτων δὲν παρουσιάζει καμιὰ ἐννοιολογικὴ ἢ ἄλλη δυσκολία.