ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΕΙΣ ΣΕΙΡΑΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

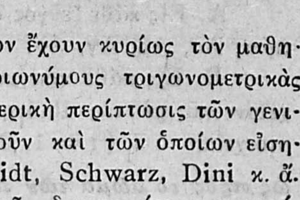
Ὑπὸ τοῦ κ. ΔΗΜ. ΚΟΝΙΔΑΡΗ

Δίδομεν κατωτέρω σύντομον ἔκθεσιν ἑνὸς τῶν πλέον σημαντικῶν κεφαλαίων τῆς Μαθηματικῆς Στατιστικῆς : Τοῦ ἀναπτύγματος συναρτήσεως εἰς σειρὰν δεδομένων συναρτήσεων. Ἐθεωρήσαμεν χρήσιμον τὴν παρουσίασίν του ἐδῶ, ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ τὸ τόσον θεωρητικὸν καὶ πρακτικὸν ἐνδιαφέρον του, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι δὲν ὑπάρχει, εἰς τὰς μέχρι τοῦδε στατιστικὰς δημοσιεύσεις, ὁλοκληρωτικὴ παρουσίασίς του. Μίαν κάπως διαφορετικὴν πραγμάτευσιν τοῦ θέματος ἔχει δώσει ὁ καθηγητὴς κ. A. Lichnerowicz, δι' ἄλλον ὅμως σκοπόν.

1. Τὰ ἐξετασθησόμενα προβλήματα εἰσηγητήν των ἔχουν κυρίως τὸν μαθηματικὸν Fourier, ὅστις πρῶτος ἠσχολήθη μὲ τὰς περιωνύμους τριγωνομετρικὰς σειράς. Αἱ σειραὶ αὗται θεωροῦνται σήμερον ὡς μία μερικὴ περίπτωσις τῶν γενικωτέρων ἀναπτυγμάτων, τὰ ὁποῖα ἐνταῦθα θὰ ἐξετασθοῦν καὶ τῶν ὁποίων εἰσηγηταὶ θεωροῦνται οἱ Weierstrass, Legendre, Schmidt, Schwarz, Dini κ. ἄ. Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ σπουδὴ τῶν διανυσματικῶν διαστημάτων συναρτήσεων, μοναδικοῦ ἴσως ὑποθέματος διὰ τὰ ζητήματα τοῦ ἀναπτύγματος συναρτήσεως εἰς σειρὰν δεδομένων συναρτήσεων (ὀρθογωνίων κ.ἄ.), προχωρεῖ κατὰ τρόπον ἀνάλογον ἐκείνου μὲ τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ προχώρησις εἰς τὸ γενικευμένον διάστημα, δίδομεν κατ' ἀρχὴν τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰς πρωτευούσας ἰδιότητας τῶν βασικῶν στοιχείων ἑνὸς διανυσματικοῦ διαστήματος.

I. Διανυσματικὸν διάστημα

2. Ἄς θεωρήσωμεν εἰς τὸν γνωστόν μας τριδιάστατον χῶρον τῆς κλασικῆς γεωμετρίας τὸ ∞^3 — πλῆθος τῶν διανυσμάτων ἀρχῆς 0, δίδοντες εἰς αὐτὸ τὴν ὀνομασίαν διανυσματικὸν διάστημα E_3 (Σχ. 1).



Σχ. 1

Α. Εἰς δύο διανύσματα $\bar{u}_1$ καὶ $\bar{u}_2$ τοῦ E_3 ἡ διανυσματικὴ πρόσθεσις θ' ἀντιστοιχίσῃ ἕνα διάνυσμα $\bar{u}_1 + \bar{u}_2$ καλούμενον ἄθροισμα τῶν $\bar{u}_1$ καὶ $\bar{u}_2$, μὲ τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας :

(α) $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \bar{u}_2 + \bar{u}_1$ ἀντιμεταθετική

(β) $\bar{u}_1 + (\bar{u}_2 + \bar{u}_3) = (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) + \bar{u}_3$ προσεταιριστική

(γ) Ὑπάρχει ἕνα διάνυσμα, καλούμενον μηδενικόν, τὸ ὁποῖον σημειώνεται μὲ $\bar{o}$ — ἢ ἁπλούστερον 0 — εἰς τρόπον ὥστε : $\bar{u} + \bar{o} = \bar{u}$

(δ) Δοθέντων τῶν $\bar{u}_1$ καὶ $\bar{u}_2$, ὑπάρχει διάνυσμα $\bar{u}_3$ — μοναδικὸν — εἰς τρόπον ὥστε : $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 + \bar{u}_3$ ·
γράφομεν τότε $\bar{u}_3 = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$.

Ἐὰν εἰς τὴν (δ) παρουσιασθῇ ἡ περίπτωσις $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ τότε κατὰ τὴν (γ) τὸ $\bar{u}_3$ θὰ εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα καὶ γράφομεν : $\bar{u}_1 - \bar{u}_1 = 0$.

B. Εἰς ἓν πραγματικὸν ἀριθμὸν α καὶ ἕνα διάνυσμα $\bar{u}$ ἀντιστοιχοῦμεν ἕνα διάνυσμα $\alpha\bar{u}$ — τὸ ὁποῖον καλοῦμεν γινόμενον τοῦ α καὶ τοῦ $\bar{u}$ — μὲ τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας :

(α) $1\bar{u} = \bar{u}$

(β) $\alpha_1(\alpha_2\bar{u}) = (\alpha_1\alpha_2)\bar{u}$ προσεταιριστικὴ

(γ) $(\alpha_1+\alpha_2)\bar{u} = \alpha_1\bar{u}+\alpha_2\bar{u}$ ἐπιμεριστικὴ — ἄθρ. ἀριθμῶν

(δ) $\alpha(\bar{u}_1+\bar{u}_2) = \alpha\bar{u}_1+\alpha\bar{u}_2$ » — ἄθρ. διανυσμάτων.

Ἐὰν τώρα φαντασθῶμεν ὅτι ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας ἕνα σύνολον πραγμάτων ἢ ἐν γένει στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἂς ὀνομάσωμεν $\bar{u}_i$, $(i = 1, 2, 3, 4, ..)$ καὶ ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τοὺς δύο ἑπομένους νόμους συνθέσεως :

A. Εἰς κάθε ζεῦγος στοιχείων $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα στοιχεῖον $\bar{u}$ μὲ τὰς ἰδιότητας Αα, Αβ, Αγ, Αδ.

B. Εἰς κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν α καὶ στοιχεῖον $\bar{u}$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα στοιχεῖον $\alpha\bar{u}$ μὲ τὰς ἰδιότητας Βα, Ββ, Βγ, Βδ, τότε λέγομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων $\bar{u}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, ...)$ συνιστᾷ ἕνα ***διανυσματικὸν διάστημα ὡς πρὸς τὸ σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν***. Εἰς τὸ διάστημα τοῦτο δίδομεν τὴν ὀνομασίαν ***διάστημα E***, εἰς δὲ τὰ $\bar{u}_i$ τὴν ὀνομασίαν ***στοιχεῖα τοῦ E***.

Εἶναι φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν καὶ ***διανυσματικὸν διάστημα ὡς πρὸς τὸ σῶμα τῶν μοναδικῶν ἀριθμῶν*** τὸ ὁποῖον θ' ἀντιστοιχῇ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ εἶναι $\alpha = x + iy$ ὅπου $i = \sqrt{-1}$. Εἰς τὰ ἑπόμενα θ' ἀναφερόμεθα μόνον εἰς διαστήματα πραγματικά.

Παράδειγμα : Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀκολουθιῶν

$$u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, \ldots, u_{\nu j}$$

τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν διατάσσοντες κατὰ μίαν ὡρισμένην τάξιν ν πραγματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἂς ὀνομάσωμεν τὴν ἀναγραφεῖσαν ἀνωτέρω ἀκολουθίαν u_j τὸ δὲ σύνολόν των u. Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐὰν θεωρήσωμεν δύο στοιχεῖα τοῦ u, ἐπὶ παραδείγματι τὰ

$$u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, \ldots, u_{\nu j} \quad : \quad \text{ἀκολουθία } u_j$$

$$u_{1\kappa}, u_{2\kappa}, u_{3\kappa}, u_{4\kappa}, \ldots, u_{\nu\kappa} \quad : \quad \text{» } u_\kappa$$

θέτοντες

A. $u_j + u_\kappa = (u_{1j} + u_{1\kappa}, u_{2j} + u_{2\kappa}, u_{3j} + u_{3\kappa}, u_{4j} + u_{4\kappa}, \ldots, u_{\nu j}+u_{\nu\kappa})$

B. $\alpha u_j = \alpha u_{1j}, \alpha u_{2j}, \alpha u_{3j}, \alpha u_{4j}, \ldots, \alpha u_{\nu j})$

τότε τὸ u μὲ αὐτοὺς τοὺς δύο νόμους συνθέσεως συνιστᾷ ἕνα διανυσματικὸν διάστημα ὡς πρὸς τὸ σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αἱ u_j καλοῦνται διανύσματα τοῦ u καὶ γράφομεν

$$\bar{u}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, u_{4j}, \ldots, u_{\nu j}).$$

Περισσότερον συγκεκριμένα ἐὰν αἱ ἀκολουθίαι u_j σχηματίζωνται διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, . . . , ν καὶ ἔχωμεν ὡς ἀκολουθίαν u_j τὴν

$$3, 1, 4, 2, \ldots, \lambda, \mu, \nu$$

καὶ ὡς ἀκολουθίαν u_κ τὴν

$$2, 1, 4, 3, \ldots, \nu, \lambda, \mu$$

τότε κατὰ τοὺς νόμους τῆς συνθέσεως, τῆς ὡς ἄνω ὁρισθείσης, θὰ εἶναι

$$u_j = u_\kappa (5, 2, 8, 5, \ldots, \lambda+\nu, \mu+\lambda, \nu+\mu)$$

3. **Γραμμική ἀνεξαρτησία.** Λέγομεν ὅτι κ διανύσματα $\bar{u}_i$ (i = 1, 2, 3, 4, . . . , κ) τοῦ διανυσματικοῦ διαστήματος Ε εἶναι ***γραμμικῶς ἀνεξάρτητα,*** ἐὰν δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κ ἀριθμοὺς α_i (i = 1, 2, 3, 4. . . . . , κ) εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=\kappa} \alpha_i \bar{u}_i = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{i=\kappa} | \alpha_i | \neq 0$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν α_i, ὥστε ν' ἀληθεύουν αἱ (1), τὰ $\bar{u}_i$ καλοῦνται ***γραμμικῶς ἐξηρτημένα.***

Ἐπὶ παραδείγματι ἐὰν θεωρήσωμεν ὅλας τὰς ἀκολουθίας τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν διατάσσοντες ἀνὰ δύο τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots,$$

παρατηροῦμεν ὅτι, ἐφαρμόζοντες τοὺς νόμους Α καὶ Β τῆς § 2, τὰ διανύσματα (3, 2) καὶ (5, 7) εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διότι δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς α_1 καὶ α_2 εἰς τρόπον ὥστε νὰ συμβιβάζωνται αἱ σχέσεις :

$$\begin{aligned} &3\alpha_1 + 5\alpha_1 = 0 \\ &\qquad\qquad \text{μὲ } | \alpha_1 | + | \alpha_2 | \neq 0 \\ &2\alpha_2 + 7\alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν δύο τοιούτους ἀριθμοὺς διὰ τὰ διανύσματα (2, 4) καὶ (4, 8). Πράγματι ἐὰν ἐκλέξωμεν $\alpha_1 = +2$, $\alpha_2 = -1$ θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} &2 . (+2) + 4 . (-1) = 4 - 4 = 0 \\ &\qquad\qquad \text{μὲ } | +2 | + | -1 | = 2+1 = 3 \neq 0 \\ &4 . (+2) + 8 . (-1) = 8 - 8 = 0 \end{aligned}$$

Λέγομεν τότε ὅτι τὰ μὲν διανύσματα (3, 2) καὶ (5, 7) εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, τὰ δὲ διανύσματα (2, 4) καὶ (4, 8) ὅτι εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

4. **Βάσις διανυσματικοῦ διαστήματος.** Ἂς θεωρήσωμεν ὅλα τὰ συστήματα τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων τοῦ Ε καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τοῦ κ εἶναι ν —παραλείποντες τὴν περίπτωσιν κ = ∞ —. Ὑπάρχει λοιπὸν ἕνα σύστημα τουλάχιστον διανυσμάτων $\bar{e}_i$ (i=1, 2, 3, 4, .., ν)

γραμμικῶς ἀνεξάρτητον, δηλαδὴ εἶναι δι' αὐτό :

$$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \bar{e}_i = 0 \quad \text{μόνον ὅταν} \quad \sum_{i=1}^{\nu} | \alpha_i | = 0$$

καὶ δὲν ὑπάρχει σύστημα γραμμικῶς ἀνεξάρτητον τάξεως $\nu + 1$.

Ἄρα τὸ σύστημα τῶν διανυσμάτων $\bar{u}$, $\bar{e}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, \ldots, \nu)$ θὰ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένον. Δηλαδὴ θὰ εἶναι :

$$\alpha\bar{u} + \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \bar{e}_i = 0 \quad \text{μὲ} \quad |\alpha| + \sum_{i=1}^{\nu} |\alpha_i| \neq 0$$

ἢ ἀφοῦ $\alpha \neq 0$ — διότι ἄλλως $\Sigma\alpha_i \bar{e}_i = 0$ καὶ $\Sigma | \alpha_i | = 0$ ὁπότε τὰ $\bar{e}_i$ ἐξηρτημένα — θὰ εἶναι :

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{\nu} x^i \bar{e}_i \quad \text{μὲ} \quad x^i = -\frac{\alpha_i}{\alpha}$$

ἢ ἁπλούστερον, κατὰ τὴν συνθήκην τοῦ Einstein,

$$\bar{u} = x^i \bar{e}_i .$$

οἱ ἀριθμοὶ x^i καλοῦνται συνιστῶσαι τοῦ $\bar{u}$ ὡς πρὸ τὸ σύστημα τῶν διανυσμάτων $\bar{e}_i$ τὸ ὁποῖον καλεῖται ***βάσις***.

Τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν x^i εἶναι μοναδικὸν· διότι ἐὰν ὑπῆρχε καὶ ἄλλο σύστημα y^i εἰς τρόπον νὰ εἶναι $\bar{u} = y^i \bar{e}_i$, τότε δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν δύο τελευταίων σχέσεων θὰ εἶναι : $0 = (x^i - y^i)\, \bar{e}_i$.

Ἐπειδὴ ὅμως τὰ $\bar{e}_i$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα θὰ εἶναι ὑποχρεωτικῶς $x^i = y^i$.

Τὸ σύστημα τῶν διανυσμάτων $\bar{e}_i$, καθὼς καὶ κάθε ἄλλο σύστημα γραμμικῶς ἀνεξάρτητον τοῦ Ε τάξεως ν, μὲ τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, καλεῖται ***βάσις*** τοῦ Ε.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορίζόμεθα τὴν ἀκόλουθον πρότασιν :

Πρότασις : ***Δοθείσης μιᾶς βάσεως ἑνὸς διανυσματικοῦ διαστήματος Ε, κάθε διάνυσμα*** $\bar{u}$ ***τοῦ Ε δύναται νὰ τεθῇ κατὰ μοναδικὸν τρόπον ὑπὸ τὴν μορφήν*** : $\bar{u} = x^i \bar{e}_i$

Εὐκόλως δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν ὅτι θεωρηθέντος τοῦ συστήματος τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων $\bar{e}_i$ $(i=1, 2, \ldots, \lambda \leqq \nu)$ τότε ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ τεθῇ, κατὰ μοναδικὸν τρόπον, διὰ κάθε $\bar{u}$ τοῦ Ε $\bar{u} = x^i \bar{e}_i$ θὰ εἶναι ὑποχρεωτικῶς $\lambda = \nu$, δηλαδὴ ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο θὰ εἶναι μία βάσις τοῦ Ε. Εἶναι λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς ν ἡ κοινὴ τάξις ὅλων τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων συστημάτων τοιούτων ὥστε, κάθε διάνυσμα τοῦ Ε νὰ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ γραμμικῶς ὡς πρὸς τὰ διανύσματα τοῦ συστήματος. Ἕνα τοιοῦτον σύστημα συνιστᾶ μίαν βάσιν τοῦ E. Εἰς τὸν ἀριθμὸν ν δίδομεν τὸ ὄνομα ***διάστασις τοῦ E*** καὶ γράφομεν κάθε διάστημα ν διαστάσεως μὲ τὸ σύμβολον E_ν.

5. **Ἀριθμητικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων.** Ὀνομάζομεν ***ἀριθμητικὸν γινόμενον*** δύο διανυσμάτων $\bar{u}(x^i)$ καὶ $\bar{y}(y^i)$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$ τοῦ E_ν τὴν ἔκφρασιν

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=\nu} x^i y^i$$

τὴν ὁποίαν συντόμως γράφομεν $\bar{u} . \bar{y}$. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ $\bar{u} . \bar{y}$ διαπιστώνομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ ἰδιότητες :

$$(2) \quad \bar{u} . \bar{y} = \bar{y} . \bar{u}$$

$$(3) \quad \alpha (\bar{u} . \bar{y}) = (\alpha\bar{u})\, \bar{y} = \bar{u}\, (\alpha\bar{y})$$

$$(4) \quad \bar{u} . (\bar{y} + \bar{a}) = \bar{u} . \bar{y} + \bar{u} . \bar{a}$$

Τὰ διανύσματα $\bar{u}$ καὶ $\bar{y}$ καλοῦνται ***ὀρθογώνια*** ὅταν $\bar{u} . \bar{y} = 0$

Ἐὰν ἐπὶ παραδείγματι θεωρήσωμεν ὅλας τὰς ἀκολουθίας τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν διατάσσοντες ἀνὰ δύο τοὺς ἀριθμούς :

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

καὶ ὁρίσωμεν πράξεις ἐπ' αὐτῶν ὡς αἱ (A) καὶ (B) τῆς § 2, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, ὅτι τὰ διανύσματα $(-2, 4)$ $(-4, -2)$ θὰ εἶναι ὀρθογώνια, ἀφοῦ $(-2, 4) . (-4, -2) = (-2) . (-4) + 4(-2) = 8 - 8 = 0$.

6. **Κανὼν διανύσματος.** Ὀνομάζεται ***κανὼν*** ἑνὸς διανύσματος $\bar{u}$ τοῦ E_ν ἡ θετικὴ ποσότης

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=\nu} (x^i)^2$$

καὶ παρίσταται συντόμως διὰ τοῦ $N\bar{u}$. Ἐκ τῶν (5.1) καὶ (6.1) ἔχομεν :

$$(2) \quad N\bar{u} = \bar{u}.\bar{u}$$

ἢ ἀκόμη συντομώτερον

$$(3) \quad N\bar{u} = \bar{u}^2$$

Ἐὰν $N\bar{u} = 1$ τὸ $\bar{u}$ καλεῖται ***μοναδιαῖον***.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τῆς προηγουμένης παραγράφου ἔχομεν ὅτι

$$N\,(-2{,}4) = (-2{,}4) . (-2{,}4) = 4 + 16 = 20$$

ἄρα
$$N\,(-2{,}4) = 20$$

Ἐπίσης
$$N\,(0{,}1) = (0{,}1) . (0{,}1) = 0 + 1 = 1$$

$$N\,(0,-1) = (0,-1) . (0,-1) = 0 + 1 = 1$$

Ἀφοῦ λοιπὸν εἶναι

$$N(0,1) = 1 \quad \text{καὶ} \quad N(0,-1) = 1$$

συμπεραίνομεν ὅτι τὰ διανύσματα (0,1) καὶ (0,—1) εἶναι μοναδιαῖα.

7. **Μονορθογώνιοι βάσεις.** Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ ἀριθμητικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων $\bar{e}_i$ καὶ $\bar{e}_j$ τῆς βάσεως B $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \ldots, \bar{e}_\nu)$ θὰ εἶναι

$$\bar{e}_i \, \bar{e}_j = \delta_{ij}$$

ὅπου

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{διὰ} \quad i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{διὰ} \quad i = j$$

(Τὸ σύμβολον δ_{ij} καλεῖται ***δέλτα τοῦ* Kronecker**).

Δηλαδὴ ἔχομεν ὅτι κάθε διάνυσμα τῆς B εἶναι μοναδιαῖον καὶ ἀνὰ δύο εἶναι αὐτὰ ὀρθογώνια.

Ἐν συνεχείᾳ θὰ λέγωμεν ὅτι : ὁριοθέντος τοῦ ἀριθμητικοῦ γινομένου ὡς πρὸς μίαν βάσιν B, κάθε βάσις τοῦ E_ν π.χ ἡ Γ $(\bar{\imath}_1, \bar{\imath}_2, \bar{\imath}_3, \bar{\imath}_4, \ldots, \bar{\imath}_\nu)$ ἱκανοποιοῦσα τὰς σχέσεις :

$$\bar{\imath}_i \, \bar{\imath}_j = \delta_{ij}$$

θὰ καλεῖται ***μονορθογώνιος βάσις***. Ἰδιαιτέρως ἡ B εἶναι μία μονορθογώνιος βάσις.

II. Διανυσματικὰ διαστήματα συναρτήσεων

8. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, τῆς παραστάσεως ἑνὸς διανύσματος $\bar{u}$ τοῦ E_ν δι' ἑνὸς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν ν διανυσμάτων τῆς βάσεως B, λύομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα : εἰς τὸ διάστημα Δ τῆς μεταβολῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x , νὰ παρασταθῇ ἡ συνάρτησις σ(x) , κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον αὐθαίρετος, δι' ἑνὸς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ δεδομένων συναρτήσεων.

Αἱ συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι συνήθως ὑπεισέρχονται εἰς τὸ πρόβλημα, ἀνήκουν εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ***γενικῶς συνεχῶν*** συναρτήσεων· μία συνάρτησις δὲ σ(x) καλεῖται γενικῶς συνεχής, ἐὰν δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὸ διάστημα Δ , εἰς πεπερασμένον πλῆθος ὑποδιαστημάτων $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\kappa$ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ σ(x) εἶναι συνεχής.

Ἐὰν τώρα φαντασθῶμεν τὸ σύνολον ὅλων τῶν γενικῶς συνεχῶν συναρτήσεων τοῦ Δ εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι :

α. ἡ $\sigma_1(x) + \sigma_2(x)$, συνάρτησις γενικῶς συνεχὴς

β. ἡ $\alpha\,\sigma(x)$, » » »

τότε λέγομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν γενικῶς συνεχῶν συναρτήσεων τοῦ Δ συνιστᾷ ἕνα διανυσματικὸν διάστημα οἱ δὲ δύο ἀνωτέρω νόμοι συνθέσεως ἱκανοποιοῦν προφανῶς τὰ ἀξιώματα τῶν διανυσματικῶν διαστημάτων.

Ἔχομεν λοιπὸν εἰς τὴν διάθεσίν μας κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἕνα ***διανυσματικὸν διάστημα γενικῶς συνεχῶν συναρτήσεων τοῦ Δ***, τὸ ὁποῖον εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ συμβολίζωμεν διὰ τοῦ Ε.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι οἱ ἀνωτέρω ὁρισμοὶ παραμένουν οἱ αὐτοὶ καὶ διὰ συναρτήσεις περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Διὰ τὴν ἁπλούστευσιν μόνον τῆς γραφῆς προχωροῦμεν μὲ συναρτήσεις μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

III. Ὀρθογώνια συστήματα συναρτήσεων.

9. Ὁρισμός. ***Δοθέντων δύο συναρτήσεων*** σ(x) ***καὶ*** τ(x) ***τοῦ*** Ε ***ὀνομάζομεν ἀριθμητικὸν γινόμενον τῶν συναρτήσεων αὐτῶν τὸν ἀριθμόν :***

$$\int_\Delta \sigma(x)\,.\,\tau(x)\,dx$$

καὶ συμβολίζομεν αὐτὸ διὰ τοῦ (σ, τ). Εἶναι ἀμέσως προφανεῖς αἱ ἰδιότητες

(1) $(\sigma,\tau)=(\tau,\sigma)$ (2) $\alpha(\sigma,\tau)=(\alpha\sigma,\tau)=(\sigma,\alpha\tau)$ (3) $(\sigma,\tau+\varphi)=(\sigma,\tau)+(\sigma,\varphi)$.

10. Ὁρισμός. ***Δύο συναρτήσεις*** σ(x) ***καὶ*** τ(x) ***λέγονται ὀρθογώνιοι ἐὰν εἶναι :*** $(\sigma,\tau)=0$.

Ἐπὶ παραδείγματι ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς συναρτήσεις συνkx καὶ συνλx μὲ $k\neq\lambda$, εἰς τὸ διάστημα 2π ἕως 4π θὰ ἔχωμεν

$$(\text{συν}kx,\ \text{συν}\lambda x)=\int_{2\pi}^{4\pi}\text{συν}kx\,.\,\text{συν}\lambda x\,dx$$

ἐπειδὴ δὲ ὡς γνωστὸν

$$\int_{2\pi}^{4\pi}\text{συν}kx\ \text{συν}\lambda x=\left[\frac{\text{ημ}(k+\lambda)x}{2(k+\lambda)}+\frac{\text{ημ}(k-\lambda)x}{2(k-\lambda)}\right]_{2\pi}^{4\pi}=0$$

συμπεραίνομεν ὅτι

$$(\text{συν}kx,\ \text{συν}\lambda x)=0\,,$$

δηλαδὴ αἱ συναρτήσεις συνkx καὶ συνλx εἶναι, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, ὀρθογώνιοι εἰς τὸ διάστημα 2π ἕως 4π.

11. Ὁρισμός. ***Δοθείσης μιᾶς συναρτήσεως*** σ(x) ***τοῦ*** Ε ***καλεῖται κανὼν αὐτῆς καὶ παρίσταται συντόμως διὰ τοῦ*** Nσ ***ὁ ἀριθμός :*** (σ, σ)

Εἶναι δηλαδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς § 9

$$N\sigma=\int_\Delta[\,\sigma(x)\,]^2\,dx$$

Ἡ συνάρτησις συνkx ἔχει ὡς κανόνα εἰς τὸ διάστημα 2π ἕως 4π τὸν N συνkx, ὅπου

$$N\,\text{συν}kx=\int_{2\pi}^{4\pi}\text{συν}^2kx\,dx$$

ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \text{συν}^2\, kx\, dx = \pi$$

συμπεραίνομεν ὅτι

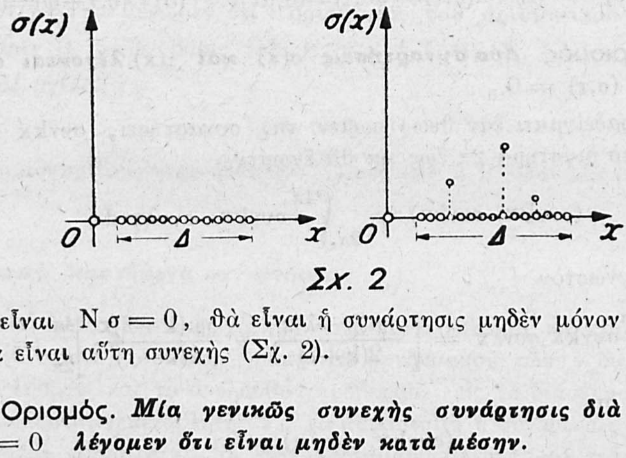
$$N\, \text{συν}kx = \pi$$

13. Ὁρισμός. ***Μία συνάρτησις*** σ(x) ***καλεῖται μοναδιαία ἐὰν εἶναι***

$$N\,\sigma = 1$$

Ἡ συνάρτησις $\dfrac{\text{συν}kx}{\sqrt{\pi}}$ ἐπὶ παραδείγματι, συμφώνως πρὸς τὸ τελευταῖον παράδειγμα εἶναι μοναδιαία.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι ὅταν διὰ μίαν συνάρτησιν συνεχῆ σ (x) εἶναι $N\,\sigma = 0$ θὰ εἶναι $\sigma(x) \equiv 0$. Ἐνῶ ὅταν διὰ μίαν γενικῶς συνεχῆ



Σχ. 2

συνάρτησιν εἶναι $N\,\sigma = 0$, θὰ εἶναι ἡ συνάρτησις μηδὲν μόνον εἰς τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι αὕτη συνεχὴς (Σχ. 2).

14. Ὁρισμός. ***Μία γενικῶς συνεχὴς συνάρτησις διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι*** $N\,\sigma = 0$ ***λέγομεν ὅτι εἶναι μηδὲν κατὰ μέσην.***

Ἰδιότης Α. Τὸ γινόμενον μιᾶς οἱασδήποτε συναρτήσεως, μὲ μίαν συνάρτησιν μηδὲν κατὰ μέσην, εἶναι συνάρτησις μηδὲν κατὰ μέσην.

Ἰδιότης Β. Τὸ ὁλοκλήρωμα μιᾶς συναρτήσεως, μηδὲν κατὰ μέσην εἶναι πάντοτε μηδέν. Δηλαδὴ ἐὰν εἶναι :

$$\int_{\Delta} \sigma^2\, dx = 0 \quad \text{θὰ εἶναι καὶ} \quad \int_{\Delta} \sigma\, dx = 0$$

15. **Ἡ ἀνισότης τοῦ Schwarz.** Ἂς θεωρήσωμεν διὰ δύο συναρτήσεις σ(x) καὶ τ(x) τὴν ποσότητα $N(\sigma+\lambda\tau)$ ἡ ὁποία θὰ εἶναι θετικὴ ἢ μηδὲν πάντοτε. Ἐκ τῆς σημασίας τοῦ κανόνος θὰ εἶναι

$$N(\sigma+\lambda\tau) = \int_{\Delta} \sigma^2 dx + 2\lambda \int_{\Delta} \sigma.\tau dx + \lambda^2 \int_{\Delta} \tau^2 dx$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ ὡς πρὸς λ τριώνυμον τοῦ β' μέλους θετικὸν θὰ πρέπει ἡ διακρίνουσα αὐτοῦ νὰ εἶναι ἢ μηδὲν ἢ ἀρνητική. Δηλαδὴ θὰ πρέπει :

$$\left(\int_\Delta \sigma . \tau dx\right)^2 - \int_\Delta \sigma^2 dx \int_\Delta \tau^2 dx \leqq 0 \qquad \text{ἢ} \qquad (\sigma,\tau)^2 \leqq N\sigma . N\tau$$

Ἡ ἀνισότης αὕτη φέρει τὸ ὄνομα τοῦ Schwarz.

16. **Ἡ τριγωνικὴ ἀνισότης.** Ἐκ τῆς σχέσεως

$$N(\sigma - \tau) = N\sigma + N\tau - 2(\sigma,\tau)$$

λαμβάνομεν δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀνισότητος τοῦ Schwarz εἰς τὸν ὅρον (σ,τ), τὴν ἀνισότητα

$$N(\sigma - \tau) \leqq N\sigma + N\tau + 2\sqrt{N\sigma\, N\tau}$$

ἢ τὴν

$$N(\sigma - \tau) \leqq \left(\sqrt{N\sigma} + \sqrt{N\tau}\right)^2$$

ἢ ἀκόμη

$$\sqrt{N(\sigma-\tau)} \leqq \sqrt{N\sigma} + \sqrt{N\tau}$$

Ἐὰν φ εἶναι μία τρίτη συνάρτησις τοῦ Ε θὰ εἶναι ἐπίσης

$$\sqrt{N(\sigma-\tau)} \leqq \sqrt{N(\sigma-\varphi)} + \sqrt{N(\tau-\varphi)}$$

Τὴν ἀνισότητα ταύτην καλοῦμεν τριγωνικήν.

17. **Ὁρισμός.** ***Ὀνομάζομεν σύστημα μονορθογωνίων συναρτήσεων τοῦ*** Ε, ***ἕνα σύστημα πεπερασμένων ἢ ἀπείρων συναρτήσεων μοναδιαίων***

$$(1) \qquad \omega_1(x),\ \omega_2(x), \ldots$$

τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι : $\omega_i\, , \omega_j = \delta_{ij}$

Εἶναι εὔκολον νὰ δείξωμεν ὅτι ἕνα πεπερασμένον σύστημα μονορθογωνίων συναρτήσεων εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον.

Πράγματι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι διὰ $\varkappa$ μονορθογωνίους συναρτήσεις εἶναι :

$$\sum_{i=1}^{\iota=\varkappa} \mu^i\, \omega_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{\iota=\varkappa} |\, \mu^i \,| \neq 0\,, \qquad \text{ὅπου } \mu^i = \text{σταθεραί},$$

κατὰ μέσην. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς μὲ ω_j καὶ ὁλοκληρώσωμεν θὰ εἶναι : $\mu^j = 0 \quad (\, j = 1, 2, \ldots, \varkappa\,)$, πρᾶγμα ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Ἄρα ἡ ὑπόθεσις δὲν εὐσταθεῖ καὶ συμπεραίνομεν ὅτι αἱ $\omega(x)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι.

18. Ὡς παράδειγμα θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἀπείρων συναρτήσεων

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\text{συν}x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\text{ημ}x, \ \ldots, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\text{συν}\alpha x, \ \frac{1}{\pi}\,\text{ημ}\alpha x, \ \ldots$$

μὲ α = ἀκέραιος θετικός.

Ἐπειδὴ εἶναι

$$\int_0^{2\pi} \text{συν}\,\alpha x\ \text{συν}\,\beta x\,dx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \text{ημ}\,\alpha x\ \text{ημ}\,\beta x\,dx = 0 \qquad \alpha \neq \beta$$

$$\int_0^{2\pi} \text{ημ}\,\alpha x\ \text{συν}\,\beta x\,dx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \text{συν}\,\alpha x\,dx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \text{ημ}\,\alpha x\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \text{συν}^2\,\alpha x\,dx = \pi \qquad \int_0^{2\pi} \text{ημ}^2\,\alpha x\,dx = \pi$$

συμπεραίνομεν ὅτι ἡ προαναφερθεῖσα ἀκολουθία συνιστᾷ ἓν μονορθογώνιον σύστημα ἀπείρων συναρτήσεων εἰς τὸ διάστημα $(0,2\pi)$. Τὸ σύστημα τῶν συναρτήσεων τούτων πρῶτος ἐχρησιμοποίησεν ὡς γνωστὸν ὁ Fourier.

IV· Ὀρθογωνοποίησις

19. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι δίδονται αἱ πεπερασμέναι ἢ ἄπειροι τὸ πλῆθος συναρτήσεις:

$$\sigma_1(x), \ \sigma_2(x), \ \ldots, \ \sigma_\kappa(x), \ \ldots$$

εἰς τρόπον ὥστε αἱ συναρτήσεις

$$\sigma_1(x), \ \sigma_2(x), \ \ldots, \ \sigma_\kappa(x)$$

νὰ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι οἱουδήποτε ὄντος τοῦ κ.

Ὁ Schmidt ἀπέδειξεν ὅτι δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα σύστημα μονορθογωνίων συναρτήσεων

$$\omega_1(x), \ \omega_2(x), \ \ldots, \ \omega_\kappa(x), \ \ldots$$

εἰς τρόπον ὥστε οἱουδήποτε ὄντος τοῦ κ ἡ $\omega_\kappa(x)$ νὰ εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν $\sigma_1(x), \ \sigma_2(x), \ \ldots, \ \sigma_\kappa(x)$.

Σχηματίζομεν πρὸς τοῦτο τὴν ἀκολουθίαν τῶν συναρτήσεων

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \sigma_1(x) \\
\varphi_2(x) &= \alpha_2^1\,\varphi_1(x) + \sigma_2(x) \\
\varphi_3(x) &= \alpha_3^1\,\varphi_1(x) + \alpha_3^2\,\varphi_2(x) + \sigma_3(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_\kappa(x) &= \alpha_\kappa^1\,\varphi_1(x) + \alpha_\kappa^2\,\varphi^2(x) + \ldots + \sigma_\kappa(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ὅπου τοὺς συντελεστὰς a_j^i θὰ ὁρίσωμεν εἰς τρόπον ὥστε ἡ $\varphi_j(x)$ νὰ εἶναι ὀρθογώνιος μὲ ὅλας τὰς προηγουμένας της. Ἔχομεν λοιπὸν ἐκ τῆς $(\varphi_2, \varphi_1) = 0$ τὴν

$$a_2^1 N\varphi_1 + (\sigma_2, \varphi_1) = 0 \quad \text{μὲ} \quad N\varphi_1 \neq 0$$

ὁπότε εἶναι
$$a_2^1 = -\frac{(\sigma_2, \varphi_1)}{N\varphi_1}$$

Ὑπελογίσθη δηλαδὴ ὁ a_2^1 εἰς τρόπον ὥστε αἱ φ_2 καὶ φ_1 νὰ εἶναι ὀρθογώνιοι. Ἐκ τῶν δύο σχέσεων

$$(\varphi_3, \varphi_1) = 0 \quad , \quad (\varphi_3, \varphi_2) = 0$$

ἔχομεν ὁμοίως

$$a_3^1 N\varphi_1 + (\sigma_3, \varphi_1) = 0 \quad \text{μὲ} \quad N\varphi_1 \neq 0$$

$$a_3^2 N\varphi_2 + (\sigma_3, \varphi_2) = 0 \quad \text{μὲ} \quad N\varphi_2 \neq 0$$

ὁπότε

$$a_3^1 = -\frac{(\sigma_3, \varphi_1)}{N\varphi_1} \quad , \quad a_3^2 = -\frac{(\sigma_3, \varphi_2)}{N\varphi_2}$$

Ὁρίζεται λοιπὸν ἡ φ_3 ὀρθογώνιος πρὸς τὰς φ_1 καὶ φ_2 καὶ μὴ μηδὲν κατὰ μέσην ἀφοῦ αἱ φ_1, φ_2, σ_3 εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι. Γενικῶς θὰ εἶναι

$$a_j^i = -\frac{(\sigma_i, \varphi_j)}{N\varphi_j}$$

Διὰ νὰ καταστήσωμεν τώρα μοναδιαίας τὰς φ_i θέτομεν

$$\omega_i = \frac{\varphi_i}{\sqrt{N\varphi_i}}$$

ὁπότε τὸ σύστημα τῶν συναρτήσεων

$$\omega_1(x), \ \omega_2(x), \ \ldots, \ \omega_\kappa(x)$$

εἶναι μονορθογώνιον.

V. Κατὰ μέσην ἀπόστασις

20. **Ὁρισμός.** Ὀνομάζομεν κατὰ μέσην ἀπόστασιν δύο συναρτήσεων $\sigma(x)$ καὶ $\tau(x)$ τοῦ E καὶ συμβολίζομεν αὐτὴν διὰ τοῦ **a** τὴν ποσότητα:

$$\sqrt{N(\sigma - \tau)} \; .$$

Ἔχομεν δηλαδὴ κατὰ τοὺς ὁρισμούς,

$$a = \sqrt{\int_\Delta [\,\sigma(x) - \tau(x)\,]^2 \, dx} \; .$$

Γίνεται ἀμέσως φανερὸν ἐδῶ ὅτι μόνον διὰ τὰς συνεχεῖς συναρτήσεις ἔχομεν $\sigma(x) \equiv \tau(x)$ ἐὰν $a = 0$. Διὰ τὰς γενικῶς συνεχεῖς συναρτήσεις θὰ ἔχωμεν ὅτι θὰ διαφέρουν αὗται, ἐν γένει, κατὰ μίαν συνάρτησιν μηδὲν κατὰ μέσην ἐὰν $a = 0$. Δηλαδὴ δύο συναρτήσεις $\sigma(x)$ καὶ $\tau(x)$ δὲν θεωροῦνται ὡς διακεκριμέναι ἐὰν ἡ συνάρτησις $\sigma - \tau$ εἶναι μία συνάρτησις μηδὲν κατὰ μέσην.

21. Ὁρισμός. ***Δοθείσης μιᾶς ἀκολουθίας ἀπείρων συναρτήσεων***

$$\sigma_1(x)\,,\quad \sigma_2(x)\,,\quad \ldots\,,\quad \sigma_\nu(x),\ \ldots$$

τοῦ E, λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη συγκλίνει κατὰ μέσην πρὸς τὴν συναρτησιν $\sigma(x)$, ***ἐὰν ὑπάρχῃ μία συνάρτησις*** $\sigma(x)$, ***εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι:***

$$\lim_{\nu \to \infty} N(\sigma - \sigma_\nu) = 0$$

VI. Τὸ πρόβλημα τῆς προσεγγίσεως

22. Μετὰ τὴν παρουσίασιν τῶν ὁρισμῶν καὶ τῶν στοιχειωδῶν ἰδιοτήτων ποὺ ἀφοροῦν τὸ ἐξεταζόμενον θέμα, λύομεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα:

Δοθεῖσα συνάρτησις γενικῶς συνεχὴς νὰ προσεγγισθῇ ὑπὸ ἄλλης συναρτήσεως συνεχοῦς.

Ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος εἶναι χρήσιμος, καθ᾽ ὅσον αἱ συνηθέστερον παρουσιαζόμεναι συναρτήσεις εἰς τὴν στατιστικὴν εἶναι αἱ γενικῶς συνεχεῖς, ὁ δὲ ὑπολογισμὸς τῆς ἀποστάσεως δύο συναρτήσεων τοῦ E ἁπλουστεύεται ὅταν ἡ ὑπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα συνάρτησις εἶναι ἁπλῶς συνεχής.

Ἄς ὑποθέσωμεν λοιπὸν δεδομένην μίαν συνάρτησιν $\sigma(x)$ γενικῶς συνεχῆ εἰς τὸ διάστημα (α, β) τῆς μεταβολῆς τοῦ x, μὲ ϱ σημεῖα ἀσυνεχείας ἐντὸς τοῦ διαστήματος αὐτοῦ, ἂς εἶναι δὲ ἐπὶ πλέον

$$\sigma(\alpha) \geqq \sigma(\beta)$$

Κατασκευάζομεν τώρα μίαν συνάρτησιν $\eta(x)$, ὡς ἑξῆς:

1. Εἰς ἕκαστον σημεῖον ἀσυνεχείας τῆς $\sigma(x)$ καὶ ἐπὶ διαστήματος πλάτους ε ἔνθεν καὶ ἔνθεν τοῦ σημείου τούτου ἀντικαθιστῶμεν τὴν $\sigma(x)$ δι ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος συνδέοντος τὰ σημεῖα $\left[x_{\alpha_i} - \varepsilon\,,\ \sigma(x_{\alpha_i} - \varepsilon)\right]$ καὶ $\left[x_{\alpha_i} + \varepsilon\,,\ \sigma(x_{\alpha_i} + \varepsilon)\right]$ ὅπου α_i σημεῖον ἀσυνεχείας ($i=1, 2, \ldots, \varrho$).
2. Εἰς ἕνα διάστημα πλάτους ε πρὸς τ᾽ ἀριστερὰ τοῦ σημείου $x=\beta$ ἀντικαθιστῶμεν τὴν $\sigma(x)$ δι᾽ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος αἴροντος τὴν συνέχειαν καὶ τοιούτου ὥστε διὰ $x=\beta$ νὰ ἔχῃ ἡ $\sigma(x)$ τὴν τιμὴν $\sigma(\alpha)$.
3. Ἐκτὸς τῶν διαστημάτων αὐτῶν τῆς ἀντικαταστάσεως ἡ συνάρτησις νὰ ἔχῃ τὰς αὐτὰς τιμὰς μὲ τὴν $\sigma(x)$, δηλαδὴ ἐκτὸς τῶν διαστημάτων $[x_{\alpha_i} - \varepsilon\,,\ x_{\alpha_i} + \varepsilon]$ καὶ $[\beta - \varepsilon\,,\ \beta]$ νὰ εἶναι $\eta(x) = \sigma(x)$.

Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον κατεσκευάσθη ἡ συνάρτησις $\eta(x)$ ἡ ὁποία εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ (α,β). Δυνάμεθα τώρα νὰ δείξωμεν ὅτι ἐκλέγοντες τὸν ε καταλλήλως μικρόν, δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τὸν $N(\sigma - \eta)$ ὁσονδήποτε μικρόν, δηλαδὴ τὴν μέσην ἀπόστασιν τῆς $\eta(x)$ ἀπὸ τῆς $\sigma(x)$ ὁσονδήποτε μικράν.

Πράγματι, ἂς σημειώσωμεν μὲ M τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως $|\sigma(x)|$ εἰς τὸ διάστημα (α, β). Ἐπειδὴ ἔχομεν

$$|\sigma(x)| \leqq M \quad , \quad |\eta(x)| \leqq M$$

θὰ ἔχωμεν καὶ

$$|\sigma - \eta|^2 \leqq 4M^2$$

Ἄρα διὰ τὴν ἀπόστασιν a τῶν συναρτήσεων $\sigma(x)$ καὶ $\eta(x)$ θὰ ἔχωμεν

$$a = \int_\alpha^\beta [\sigma - \eta]^2 dx \leqq 4M^2 . 2\varepsilon\varrho + 4M^2 \varepsilon$$

ἢ

$$a = 4M^2(2\varrho + 1)\varepsilon$$

(διότι εἰς τὰ σημεῖα τὰ ἐκτὸς τῶν τμημάτων ἀντικαταστάσεως αἱ συναρτήσεις συμπίπτουν καὶ ἑπομένως εἶναι $\sigma - \eta = 0$).

Ἐκλέγοντες λοιπὸν τὸ ε καταλλήλως μικρὸν βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τὴν a ὅσον θέλομεν μικράν.

Ἐν συνεχείᾳ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, ἐρχόμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς προσεγγίσεως κατὰ μέσην μιᾶς συναρτήσεως δι' ἑνὸς συστήματος δεδομένων συναρτήσεων, δίδοντες κατ' ἀρχὴν τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

23. Ὁρισμός. ***Λέγομεν ὅτι προσεγγίζομεν κατὰ μέσην τὴν συνάρτησιν*** $\sigma(x)$, ***διὰ τοῦ συστήματος τῶν συναρτήσεων***

$$\omega_1(x) , \ \omega_2(x) , \ \ldots , \ \omega_\nu(x)$$

ὅταν δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν ν σταθερὰς C_i $(i=1, 2, \ldots, \nu)$ ***εἰς τρόπον ὥστε ἡ κατὰ μέσην ἀπόστασις τῆς συναρτήσεως*** $\sigma(x)$ ***ἀπὸ τὴν συνάρτησιν***

$$\zeta(x) = \sum_{i=1}^{i=\nu} C_i \omega_i(x)$$

νὰ εἶναι ἐλαχίστη. Ἐὰν τὸ σύστημα τῶν συναρτήσεων $\omega_i(x)$ δὲν εἶναι ἄπειρον, λέγομεν ὅτι προσεγγίζομεν τὴν $\sigma(x)$ κατὰ τὴν ***τάξιν ν*** διὰ τοῦ συστήματος $\omega_i(x)$, ὅταν προσεγγίζομεν τὴν $\sigma(x)$ κατὰ μέσην διὰ τῶν ν πρώτων συναρτήσεων τοῦ συστήματος $\omega_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu, \ldots)$. Ἡ συνηθεστέρα περίπτωσις προσεγγίσεως εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σύστημα τῶν $\omega_i(x)$ εἶναι μονορθογώνιον.

VII. Τὸ πρόβλημα τῆς προσεγγίσεως διὰ συστήματος

24. ***Δοθεῖσα συνάρτησις*** $\sigma(x)$ ***νὰ προσεγγισθῇ δι' ἑνὸς συστήματος μονορθογωνίων συναρτήσεων*** $\omega_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Θὰ πρέπει διὰ τὴν λύσιν νὰ καταστήσωμεν ἐλάχιστον τὴν

$$a = \int_\Delta [\, \sigma(x) - \sum_{i=\nu}^{\iota=\nu} C_i \, \omega_i \, (x) \,]^2 \, dx$$

ἢ τὴν

$$a = N\sigma - 2 \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i \, (\sigma \, , \, \omega_i) + \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i^2$$

δεδομένου ὅτι εἶναι

$$\left(\sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i \, \omega_i \; , \; \sum_{j=1}^{j=\nu} C_j \, \omega_j \right) = \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i^2$$

ἐκ τῆς

$$(\omega_i \; , \; \omega_j \,) = \delta_{ij}$$

Δυνάμεθα τώρα νὰ γράψωμεν :

$$a = N\sigma - \sum_{i=1}^{\iota=\nu} (\sigma, \omega_i)^2 + \sum_{i=1}^{\iota=\nu} (\sigma, \omega_i)^2 - 2 \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i \, (\sigma, \omega_i \,) + \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i^2$$

ἢ

$$a = N\sigma - \sum_{i=1}^{\iota=\nu} (\sigma, \omega_i \,)^2 + \sum_{i=1}^{\iota=\nu} [\, (\sigma, \omega_i \,) - C_i \,]^2$$

Θὰ γίνῃ λοιπὸν ἡ a ἐλαχίστη ὅταν θὰ εἶναι

$$\sum_{i=1}^{\iota=\nu} [\, (\, \sigma, \omega_i \,) - C_i \,]^2 = 0$$

δηλαδὴ ὅταν

$$C_i = (\, \sigma \, , \, \omega_i \,)$$

Οἱ ἀριθμοὶ $(\, \sigma \, , \, \omega_i \,)$ καλοῦνται ***συνιστῶσαι*** τῆς σ(x) ὡς πρὸς τὸ μονορθογώνιον σύστημα $\omega_i \, (x)$.

VIII. Πλῆρες σύστημα συναρτήσεων

25. Ὁρισμός. ***Λέγομεν ὅτι τὸ σύστημα τῶν ἀπείρων συναρτήσεων***

$$\Omega_1(x) \, , \quad \Omega_2(x) \, , \quad . \, . \, . \quad , \quad \Omega_\nu(x) \, , \quad . \, . \, .$$

τοῦ E, ***εἶναι πλῆρες, ἐὰν ἡ ἀκολουθία τῶν προσεγγίσεων κατὰ μέσην***

$$\omega_1(x) \, , \quad \omega_2(x) \, , \quad . \, . \, . \quad , \quad \omega_\nu(x) \, , \quad . \, . \, .$$

τάξεως 1, 2, . . . , ν , . . . τῆς σ(x) ***ὡς πρὸς τὸ δοθὲν σύστημα συγκλίνῃ κατὰ μέσην πρὸς τὴν*** σ(x) .

Δηλαδὴ τὸ $\Omega_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu, \ldots)$ εἶναι πλῆρες ἐὰν

$$\lim_{\nu \to \infty} N(\sigma - \omega_\nu) = 0$$

IX. Πλήρη μονορθογώνια συστήματα

26. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν προσεγγίσει τὴν συνάρτησιν $\sigma(x)$ δι᾽ ἑνὸς συστήματος μονορθογωνίων συναρτήσεων $\omega_i(x)$ μέχρι τῆς τάξεως ν. Ἐγνωρίσαμεν ὅτι ἡ κατὰ μέσην ἀπόστασις a ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν κατὰ μέσην προσέγγισιν δίδεται διὰ τοῦ

$$a = N\sigma - \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i^2 \quad \text{ὅπου} \quad C_i(\sigma, \omega_i).$$

Ἀφοῦ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι θετικὸν πάντοτε θὰ εἶναι

$$\sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i^2 \leqq N\sigma.$$

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι ἡ μὲ θετικοὺς ὅρους σειρὰ

$$C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_\nu^2 + \ldots$$

εἶναι συγκλίνουσα καὶ ὅτι θὰ εἶναι

$$\sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i^2 \leqq N\sigma.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης καλεῖται ***ἀνισότης τοῦ Bessel***.

Ἐκ τοῦ τύπου τώρα

$$a = N\sigma - \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i^2$$

συμπεραίνομεν ὅτι διὰ νὰ εἶναι τὸ θεωρηθὲν σύστημα τῶν μονορθογωνίων συναρτήσεων $\omega_i(x)$ πλῆρες, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ a νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ ν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, δηλαδὴ νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀνισότης τοῦ Bessel. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἀκόλουθον χρησιμωτάτην πρότασιν :

Πρότασις. Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἓν μονορθογώνιον σύστημα συναρτήσεων εἶναι πλῆρες εἶναι, νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀνισότης τοῦ Bessel

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \leqq N\sigma$$

διὰ κάθε συνεχῆ συνάρτησιν $\sigma(x)$ ὅπου C_i εἶναι αἱ συνιστῶσαι τῆς $\sigma(\chi)$ ὡς πρὸς τὸ σύστημα.

27. Ὁρισμός. ***Καλοῦμεν ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως*** $\sigma(x)$ ***ὡς πρὸς τὸ πλῆρες μονορθογώνιον σύστημα τῶν συναρτήσεων*** $\omega_i(x)$ ($i=1, 2, \ldots, \nu, \ldots$) ***τὴν σειράν :***

$$\sum_{\iota=1}^{\infty} C_i \, \omega_i(x)$$

ἡ ὁποία συγκλίνει πρὸς τὴν $\sigma(x)$ ***ὅταν τὰ*** C_i ***εἶναι αἱ συνιστῶσαι τῆς*** $\sigma(x)$ ***ὡς πρὸς τὸ*** $\omega_i(x)$.

Εἶναι εὔκολον τώρα ν᾽ ἀποδειχθῇ ἡ ἀκόλουθος πρότασις :

28. Πρότασις. ***Ἐὰν τὸ ἀνάπτυγμα***

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \, \omega_i(x)$$

μιᾶς συναρτήσεως $\sigma(x)$ ***συγκλίνῃ ὁμαλῶς πρὸς μίαν συνάρτησιν*** $\tau(x)$ ***γενικῶς συνεχῆ, ἡ*** $\tau(x)$ ***δὲν θὰ εἶναι διάφορος τῆς*** $\sigma(x)$.

Πράγματι, ἂς θέσωμεν

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \, \omega_i(x) = \tau(x)$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ $\Sigma C_i \omega_i$ συγκλίνει ἐπίσης κατὰ μέσην πρὸς τὴν $\tau(x)$ καὶ ὅτι δοθέντος ἑνὸς ἀριθμοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀκέραιον ϱ, εἰς τρόπον ὥστε διὰ $\nu > \varrho$ νὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

$$N\Big(\tau - \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i \, \omega_i\Big) < \varepsilon \qquad N\Big(\sigma - \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i \, \omega_i\Big) < \varepsilon$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τώρα τὴν κατὰ μέσην ἀπόστασιν τῶν $\sigma(x)$ καὶ $\tau(x)$ θὰ ἔχωμεν :

$$N(\sigma - \tau) = N\Big(\sigma - \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i \, \omega_i + \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i \, \omega_i - \tau\Big)$$

ἢ

$$\sqrt{N(\sigma - \tau)} = \sqrt{N\Big[\Big(\sigma - \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i \, \omega_i\Big) - \Big(\tau - \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i \, \omega_i\Big)\Big]}$$

ὁπότε ἐκ τῆς τριγωνικῆς ἀνισότητος λαμβάνομεν :

$$\sqrt{N\Big[\Big(\sigma - \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i \, \omega_i\Big) - \Big(\tau - \sum_{i=1}^{\iota=\nu} C_i \, \omega_i\Big)} \leqq$$

$$\sqrt{N(\sigma - \sum_{i=1}^{i=\nu} C_i \omega_i)} + \sqrt{N(\tau - \sum_{i=1}^{i=\nu} C_i \omega_i)}$$

ἢ περισσότερον ἐνισχυμένα

$$\sqrt{N[(\sigma - \sum_{i=1}^{i=\nu} C_i \omega_i) - (\tau - \sum_{i=1}^{i=\nu} C_i \omega_i)]} \leqq \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}$$

ἄρα καὶ

$$\sqrt{N(\sigma - \tau)} \leqq 2\sqrt{\varepsilon} \qquad \text{ἢ} \qquad N(\sigma - \tau) \leqq 4\varepsilon$$

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ κατὰ μέσην ἀπόστασις τῶν σ καὶ τ γίνεται μικροτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ θὰ εἶναι $N(\sigma - \tau) = 0$ δηλαδὴ ἡ $\tau(x)$ δὲν εἶναι διάφορος τῆς $\sigma(x)$.

X. Παραδείγματα συστημάτων συναρτήσεων

Σύστημα ἀκεραίων δυνάμεων. Πολυώνυμα τοῦ Legendre — Ὀρθογώνια πολυώνυμα — Τριγωνομετρικὰ πολυώνυμα.

29. Τὸ ἁπλούστερον παράδειγμα πλήρους συστήματος συναρτήσεων ἀποτελεῖ τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων δυνάμεων τῆς μεταβλητῆς x. Δηλαδὴ τὸ

$$1, \; x, \; x^2, \; \ldots, \; x^\nu, \; \ldots$$

Αἱ συναρτήσεις x^i τοῦ συστήματος τούτου εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι, δεδομένου ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\nu x^\nu$$

εἰς τὸ θεωρούμενον διάστημα (γ, δ) τῆς μεταβολῆς τῆς x θὰ ἔχῃ ν τὸ πολὺ ῥίζας. Διὰ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι πλῆρες πρέπει προηγουμένως νὰ ἀποδειχθῇ ἡ κάτωθι πρότασις ὀφειλομένη εἰς τὸν Weierstrass:

Πρότασις τοῦ **Weierstrass.** ***Κάθε συνεχὴς εἰς ἕνα διάστημα (γ, δ) συνάρτησις, δύναται νὰ προσεγγισθῇ ὁμαλῶς εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα δι' ἑνὸς πολυωνύμου, κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς συνήθους συγκλίσεως.*** (Τὴν ἀπόδειξιν δίδομεν εἰς τὸ τέλος τῆς παρούσης ἐκθέσεως).

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δυνάμεθα τώρα ν' ἀποδείξωμεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

30. Πρότασις. ***Τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων καὶ διαδοχικῶν δυνάμεων τῆς x εἶναι πλῆρες εἰς κάθε πεπερασμένον διάστημα (γ, δ).***

Πράγματι, ἂς θεωρήσωμεν μίαν ὡρισμένην συνάρτησιν $\sigma(x)$ εἰς τὸ διάστημα (γ,δ), τὴν ὁποίαν δυνάμεθα κατὰ τὰ γνωστὰ νὰ ὑποθέσωμεν συνεχῆ εἰς τὸ διάστημα (γ,δ). Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι δυνάμεθα πάντοτε νὰ εὕρωμεν ἕνα πολυώνυμον βαθμοῦ ἱκανῶς μεγάλου εἰς τρόπον ὥστε ἡ κατὰ μέσην ἀπόστασις τῆς σ(x) ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου νὰ δύναται νὰ γίνῃ ἱκανῶς μικρά. Συμφώνως ὅμως πρὸς τὴν πρότασιν τοῦ Weierstrass, δυνάμεθα ν' ἀντιστοιχίσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν ε ἕνα ἀκέραιον ρ μὴ ἐξαρτώμενον πάντοτε ἀπὸ τὸν ε εἰς τρόπον ὥστε δι' οἱονδήποτε x τοῦ (γ,δ) νὰ εἶναι :

$$| \sigma(x) - \Pi_\mu(x) | < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma - \delta}}$$

Ἄρα διὰ $\mu > \rho$ θὰ εἶναι

$$N(\sigma - \Pi_\mu) < \varepsilon^2,$$

σχέσις ἡ ὁποία δεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως.

Ἐν συνεχείᾳ τώρα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα, τὸ ὁποῖον γενικώτερον ἐλύσαμεν εἰς τὴν § 19.

31. **Πρόβλημα.** Νὰ κατασκευασθῇ ἓν σύστημα πολυωνύμων

$$\Pi_0(x), \ \Pi_1(x), \ \ldots, \ \Pi_\nu(x), \ \ldots$$

ὀρθογωνίων εἰς τὸ διάστημα (—1, +1) ὅπου τὸ πολυώνυμον $\Pi_\nu(x)$ εἶναι βαθμοῦ ν.

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τύπους τοὺς ὁποίους κατεσκευάσαμεν εἰς τὴν ὀρθογωνοποίησιν τοῦ Schmidt, βλέπομεν ὅτι ὑπάρχουν συστήματα πολυωνύμων τὰ ὁποῖα λύουν τὸ πρόβλημα. Ἐὰν ὀνομάσωμεν $\pi_\nu(x)$ ἓν πολυώνυμον ἐκ τῶν κατασκευασθέντων κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ συντελεστὴν τοῦ ὅρου x^ν τὴν μονάδα, εἶναι προφανὲς ὅτι ὡς γενικώτερον σύστημα θὰ ἔχωμεν τὸ

$$\alpha_\nu \ \pi_\nu(x) \qquad \alpha_\nu = \text{αὐθαίρετος σταθερά.}$$

Τὸ α_ν καθορίζεται ἐὰν ὑποχρεώσωμεν τὸ πολυώνυμον νὰ λάβῃ μίαν ὡρισμένην τιμὴν διὰ μίαν τιμὴν τοῦ x, ἐπὶ παραδείγματι διὰ $x = 1$.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι διαθέτομεν ἕνα σύστημα πολυωνύμων

$$\Pi_0(x), \ \Pi_1(x), \ \ldots, \ \Pi_\nu(x), \ \ldots$$

μὲ τὰς ἀκολούθους τρεῖς ἰδιότητας :

Ἰδιότης I. Τὰ $\Pi_i(x)$ εἶναι ἀνὰ δύο ὀρθογώνια εἰς τὸ (—1, +1).

Ἰδιότης II. Τὸ $\Pi_\nu(x)$ εἶναι βαθμοῦ ν.

Ἰδιότης III. Εἶναι $\Pi_\nu(1) = 1$.

Τότε εἰς τὸ σύστημα τῶν πολυωνύμων αὐτῶν δίδομεν τὴν ὀνομασίαν : ***πολυώνυμα τοῦ Legendre***. Εἰς τὰ προαναφερθέντα πολυώνυμα $\pi_\nu(x)$ δίδεται ἡ ὀνομασία : ***πολυώνυμα τοῦ Legendre μὲ ἀνηγμένον τὸν πρωτεύοντα συντελεστήν***.

Τὰ μοναδιαῖα πολυώνυμα τῶν πολυωνύμων $\Pi_\nu(x)$ καὶ $\pi_\nu(x)$ τοῦ Legendre καλοῦνται ***μοναδιαῖα πολυώνυμα τοῦ Legendre***. Προφανῶς ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$\Pi_\nu(x) = \frac{\pi_\nu(x)}{\pi_\nu(1)}$$

$$\varrho_\nu(x) = \frac{\Pi_\nu(x)}{\sqrt{N\,\Pi_\nu(x)}} = \frac{\pi_\nu(x)}{\sqrt{N\,\pi_\nu(x)}}$$

ὅπου τὰ $\varrho_\nu(x)$ τὰ μοναδιαῖα πολυώνυμα τοῦ Legendre.

Δυνάμεθα τώρα ν' ἀποδείξωμεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν :

31. Πρότασις. ***Τὸ σύστημα τῶν πολυωνύμων τοῦ Legendre εἶναι πλῆρες.***

Πράγματι, κατὰ τὸν τύπον τοῦ Schmidt θὰ ἔχωμεν :

$$x^\nu = \pi_\nu(x) - \alpha_\nu^{\nu-1}\,\pi_{\nu-1}(x) - \alpha_\nu^{\nu-2}\,\pi_{\nu-2}(x) - \ldots - \alpha_\nu^{0}\,\pi^0(x)$$

ὅπου τὰ α_ν^i εἶναι σταθεραί. Ἄρα τὸ x^ν ἐκφράζεται δι' ἑνὸς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν πολυωνύμων

$$\pi_0(x),\ \pi_1(x),\ \ldots,\ \pi_{\nu-1}(x).$$

Τοῦτο λοιπὸν εἶναι δυνατὸν διὰ κάθε πολυώνυμον ν βαθμοῦ. Ἀφοῦ δὲ τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων δυνάμεων τῆς x εἶναι πλῆρες, θὰ συμβαίνῃ τοῦτο καὶ διὰ κάθε σύστημα πολυωνύμων.

Ἐν συνεχείᾳ τῶν ἀνωτέρω γεννᾶται τώρα τὸ ἀκόλουθον ἐρώτημα ὅσον ἀφορᾷ τὰ πολυώνυμα τοῦ Legendre : Ἐὰν ἔχωμεν εἰς τὴν διάθεσίν μας ὅλα τὰ πολυώνυμα ν βαθμοῦ μὲ συντελεστὴν τοῦ x^ν τὴν μονάδα, ποῖα ἐξ αὐτῶν εἰς τὸ (—1, +1) ἔχουν κανόνα ἐλάχιστον; Ἡ ἀπάντησις δίδεται ὡς ἀκολούθως :

Ἄς εἶναι $\Phi(x)$ ἓν πολυώνυμον ν βαθμοῦ μὲ συντελεστὴν τοῦ x^ν τὴν μονάδα. Ἐγνωρίσαμεν ὅτι δύναται τοῦτο νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἑνὸς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν

$$\pi_0(x),\ \pi_1(x)\,.\ \ldots,\ \pi_\nu(x).$$

Ἀφοῦ τὰ $\Phi(x)$ καὶ $\pi_\nu(x)$ θὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν μεγιστοβάθμιον ὅρον θὰ εἶναι

$$\Phi(x) = \alpha_0\,\pi_0 + \alpha_1\,\pi_1 + \ldots + \alpha_{\nu-1}\,\pi_{\nu-1} + \pi_\nu \qquad \alpha_i = \text{σταθεραί}.$$

Ἄρα διὰ τὸ $N\,\Phi(x)$ εἰς τὸ διάστημα (—1, +1) θὰ εἶναι

$$N\,\Phi(x) = \int_{-1}^{+1} (\alpha_0\,\pi_0 + \alpha_1\,\pi_1 + \ldots + \alpha_{\nu-1}\,\pi_{\nu-1} + \pi_\nu)^2\,dx$$

ἢ ἀκόμη

$$N\,\Phi(x) = N\,\pi_\nu(x) + \sum_{i=0}^{i=\nu-1} \alpha_i^2\, N\,\pi_i(x)$$

δεδομένου ὅτι εἶναι

$$(\pi_i\,,\,\pi_j) = \delta_{ij}$$

Ἔχομεν λοιπὸν ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς προτελευταίας σχέσεως θὰ εἶναι ἐλάχιστον διὰ

$$\sum_{i=0}^{i=\nu-1} \alpha_i^2 = 0$$

ἀφοῦ εἶναι

$$N\,\pi_i(x) \geqq 0$$

Ἄρα θὰ εἶναι $\Phi(x) = \pi_\nu(x)$ καὶ ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν :

Πρότασις. ***Μεταξὺ ὅλων τῶν πολυωνύμων*** ν ***βαθμοῦ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς καὶ μὲ συντελεστὴν τοῦ*** x^ν ***τὴν μονάδα, αὐτὰ τῶν ὁποίων ὁ κανών, ὑπολογισθεὶς εἰς τὸ διάστημα*** $(-1, +1)$, ***εἶναι ἐλάχιστος, εἶναι πολυώνυμα τοῦ Legendre μὲ συντελεστὴν ἀνηγμένον.***

32. Μία ἄλλη κατηγορία πολυωνύμων, κατασκευαζομένη καθὼς ἡ τῶν τοῦ Legendre καὶ τῆς ὁποίας θεωρεῖται γενίκευσις, εἶναι ἡ κατηγορία τῶν ὀρθογωνίων πολυωνύμων.

Εἰς ἕνα διάστημα πεπερασμένον ἢ ἄπειρον δίδομεν μίαν συνάρτησιν $\beta(x)$ συνεχῆ, μὴ ἀρνητικὴν καὶ τοιαύτην ὥστε τὸ ὁλοκλήρωμα :

$$\int_\Delta x^\nu \sqrt{\beta(x)}\, dx$$

νὰ συγκλίνῃ οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν. Εἰς τὴν συνάρτησιν αὐτὴν δίδομεν τὴν ὀνομασίαν ***συνάρτησις βάρους.***

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τώρα τὴν ὀρθογωνοποίησιν τοῦ **Schmidt** εἰς τὰς γραμμικὰς ἀνεξαρτήτους συναρτήσεις :

$$\sqrt{\beta(x)}\,,\quad x\sqrt{\beta(x)}\,,\quad \ldots,\quad x_\nu\sqrt{\beta(x)}\,,\quad \ldots$$

θ᾿ ἀποκτήσωμεν ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συναρτήσεων :

$$\Lambda_0(x)\sqrt{\beta(x)}\,,\quad \Lambda_1(x)\sqrt{\beta(x)}\,,\quad \ldots.,\quad \Lambda_\nu(x)\sqrt{\beta(x)},\quad \ldots$$

ὅπου τὸ $\Lambda_\nu(x)$ εἶναι πολυώνυμον ν βαθμοῦ εἰς τὸ σύστημα τῶν συναρτήσεων

$$\Lambda_0(x)\,,\quad \Lambda_1(x)\,,\quad \ldots,\quad \Lambda_\nu(x),\quad \ldots$$

δίδομεν τὴν ὀνομασίαν: ***σύστημα ὀρθογωνίων πολυωνύμων ὡς πρὸς συνάρτησιν βάρους*** $\beta(x)$, ἐνῶ αἱ συναρτήσεις $\Lambda_i \sqrt{\beta}$ καλοῦνται ὀρθογώνιοι συναρτήσεις προσηρτημέναι εἰς αὐτὸ τὸ σύστημα.

Τὰ πολυώνυμα $\Lambda_\nu(x)$ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ὁρίζοντες τὰς τιμὰς τῶν πολυωνύμων δι' ὡρισμένην τιμὴν τῆς μεταβλητῆς. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $\Lambda_\nu(x)\sqrt{\beta(x)}$ εἶναι μοναδιαῖαι. Ὅταν συμβαίνῃ τοῦτο θὰ ἔχωμεν:

$$\int_\Delta \Lambda_i \Lambda_j \beta \, dx = \delta_{ij} .$$

Τέλος, ὡς καὶ διὰ τὰ πολυώνυμα τοῦ Legendre ἐγένετο, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ x^ν εἰς τὸ Λ_ν εἶναι ἡ μονὰς ὁπότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν ὀρθογώνια πολυώνυμα μὲ πρωτεύοντα συντελεστὴν ἀνηγμένον.

Εἶναι εὔλογον τώρα νὰ ἐρωτήσωμεν, ὡς καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ Legendre, ἐὰν τὰ ὀρθογώνια πολυώνυμα ὡς πρὸς τὸ βάρος $\beta(x)$ εἶναι ἐκεῖνα ἐκ τῶν πολυωνύμων ν βαθμοῦ $\Phi(x)$, μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς καὶ μὲ συντελεστὴν τοῦ x^ν τὴν μονάδα, τῶν ὁποίων ὁ κανὼν ὡς πρὸς τὸ βάρος $\beta(x)$ εἶναι ἐλάχιστος.

Ἂς θέσωμεν πρὸς τοῦτο:

$$\Phi(x) = \alpha_0 \Lambda_0(x) + \alpha_1 \Lambda_1(x) + \ldots + \Lambda_\nu(x) \qquad \alpha_i = \text{σταθεραί}.$$

Λόγῳ τῆς ὀρθογωνιότητος τῶν $\Lambda_0\sqrt{\beta}$, $\Lambda_1\sqrt{\beta}$, ..., $\Lambda_\nu\sqrt{\beta}$ θὰ ἔχωμεν:

$$\int_\Delta \Phi^2 . \beta . dx = \int_\Delta \Lambda_\nu^2 . \beta . dx + \sum_{i=8}^{i=\nu-1} \alpha_i^2 \int_\Delta \Lambda_i^2 . \beta . dx$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$\int_\Delta \Lambda_i^2 \beta \, dx$$

θετικοί, τὸ πρῶτον μέλος τῆς τελευταίας σχέσεως γίνεται ἐλάχιστον διὰ $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu-1)$. Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$\Phi(x) = \Lambda_\nu(x) ,$$

δηλαδὴ σχέσις ἡ ὁποία ἀπαντᾷ καταφατικῶς εἰς τὸ τεθὲν ἐρώτημα.

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

Πρότασις. ***Μεταξὺ ὅλων τῶν πολυωνύμων*** $\Phi(x)$ — ***ν βαθμοῦ καὶ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς — τῶν ὁποίων ὁ συντελεστὴς τοῦ*** x^ν ***εἶναι ἡ μονάς, ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα καθιστοῦν ἐλάχιστον τὸν κανόνα ὡς πρὸς τὸ βάρος*** $\beta(x)$, ***εἶναι τὰ ὀρθογώνια πολυώνυμα ὡς πρὸς τὸ βάρος*** $\beta(x)$.

33. Ἄλλη κατηγορία χρησίμων πολυωνύμων δι᾽ ἀναπτύγματα περιοδικῶν συναρτήσεων εἶναι τὰ τριγωνομετρικὰ πολυώνυμα. Ὁ ὁρισμὸς αὐτῶν εἶναι ὁ ἀκόλουθος :

Ὁρισμός. ***Ὀνομάζομεν τριγωνομετρικὸν πολυώνυμον λ τάξεως καὶ παριστῶμεν τοῦτο διὰ τοῦ T(φ), κάθε συνάρτησιν τῆς φ τῆς μορφῆς :***

$$\alpha_0 + \alpha_1 \text{ συν } \varphi + \beta_1 \text{ ημ } \varphi + \ldots + \alpha_\nu \text{ συν } \lambda\varphi + \beta_\nu \text{ ημ } \lambda\varphi$$

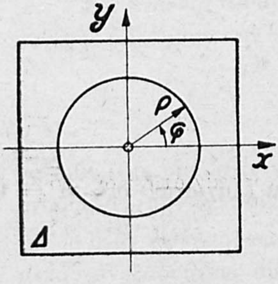
μὲ α_0, α_i, β_i, $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ ***σταθεράς.*** Τὸ πολυώνυμον αὐτὸ εἶναι ἕνας γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν συναρτήσεων :

$$1, \text{ συν } \varphi, \text{ ημ } \varphi, \ldots, \text{ συν } \lambda\varphi, \text{ ημ } \lambda\varphi,$$

αἱ ὁποῖαι καθὼς ἐγνωρίσαμεν εἶναι ὀρθογώνιοι εἰς τὸ διάστημα $(0,2\pi)$. Ἡ συνάρτησις T(φ) δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς πολυωνύμου λ βαθμοῦ ὡς πρὸς συν φ καὶ ημ φ δεδομένου ὅτι τὰ συν λφ καὶ ημ λφ, δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τῶν γνωστῶν τριγωνομετρικῶν τύπων, συναρτήσει πολυωνύμων λ βαθμοῦ ὡς πρὸς συν φ καὶ ημ φ καὶ ἀντιστρόφως· δηλαδὴ καὶ κάθε πολυώνυμον λ βαθμοῦ ὡς πρὸς συν φ καὶ ημ φ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν T(φ), ἀφοῦ τὰ $\text{συν}^\lambda\varphi$ καὶ $\text{ημ}^\lambda\varphi$ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ πολυωνύμων ὡς πρὸς συν λφ καὶ ημ λφ.

Εἶναι δυνατὸν τώρα νὰ δείξωμεν τὴν ἀλήθειαν καὶ τῆς ἀκολούθου προτάσεως :

34. Πρότασις. ***Κάθε συνάρτησις σ(φ) συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα*** $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ***καὶ τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι*** $\sigma(2\pi) = \sigma(0)$, ***δύναται νὰ προσεγγισθῇ ὁμαλῶς ἐπὶ τοῦ*** $[0,2\pi]$ ***δι᾽ ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ πολυωνύμου.***



Σχ. 3

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν τ(x, y) τῶν δύο μεταβλητῶν x καὶ y εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι

$$\tau(x, y) = \rho\, \sigma(\varphi) \quad \text{ὅταν} \quad x = \rho \text{ συν } \varphi,$$
$$y = \rho \text{ ημ } \varphi\,.$$

Ἀφοῦ ἡ σ(φ) εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $[0,2\pi]$ ἡ τ(x, y) θὰ εἶναι συνεχὴς εἰς ὅλον τὸ ἐπίπεδον τῶν x καὶ y καὶ θὰ συμπίπτῃ αὕτη μετὰ τῆς σ(φ) ἐπὶ μοναδιαίου κύκλου μὲ κέντρον (0,0).

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν ἓν τετράγωνον Δ μὲ πλευρὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας 0x καὶ 0y, περιέχον τὸν μοναδιαῖον κύκλον (Σχ. 3), εἶναι δυνατὸν διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Weierstrass νὰ προσεγγίσωμεν ὁμαλῶς εἰς τὸ Δ τὴν συνάρτησιν τ(x,y) διὰ πολυωνύμων ὡς πρὸς x καὶ y. Ἄρα διὰ $\rho = 1$ ἡ σ(φ) προσεγγίζεται εἰς τὸ $[0,2\pi]$, δι᾽ ἑνὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς συν φ καὶ ημ φ, ἀφοῦ διὰ $\rho = 1$ εἶναι $x = \rho$ συν φ, $y = \rho$ ημ φ. Ἑπομένως, ἡ πρότασις ἀπεδείχθη. Συνέπεια τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι ὅτι διὰ συνάρτησιν ζ(φ) συνεχῆ καὶ περιοδικὴν ὑπάρχει πολυώνυμον τριγωνομετρικὸν $T(\varphi)$ ὥστε διὰ κάθε φ καὶ κάθε ἀριθμὸν θετικὸν ε, νὰ εἶναι :

$$|\zeta - T| < \varepsilon$$

Δυνάμεθα ἐπίσης μὲ τὴν βοήθειαν τῆς προηγουμένης προτάσεως νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ σύστημα τῶν συναρτήσεων

$$1, \quad \text{συν}\,\varphi, \quad \text{ημ}\,\varphi, \quad \ldots, \quad \text{συν}\,\lambda\varphi, \quad \text{ημ}\,\lambda\varphi$$

εἶναι πλῆρες.

Πράγματι ἂς εἶναι $\sigma(\varphi)$ μία γενικῶς συνεχὴς συνάρτησις εἰς τὸ $[0,2\pi]$ καὶ ἂς ἐκλέξωμεν μίαν συνάρτησιν $\zeta(\varphi)$ εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι :

$$\zeta(2\pi) = \zeta(0) \quad \text{καὶ} \quad N(\sigma - \zeta) < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Κατὰ προηγούμενον ὅμως θεώρημα δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν $T(\varphi)$ εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι

$$|\zeta - T| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$$

ὁπότε ἐκ τῆς

$$(\zeta - T)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4 \cdot 2\pi}$$

θὰ εἶναι

$$\int_0^{2\pi} (\zeta - T)^2\, d\varphi < \frac{\varepsilon^2}{4 \cdot 2\pi} \cdot 2\pi$$

ἢ ἀκόμη

$$N(\zeta - T) < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Ἐὰν λάβωμεν τώρα ὑπ' ὄψιν τὴν τριγωνικὴν ἀνισότητα

$$\sqrt{N(\sigma - T)} \leqq \sqrt{N(\sigma - \zeta)} + \sqrt{N(\zeta - T)}$$

θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{N(\sigma - T)} < \varepsilon$$

Συμπέρασμα λοιπὸν ἡ

Πρότασις. ***Τὸ σύστημα τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων***

$$1, \quad \text{συν}\,\varphi, \quad \text{ημ}\,\varphi, \quad \ldots, \quad \text{συν}\,\lambda\varphi, \quad \text{ημ}\,\lambda\varphi, \quad \ldots$$

εἶναι πλῆρες.

35. Θὰ τελειώσωμεν τώρα τὴν παροῦσαν ἔκθεσιν, δίδοντες τὴν ἀπόδειξιν τῆς θεμελιώδους προτάσεως τοῦ Weierstrass ἥτις διετυπώθη εἰς τὴν § 29 ὡς ἀκολούθως :

Πρότασις. ***Κάθε συνάρτησις συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα (γ,δ) δύναται νὰ προσεγγισθῇ ὁμαλῶς εἰς τὸ διάστημα αὐτὸ κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς συνήθους συγκλίσεως, δι' ἑνὸς πολυωνύμου.***

Κατ' ἀρχὴν παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως, νὰ ἀπεικονίσωμεν τὸ διάστημα (γ,δ) εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ διαστήματος (0,1) διὰ τῆς κάτωθι ἀλλαγῆς τῆς μεταβλητῆς

$$x = (y - \mu) : \lambda$$

καὶ τοῦτο, διότι τότε κάθε πολυώνυμον ὡς πρὸς x μετασχηματίζεται εἰς ὁμοβάθμιον πολυώνυμον ὡς πρὸς y. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θέσωμεν

$$0 < \gamma < x < \delta < 1$$

καί, δοθέντων δύο ἀκόμη αὐθαιρέτων ἀριθμῶν α καὶ β εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι

$$0 < \alpha < \gamma < \delta < \beta < 1$$

νὰ ὁρίσωμεν τὴν συνάρτησιν εἰς τὸ [α,β] διὰ προεκτάσεως τῆς συνεχείας ἐκτὸς τοῦ [γ,δ].

Ἄς θεωρήσωμεν τότε τὸ 2μ βαθμοῦ πολυώνυμον $\Pi_\mu(x)$ τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$\Pi_\mu(x) = \left(\int_\alpha^\beta \sigma(t)\,[1-(t-x^2)]^\mu\, dt\right) : 2\int_0^1 (1-t^2)^\mu\, dt$$

Θὰ δείξωμεν τότε ὅτι τὰ $\Pi_\mu(x)$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ ἐξασφαλίζουν τὴν ἐπιθυμητὴν προσέγγισιν. Πράγματι, ἐὰν πραγματοποιήσωμεν τὴν ἀλλαγὴν τῆς μεταβλητῆς $t = s + x$ εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ $\Pi_\mu(x)$ θὰ γίνῃ οὗτος

$$\int_{a-x}^{\beta-x} \sigma(s+x)\,.\,(1-s^2)\, ds$$

μὲ πεδία μεταβολῆς διὰ τὰ ὅρια ἐκ τῶν

$$-1 < \alpha - x < 0 < \beta - x < 1\,.$$

Διὰ νὰ καταστήσωμεν τώρα εὐκολωτέραν τὴν ὑπέρβασιν τοῦ $|\,\Pi_\mu - \sigma\,|$ πραγματοποιοῦμεν τὴν ὑπέρβασιν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ $\Pi_\mu(x)$ χωρίζοντες τὸ διάστημα $[\alpha-x, \beta-x]$ εἰς τὰ ὑποδιαστήματα $[\alpha-x, -n]$, $[-n,+n]$, $[+n,\beta-x]$ ὅπου n ἀριθμὸς θετικὸς ὁσονδήποτε μικρός. Ἐὰν θεωρήσωμεν τώρα τὰς ἀντικαταστάσεις :

$$A_1 = \int_{a-x}^{-n} \sigma(s+x)(1-s^2)^\mu \, ds ,$$

$$A_2 = \int_{-n}^{+n} \sigma(s+x)(1-s^2)^\mu \, ds ,$$

$$A_3 = \int_{+n}^{\beta-x} \sigma(s+x)(1-s_2)^\mu \, ds$$

θὰ ἔχωμεν

$$\Pi_\mu(x) \,.\, 2 \int_0^1 (1-s^2)^\mu \, ds = A_1 + A_2 + A_3$$

Τὰ A_1 καὶ A_3 δυνάμεθα νὰ ὑπερβῶμεν ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ μέγιστον M τῆς $|\sigma(x)|$ εἰς τὸ (α,β). Πράγματι, ἐπειδὴ

$$|A_1| < M \int_{a-x}^{-n} (1-s^2)^\mu \, ds < M \int_{-1}^{-n} (1-s^2)^\mu ds = M \int_{+n}^{+1} (1-s^2)^\mu \, ds$$

$$|A_3| < M \int_{+n}^{\beta-x} (1-s^2)^\mu \, ds < M \int_{+n}^{+1} (1-s^2)^\mu \, ds$$

θὰ εἶναι

$$|A_1| < M \int_{+n}^{+1} (1-s^2)^\mu \, ds \qquad |A_3| < M \int_{+n}^{+1} (1-s^2)^\mu \, ds$$

ἢ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως

$$\int_{+n}^{+1} (1-s^2)^\mu \, ds = m(n)$$

θὰ εἶναι

$$|A_1| < M\, m(n) \qquad |A_3| < M\, m(n) .$$

Τὸ A_2 θὰ ὑπερβῶμεν ἐὰν γράψωμεν

$$A_2 = \sigma(x) \int_{-n}^{+n} (1-s^2)^\mu \, ds + \int_{-n}^{+n} [\sigma(s+x)-\sigma(x)]\,(1-s^2)^\mu \, ds$$

ἢ ἀκόμη

$$A_2 = 2\sigma(x)\,[\,m(0)-m(n)\,] + \varepsilon\, m(0)$$

ἀφοῦ εἶναι

$$\int_{-n}^{+n}(1-s^2)^\mu\, ds = 2\int_{0}^{n}(1-s^2)^\mu\, ds =$$

$$2\left[\int_{0}^{+1}(1-s^2)^\mu\, ds + \int_{1}^{n}(1-s^2)^\mu\, ds\right] =$$

$$2\left[\int_{0}^{+1}(1-s^2)^\mu\, ds - \int_{n}^{+1}(1-s^2)^\mu\, ds\right] = 2\,[m(0)-m(n)]$$

καὶ

$$\left|\int_{-n}^{+n}[\,\sigma\,(\,s+x\,)-\sigma\,(x)\,]\,(1-s^2)^\mu\, ds\right| \leqq$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_{-n}^{+n}(1-s^2)^\mu\, ds < \frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{+1}(1-s^2)^\mu\, ds =$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\,.\,2\int_{0}^{1}(1-s^2)^\mu\, ds = \varepsilon\, m(0)$$

ἀφοῦ ἔχομεν

$$|\,\sigma(s-x)-\sigma(x)\,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς $\sigma(x)$ εἰς $(-n,+n)$ καὶ τοῦ n καταλλήλως μικροῦ.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς

$$2\,m\,(0)\,\Pi_\mu = A_1 + A_2 + A_3$$

τὴν

$$2m(0)\Pi_\mu = A_1 + 2\sigma.m(n) - 2\sigma.m(0) + \int_{-n}^{+n}[\sigma(x+s)-\sigma(x)]\,(1-s^2)^\mu\, ds + A_3$$

ἢ ἀμέσως

$$2\,m\,(0)\,|\,\Pi_\mu-\sigma\,| < |\,A_1\,| + 2\,M\,m\,(n) + \varepsilon\, m\,(0) + A_3$$

καὶ

$$|\Pi_\mu - \sigma| < \frac{M\,m(n) + 2\,m(n) + \varepsilon\,m(0) + M\,m(n)}{2\,m(0)}$$

δηλαδὴ

$$|\Pi_\mu - \sigma| < 2\,\frac{M.m(n)}{m(0)} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Δυνάμεθα ὅμως τώρα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι δι᾽ ἐκλογῆς τοῦ μ ἀρκετὰ μεγάλου ἐκ τῶν σχέσεων

$$m(n) = \int_n^1 (1-s^2)^\mu\,ds < (1-n)^\mu \int_n^1 ns < (1-s^2)^\mu$$

καὶ

$$m(0) = \int_0^1 (1-s^2)^\mu\,ds > \int_{-1}^1 (1-s^2)^\mu\,ds = \frac{1}{\mu+1}$$

λαμβάνομεν

$$\frac{m(n)}{m(0)} < (\mu+1)\,(1-n^2)^\mu$$

Ἐπειδὴ τώρα δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν ἀριθμὸν ρ εἰς τρόπον ὥστε διὰ $\mu < \rho$ νὰ εἶναι

$$2m\,\frac{m(n)}{m(0)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

θὰ ἔχωμεν $|\Pi_\mu - \sigma| < \varepsilon$ δηλαδὴ σχέσιν ἡ ὁποία ἀποδεικνύει τὴν πρότασιν.