ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΡΤΙΣΕΩΣ ΒΡΑΧΥΧΡΟΝΙΩΝ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ ΤΗΣ ΖΗΤΗΣΕΩΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Τοῦ κ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΔΕΛΗ

Δρος τῶν Οἰκονομικῶν τοῦ Πανεπιστημίου τῶν Παρισίων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ ζήτησις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας διαμορφοῦται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν πλήθους παραγόντων, ἄλλοι τῶν ὁποίων ἐπιδροῦν κατὰ τρόπον συνεχῆ, ἄλλοι περιοδικῶς, καὶ ἄλλοι κατὰ τρόπον ἐντελῶς τυχαῖον.

Ἡ διατύπωσις προβλέψεων περὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἰς τὸ μέλλον προϋποθέτει συνεπῶς ὅτι εἶναι γνωστοὶ οἱ παράγοντες οἱ ὁποῖοι προσδιορίζουν ταύτην, ὁ τρόπος καθ' ὃν ἕκαστος ἐπιδρᾶ καὶ ἡ ἐξέλιξις τούτων εἰς τὸ μέλλον. Ἡ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις τῆς διαμορφώσεως τοῦ φαινομένου ὑποδεικνύει τοὺς προσδιοριστικοὺς παράγοντας τούτου, ἡ δὲ στατιστικὴ ἐπιτρέπει κατ' ἀρχὴν τὴν ποσοτικὴν ἐκτίμησιν τοῦ βαθμοῦ ἐπιδράσεως ἑκάστου.

Ἡ μελέτη τῆς διαμορφώσεως τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας δύναται νὰ γίνῃ τῇ βοηθείᾳ ἑνὸς «ὑποδείγματος», ὡς τοῦτο γίνεται καὶ ἐπὶ ἄλλων φαινομένων.

Τὸ «ὑπόδειγμα» εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ μελετητοῦ ὑπὸ μορφὴν «θεωρίας» διατύπωσις τῶν γνώσεών του περὶ τῶν προσδιοριστικῶν παραγόντων καὶ τῆς ἐπιδράσεως αὐτῶν εἰς τὴν διαμόρφωσιν τοῦ ὑπὸ μελέτην φαινομένου. Ἡ «θεωρία» αὕτη ἐκφράζεται διὰ μιᾶς ἢ περισσοτέρων μαθηματικῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι θεωροῦνται ἐπίσης ὅτι ἀποτελοῦν τὸ «ὑπόδειγμα».

Διὰ τῆς καταρτίσεως τοῦ ὑποδείγματος καθίσταται δυνατή :

1. Ἡ ἀντιπαραβολὴ τῆς διατυπωθείσης θεωρίας περὶ τῆς διαμορφώσεως τοῦ ὑπὸ μελέτην φαινομένου πρὸς τὴν πραγματικὴν ἐκδήλωσιν αὐτοῦ, ὡς αὕτη διαπιστοῦται διὰ τῶν γενομένων παρατηρήσεων. Οὕτως, ἐπιτυγχάνεται ὁ ἔλεγχος τῆς διατυπωθείσης θεωρίας.
2. Ἡ ποσοτικὴ ἐκτίμησις τῆς ἐπιδράσεως τῶν μεταβολῶν τῶν προσδιοριστικῶν παραγόντων ἐπὶ τῆς διαμορφώσεως τοῦ φαινομένου.

3. Ἡ κατάρτισις προβλέψεων περὶ τῆς μελλοντικῆς ἐξελίξεως τοῦ ὑπὸ μελέτην φαινομένου.

Δὲν ὑπάρχει εἰδικὴ μεθοδολογία καταρτίσεως ἑνὸς ὑποδείγματος. Ἀπαιτοῦνται κυρίως πρὸς τοῦτο βαθεῖα γνῶσις τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας, τῆς στατιστικῆς καὶ τῆς οἰκονομετρίας, γενικώτερον, καὶ τοῦ μηχανισμοῦ διαμορφώσεως τοῦ ὑπὸ μελέτην φαινομένου, εἰδικώτερον.

Εἶναι φανεραὶ αἱ δυσκολίαι τῆς ποσοτικῆς ἐκτιμήσεως τῆς ἐπιδράσεως ὅλων τῶν προσδιοριστικῶν παραγόντων τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας. Ἰδιαιτέραν συνεπῶς σημασίαν ἔχει ἡ ἐπισήμανσις τῶν κυριωτέρων ἐξ αὐτῶν καὶ ἡ ποσοτικὴ ἐκτίμησις τῆς ἐπιδράσεως τούτων. Ἐν τούτοις, ἡ βαρύτης τῆς ἐπιδράσεως ἑνὸς ἑκάστου παράγοντος ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τῆς διαρκείας τῆς χρονικῆς περιόδου εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρονται αἱ σημειούμεναι μεταβολαί. Οὕτως, εἶναι φανερὸν ὅτι ἐὰν ἐνδιαφέρῃ ἡ μελέτη τῶν μεταβολῶν τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας κατὰ μακρὰ χρονικὰ διαστήματα, ἀπαιτεῖται νὰ ἐρευνηθῇ ἡ ἐπίδρασις ἐπὶ τῆς ζητήσεως ταύτης τῶν διαρθρωτικῶν μεταβολῶν αἱ ὁποῖαι ἐπέρχονται εἰς τὴν οἰκονομίαν, ὡς εἶναι π.χ. ἡ ἐκβιομηχάνισις, ἡ αὔξησις τῶν ἠλεκτρικῶν συσκευῶν καὶ αἱ μεταβολαὶ τῶν συνηθειῶν τῶν νοικοκυριῶν κλπ. Τοὐναντίον εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῶν μεταβολῶν τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας, αἱ ὁποῖαι σημειοῦνται ἐντὸς βραχέων σχετικῶς χρονικῶν διαστημάτων, μεγαλυτέραν βαρύτητα ἔχουν οἱ ἐποχικοὶ καὶ οἱ τυχαῖοι παράγοντες. «Ἐποχικοὶ» παράγοντες θεωροῦνται οἱ συνδεόμενοι μὲ τὰς ἐποχὰς τοῦ ἔτους (καιρικαὶ συνθῆκαι, ἑορταὶ κλπ.) ἐνῷ οἱ «τυχαῖοι» εἶναι γενικῶς ἓν σύνολον φαινομένων μὴ δυναμένων νὰ προσδιορισθοῦν ἐκ τῶν προτέρων καὶ νὰ προβλεφθοῦν.

Ἡ παροῦσα ἔρευνα ἀποβλέπει εἰς τὴν κατάρτισιν βραχυχρονίων προβλέψεων τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας. Βραχυχρόνιοι θεωροῦνται αἱ προβλέψεις αἱ ἀναφερόμεναι εἰς χρονικὴν περίοδον διαρκείας τοιαύτης, ὥστε νὰ μὴ δύνανται νὰ σημειωθοῦν εἰς τοὺς «ἐξωγενεῖς» προσδιοριστικοὺς παράγοντας τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας μεταβολαὶ δυνάμεναι νὰ ἐπιφέρουν μεταβολὴν τῆς παρατηρουμένης «τάσεως» ἐξελίξεως τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας.

Ἡ σημειωθεῖσα κατὰ τὸ παρελθὸν ζήτησις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας περιγράφεται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τὴν ποσότητα τῆς καταναλωθείσης τοιαύτης, ὡς αὕτη κατεμετρήθη κατὰ τακτὰ χρονικὰ διαστήματα* (π.χ. μῆνα).

Δύναται νὰ γίνῃ δεκτὸν ὅτι ἡ σημειωθεῖσα κατὰ τὸν μῆνα t ζήτησις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας παρισταμένη εἰς τὸ ἑξῆς διὰ τοῦ γράμματος $x(t)$, διαμορφοῦται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν:

α. Ὡρισμένων συστηματικῶν παραγόντων ἐπιδρώντων κατὰ τρόπον

---

*) Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἑκάστοτε παρουσιαζομένη ζήτησις ἱκανοποιεῖται πλήρως. Ἄλλως οἱ ἐν λόγῳ ἀριθμοὶ ἐκφράζουν τὴν σημειωθεῖσαν προσφορὰν ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας καὶ οὐχὶ τὴν ζήτησιν.

συνεχῆ καὶ συντελούντων εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς «τάσεως» ἐξελίξεως τῆς ζητήσεως ταύτης,

β. ἐποχικῶν παραγόντων καὶ

γ. τυχαίων παραγόντων.

Οὕτως, ἡ κατὰ τὸν μῆνα t σημειωθεῖσα ζήτησις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας δύναται νὰ γραφῇ :

$$x(t) = \tilde{x}(t) + s(t) + \varepsilon(t) \qquad (1.1)$$

ὅπου :

$\tilde{x}(t)$ ἡ τάσις (trent), δηλαδὴ ἡ ζήτησις ἡ ὀφειλομένη εἰς τοὺς συστηματικοὺς παράγοντας, ὡς εἶναι αἱ μεταβολαὶ τοῦ ὄγκου καὶ τῆς διαρθρώσεως τῆς ἐθνικῆς παραγωγῆς, ἡ τεχνικὴ πρόοδος, αἱ μεταβολαὶ τοῦ ὕψους τῶν εἰσοδημάτων τῶν νοικοκυριῶν κλπ.,

$s(t)$ ἡ ἐποχικότης, ἤτοι τὸ μέρος τῆς ζητήσεως τὸ ὀφειλόμενον εἰς τὴν ἐπίδρασιν ἐποχικῶν παραγόντων.,

$\varepsilon(t)$ ἡ ζήτησις ἡ ὀφειλομένη εἰς τοὺς τυχαίους παράγοντας.

Εἰς τὸ ἄνω ὑπόδειγμα γίνεται δεκτὸν ὅτι ἡ κατὰ τὸν μῆνα t σημειωθεῖσα ζήτησις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὡς ἄνω ἐπὶ μέρους ζητήσεων. Ἡ ἐποχικότης ἐπηρεάζει τὴν ζήτησιν κατὰ τρόπον ἀνεξάρτητον τοῦ ἐπιπέδου ταύτης. Ἐν τούτοις, ἰδίᾳ προκειμένου περὶ τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας, εἶναι ὀρθότερον νὰ γίνῃ δεκτὸν ὅτι ἡ ἐποχικότης εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἤδη καταναλωθείσης ἐνεργείας, ἤτοι νὰ γραφῇ :

$$x(t) = \tilde{x}(t)\,[\,1 + s(t)\,] + \varepsilon(t) \qquad (1.2)$$

ἢ ἀκόμη

$$x(t) = \tilde{x}(t)\,[\,1 + s(t)\,] \cdot \varepsilon(t) \qquad (1.3)$$

ὑποτιθεμένου ὅτι καὶ ἡ ἐπίδρασις τῶν τυχαίων παραγόντων εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἐπιπέδου τῆς «trent». Ὁ συντελεστὴς $1 + s(t)$ καλεῖται συντελεστὴς ἐποχικότητος.

Τὸ ὑπόδειγμα (1.3.) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν τοῦ (1.1.), ἐὰν ληφθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν x (t) κλπ., ἤτοι :

$$\text{λογ.}\, x(t) = \text{λογ.}\, \tilde{x}(t) + \text{λογ.}\, [\,1 + s(t)\,] + \text{λογ.}\, \varepsilon(t)$$

Λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς κατὰ τὸ παρελθὸν σημειωθείσης «τάσεως» ἐξελίξεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας γίνεται δεκτὸν ὅτι ἡ ποσότης $\tilde{x}(t)$ ἀποτελεῖ ἐκθετικὴν συνάρτησιν τοῦ «χρόνου» τῆς μορφῆς :

$$\tilde{x}(t) = C_0 (1 + \lambda)^t$$

ὅπου :

λ ὁ μέσος ἐτήσιος ρυθμὸς αὐξήσεως καὶ
t μεταβλητὴ λαμβάνουσα τιμὰς 1,2,3,4, ...

Ὅσον ἀφορᾶ εἰς τοὺς συντελεστὰς ἐποχικότητος γίνεται δεκτὸν ὅτι ἐπαληθεύουν τὴν κάτωθι ἰσότητα :

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=T} \left[1 + s(\tau) \right] = 12, \ \tau = t \text{ περιοδικότης } T \qquad (1.4)$$

ἤτοι ὅτι ἡ ἐτησία συνολικὴ ζήτησις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν ἐποχικῶν διακυμάνσεων αὐτῆς.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐπίδρασιν τῶν τυχαίων παραγόντων, δηλαδὴ τὰς τιμὰς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς ε(t) γίνεται γενικῶς δεκτὸν ὅτι :

– αὗται κατανέμονται συμφώνως πρὸς τὸν κανονικὸν νόμον πιθανότητος, μὲ μαθηματικὴν ἐλπίδα ἴσην πρὸς τὸ μηδὲν καὶ διακύμανσιν ἴσην πρὸς σ_ε^2

$$\left.\begin{aligned} E\left[\varepsilon(t)\right] &= 0 \\ E\left[\varepsilon^2(t)\right] &= \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

– εἶναι μεταξύ των ἀνεξάρτητοι :

$$E\left[\varepsilon(t) \cdot \varepsilon(t+h)\right] = 0 \qquad \forall\, h \neq 0$$

Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ παρελθόντος καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων τοῦ ὡς ἄνω ὑποδείγματος, ἤτοι τοῦ ρυθμοῦ λ τῆς μέσης μηνιαίας αὐξήσεως τῆς (trent), τοῦ συντελεστοῦ ἐποχικότητος s (t) καὶ τῆς διακυμάνσεως σ_ε^2. Αἱ ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων τούτων ἐπιτευχθεῖσαι διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων δίδονται εἰς τὸν πίνακα II.

2. ΕΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ ΖΗΤΗΣΕΩΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Εἰς τὸ ὡς ἄνω ὑπόδειγμα αἱ τιμαὶ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς θεωροῦνται ὅτι εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των. Ἐν τούτοις, ἐὰν κατά τινα μῆνα σημειωθῇ μία μὴ ἀναμενομένη (τυχαία) μεταβολὴ τῆς ζητήσεως, εἶναι πολὺ πιθανὸν ὅτι αὕτη θὰ ἐπηρεάσῃ τὸ ἐπίπεδον τῆς ζητήσεως τῶν ἑπομένων μηνῶν ἐντὸς βεβαίως τῶν πλαισίων τῆς γενικῆς τάσεως, ἡ ὁποία διαγράφεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἑνὸς συνόλου συστηματικῶν παραγόντων. Εἶναι σκόπιμον ὅθεν, ὅπως κατὰ τὴν διατύπωσιν τῶν προβλέψεων τὴν γενομένην τὸν μῆνα t διὰ τὸν μῆνα $t + h$ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ σημειωθεῖσα κατὰ τὸν μῆνα t τυχαία ἀπόκλισις ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῆς ζητήσεως $\tilde{x}(t) \cdot [1 + s(t)]$, τὸ ὁποῖον κανονικῶς ἀνεμένετο διὰ τὸν μῆνα τοῦτον. Ἡ σκέψις αὕτη ὡδήγησεν εἰς τὴν κατάρτισιν τοῦ ἀκολούθου ὑποδείγματος :

$$\begin{aligned} x_{(t)} &= y_{(t)} + u_{(t)} \\ y_{(t)} &= y_{(t-1)} + m_\tau \qquad \tau = t \text{ περιεκτικότης } T \\ u_{(t)} &= \rho u_{(t-1)} + \varepsilon_t \end{aligned} \tag{2.1}$$

Συμφώνως πρὸς τὸ ἀνωτέρω ὑπόδειγμα ἡ ζήτησις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας κατὰ τὸν μῆνα t ἀναλύεται εἰς δύο μέρη, τὸ $y_{(t)}$ τὸ ὁποῖον διαμορφοῦται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν συστηματικῶν παραγόντων (οἰκονομικοὶ παράγοντες, τεχνικὴ πρόοδος, ἐποχαὶ τοῦ ἔτους) καὶ τὸ u_t τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τυχαίους παράγοντας. Τὸ συστηματικὸν μέρος τῆς ζητήσεως $y_{(t)}$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ κατὰ τὸν προηγούμενον μῆνα y_{t-1} πλέον τὴν μεταβολὴν αὐτοῦ m_τ μεταξὺ $t-1$ καὶ t. Ἡ μεταβολὴ m_τ, ὀφειλομένη εἰς τὰς μεταβολὰς τῶν συστηματικῶν παραγόντων εἶναι περιοδική. Αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν σταθερὸν μέρος ἐκφράζον τὴν «trent» καὶ ἓν μεταβλητὸν ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς ἐποχῆς τοῦ ἔτους. Ἡ μεταβλητὴ m_τ τῆς ζητήσεως μεταξὺ δύο διαδοχικῶν μηνῶν $t-1$ καὶ t ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν μηνῶν $t-1$ καὶ t καὶ εἶναι ἡ αὐτὴ διὰ τοὺς ἀντιστοίχους μῆνας ὅλων τῶν ἐτῶν. Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ t ἐκφράζῃ ἀριθμὸν μηνῶν, ἡ περιοδικότης εἶναι ἴση πρὸς 12 καὶ ἡ μεταβλητὴ τ λαμβάνει τιμὰς 1,2,3. . . . . 12 (δηλαδὴ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἀντιστοίχων μηνῶν τοῦ ἔτους).

Τὸ μέρος τῆς ζητήσεως $u(t)$, τὸ ὀφειλόμενον εἰς τὴν ἐπίδρασιν τῶν τυχαίων παραγόντων δὲν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ἐσημειώθη κατὰ τὸν προηγούμενον μῆνα. Ἡ ἐπίδρασις τῶν τυχαίων παραγόντων ἀναλύεται εἰς δύο, εἰς τὴν ἐξαρτωμένην ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος ταύτης κατὰ τὸν προηγούμενον μῆνα καὶ εἰς τὴν ἐπηρεάζουσαν τὴν ζήτησιν μόνον κατὰ τὸν μῆνα εἰς τὸν ὁποῖον ἀναφέρεται αὕτη. Ἡ ὑπὸ τῆς μεταβλητῆς ε_t ἐκφραζομένη ἐπίδρασις τῆς τύχης εἶναι πρόσκαιρος, μεταβατική, ἤτοι ἀφορᾷ εἰς τὸ ὕψος τῆς ζητήσεως μόνον κατὰ τὸν μῆνα t. Σχετικῶς πρὸς τὴν τυχαίαν μεταβλητὴν ε_t γίνεται δεκτὸν ὅτι :

— ἀκολουθεῖ τὸν κανονικὸν νόμον μὲ μέσην τιμὴν 0 καὶ διακύμανσιν σ^2_ε $[N(0, \sigma_\varepsilon)]$

— αἱ τιμαὶ ε_t εἶναι ἀνεξάρτητοι, ἤτοι

$$E[\varepsilon_{(t)} \cdot \varepsilon_{(t+h)}] = 0, \qquad \forall h \neq 0 \tag{2.2}$$

Τὸ ὡς ἄνω ὑπόδειγμα περιγράφει μίαν διαδικασίαν διαμορφώσεως τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας x_t ἡ ὁποία εἶναι τυχαία.

Ἐνδιαφέρει νὰ μελετηθῇ ἐὰν τὸ ὡς ἄνω θεωρητικὸν ὑπόδειγμα ἐκφράζῃ πράγματι τὸν μηχανισμὸν διαμορφώσεως τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς προσαρμογῆς τοῦ ὑποδείγματος εἰς ὡρισμένον δεῖγμα παρατηρήσεων ἀφορωσῶν τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐκδηλωθείσης κατὰ τὸ παρελθὸν ζητήσεως, δηλαδὴ διὰ τῆς ἐκ τῶν στατιστικῶν δεδομένων ἐκτιμήσεως τῶν παραμέτρων y_o, m_τ (διὰ $\tau = 1,2,3,\ldots 12$), σ^2_ε, σ^2_u, ρ καὶ τοῦ ἐλέγχου τῆς ἀξιοπιστίας τῶν ἐπιτευχθεισῶν ἐκτιμήσεων.

Ἡ στατιστικὴ παρατήρησις ἀναφέρεται μόνον εἰς τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς $x_{(t)}$ (τὴν καταναλωθεῖσαν ἐνέργειαν) καὶ οὐχὶ εἰς τὰ δύο συστατικὰ μέρη αὐτῶν y_t καὶ u_t. Εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι ἀδύνατος ἡ μέτρησις τῆς ἐπιδράσεως τῶν τυχαίων παραγόντων δηλαδὴ ἡ καταγραφὴ τιμῶν διὰ τὰς τυχαίας μεταβλητὰς ε_t καὶ u_t. Οὕτως, ἡ στατιστικὴ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων τοῦ ὑποδείγματος δύναται νὰ γίνῃ μόνον ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x_t καὶ βασίζεται ἐπὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἀκολούθου διερευνήσεως τῆς ἀφορώσης τὴν μαθηματικὴν ἔκφρασιν τῶν ροπῶν τῶν τυχαίων μεταβλητῶν ε_t καὶ u_t.

Ἡ διερεύνησις τοῦ ὑποδείγματος:

Μαθηματικὴ ἐλπὶς $E(u_t)$ καὶ διακύμανσις σ^2_u τῆς τυχαίας μεταβλητῆς u_t.

$$E(u_t) = E[\rho u_{t-1} + \varepsilon_t] = \rho E(u_{t-1}) + E(\varepsilon_t) = \rho E[\rho u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}] =$$
$$= \rho^2 E(u_{t-2}) = \ldots = \rho^t E(u_o) = 0$$

$$\boxed{E(u_t) = 0} \tag{2.3}$$

$$\sigma^2_u = E([u_t - E(u_t)]^2) = E(u^2_t)$$

Λαμβανομένου ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ἡ διακύμανσις τοῦ σταθμισμένου ἀθροίσματος δύο τυχαίων μεταβλητῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διακυμάνσεων τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν σταθμισμένων μὲ τὰ τετράγωνα τῶν συντελεστῶν σταθμίσεως, ἔχομεν:

$$E(u^2_t) = \rho^2 E(u^2_{t-1}) + E(\varepsilon^2_t)$$

$$(\text{δεδομένου ὅτι } u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t)$$

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ διαδικασία διαμορφώσεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς u_t εἶναι «σταθεροποιημένη» (stationnaire), δηλαδὴ ὅτι ὁ νόμος πιθανότητος τῶν τιμῶν u_t εἶναι ἀνεξάρτητος ἐκ τῆς χρονικῆς στιγμῆς t καὶ συνεπῶς ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς καὶ ἡ διακύμανσις αὐτοῦ εἶναι σταθεραὶ καὶ ἀνεξάρτητοι τοῦ χρόνου,

$$E(u_t) = m = 0$$

$$E(u_t^2) = E(u_{t-1}^2),$$

τὸ ὡς ἄνω ἄθροισμα γράφεται :

$$\sigma_u^2 = \rho^2 \sigma_u^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{2.4}$$

$$\text{ἢ} \quad \sigma_u^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$$

Συνδιακύμανσις τῆς τυχαίας μεταβλητῆς

$$\mathrm{Cov}(u_t u_{t-1}) = E([u_t - E(u_t)][u_{t-1} - E(u_{t-1})]) =$$

$$= E\{u_t \cdot u_{t-1}\} = E\{[\rho u_{t-1} + \varepsilon_t] u_{t-1}\} = \rho E\{(u_{t-1}^2)\} = \rho\sigma_u^2 \tag{2.5}$$

Ἐκ τῆς ὡς ἄνω ἰσότητος προκύπτει :

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(u_t u_{t-1})}{\sigma_u^2} \tag{2.6}$$

Ὅθεν ὁ συντελεστὴς ρ εἶναι ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως τῶν u_t καὶ u_{t-1} ἤτοι ὁ συντελεστὴς αὐτοσυσχετίσεως, τάξεως 1, τῶν τιμῶν τῆς τυχαίας μεταβλητῆς u_t.

Ἐὰν ἡ διαδικασία διαμορφώσεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς u_t εἶναι «σταθεροποιημένη» θὰ ἰσχύῃ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὴν μεταβλητὴν x_t.

Δὲν δύναται ἐν τούτοις νὰ γίνῃ δεκτὸν ὅτι ἡ διαδικασία διαμορφώσεως τῶν τιμῶν τῆς τυχαίας μεταβλητῆς x_t τῆς ἐκφραζούσης τὸ μέγεθος τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας κατὰ τὴν στιγμὴν t (μῆνα t), εἶναι «σταθεροποιημένη» ὅτι δηλαδὴ ἡ μέση τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x_t καὶ ἡ διακύμανσις αὐτῆς εἶναι σταθεραὶ καὶ ἀνεξάρτητοι τοῦ χρόνου.

Τοὐναντίον θὰ ἠδύνατο τοῦτο νὰ γίνῃ δεκτὸν διὰ τὴν μεταβλητὴν $x_t - x_{t-1}$, τὴν ἐκφράζουσαν τὴν μεταβολὴν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν μηνῶν $t-1$ καὶ t. Πράγματι τὸ μελετούμενον ὑπόδειγμα ἐπαληθεύει τὴν ὑπόθεσιν ταύτην.

Θέτοντες $x_t - x_{t-1} = z_t$, αἱ ῥοπαὶ τῆς μεταβλητῆς z_t ἐκφράζονται ὡς ἀκολούθως :

Μέση τιμὴ τῆς z_t

$$E(z_t) = E\{(m_\tau + u_t - u_{t-1})\} = m_\tau$$

$$[E(z_t) = m_\tau] \quad \tau = t \text{ περιοδικότης T.} \qquad (2.7)$$

Διακύμανσις τῆς z_t

$$E\{[z_t - E(z_t)^2\} = E\{[m_\tau + u_t - u_{t-1} - m_\tau]^2\} = E\{(u_t - u_{t-1})^2\} =$$

$$= E(u_t^2) + E(u_{t-1}^2) - 2E(u_t \cdot u_{t-1}) = 2\sigma_u^2 - 2\rho\sigma_u^2 =$$

$$= 2\sigma_u^2 (1 - \rho) = \sigma_z^2 \qquad (2.8)$$

Συνδιακύμανσις τῆς μεταβλητῆς z_t

$$\mathrm{Cov}(z_t \cdot z_{t+h}) = E\{(m_\tau + u_t - u_{t-1} - m_\tau)(m_\tau + u_{t+h} -$$

$$u_{t+h-1} - m_\tau)\} = E\{(u_t - u_{t-1})(u_{t+h} - u_{t+h-1})\} = \forall h \neq 0$$

$$= E\{u_{t+h} \cdot u_t - u_{t+h-1} \cdot u_t - u_{t+h}\, u_{t-1} + u_{t+h-1} \cdot u_{t-1}\}$$

Ἡ u_{t+h} ἐκφράζεται ὡς κάτωθι :

$$u_{t+h} = \rho u_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h} = \rho^2 u_{t+h-2} + \rho\varepsilon_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h} = \rho^3 u_{t+h-3} +$$

$$+ \rho^2 \varepsilon_{t+h-2} + \rho\varepsilon_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h} \cdot \cdot \cdot \cdot = \rho^h u_t + \rho^{h-1}\varepsilon_{t+1} + \rho^{h-2}\varepsilon_{t+2} +$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \rho\varepsilon_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h}$$

Ὁμοίως ἡ u_{t+h-1} ἰσοῦται,

$$u_{t-h-1} = \rho^{h-1}u_t + \rho^{h-2}\varepsilon_{t+1} + \rho^{h-3}\varepsilon_{t+2} + \cdot \cdot \cdot \cdot \rho\varepsilon_{t+h-2} + \varepsilon_{t+h-1}$$

ὅθεν,

$$E\{u_{t+h} \cdot u_t\} = E\{(\rho^h u_t + \rho^{h-1}\varepsilon_{t+1} + \cdot \cdot \cdot \cdot +$$

$$+ \rho\varepsilon_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h})\, u_t\} = \rho^h E(u_t^2) = \rho^h \sigma_u^2$$

$$E\{u_{t+h-1} \cdot u_t\} = E\{(\rho^{h-1} u_t + \rho^{h-2}\varepsilon_{t+1} + \cdot \cdot \cdot \cdot +$$

$$+ \rho\varepsilon_{t+h-2} + \varepsilon_{t+h-1})\, u_t\} = \rho^{h-1} E(u_t^2) = \rho^{h-1}\sigma_u^2$$

$$E\{u_{t+h} \cdot u_{t-1}\} = E\{(\rho^h u_t + \rho^{h-1}\varepsilon_{t+1} + \cdot \cdot \cdot \cdot +$$

$$+ \rho\varepsilon_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h})\, u_{t-1}\} = \rho^h E\{u_t \cdot u_{t-1}\} = \rho^{h+1} E(u_{t-1}^2) = \rho^{h+1}\sigma_u^2$$

$$E\left\{u_{t+h-1}\cdot u_{t-1}\right\}=E\left\{(\rho^{h-1}u_t+\rho^{h-2}\varepsilon_{t+1}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\rho\varepsilon_{t+h-2}+\varepsilon_{t+h-1})\,u_{t-1}\right\}=\rho^{h-1}E\left\{u_t\,u_{t-1}\right\}=\rho^{h}E\left\{u^2_{t-1}\right\}=\rho^{h}\sigma^2_u$$

Ἄρα ἡ $Cov\,(z_t\,z_{t+h})$ ἰσοῦται :

$$Cov\,(z_t\,z_{t+h})=\sigma^2_u\,(\rho^h-\rho^{h-1}-\rho^{h+1}+\rho^h)=\sigma^2_u\rho^{h-1}\,(2\rho-1-\rho^2)=$$

$$=-\,\sigma^2_u\rho^{h-1}\,(1-\rho)^2 \qquad (2.9)$$

Κατ᾽ ἀκολουθίαν τῶν ἀνωτέρω οἱ συντελεσταὶ αὐτοσυσχετίσεως τῶν διαφόρων τάξεων h ($h = 1, 2, 3, 4 \ldots$) τῆς τυχαίας μεταβλητῆς z_t, ὑπολογίζονται ὡς κάτωθι :

$$A\,(h)=\frac{Cov\,(z_t z_{t+h})}{\sigma^2_z}=-\frac{\sigma^2_u\rho^{h-1}\,(1-\rho)^2}{2\sigma^2_u\,(1-\rho)}=\frac{\rho^{h-1}\,(1-\rho)}{2} \qquad (2.10)$$

ὅπου ρ εἶναι, ὡς γνωστόν, ὁ συντελεστὴς αὐτοσυσχετίσεως, τάξεως 1, τῆς τυχαίας μεταβλητῆς u_t.

Ὁ συντελεστὴς αὐτοσυσχετίσεως, τάξεως 1, τῆς μεταβλητῆς z_t εἶναι

$$A\,(1)=-\,\frac{1-\rho}{2}$$

ἢ

$$\rho=1+2\,A\,(1) \qquad (2.11)$$

Λαμβανομένου ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι : $-1 < \rho < 1$

εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ συντελεστὴς Α (1) εἶναι ἀρνητικός.

Δεδομένου ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ συντελεστοῦ Α (1) δύναται νὰ γίνῃ ἐκ τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως, ἡ ὡς ἄνω ἐξίσωσις δίδει μίαν ἐκτίμησιν* τοῦ συντελεστοῦ αὐτοσυσχετίσεως ρ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς u_t.

Ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων τοῦ ὑποδείγματος

Τὸ μελετούμενον ὑπόδειγμα γράφεται :

$$x_t=y_o+\Sigma m_\tau+u_t$$

$$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t \qquad \tau=t \text{ περιοδικότης } T$$

* Πλὴν ὅμως δὲν γνωρίζομεν τὸν βαθμὸν ἀξιοπιστίας τῆς ἐν λόγῳ ἐκτιμήσεως.

ἢ ἀναλυτικώτερον ἐὰν $T = 12$

$$
\begin{aligned}
x_{(1)} &= m_1 + y_o + u_1 \\
x_{(2)} &= m_2 + m_1 + y_o + u_2 \qquad (2.12 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
x_{(12)} &= m_{(12)} + m_{(11)} + \ldots + m_1 + y_o + u_{12} \\
x_{(13)} &= m_{(12)} + m_{(11)} + \ldots + 2m_1 + y_o + u_{13} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
x_{(25)} &= 2m_{12} + 2m_{11} + \ldots + 2m_2 + 3m_1 + y_o + u_{25} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}
$$

Ἡ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων m_1, m_2, $\ldots$, m_{12} καὶ y_o δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. Πλὴν ὅμως, ὡς γνωστόν, λόγῳ τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν τιμῶν τῆς τυχαίας μεταβλητῆς u_t ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων δίδει ἐκτιμήσεις αἱ ὁποῖαι εἶναι μὲν ἀμερόληπτοι ἀλλὰ ἡ διακύμανσις αὐτῶν δὲν εἶναι ἡ ἐλαχίστη. Ἐξ ἄλλου δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ τῶν στατιστικῶν tests.

Ἐπὶ σκοπῷ ἐπιτεύξεως ἀμερολήπτων καὶ ἀποτελεσματικῶν ἐκτιμητῶν, ὅταν ἡ τυχαία μεταβλητὴ παρουσιάζῃ αὐτοσυσχέτισιν, προετάθη ὑπὸ διαφόρων συγγραφέων ὅπως ἡ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων γίνηται διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς X_t τῆς προκυπτούσης ἐκ τοῦ ἀκολούθου μετασχηματισμοῦ τῆς μεταβλητῆς x_t.

$$X_t = x_t - \rho x_{t-1} \qquad (2.13)$$

Μετὰ τὸν ὡς ἄνω μετασχηματισμὸν τὸ ὑπόδειγμα γράφεται ἀναλυτικῶς :

$$
\begin{aligned}
X_{(2)} = x_2 - \rho x_1 = m_1 + m_2 + y_o - \rho m_1 - \rho y_o + u_2 - \rho u_1 = m_2 + \\
+ (1 - \rho)\, m_1 + (1 - \rho)\, y_o + \varepsilon_2
\end{aligned}
$$

$$X_{(3)} = x_3 - \rho x_2 = m_3 + m_2 + m_1 + y_o - \rho m_2 - \rho m_1 - \rho y_o + u_3 - $$
$$- \rho u_2 = m_3 + (1-\rho)\, m_2 + (1-\rho)\, m_1 + (1-\rho)\, y_o + \varepsilon_3 \qquad (2.14)$$

Οὕτω, μετὰ τὸν ὡς ἄνω μετασχηματισμὸν ἡ τυχαία μεταβλητὴ εἰς τὸ ὑπόδειγμα (2.14) εἶναι ἡ μεταβλητὴ ε_t ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὰς συνθήκας (2.2.) ἤτοι ἀκολουθεῖ τὸν κανονικὸν νόμον καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῆς ε_t καὶ ε_{t+h} εἶναι ἀνεξάρτητοι.

Ἡ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων m_1, m_2, ... , m_{12}, y_o τοῦ ὑπὸ τὴν ἀμέσως ἀνωτέρω μορφὴν ὑπoδείγματος προϋποθέτει ὅτι εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ ρ τοῦ συντελεστοῦ αὐτοσυσχετίσεως τῆς τυχαίας μεταβλητῆς u_t πλὴν ὅμως δὲν ὑφίστανται παρατηρήσεις ὅσον ἀφορᾶ τὰς τιμὰς τῆς ἐν λόγῳ μεταβλητῆς καὶ συνεπῶς δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ ἀπ' αὐθείας ἐκτίμησις τοῦ συντελεστοῦ ρ.

Ἐν τούτοις, τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ αὐτοσυσχετίσεως τῆς τυχαίας μεταβλητῆς u_t δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἐμμέσως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\rho = 1 + 2A(1)$ μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ συντελεστοῦ A (1) αὐτοσυσχετίσεως τάξεως 1 τῆς τυχαίας μεταβλητῆς z_t, γενόμενον ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀκολούθου τύπου :

$$A(1) = \frac{\Sigma Z_t \; Z_{t+1}}{\Sigma Z_t^2} \qquad (2.15)$$

ὅπου $Z_t = z_t - m_\tau$

Γίνεται δεκτὸν ὅτι ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτίμησις $\hat{\rho}$ τοῦ συντελεστοῦ ρ τῆς μεταβλητῆς u_t εἶναι ἀρκούντως ἱκανοποιητικὴ ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γραφῇ :

$$u_t = \hat{\rho} u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ὁ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω τύπου ὑπολογισμὸς τοῦ συντελεστοῦ A(1) προϋποθέτει ὅτι εἶναι γνωσταὶ αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων m_τ. Μία πρώτη ἐκτίμησις τῶν ἐν λόγῳ παραμέτρων ἐπιτυγχάνεται ἐκ τοῦ ὑποδείγματος ὑπὸ τὴν μορφὴν (2.12).

Μετὰ τὴν νέαν ἐκτίμησιν τῶν παραμέτρων m_1, m_2 . . . m_{12}, y_o ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὑποδείγματος (2.14), ὑπολογίζονται αἱ νέαι τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς $Z_t = z_t - m_\tau$, ὁ συντελεστὴς A (h) καὶ ἐπιτυγχάνεται νέα ἐκτίμησις τοῦ συντελεστοῦ ρ αὐτοσυσχετίσεως τῆς διαδικασίας u_t.

Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ὑποδείγματος ἐπὶ σκοπῷ προβλέψεως τῶν μελλοντικῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x_t

Μετὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν παραμέτρων του, τὸ ὡς ἄνω ὑπόδειγμα ἀποτελεῖ τὸν μηχανισμόν, τὴν διαδικασίαν διαμορφώσεως τῶν τιμῶν τῆς τυχαίας μεταβλητῆς $x_{(t)}$. Δίδει τὴν τιμὴν x_{t+h}, δηλαδὴ τὸ ὕψος τῆς ζητήσεως κατὰ τὸν μῆνα $t+h$, (ὅπου $h=1,2,3,\ldots$) γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἐπιπέδου ταύτης κατὰ τὸν μῆνα t. Δεδομένου ὅτι ἡ μεταβλητὴ x_t εἶναι τυχαία, εἶναι ἑπόμενον ὅπως αὕτη λάβῃ κατὰ τὸν μῆνα $t+h$ συμφώνως πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ ὑποδείγματος περιγραφομένην διαδικασίαν οἱανδήποτε ἐντὸς ὡρισμένων ὁρίων, τιμὴν x_{t+h}. Εἰς ἑκάστην δυνατὴν τιμὴν x_{t+h} ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη πιθανότης πραγματοποιήσεώς της. Ἐνδιαφέρει ὁ μέσος ὅρος τῶν πιθανῶν τιμῶν x_{t+h} δηλαδὴ εἰς ποῖον ἐπίπεδον κατὰ μέσον ὅρον θὰ ἀνέλθῃ ἡ ζήτησις ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας κατὰ τὸν μῆνα $t+h$ (γνωστοῦ ὄντως τοῦ πραγματοποιηθέντος ἐπιπέδου ταύτης κατὰ τὸν μῆνα t) καὶ ποῖα εἶναι τὰ ὅρια ἐμπιστοσύνης τοῦ ἐν λόγῳ μέσου ὅρου, ἐνδιαφέρει δηλαδὴ ὁ ὑπολογισμὸς τῆς τιμῆς

$$E\left\{x_{t+h}/x_t\right\}=\hat{x}_{t+h}/t$$

καὶ τῆς διακυμάνσεως $E\left\{(x_{t+h}/x_t - x_{t+h})^2\right\} = V\left\{x_{t+h}/t\right\}$

Ἡ διατύπωσις τῆς προβλέψεως (Ὑπολογισμὸς τῆς $\hat{x}_{t+h/t}$)

$$E\left\{x_{t+h/t}\right\}=E\left\{y_{t+h}+u_{t+h/t}\right\}=E\left\{y_{t+h}\right\}+E\left\{u_{t+h/t}\right\}=$$

$$=y_o+\sum_{\tau=1}^{t+h} m_\tau + E\left\{u_{t+h/t}\right\} \qquad (2.16\alpha)$$

Ὑπολογισμὸς τῆς $E\left\{u_{t+h/t}\right\}$

Ἔστω ὅτι $h=2$

Ὡς γνωστὸν ἔχομεν:

$$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t$$

$$u_{t-1}=\rho u_{t-2}+\varepsilon_{t-1}$$

$$u_t=\rho^2 u_{t-2}+\rho\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t$$

Συνεπῶς ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ τιμὴ u_{t-2} εἶναι γνωστή, ἔχομεν, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐν ἀρχῇ τεθεισῶν ὑποθέσεων περὶ τῆς μεταβλητῆς ε_t,

$$E\left\{u_{t/t-2}\right\}=\rho^2 u_{t-2}$$

δηλαδὴ ὁ μέσος ὅρος τῶν πιθανῶν τιμῶν u_t (τῆς μεταβλητῆς u κατὰ τὸν μῆνα t) γνωστῆς οὔσης τῆς πραγματοποιηθείσης τιμῆς u_{t-2} ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ τετραγώνου ($h = 2$) τοῦ συντελεστοῦ αὐτοσυσχετίσεως ρ ἐπὶ τὴν γνωστὴν τιμὴν u_{t-2}.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι:

$$E\{ u_{t+h/t} = \rho^h u_t \tag{2.16β}$$

ὅπου u_t ἡ γνωστὴ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς ἡ πραγματοποιηθεῖσα κατὰ τὸν μῆνα t.

Ἡ ἐν λόγῳ τιμὴ u_t ὑπολογίζεται ὡς «κατάλοιπον», ἤτοι ὡς διαφορὰ μεταξὺ τῆς πραγματοποιηθείσης κατὰ τὸν μῆνα t ζητήσεως x_t καὶ τῆς «θεωρητικῆς» τοιαύτης τῆς προκυπτούσης ἐκ τοῦ ὑποδείγματος διὰ τὸν ἐν λόγῳ μῆνα ἤτοι:

$$u_t = x_t - x_t' = x_t - y_t = x_t - y_o - \sum_{\tau=1}^{t} m_\tau$$

ὅθεν ἡ (2.16α) γράφεται:

$$E\{ x_{t+h/t} \} = \hat{x}_{t+h/t} = y_o + \sum_{\tau=1}^{t+h} m_\tau + \rho^h u_t = y_o + \sum_{\tau}^{t+h} m_\tau + \rho^h \left[x_t - y_o - \sum_{\tau=1}^{t} m_\tau \right] \tag{2.16}$$

Ἡ διακύμανσις τῆς προβλέψεως

Ἡ πρόβλεψις τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας διὰ τὸν μῆνα $t + h$ δύναται, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ἐκτιμηθεισῶν πιθανῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων τοῦ ὑποδείγματος, νὰ λάβῃ οἱανδήποτε, ἐντὸς ὡρισμένων ὁρίων, τιμὴν $\hat{x}_{t+h/t}$. Ἐὰν x_{t+h} εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ζητήσεως τὸ ὁποῖον πράγματι θὰ ἐκδηλωθῇ κατὰ τὸν μῆνα $t+h$, ἐνδιαφέρει ἡ ἐκτίμησις τοῦ μέσου ὅρου τῶν ἀποκλίσεων $\hat{x}_{t+h/t} - x_{t+h}$ ἤτοι τῆς διακυμάνσεως:

$$E\{ (\hat{x}_{t+h/t} - x_{t+h})^2 \} = E\{ [y_o + \sum_{\tau=1}^{t+h} m_\tau + u_{t+h/t} - y_o - \sum_{\tau}^{t+h} m_\tau - \rho^h u_t]^2 \} = E\{ [u_{t+h/t} - \rho^h u_t]^2 \} = E\{ u^2_{t+h/t} - 2u_{t+h/t} u_t \rho^h + \rho^{2h} u_t^2] \} = \sigma_u^2 - 2\rho^h \sigma_u^2 \rho^h + \rho^{2h} \sigma_u^2 = \sigma_u^2 [1 - 2\rho^{2h} + \rho^{2h}] = \sigma_u^2 (1 - \rho^{2h}) \tag{2.17}$$

Ὅθεν ἡ πρόβλεψις τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας διὰ τὸν μῆνα

$t+h$, γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἐπιπέδου ταύτης κατὰ τὸν μῆνα t, καὶ ἡ διακύμανσις τῆς προβλέψεως ταύτης δίδονται ὑπὸ τῶν ἀκολούθων τύπων :

$$\hat{x}_{t+h/t} = y_o + \sum_{\tau}^{t+h} m_\tau + \rho^h [\, x_t - y_o - \sum_{\tau}^{t} m_\tau \,]$$

$$V\,(\, x_{t+h/t}\,) = \sigma_u^2\,(\, 1 - \rho^{2h}\,) \qquad (2.18)$$

ὅπου ρ τίθεται ἡ τελικὴ ἐκτίμησις τοῦ συντελεστοῦ αὐτοσυσχετίσεως τῆς μεταβλητῆς u_t ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος :

$$\rho = 1 + 2\,A\,(1)$$

Ἐξ ἄλλου, ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἡ διακύμανσις τῆς τυχαίας μεταβλητῆς u_t ἐκφράζεται ὡς κάτωθι :

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2} \qquad (2.4)$$

ὅθεν ἡ σ_u^2 δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἐὰν ὅπου ρ καὶ σ_ε^2 τεθοῦν αἱ ἐκτιμήσεις αὐτῶν.

Ἡ ἐκτίμησις τῆς διακυμάνσεως σ_ε^2 εἶναι :

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{t_n - 1 - k} \sum_{t=2}^{t=t_n} \hat{\varepsilon}_t^2 \qquad (2.19)$$

ὅπου $\hat{\varepsilon}_t$ τὰ «κατάλοιπα» τῆς συσχετίσεως εἰς τὸ ὑπόδειγμα (2.14).

t_n τὸ σύνολον τῶν παρατηρήσεων

k ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐκτιμηθεισῶν παραμέτρων (ἐὰν $T = 12$, $k = 13$).

Τὰ ἀποτελέσματα ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ὑποδείγματος

Ἐπὶ σκοπῷ ἐφαρμογῆς τοῦ ὑποδείγματος ὑπετέθη ὅτι αἱ σημειωθεῖσαι κατὰ τὸ παρελθὸν μεταβολαὶ τῆς μηνιαίας ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τῶν πελατῶν τῆς Δ.Ε.Η. ἐκφράζονται ὑπὸ τῶν μεταβολῶν τῆς μηνιαίας παραγωγῆς τοῦ συστήματος. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη δυσκόλως δύναται νὰ γίνῃ ἀποδεκτή. Αἱ μεταβολαὶ τῆς ζητήσεως ἐκφράζονται μόνον ὑπὸ τῶν μεταβολῶν τῆς καταναλώσεως ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἱκανοποιεῖται πλήρως ἡ ἑκάστοτε ἐκδηλουμένη ζήτησις.

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ ὑποδείγματος ἐπὶ τῶν δεδομένων τῆς παραγωγῆς δὲν εἶναι ἀπολύτως σύμφωνος πρὸς τὴν θεωρητικὴν δομήν του. Πρῶτον διότι εἰσάγεται συστηματικὸν σφάλμα ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὸ μέγεθος τῶν ἀπωλειῶν κατὰ τὴν μεταφορὰν τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ἐκ τοῦ σημείου παραγωγῆς εἰς τὸ σημεῖον καταναλώσεως δὲν παραμένει σταθερόν. Κυρίως ὅμως διότι οἱ συντελεσταὶ ἐποχικότητος τῆς παραγωγῆς καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ ἀπὸ μῆνα εἰς μῆνα μεταβολαὶ αὐτῆς (δηλαδὴ αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων m_τ) δὲν παραμένουν σταθεραὶ ἐν τῇ ἐξελίξει τοῦ χρόνου (ὡς τοῦτο ὑποτίθεται εἰς τὸ ὑπόδειγμα), ἀλλὰ μεταβάλλονται λόγῳ μεταβολῆς τῆς συνθέσεως τῆς συνολικῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ὀφειλομένης εἰς τὸν διάφορον ρυθμὸν αὐξήσεως τῆς ζητήσεως διὰ μίαν ἑκάστην κατηγορίαν καταναλώσεως παρουσιαζούσης διάφορον ἐποχικότητα. Ἡ ζήτησις διὰ βιομηχανικὴν χρῆσιν, ἐπὶ παραδείγματι, ἡ ὁποία αὐξάνει ταχύτερα, παρουσιάζει ἐποχικότητα διάφορον τῆς ζητήσεως δι' οἰκιακὴν χρῆσιν.

Ἐν τούτοις, λόγω ἐλλείψεως ἀξιοπίστων μετρήσεων τῆς μηνιαίας καταναλώσεως ὅλων τῶν πελατῶν τῆς ἐπιχειρήσεως, τὸ ὑπόδειγμα ἐφηρμόσθη ἐπὶ τῶν μηνιαίων δεδομένων τῆς παραγωγῆς τοῦ συστήματος μετὰ τὴν ἐκ τούτων ἀφαίρεσιν τῆς ἀντιστοίχου καταναλώσεως ὡρισμένων μεγάλων βιομηχανιῶν καθ' ὅσον αὕτη, θὰ ἐπηρέαζε, διὰ τοῦ σχετικῶς μεγάλου ὄγκου της, τοὺς συντελεστὰς ἐποχικότητος τῆς ὑπολοίπου καταναλώσεως.

Π ί ν α ξ 1

Παράμετροι τοῦ στοχαστικοῦ ὑποδείγματος (2. 1)

Μ ῆ ν ε ς	Παράμετροι m_τ (Λογάριθμοι μεταβολῶν ἔναντι προηγουμένου μηνός)	Τυπικαὶ ἀποκλίσεις τῶν Περιμέτρων m_τ
Ἰανουάριος	0,00535	0,00098
Φεβρουάριος	0,00118	0,00097
Μάρτιος	– 0,00254	0,00096
Ἀπρίλιος	– 0,01226	0,00096
Μάϊος	0,00094	0,00096
Ἰούνιος	0,00335	0,00095
Ἰούλιος	0,00240	0,00095
Αὔγουστος	– 0,00330	0,00095
Σεπτέμβριος	0,00921	0,00115
Ὀκτώβριος	0,00952	0,00116
Νοέμβριος	0,01247	0,00116
Δεκέμβριος	0,01470	0,00116
$Y_o = 5{,}41348$ $\sigma_u^2 = 0{,}001895$	$R^2 = 0{,}986$ $\rho = 0{,}9424$	$\sigma_\varepsilon^2 = 0{,}0000212$

Ἡ προσαρμογὴ τοῦ ὑποδείγματος ἐγένετο ἐπὶ τῶν μηνιαίων δεδομένων τῶν ἐτῶν 1964–1969 καὶ ὑπῆρξεν ἱκανοποιητική, παρὰ τὴν ἀμέσως ἀνωτέρω ἀναφερομένην ἀδυναμίαν ὅσον ἀφορᾶ τὴν φύσιν τῶν χρησιμοποιηθέντων στατιστικῶν στοιχείων.

Αἱ ἐκτιμηθεῖσαι τιμαὶ τῶν παραμέτρων τοῦ ὑποδείγματος δίδονται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα I. Σημειωτέον ὅτι ἐπὶ σκοπῷ ἀπαλοιφῆς τῆς παρουσιαζομένης αὐτοσυσχετίσεως εἰς τὰ κατάλοιπα τοῦ ὑποδείγματος (2.14), ἡ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων ἐγένετο εἰς τρία στάδια συσχετίσεως μετὰ μετασχηματισμὸν τῶν μεταβλητῶν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σχετίσεως (2.13). Γενομένου δεκτοῦ ὅτι ἡ τάσις ἐξελίξεως τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι ἐκθετικῆς μορφῆς καὶ ὅτι ἡ ἐπίδρασις τῆς ἐποχικότητος εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἐπιπέδου τῆς «trend», ἐλήφθησαν οἱ λογάριθμοι (δεκαδικοὶ) τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐκφραζόντων τὴν μηνιαίαν παραγωγὴν μετὰ τὴν ἀναγωγήν των εἰς μῆνας ἴσου ἀριθμοῦ ἡμερῶν.

Πίναξ II

(Παράμετροι ὑποδείγματος 1.3)

Αἱ θεωρητικαὶ τιμαὶ τῆς μηνιαίας παραγωγῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τοῦ Συστήματος (μὴ περιλαμβανομένης τῆς καταναλώσεως τῶν Μ. Βιομηχανιῶν) ἀνηγμένης εἰς μῆνας 30 ἡμερῶν, παρέχονται ὑπὸ τοῦ ἀκολούθου ὑποδείγματος:

$$\text{λογ}\ x_t = 5{,}39791 + 0{,}00346 \cdot t + C_h$$

ὅπου :

t = μεταβλητὴ λαμβάνουσα τιμὰς 1, 2, 3, 4 . . . . ($t = 1$, ΙΑΝ. 1964) καὶ

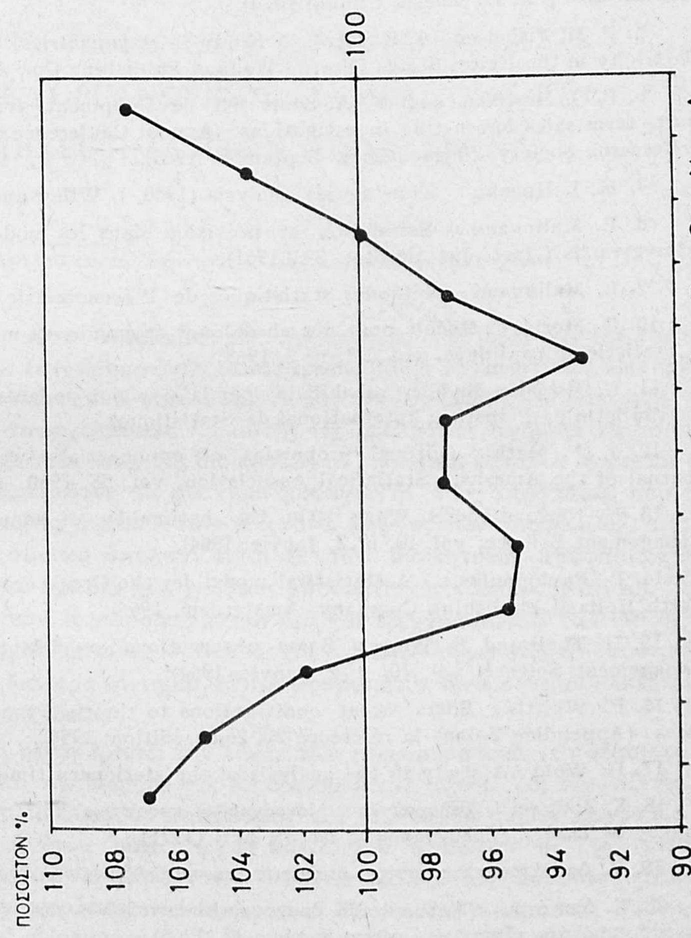
C_h = λογ · ($1 + s_h$) οἱ συντελεσταὶ ἐποχικότητος οἱ ὁποῖοι δίδονται κατωτέρω διὰ $h = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots 12$.

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΑΙ ΕΠΟΧΙΚΟΤΗΤΟΣ

h	ΜΗΝΕΣ	C_h = λογ ($1 + s_h$)	($1 + s_h$) · 100
1	Ἰανουάριος	+ 0,02910	106,9
2	Φεβρουάριος	+ 0,02178	105,1
3	Μάρτιος	+ 0,00799	101,9
4	Ἀπρίλιος	– 0,01953	95,6
5	Μάϊος	– 0,02093	95,3
6	Ἰούνιος	– 0,01111	97,5
7	Ἰούλιος	– 0,01132	97,4
8	Αὔγουστος	– 0,02945	93,4
9	Σεπτέμβριος	– 0,01187	97,3
10	Ὀκτώβριος	– 0,00035	99,9
11	Νοέμβριος	+ 0,01489	103,5
12	Δεκέμβριος	+ 0,03080	107,4

ΔΕΙΚΤΑΙ ΕΠΟΧΙΚΟΤΗΤΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΗ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΗΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΕΩΣ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΩΝ



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. D. Bachelet et G Morlat : Modèle à deux aléas pour des chroniques économiques. (Communication au premier Congrès Mondial d' Économétrie, Rome, Septembre 1965).

2. E. T. Balopoulos : Fiscal policy models of the British Economy (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967).

3. Box and Jenkins : Some statistical aspects of adaptive optimisation and control. (Journal of the Royal Statistical Society, series B, vol. 24, 1962).

4. G. Doumenis : The Demant for Electricity in Great Britain : A study in Econometrics (Ph. D. Thesis Unpublished).

5. F. M. Fisher and C. Kaysen : A Study in econometrics : The Demand for Electricity in the Unites States (North - Holland Publishing Co., Amsterdam, 1960).

6. P. J. Harrison and F. A. Scott : A developpment system for use in short - term sales forecasting investigations. (Annual Conference of the Operational Research Society, Shriven ham, September 1965).

7. E. J. Hannan : Time Series Analysis (1960, J. Wiley and Mathuen).

8. E. Malinvaud : Estimation et prévision dans les modèles économiques autorégressifs (Inst. Int. de Stat. 29.2.1961).

9. E. Malinvaud : Méthodes statistiques de l' économétrie (Dunod 1964).

10. G. Morlat : Modèle pour des chroniques économiques mensuelles. (Revue de Statistique Appliquée, vol. XI, n° 2, 1963).

11. G. Morlat : Modèle probabiliste pour la prevision de la demande d' électricité (Bulletin de l' Institut International de Statistique).

12. J. F. Muth : Optimal properties of exponentially weighted forecast. (Journal of the American Statistical Association, vol. 55, 1960, pages 299 - 306).

13. N. Nerlove and S. Wage : On the optimality of adaptive forecasting (Management Science, vol. 10, n° 2, Janvier 1964).

14. P. Pavlopoulos : A statistical model for the Greek economy 1949-1959. (North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966).

15. H. Theil and S. Wage : Some observations on adaptive forecasting. (Management Science, vol. 10, n° 2, Janvier 1964).

16. P. Whittle : Some recent contributions to the theory of stationary processes. (Appendice 2 dans la référence 20, 2ème édition, 1954).

17. H. Wold : A study in the analysis of the stationary time series

18. Κ. Δελῆ καὶ Ι. Ταλαρούγκα : Μακροχρόνιοι προοπτικαὶ τῆς ζητήσεως ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ἐν Ἑλλάδι. (Πολυγραφημένη ἔκδοσις ΔΕΗ (1971).

19. Κ. Δρακάτου : Στατιστικαὶ ἀναλύσεις οἰκονομικῶν θεμάτων, Ἀθῆναι, 1966.

20. Κ. Δρακάτου : Ἀνάλυσις τῶν βραχυχρονίων μεταβολῶν τῶν χρονολογικῶν σειρῶν (εἰς περιοδικὸν «Σπουδαί», τεῦχος 3, τόμος 13, 1963).

21. Ε. Μαργαρίτη : Σπουδὴ τῶν ἐποχικῶν μεταβολῶν εἰς τὰς χρονολογικὰς σειρὰς (εἰς περιοδικὸν «Σπουδαί», ἀρ. 7-8, 1958).