ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὑπὸ τοῦ Κωνσταντίνου Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

Κατωτέρω δίδονται τὰ ἐπιτάγματα τριῶν στατιστικῶν προβλημάτων, δοθέντων εἰς ἐξετάσεις πρὸς ἀπόκτησιν διπλώματος Στατιστικῆς, ***μετὰ τῶν δοθεισῶν λύσεων αὐτῶν παρ' ἐμοῦ.***

Ἐκ τούτων, ὁ ἀναγνώστης ἀποκτᾷ μίαν ἀμυδρὰν μόνον ἰδέαν εἰς ποῖον ἐπίπεδον ἔχει ἀχθῆ ἀλλαχοῦ ἡ διδασκαλία τῆς Στατιστικῆς καὶ πόσον, συνεπῶς, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο, ὑστεροῦμεν ἔτι διεθνῶς.

Πρόβλημα πρῶτον

Τὰ δύο μεταβλητὰ x καὶ Υ εἶναι γνωστὸν ὅτι συνδέονται γραμμικῶς (δηλ. δι' ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ) καὶ ὅτι, $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ εἶναι ἐξ ἴσου ἀξιόπιστοι παρατηρήσεις τῶν τιμῶν τοῦ Υ, ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς γνωστὰς τιμάς, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων νὰ ἐκτιμηθοῦν αἱ παράμετροι τῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως : $Y = \alpha + \beta x$ καὶ νὰ δειχθῇ πῶς ὑπολογίζονται τὰ ὅρια ἐμπιστοσύνης διά :

α) τὴν τιμὴν τοῦ Υ, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς δεδομένην τοῦ **x** τιμὴν καὶ

β) τὴν τιμὴν τοῦ x, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς δεδομένην τοῦ Υ τιμήν.

(R.S.S. Δίπλωμα 1949)

Λύσις :

Ἡ ἐκτιμωμένη ἐξίσωσις παλινδρομήσεως εἶναι :

$$Y = \bar{y} + \beta(x - \bar{x})$$

ὅπου $$\beta = \frac{\text{Συνδιακύμανσις }(x, y)}{\text{Διακύμανσις }(x)} = \frac{\Sigma(y - \bar{y})(x - \bar{x})}{\Sigma(x - \bar{x})^2}$$

ὅσον ἀφορᾷ τὴν κατάλοιπον διακύμανσιν ἤ, ἄλλως, τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου τῆς ἐκτιμήσεως s_y^2, τοῦτο δίδεται ὑπό :

$$s_y^2 = \frac{\Sigma(y - Y)^2}{n-2}$$

ὅπου n—2 οἱ ἀντίστοιχοι βαθμοὶ ἐλευθερίας ἢ $s_y^2 = \dfrac{\Sigma y^2 - \alpha\Sigma y - \beta\Sigma xy}{n-2}$, $(\alpha = \bar{y})$.

I. Διὰ δεδομένην νῦν τιμὴν τοῦ x ἡ διακύμανσις τῆς θεωρητικῆς τιμῆς Υ δίδεται ὑπό : $$\sigma_Y^2 = s_y^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\Sigma(x - \bar{x})^2} \right]$$

καὶ ἂν t εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἀνηγμένης ἀποκλίσεως τοῦ Student διὰ $\nu = n - 2$ βαθμοὺς ἐλευθερίας, τὰ ὅρια ἐμπιστοσύνης διὰ Υ, εἰς δεδομένον ἐπίπεδον σημαντικότητος α θὰ εἶναι

$$Y = \bar{y} + \beta(x - \bar{x}) \pm \sigma_Y \cdot t_{\alpha, \nu}.$$

II. Διὰ δεδομένον νῦν Υ, τὸ x ἐκτιμᾶται ἐκ τῆς : $\Upsilon = \bar{y} + b(x - \bar{x})$, λυομένης πρὸς x, δηλ. : $x = \bar{x} + \dfrac{\Upsilon - \bar{y}}{b}$, ἤτοι τὰ ὅρια ἐμπιστοσύνης διὰ x εἶναι τὰ τοιαῦτα τῶν : $\dfrac{\Upsilon - \bar{y}}{b}$ ηὐξημένα κατὰ $\bar{x}$.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ορίων τοῦ : $\dfrac{\Upsilon - \bar{y}}{b}$, θέτομεν $\dfrac{\Upsilon - \bar{y}}{b} = \alpha$, ὅπου α ἡ ἀληθὴς τοῦ ορίου τιμή.

Τότε τό : $(\Upsilon - \bar{y}) - \alpha b = 0$, ἔχει ὡς μέσον τὸ μηδέν, διότι $\Sigma(\Upsilon - \bar{y}) = 0$ καὶ ὡς διακύμανσιν τὴν $\sigma^2_{\bar{y}} + \alpha^2\sigma^2_b$, ὅπου $\sigma^2_{\bar{y}}$ καὶ σ^2_b αἱ διακυμάνσεις τῶν $\bar{y}$ καὶ b. Ἑπομένως τὸ πηλῖκον

$$\frac{\Upsilon - \bar{y} - \alpha b}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{y}} + \alpha^2\sigma^2_b}} = t.$$

κατανέμεται ὡς t τοῦ Student μὲ $\nu = n - 2\beta$ ἐλευθερίας· συνεπῶς διὰ ὡρισμένην τοῦ t τιμήν :

$$(\Upsilon - \bar{y} - \alpha b)^2 \leqslant t^2 (\sigma^2_{\bar{y}} + \alpha^2\sigma^2_b)$$

καὶ ἄν : $b^2 > t^2\sigma^2_b$,τότε θὰ ἔχῃ πραγματικὰς ρίζας καὶ τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ τούτων.

Πρόβλημα δεύτερον

Δύο μεταβλητὰ ξ καὶ η κατασκευάζονται ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ἀριθμοῦ τινος ὅρων ὡς ἕπεται :

$$\xi = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + u_1 + u_2 + \ldots + u_\alpha$$

$$\eta = x_1 + x_2 + x^3 + \ldots + x_n + v_1 + v_2 + \ldots + v_b\,.$$

ὅπου τὰ μεταβλητὰ x, u καὶ v ἐκφράζονται ὡς ἀποκλίσεις ἀπὸ τῶν μέσων αὐτῶν, ἔχοντα διακυμάνσεις ἴσας πρὸς τὴν μονάδα καὶ ὄντα ἀσυσχέτιστα πρὸς ἄλληλα.

Νὰ δειχθῇ ὅτι : $r_{\xi\eta} = \dfrac{n}{\sqrt{(n+\alpha)\,(n+b)}}$

Χρησιμοποιοῦντες τὰ πορίσματα ταῦτα νὰ δειχθῇ ὅτι ἐάν :

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$A = x_1$$

$$B = x_2 + x_3$$

$$\Gamma = x_4 + x_5 + x_6$$

τῶν x ὑποκειμένων εἰς τὰς ὡς ἄνω συνθήκας, ἡ ἐξίσωσις πολλαπλῆς παλινδρομήσεως διὰ x εἶναι :

$$\frac{\widehat{X}}{\sqrt{6}} = 0{,}4083\,\frac{A}{1} + 0{,}5774\,\frac{B}{\sqrt{2}} + 0{,}7071\,\frac{\Gamma}{\sqrt{3}}$$

καὶ νὰ ἑρμηνευθῇ τὸ ἐξαγόμενον [London. B. Sc (spec.) 1929].

Λύσις :

I. Ἐκ τῶν ἀρχικῶν σχέσεων ἔχομεν :

$$\Sigma\xi^2 = \Sigma x_1^2 + \Sigma x_2^2 + \ldots + \Sigma x_n^2 + \Sigma u_1^2 + \Sigma u_2^2 + \ldots \Sigma u_\alpha^2,$$

τῶν διπλῶν ἀθροισμάτων μηδενιζομένων, ἅτε τῶν μεταβλητῶν ὄντων ἀσυσχετίστων.

Ἀλλὰ : $\Sigma x_1^2 = n\sigma_1^2$, $\Sigma x_2^2 = n\sigma_2^2$, . . . , $\Sigma x_n^2 = n\sigma_n^2$, γνωστὸν ὅμως ὅτι $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2 = 1$ καὶ ἐπίσης : $\Sigma u_1^2 = ns_1^2$, $\Sigma u_2^2 = ns_2^2$, . . . , $\Sigma u_\alpha^2 = ns_\alpha^2$, ἀλλὰ $s_1 = s_2 = \ldots = s_\alpha = 1$.

Ἑπομένως : $$\Sigma\xi^2 = nn + n\alpha = n(n + \alpha)$$

καὶ ἄρα $$\sigma_\xi = \sqrt{\frac{\Sigma\xi^2}{n}} = \sqrt{(n + \alpha)}$$

Δι' ὅμοιον λόγον, ἔχομεν :

$$\Sigma\eta^2 = nn + n\beta = n(n + \beta)$$

καὶ ἄρα $$\sigma_\eta = \sqrt{\frac{\Sigma\eta^2}{n}} = \sqrt{(n + \beta)}$$

ὁμοίως θὰ ἔχωμεν : $\Sigma\xi\eta = \Sigma x_1^2 + \Sigma x_2^2 + \ldots + \Sigma x_n^2$

τῶν ἀθροισμάτων τῆς μορφῆς $\Sigma x_i v_k$, $\Sigma x_i u_j$. $\Sigma v_k u_j$ $\qquad$ ($i=1, 2, \ldots n$; $j=1, 2, \ldots \alpha$; $k=1, 2, \ldots \beta$)

μηδενιζομένων, ἅτε τῶν μεταβλητῶν ὄντων ἀσυσχετίσεων, ἢ

$\Sigma\xi\eta = n\sigma_1^2 + n\sigma_2^2 + \ldots + n\sigma_n^2 = n.n$, διότι $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n = 1$

Ἑπομένως : $$r_{\xi\eta} = \frac{\Sigma\xi\eta}{n\sigma_\xi\sigma_\eta} = \frac{n.n}{n\sqrt{(n+\alpha)(n+\beta)}} = \frac{n}{\sqrt{(n+\alpha)(n+\beta)}}$$

II. Ἐκ τῶν σχέσεων :

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$
$$A = x_1$$
$$B = x_2 + x_3$$
$$\Gamma = x_4 + x_5 + x_6$$

λαμβάνομεν διαδοχικῶς : $\Sigma AX = \Sigma x_1^2 = n\sigma_1^2 = n$, $\qquad \Sigma X^2 = n.n$,

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n}} = \sqrt{n} \text{ καὶ ἐπειδὴ } n=6,\ \sigma_X = \sqrt{6}$$

ὁμοίως ἔχομεν : $\Sigma A^2 = \Sigma x_1^2 = n\sigma_1^2 = n$ καὶ ἄρα $\sigma_A = \sqrt{\frac{\Sigma x_1^2}{n}} = 1$

Ἑπομένως : $$r_{AX} = \frac{\Sigma AX}{n\,\sigma_A\,\sigma_X} = \frac{6}{6.\sqrt{6}.1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

ὁμοίως εὑρίσκομεν : $\Sigma XB = 2n.\quad \Sigma B^2 = n + n = 2n$

καὶ ἄρα : $$\sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma B^2}{n}} = \sqrt{2}$$

ὅθεν : $$r_{XB} = \frac{\Sigma XB}{n\,\sigma_X\,\sigma_B} = \frac{2n}{n\sqrt{2}\,.\,\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ἐπίσης εὑρίσκομεν : $\Sigma X\Gamma = 3n,\quad \Sigma\Gamma^2 = 3n,$

$$\sigma_\Gamma = \sqrt{\frac{\Sigma\Gamma^2}{n}} = \sqrt{3}$$

καὶ συνεπῶς : $$r_{X\Gamma} = \frac{3n}{n\,\sigma_\Gamma\,\sigma_X} = \frac{3n}{n\sqrt{3}\,\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ἐπὶ πλέον ἔχομεν : $r_{AB} = 0 = r_{A\Gamma} = r_{B\Gamma}$, διότι τὰ ἀθροίσματα $\Sigma x_1 x_2 = \Sigma x_1 x_3 = 0$, ἐπειδὴ τὰ μεταβλητὰ εἶναι ἀσυσχέτιστα.

Σχηματίζομεν νῦν, συναρτήσει τῶν ἄνω συντελεστῶν ὁλικῆς συσχετίσεως, τὴν ὁρίζουσαν :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{12} & 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{13} & r_{23} & 1 & r_{34} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ὅπου $r_{12} = r_{AX}$, $r_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}} = r_{XB}$, $r_{14} = \frac{1}{\sqrt{2}} = r_{X\Gamma}$, $r_{AB} = r_{23} = 0$,

$$r_{A\Gamma} = r_{24} = 0,\; r_{B\Gamma} = r_{34} = 0$$

οἱ συντελεσταὶ παλινδρομήσεως τῆς :

$$\widehat{X} = \beta_{12\cdot 34}\,A + \beta_{13\cdot 24}\,B + \beta_{14\cdot 23}\,\Gamma$$

δίδονται ὑπὸ : $$\beta_{12\cdot 34} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,.\,\frac{-(-1)^3\,\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,.\,\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}},$$

ἀλλὰ $\sigma_1 = \sigma_X = \sqrt{6}$ καὶ $\sigma_2 = \sigma_A = \sqrt{1} = 1$

καὶ Δ_{12}, Δ_{11} αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῆς Δ δι' ἀπαλειφῆς τῆς στήλης καὶ γραμμῆς, τῆς σημαινομένης ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου δείκτου.

Κατὰ ταῦτα :

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Ἑπομένως $\beta_{12.34} = \frac{\sqrt{6}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$

Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν : $\beta_{13.24} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \cdot \frac{-(-1)^4 \Delta_{13}}{\Delta_{11}} = -\frac{\sqrt{6} \cdot \Delta_{13}}{\sqrt{2} \cdot 1}$

ἀλλά :

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ἑπομένως : $\beta_{13.24} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

ὁμοίως : $\beta_{14.23} = \frac{\sigma_1}{\sigma_4} \cdot \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{11}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\Delta_{14}}{1}$

ἀλλά :

$$\Delta_{14} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Ἑπομένως : $\beta_{14.23} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}$. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἐξίσωσις πολλαπλῆς παλινδρομήσεως γράφεται

$$\widehat{X} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{A}{1} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot B + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \Gamma$$

ὅπου $\widehat{X}$ παριστᾷ τὴν ἐκτιμωμένην τοῦ X τιμήν. Ἡ ἄνω ἐξίσωσις γράφεται

$$\frac{\widehat{X}}{\sqrt{6}} = 0{,}4083 \frac{A}{1} + 0{,}5774 \frac{B}{\sqrt{2}} + 0{,}7071 \frac{\Gamma}{\sqrt{3}}$$

διότι $\frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}4083$ κ.λ.π.

Οἱ ἀριθμητικοὶ νῦν συντελεσταὶ ἐμφαίνουν ποία ἡ μεταβολὴ τῆς X διὰ πᾶσαν κατὰ μονάδα ($dA = dB = d\Gamma = 1$) αὔξησιν τῆς ἀντιστοίχου πρὸς τούτους μεταβλητῆς, τῆς ἐξισώσεως παριστώσης ὑπερεπίπεδον εἰς τὸν χῶρον τῶν τεσσάρων διαστάσεων.

Πρόβλημα τρίτον

Οἱ συντελεσταὶ b_1 καὶ b_2 εἰς τὴν ἐξίσωσιν παλινδρομήσεως

$$Y = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

προσδιορίζονται διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Εὑρεῖν τὴν ἔκφρασιν τοῦ μέσου σφάλματος τετραγώνου τῆς διαφορᾶς $(b_1 - b_2)$ καὶ τὰ ὅρια ἐμπιστοσύνης τῆς διαφορᾶς $(\beta_1 - \beta_2)$ διὰ τὸν πληθυσμὸν ἐξ οὗ τὸ δεῖγμα (βάσει οὗτινος προσεδιωρίσθη ἡ ὡς ἄνω ἐξίσωσις) ἐλήφθη (Manchester Dip. 1950).

Λύσις

Χρησιμοποιοῦμεν τοὺς πολλαπλασιαστὰς τοῦ Gauss, ἔχοντες ὡς ἐκ τούτου τὰ συστήματα :

$$c_{11}\Sigma x_1^2 + c_{12}\Sigma x_1 x_2 = 1 \quad \text{καὶ} \quad c_{21}\Sigma x_1^2 + c_{22}\Sigma x_1 x_2 = 0$$

$$c_{11}\Sigma x_1 x_2 + c_{12}\Sigma x_2^2 = 0 \qquad\qquad c_{21}\Sigma x_1 x_2 + c_{22}\Sigma x_2^2 = 1$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ὁριζουσῶν

$$c_{11} = \frac{\Sigma x_2^2}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}, \quad c_{12} = -\frac{\Sigma x_1 x_2}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2} = c_{21}$$

καὶ

$$c_{22} = \frac{\Sigma x_1^2}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}$$

Ἡ διακύμανσις τῆς διαφορᾶς $(b_1 - b_2)$, ὡς γνωστόν, δίδεται ὑπό :

$$\sigma^2_{b_1 - b_2} = s^2_{y.12}\left(c_{11} + c_{22} - 2c_{12}\right)$$

$$= s^2_{y.12}\left[\frac{\Sigma x_1^2 + \Sigma x_2^2 + 2\Sigma x_1 x_2}{(\Sigma x_1^2)(\Sigma x_2^2) - (\Sigma x_1 x_2)^2}\right]$$

ὅπου : $s^2_{y.12} = \dfrac{\Sigma(y - Y)^2}{n - 3}$ τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου ἐκτιμήσεως τῆς γραμμῆς πολ. παλινδρομήσεως καὶ $Y = b_1 x_1 + b_2 x_2$ ἡ θεωρητικὴ ἐξίσωσις ταύτης. Κατ' ἀκολουθίαν διά : $\nu = n - 3$ β ἐλευθερίας ἡ ἀνηγμένη διαφορὰ

$$t = \frac{b_1 - b_2}{\sigma_{b_1 - b_2}}$$

κατανέμεται ὡς t τοῦ Student μὲ $\nu = n - 3$ β ἐλευθερίας. Διὰ δεδομένον νῦν ἐπίπεδον σημαντικότητος α, τὰ ὅρια ἐμπιστοσύνης διὰ τὴν διαφορὰν $(\beta_1 - \beta_2)$ τοῦ πληθυσμοῦ, θὰ εἶναι :

$$(b_1 - b_2) - \sigma_{b_1 - b_2} \cdot t_{\nu.\alpha} < (\beta_1 - \beta_2) < (b_1 - b_2) + \sigma_{b_1 - b_2} \cdot t_{\nu.\alpha} .$$

Ἐπεξηγήσεις :

R.S.S. Dip. = Δίπλωμα τῆς Βασιλ. Στατ. Ἑταιρίας.

London. B. Sc. (Special)=Εἰδικὸν Δίπλωμα Στατιστικῆς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Λονδίνου.

Manchester. Dip. = Δίπλωμα Στατιστικοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Manchester.