ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟΥΣ ΝΟΜΟΥΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ὑπὸ τοῦ κ. ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ ΘΕΟΔΩΡΑΚΗ

Πτυχιούχου Μαθηματικῶν
Διπλωματούχου Ἰνστιτούτου Στατιστικῆς Παν)μίου Παρισίων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εἰς ἐργασίαν του. δημοσιευθεῖσαν εἰς εἰδικὸν τεῦχος τοῦ περιοδικοῦ «Σπουδαί», ἔτος Β', ἀρ 9, ὁ καθηγητὴς κ. Μαργαρίτης μελετᾷ τὸ πρόβλημα τῆς ἐκτιμήσεως μιᾶς ἀγνώστου παραμέτρου ἑνὸς νόμου πιθανοτήτων μὲ μίαν μεταβλητήν, ὅπως ἐμφανίζεται εἰς τὴν νεωτέραν Θεωρητικὴν Στατιστικήν.

Ἐν τῇ ἀνωτέρω μελέτῃ γίνεται μία εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόβλημα τῆς ἐκτιμήσεως ἀπὸ ἐννοιολογικῆς κυρίως πλευρᾶς, ἀναφέρεται ἡ μέθοδος τοῦ μεγίστου τῆς πιθανότητος ὡς καὶ ὁ τύπος ὁ παρέχων τὴν ἐλαχίστην διακύμανσιν, τὴν ὁποίαν δυνατὸν νὰ λάβῃ οἱοσδήποτε ἐκτιμητὴς μιᾶς ἀγνώστου παραμέτρου, ἄνευ ὅμως σχετικῆς ἀποδείξεως. Εἶναι ὁ τύπος ὁ γνωστὸς ὑπὸ τὸ ὄνομα ***ἀνισότης τῶν* Darmois — Fréchet — Cramèr — Rao.**

Θὰ προσπαθήσωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις νὰ δώσωμεν μίαν ἁπλῆν καὶ σαφῆ, ἀλλὰ συγχρόνως καὶ αὐστηράν, ἀπόδειξιν τῆς ἐν λόγῳ ἀνισότητος. Τὸ σοβαρώτερον ὅμως θὰ εἶναι ἡ προσπάθειά μας νὰ δώσωμεν τὴν γενίκευσιν τῆς ἀνισότητος ταύτης, ὡς καὶ τοῦ ὅλου προβλήματος τῆς ἐκτιμήσεως, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν περισσοτέρας τῆς μιᾶς παραμέτρους πρὸς ἐκτίμησιν. Θὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διακυμάνσεις καὶ ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως τῶν ἐκτιμήσεων ὡς καὶ ἡ ***περιοχὴ ἐμπιστοσύνης***, ἡ ὁποία, οὖσα τυχαία (random, aleátoire), νὰ καλύπτῃ μὲ ὡρισμένην πιθανότητα τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας τὰς ἀληθεῖς ἐν τῷ πληθυσμῷ τιμὰς τῶν παραμέτρων.

Ἡ ἐφαρμογὴ εἰς συγκεκριμένον παράδειγμα θὰ βοηθήσῃ νὰ γίνουν κατανοηταὶ αἱ ὄντως λεπταὶ ἔννοιαι καὶ μέθοδοι τοῦ θέματος, τὸ ὁποῖον πραγματευόμεθα.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

Ἀνισότης τῶν Darmois—Fréchet—Cramèr—Rao

Ἂς ὀνομάσωμεν $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)$ (ἀρχικὸν τῆς λέξεως likelihood) τὴν ***πυκνότητα πιθανότητος*** τῶν παρατηρήσεων $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ δηλ. τὴν πυκνότητα τοῦ νόμου, τὸν ὁποῖον ἀκολουθεῖ τὸ σημεῖον $M_n(x_1, \ldots, x_n)$ εἰς τὸν χῶρον τῶν n διαστάσεων. Ὀνομάζεται συνήθως ***συνάρτησις πιθανότητος*** (likelihood function, fonction de vraisemblance) ἢ ***πιθανότης τῆς παραμέτρου***.

Ἂς ὀνομάσωμεν $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ μίαν ***ἐκτίμησιν***, ἢ μᾶλλον ἕνα ***ἐκτιμητὴν*** δοθείσης συναρτήσεως $\Phi(\theta)$ τῆς ἀγνώστου παραμέτρου θ καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι χωρὶς συστηματικὸν σφάλμα δηλ. ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$E\,[t] = \Phi(\theta)\,.$$

Γνωρίζομεν ὅτι δι' ἕνα νόμον πιθανοτήτων χαρακτηριζόμενον ἀπὸ τὴν πυκνότητα f(x) ἡ ροπὴ α' τάξεως δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$m_1 = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx\,.$$

Γενικεύοντες ταύτην εἰς τὸν χῶρον τῶν n διαστάσεων θὰ ἔχωμεν ὡς μαθηματικὴν ἐλπίδα τῆς νέας τυχαίας μεταβλητῆς $t\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ τὴν σχέσιν :

$$E\,[t] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} t(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.\,L(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2, \ldots, dx_n = \Phi(\theta)$$

ἢ γράφοντες συντόμως τὸ ὁλοκλήρωμα $n^{ης}$ τάξεως θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{\int t\,.\,L dx = \Phi}$$

Ἐὰν εἰς τὰ ὅρια ὁλοκληρώσεως δὲν περιέχεται ἡ παράμετρος θ, ἀποδεικνύεται ὅτι δυνάμεθα νὰ παραγωγίσωμεν ὡς πρὸς θ ὑπὸ τὸ σύμβολον $\int$ ὅτε προκύπτει :

$$(1) \qquad \int t\,.\,\frac{\partial L}{\partial \theta} dx = \frac{d\Phi}{d\theta}\,.$$

Ἐπειδὴ δι' οἱανδήποτε κατανομὴν ἡ ὁλικὴ πιθανότης ἰσοῦται μὲ 1 θὰ εἶναι :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} L\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)\, dx_1, dx_2, \ldots, dx_n = 1$$

ἢ $\int L\, dx = 1$

Ἂν παραγωγίσωμεν ὡς πρὸς θ προκύπτει :

$$\int \frac{\partial L}{\partial \theta} dx = 0 \quad \text{(παράγωγος σταθερᾶς)}$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις Φ(θ) εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\Phi\,.\int \frac{\partial L}{\partial \theta} dx = \int \Phi\,.\,\frac{\partial L}{\partial \theta} dx = 0$$

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) καὶ εὑρίσκομεν:

$$\int (t-\Phi) \cdot \frac{\partial L}{\partial \theta}\, dx = \frac{d\Phi}{d\theta} \qquad \text{ἢ} \qquad \int (t-\Phi) \cdot \frac{1}{L}\, \frac{\partial L}{\partial \theta} \cdot L\, dx = \frac{d\Phi}{d\theta}$$

$$\text{ἢ} \qquad \int (t-\Phi) \cdot \frac{\partial \log L}{\partial \theta} \cdot L\, dx = \frac{d\Phi}{d\theta}$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $E[t] = \Phi$ καὶ $E\left[\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right] = \int \left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right) . L . dx =$

$= \int \frac{\partial L}{\partial \theta}\, dx = 0$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται:

$$\int \left[t - E[t] \right] \cdot \left[\frac{\partial \log L}{\partial \theta} - E\left[\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right] \right] . L\, dx = \frac{d\Phi}{d\theta} .$$

Ἐνθυμούμενοι τώρα ὅτι ἡ συνδιακύμανσις (covariance) δύο τυχαίων μεταβλητῶν μιᾶς διδιαστάτου συνεχοῦς κατανομῆς δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\text{cov.}\ [x, y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\, x - E(x)\,] . [\, y - E(y)\,]\ f(x, y)\, dx\, dy .$$

Τὸ προηγούμενον n-πλοῦν ὁλοκλήρωμα δίδει τὴν ***συνδιακύμανσιν τῶν δύο τυχαίων μεταβλητῶν*** t καὶ $\frac{\partial \log L}{\partial \theta}$, ὑπὸ γενικευμένην βέβαια ἔννοιαν, καθότι ἑκάστη τυγχάνει καὶ ἀνὰ μία συνάρτησις τῶν παρατηρήσεων (x_1, x_2, . . . , x_n) καὶ τῆς ἀγνώστου παραμέτρου θ. Τελικῶς λοιπὸν ἔχομεν:

$$\text{cov.}\left[t,\ \frac{\partial \log L}{\partial \theta} \right] = \frac{d\Phi}{d\theta}$$

Ἐπειδὴ διὰ δύο τυχαίας μεταβλητὰς x, y ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\text{cov.}\ [x, y] = r\, \sigma_x\, \sigma_y \qquad \text{ἢ} \qquad [\, \text{cov}\, [x, y]\,]^2 = r^2 \sigma_x^2\, \sigma_y^2$$

καὶ ἐπειδὴ $r^2 \leqslant 1$ εὑρίσκομεν τὴν ἀνισότητα τοῦ Schwartz:

$$V[x] . V[y] \geqslant [\text{cov.}\ [x, y]\,]^2 \qquad (V = \text{variance} = \text{διακύμανσις})$$

Ἄρα διὰ τὴν περίπτωσίν μας

$$\left[\frac{d\Phi}{d\theta} \right]^2 \leqslant V[t] . V\left[\frac{\partial \log L}{\partial \theta} \right]$$

Ἐπειδὴ ὅμως πάντοτε ἡ διακύμανσις εἶναι θετική (ἄθροισμα τετραγώνων), **τελικῶς** εὑρίσκομεν:

$$\boxed{V[t] \geqslant \frac{\left(\dfrac{d\Phi}{d\theta}\right)^2}{V\left[\dfrac{\partial \log L}{\partial \theta}\right]}} \qquad (\mathrm{I})$$

Αὐτὴ εἶναι ἡ πρώτη μορφὴ τῆς ἐξεταζομένης ἀνισότητος ἡ ὁποία μᾶς παρέχει τὴν ἐλαχίστην διακύμανσιν τοῦ ἐκτιμητοῦ.

῾Ο παρανομαστὴς γράφεται :

$$V\left[\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right] = E\left[\left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right)^2\right] - \left[E\left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right)\right]^2,$$

συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν τῆς κεντρικῆς ροπῆς $2^{\alpha\varsigma}$ τάξεως : $\mu_2 = m_2 - m_1^2$.

᾿Επειδὴ ὅμως $E\left[\dfrac{\partial \log L}{\partial \theta}\right] = 0$ τελικῶς εὑρίσκομεν :

$$V\left[\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right] = E\left[\left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2}\right]$$

ἀφοῦ προβῶμεν καὶ εἰς δευτέραν παραγώγισιν.

Συνήθως παριστάνουν διὰ $I(\theta)$ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος τῆς ἀνισότητος καὶ τὴν ἀποκαλοῦν ***ποσότητα πληροφορίας*** ἀναφορικῶς πρὸς τὴν παράμετρον θ (ἄρχικὸν τῆς λέξεως information), τὴν ὁποίαν ἀντλοῦμεν ἐξ ἑνὸς δείγματος παρατηρήσεων. ᾿Εὰν ὁ πληθυσμὸς δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν παράμετρον θ, τότε κανὲν δεῖγμα δὲν δύναται νὰ μᾶς πληροφορήσῃ ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς θ, διότι πράγματι $I(\theta) = 0$, ἀφοῦ ἡ παράγωγος $\dfrac{\partial \log L}{\partial \theta} = 0$. Αὐτὸ δικαιολογεῖ καὶ τὴν ὀνομασίαν της. Οὕτω ἔχομεν :

$$\boxed{I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \log L}{\partial \theta}\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{L}\cdot\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2}\right]} \qquad (\mathrm{II})$$

῾Η ἀποδειχθεῖσα τώρα πρότασις δύναται νὰ διατυπωθῇ οὕτω :

᾿Εὰν τὸ διάστημα μεταβολῆς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς x δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πρὸς ἐκτίμησιν παράμετρον θ καὶ ἐὰν ἡ πυκνότης πιθανότητος εἶναι παραγωγίσιμος ὑπὸ τὸ σύμβολον τοῦ ἀθροίσματος, τότε ἡ διακύμανσις οἱασδήποτε ἐκτιμήσεως τῆς Φ(θ), ἀνεξαρτήτως τῆς μεθόδου ἐκτιμήσεως, εἶναι τουλάχιστον ἴση πρός :

$$\boxed{V[t] \geqslant \frac{\left(\dfrac{d\Phi}{d\theta}\right)^2}{I(\theta)}} \qquad (\mathrm{III})$$

Ἐὰν γίνεται κατευθεῖαν ἐκτίμησις τῆς παραμέτρου θ δηλ. ἐὰν $\Phi(\theta) = \theta$ τότε :

$$\boxed{V[t] \geqslant \frac{1}{I(\theta)} \quad \text{ἢ} \quad I^{-1}} \qquad \text{(IV)}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν 2 παραμέτρων, ὁ συμβολισμὸς I^{-1} θὰ σημαίνει τὴν ἀντίστροφον τῆς δοθείσης τετραγωνικῆς μήτρας τῶν διακυμάνσεων καὶ τῆς συνδιακυμάνσεως τῶν παραμέτρων, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέρος.

Ἐὰν αἱ παρατηρήσεις ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) εἶναι ***ἀνεξάρτητοι*** μεταξύ των, τότε ἡ συνάρτησις πιθανότητος L θὰ εἶναι ἴση πρός :

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i\,;\,\theta)$$

$$\log L = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_j\,;\,\theta) = n \log f(x\,;\,\theta),$$

ὅπου $f(x\,;\,\theta)$ εἶναι ἡ πυκνότης πιθανότητος τῆς μελετωμένης κατανομῆς.

Τώρα, ἡ ποσότης πληροφορίας γράφεται :

$$I(\theta) = n\,E\left[\left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta}\right)^2\right] = -\,n\,E\left[\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2}\right].$$

Ὁ γενικὸς τύπος τῆς ἐλαχίστης διακυμάνσεως οἱουδήποτε ἐκτιμητοῦ $\widehat{\theta}$ τῆς παραμέτρου θ λαμβάνει τελικῶς τὴν μορφήν, προκειμένου περὶ ἀνεξαρτήτων παρατηρήσεων :

$$\boxed{\sigma^2_{\widehat{\theta}} \geqslant \frac{1}{n\,.\,E\left[\left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta}\right)^2\right]} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{-n\,E\left[\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta^2}\right]}} \qquad \text{(V)}$$

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ ἐκτιμήσωμεν παραμέτρους ἀσυνεχοῦς μὲν κατανομῆς ὅπως τὸ p τοῦ δυωνυμικοῦ νόμου ἢ τὸ m τοῦ νόμου τοῦ Poisson, τότε ἡ ἀνισότης μας λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\boxed{\sigma^2_{\widehat{\theta}} \geqslant \frac{1}{n \sum_i \left(\frac{d \log p_i}{d\theta}\right)^2 .\, p_i} = \frac{1}{n \sum_i \frac{(p_i')^2}{p_i}}}$$

ὅπου p_i ἡ πυκνότης πιθανότητος τῆς ἀσυνεχοῦς κατανομῆς, διὰ δὲ τὴν περίπτωσιν συνεχοῦς κατανομῆς (ἐκτίμησις τοῦ m ἢ τοῦ σ τοῦ κανονικοῦ νόμου) θὰ εἶναι :

$$\sigma^2_{\hat{\theta}} \geqslant \frac{1}{n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta} \right)^2 f(x\,;\,\theta)\,dx}$$

Ἀπεδείχθη ὑπὸ τῶν καθηγητῶν R. Fisher, Dugué, Cramèr ὅτι ἐὰν ὑπάρχῃ εἷς ἐκτιμητὴς μιᾶς παραμέτρου ἔχων ὡς διακύμανσιν τὴν ἐλαχίστην τοιαύτην, ὁ ὁποῖος καλεῖται καὶ ***ἄριστος ἐκτιμητὴς*** ἢ ***ὁ πλέον ἀποτελεσματικὸς*** (efficient, efficace), τότε οὗτος εὑρίσκεται ὡς λύσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ μεγίστου τῆς πιθανότητος (maximum likelhood).

Συνάγεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐλαχίστης διακυμάνσεως, ὅταν ὑπάρχῃ, μιᾶς ἐκτιμήσεως τῆς παραμέτρου θ, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ποσότης πληροφορίας I(θ), ἡ ὁποία δὲν ἀπαιτεῖ τὴν ἐκ τῶν προτέρων εὕρεσιν τοῦ ἐκτιμητοῦ, ὁ ὁποῖος θὰ καταστῇ γνωστὸς ἀπὸ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως τοῦ μεγίστου τῆς πιθανότητος*.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Ταυτόχρονος ἐκτίμησις πολλῶν παραμέτρων καὶ ἡ γενίκευσις τῆς ἐλαχίστης διακυμάνσεως.

Ἄς ὀνομάσωμεν t_i ($i = 1, 2, \ldots, r$) τοὺς ***ἐκτιμητάς***, δηλ. συναρτήσεις τῶν n παρατηρήσεων ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), καὶ οἱ ὁποῖοι ἔστω ὅτι εἶναι ***ἀνεξάρτητοι*** μεταξύ των. Ἄς ὀνομάσωμεν ἐπίσης θ_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) τὰς πρὸς ἐκτίμησιν ***παραμέτρους*** ἤ, γενικώτερον, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ἐκτιμήσωμεν ***ταυτοχρόνως*** τὰς συναρτήσεις τῶν παραμέτρων :

$$\Phi_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k), \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Γενικεύοντες τὴν ἔννοιαν τοῦ ***χωρὶς συστηματικὸν σφάλμα ἐκτιμητοῦ*** (umbiased estimate) διὰ τὸν ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις $E[t] = \theta$, προκειμένου περὶ μιᾶς παραμέτρου, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τῆς ***μήτρας—στήλη*** τῶν ἐκτιμητῶν t_i ἰσοῦται μὲ τὴν μήτραν—στήλη τῶν συναρτήσεων Φ_i τῶν πρὸς ἐκτίμησιν παραμέτρων ($\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$) δηλ.

$$E \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \ldots \\ t_r \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \ldots \\ \Phi_r \end{pmatrix}$$

---

* ***Βιβλιογραφία*** :

M. Kendall: «The Advanced Theory of Statistics» Vol. II, ch. 17, § 17.25—17.27.

H. Cramèr: «Mathematical Methods of Statistics» § 32.3 — 32.5.

G. Darmois: «Παραδόσεις Θεωρητικῆς Στατιστικῆς» Ἰνστιτούτου Στατιστικῆς Πανεπιστημίου Παρισίων, σελ. 191—201.

D. Dugué: Application des propriétés de la limite au sens du calcul des probabilités à l' étude de diverses questions d' estimation Journal de l' École Polytechnique, 1937, p. 305.

ἢ συντόμως $E[t] = \Phi(\theta)$, ἐὰν μὲ t δηλοῦμεν τὴν μήτραν—στήλη τῶν $(t_1, \ldots, t_r)$ καὶ μὲ $\Phi(\theta)$ τὴν μήτραν—στήλη τῶν $\Phi_i(\theta)$, ὅπου μὲ θ ἐννοοῦμεν τὸ σύνολον τῶν πρὸς ἐκτίμησ.ν παραμέτρων. Ἂς ὑποθέσωμεν ἐπίσης ὅτι ὑφίσταται ἡ ***μήτρα τῶν διακυμάνσεων καὶ συνδιακυμάνσεων*** ἢ τῆς ***διασπορᾶς*** τῶν ἐκτιμητῶν $t_1, t_2, \ldots, t_r$ καὶ ἂς τὴν παραστήσωμεν διὰ

$$V = \left\langle V_{jl} \right\rangle_{j,\, l=r}$$

(τετραγωνικὴ μήτρα τάξεως r δηλ. ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς γραμμῶν καὶ στηλῶν).

Ἂς παραστήσωμεν ἐκ νέου διὰ $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ τὴν ***πυκνότητα πιθανότητος*** τῶν παρατηρήσεων $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ἤ, ὅπως ὀνομάζεται ἄλλως ***τὴν συνάρτησιν πιθανότητος*** (likelihood function, κατὰ τὸν R. Fisher).

Γενικεύοντες τὰς ἤδη εὑρεθείσας σχέσεις εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μιᾶς παραμέτρου δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$\int t_i L dx = \Phi_i(\theta)$$

ἢ παραγωγίζοντες (ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας, ὡς ἀνεφέραμεν ἤδη, ἔχομεν τὸ δικαίωμα τοῦτο)

$$\int t_i \frac{\partial L}{\partial \theta_j} dx = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta_j}.$$

Ἂς παραστήσωμεν διὰ Δ τὴν μήτραν τῶν μερικῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων τῶν παραμέτρων

$$\Delta = \left\langle \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta_j} \right\rangle_{i,\, j=k}$$

καὶ διὰ $I(\theta)$ ***τὴν μήτραν πληροφορίας*** (information matrix), ἀντίστοιχον τῆς ποσότητος πληροφορίας :

$$\boxed{I(\theta) = \left\langle -E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right] \right\rangle = \left\langle E\left[\frac{\partial \log L}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \log L}{\partial \theta_j}\right] \right\rangle}$$

Εἶναι μία τετραγωνικὴ μήτρα τάξεως k, ὅσος ὁ ἀριθμὸς τῶν παραμέτρων θ_j, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν ἐδῶ σταθερὰς τιμάς, τὰς θεωρητικὰς τοιαύτας τοῦ ἐξεταζομένου πληθυσμοῦ, καὶ ὄχι τὰς ἐκ τοῦ δείγματος τῶν παρατηρήσεων ἐκτιμήσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι μεταβληταὶ ἀναλόγως τῆς μεθόδου ἐκτιμήσεως καὶ τοῦ μεγέθους τοῦ δείγματος.

Ἡ μήτρα τῶν διακυμάνσεων καὶ συνδιακυμάνσεων τῶν $r + k$ τυχαίων μεταβλητῶν ὁριζομένων ἐκ τῶν παρατηρήσεων :

$$\left(t_1, t_2, \ldots, t_r, \frac{\partial \log L}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \log L}{\partial \theta_2}, \ldots, \frac{\partial \log L}{\partial \theta_k} \right)$$

εἶναι ἀναγκαστικῶς ***ὡρισμένη - θετική*** (1). Ὅθεν δύναται νὰ γραφῇ :

$$\begin{pmatrix} V & \Delta \\ \widehat{\Delta} & I \end{pmatrix}, \quad \text{ὅπου } \widehat{\Delta} \text{ εἶναι ἡ } \textbf{\textit{ἐναλλαγμένη}} \text{ (2) (transposée) τῆς } \Delta .$$

Ἂς πολ/σωμεν ***ἐξ ἀριστερῶν*** (τοῦτο ἔχει σημασίαν εἰς τὸν πολ/σμὸν τῶν μητρῶν διότι δὲν ἰσχύει ὁ νόμος ***τῆς ἀντιμεταθέσεως*** τῶν παραγόντων) ἐπὶ τὴν μήτραν :

$$\begin{pmatrix} 1_r & -\Delta . I^{-1} \\ 0 & I^{-1} \end{pmatrix}$$

ὅπου 1_r ἡ ***μοναδιαία μήτρα*** (unit matrix) τάξεως r δηλ. μία τετραγωνικὴ μήτρα, μὲ στοιχεῖα τῆς κυρίας διαγωνίου ἴσα μὲ 1 καὶ τὰ ὑπόλοιπα ἴσα μὲ 0 δηλ. εἶναι τῆς μορφῆς :

$$1_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$$

Μὲ I^{-1} τὴν ***ἀντίστροφον μήτραν*** τῆς $I(\theta)$. Ἐξ ὁρισμοῦ πρέπει νὰ ἔχωμεν $I . I^{-1} = 1_k$ δηλ. ἡ μοναδιαία μήτρα τάξεως ὅσος ὁ ἀριθμὸς τῶν πρὸς ἐκτίμησιν παραμέτρων. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἀντίστροφον δοθείσης τετραγωνικῆς μήτρας σχηματίζομεν τὴν μήτραν μὲ στοιχεῖα τὰ ***ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα*** τῶν στοιχείων τῆς δοθείσης $(-1)^{i+j} a^{ij}$, ὅπου a^{ij} εἶναι ἡ ***ἐλάσσων*** (minor) ὁρίζουσα ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ στοιχεῖον a_{ij} τῆς δοθείσης A. Τὸν σχηματισθέντα πίνακα διαιροῦμεν διὰ τῆς ὁριζούσης $| a_{ij} |_{i, j=n}$ καὶ ὁρίζομεν τὴν A^{-1}, ἀντίστροφον τῆς δοθείσης μήτρας A.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο προαναφερθέντας πίνακας (ὁ πολ/σμὸς εἶναι ὅμοιος ὅπως καὶ διὰ τὰς ὁριζούσας) θὰ προκύψῃ ὡς γινόμενον ἡ μήτρα :

1) Ὀνομάζομεν ***ὡρισμένην - θετικὴν*** (définie - positive) μίαν τετραγωνικὴν μήτραν μὲ πραγματικὰ στοιχεῖα, ἐὰν ἔχῃ τὰ διαγώνια στοιχεῖα θετικὰ καὶ ἡ ἀντίστοιχος ὁρίζουσα εἶναι θετικὴ (συνθῆκαι Hadamard) δηλ.

$$a_{ij} > 0 \quad \text{καὶ} \quad | a_{ij} |_{(n, n)} > 0 .$$

2) Προκύπτει διὰ μεταθέσεως τῶν γραμμῶν καὶ τῶν στηλῶν, ὅπως συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰς ὁριζούσας.

$$\begin{pmatrix} V - \Delta \,.\, I^{-1} \,.\, \widehat{\Delta} & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ I^{-1} \,.\, \widehat{\Delta} & \vdots & 1_k \end{pmatrix}$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὰς ἑξῆς προτάσεις :

1. Ἡ μήτρα $V - \Delta \,.\, I^{-1} \,.\, \widehat{\Delta}$ εἶναι ***ὡρισμένη - θετική***.

2. Ὡς πόρισμα τῆς προηγουμένης ἔχομεν ὅτι : ἡ ***γενικευμένη διακύμανσις*** $|V|$ τῶν ἐκτιμητῶν $t_1, t_2, \ldots, t_r$ εἶναι ***τουλάχιστον ἴση*** πρὸς τὴν ὁρίζουσαν $\left| \Delta \,.\, I^{-1} \,.\, \widehat{\Delta} \right|$ δηλ.

$$\boxed{\left| V(t) \right| \geqslant \left| \Delta \,.\, I^{-1} \,.\, \widehat{\Delta} \right|}$$

3. Ἐὰν γίνεται κατ' εὐθεῖαν ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων θ_i καὶ ὄχι τῶν συναρτήσεων $\Phi_i(\theta)$ δηλ. ἐὰν ἔχωμεν :

$\Phi_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \theta_i$ τότε ἡ $\Delta = \left(\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial \theta_j} \right)_{i,\, j=k}$ γίνεται

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\theta_1} & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_1} \cdots & \dfrac{\partial\theta_k}{\partial\theta_1} \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\theta_2} & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_2} \cdots & \dfrac{\partial\theta_k}{\partial\theta_2} \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\theta_k} & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\theta_k} \cdots & \dfrac{\partial\theta_k}{\partial\theta_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix} = 1_k$$

ἤτοι μοναδιαία μήτρα k τάξεως.

Ἡ προηγουμένη σχέσις μεταξὺ τῶν ὁριζουσῶν λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\boxed{\left| V(t) \right| \geqslant \left| I^{-1}(\theta) \right|}$$

εἰς τὴν ὁποίαν $\left| V(t) \right|$ εἶναι ἡ ὁρίζουσα τῆς ***γενικευμένης διακυμάνσεως*** καὶ $\left| I^{-1} \right|$ ἡ ὁρίζουσα τῆς ἀντιστρόφου τῆς μήτρας πληροφορίας.

Οὕτω ἐπανεύρομεν ***γενικευμένην*** τὴν ἀνισότητα Darmois.

Ἡ ἑρμηνεία τῆς ἀνισότητος ταύτης ἢ τοῦ ἰσοδυνάμου δηλ. ὅτι ἡ μήτρα $V - I^{-1}$ εἶναι ***ὡρισμένη - θετική***, γεωμετρικῶς εἶναι ἡ ἑξῆς: τὸ ***ὑπερελλειψοειδὲς τῆς διασπορᾶς*** τῶν ἐκτιμητῶν t_i, τὸ ὁποῖον εἶναι τυχαῖον μεταβλητὸν ἀναλόγως πρὸς τοὺς ἐκτιμητὰς τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν, ἐξαρτωμένους ἀπὸ τὰς μεθόδους ἐκτιμήσεως καὶ τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος, εἶναι ***ἐξωτερικὸν*** δηλ. ἐμπεριέχει, ὡς πρὸς ***τὸ ὑπερελλειψοειδὲς τῆς πληροφορίας*** τὸ ὁποῖον εἶναι ***σταθερὸν καὶ ὡρισμένον***, ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τῶν ἐκτιμητῶν, διότι εἰς τὸν πίνακα $I(\theta)$ ὑποτίθεται ὅτι εἰσέρχονται αἱ σταθεραὶ θεωρητικαὶ τιμαὶ τῶν παραμέτρων θ, αἱ ὁποῖαι χαρακτηρίζουν τὸν πληθυσμόν.

Διὰ $k=2$ ἔχομεν περίπτωσιν ἐλλείψεως καὶ διὰ $k=3$ ἐλλειψοειδές.

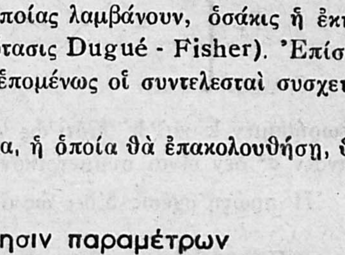
Ἐκ τοῦ πίνακος $V - I^{-1}$, ὁ ὁποῖος εἶναι ***ὡρισμένος - θετικός***, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἀνισότητας τῶν διακυμάνσεων τῶν ἐκτιμήσεων τῶν παραμέτρων δηλ. τὰς ἐλαχίστας τιμὰς τούτων, τὰς ὁποίας λαμβάνουν, ὁσάκις ἡ ἐκτίμησις γίνεται διὰ τῆς ***μεγίστης πιθανότητος*** (πρότασις Dugué - Fisher). Ἐπίσης θὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐλάχισται συνδιακυμάνσεις ἑπομένως οἱ συντελεσταὶ συσχετίσεως τῶν ἐκτιμήσεων ἀνὰ δύο τῶν παραμέτρων.

Ἡ ἐφαρμογὴ εἰς συγκεκριμένον παράδειγμα, ἡ ὁποία θὰ ἐπακολουθήσῃ, θὰ κατασιήσῃ σαφῆ τὰ ἀνωτέρω.

2. Περιοχὴ ἐμπιστοσύνης τῶν πρὸς ἐκτίμησιν παραμέτρων

α´) *Μικρὰ δείγματα* :

Ἄς ζητήσωμεν τώρα, μετὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν παραμέτρων διὰ τῆς μεθόδου τῆς μεγίστης πιθανότητος καὶ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν διακυμάνσεων καὶ συνδιακυμάνσεων τῶν ἐκτιμήσεων τούτων, νὰ καθορίσωμεν μίαν ***περιοχὴν ἐμπιστοσύνης***, ἡ ὁποία νὰ καλύπτῃ ***ταυτοχρόνως*** τὰς ἀληθεῖς θεωρητικὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων ἐν τῷ πληθυσμῷ.



Σχ. 1

Θὰ εἶναι ἕνα ***χωρίον τοῦ ὑπερεπιπέδου*** εἰς τὸν χῶρον τῶν k διαστάσεων ($k=$ ἀριθμὸς τῶν πρὸς ἐκτίμησιν παραμέτρων), τὸ ὁποῖον θὰ περιέχῃ (ἔννοια ἐντελῶς συμβολική, ἐὰν $k>3$) τὸ σημεῖον $M_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$.

Λαμβάνομεν τὴν περίπτωσιν τοῦ κανονικοῦ νόμου μὲ μίαν μεταβλητὴν καὶ ζητοῦμεν τὴν περιοχὴν ἐμπιστοσύνης διὰ τὰς παραμέτρους **m** καὶ σ^2 καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν. Δὲν δυνάμεθα, διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν μίαν ***περιοχὴν*** μὲ βαθμὸν ἐμπιστοσύνης $1 - P$, νὰ ἀναζητήσωμεν κεχωρισμένως ἓν ***διάστημα*** ἐμπιστοσύνης ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν βαθμὸν $\sqrt{1-P}$ διὰ τὸν μέσον **m** χρησιμοποιοῦντες τὸν νόμον τοῦ **t τοῦ Student** καὶ ἓν διάστημα ἐμπιστοσύνης τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ διὰ τὸ σ^2 βάσει τοῦ ***νόμου τοῦ*** X^2. Καὶ τοῦτο διότι τὸ ὀρθογώνιον ἐμπιστοσύνης τὸ ὁποῖον θὰ εὑρίσκαμεν δὲν θ' ἀντιστοιχοῦσε εἰς τὸν βαθμὸν ἐμπιστοσύνης

$$\sqrt{1-P} \times \sqrt{1-P} = 1 - P$$

ἀφοῦ τὰ t καὶ X^2 δὲν εἶναι ἀνεξάρτητα καὶ ἡ σύνθετος πιθανότης δὲν ἰσοῦται ἁπλῶς μόνον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μερικῶν πιθανοτήτων.

Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς νόμους τοῦ ἐμπειρικοῦ μέσου $\bar{x}$ καὶ τῆς ἐμπειρικῆς διακυμάνσεως s^2, οἱ ὁποῖοι, ὡς γνωστόν, εἶναι ***ἀνεξάρτητοι***, ἀφοῦ τὸ δεῖγμα ἐξάγεται ἐκ κανονικοῦ πληθυσμοῦ. Θὰ ζητήσωμεν τὰς τιμὰς τῶν h, k καὶ k' αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὰς δύο σχέσεις :

$$P_r\left[-h < \frac{\bar{x}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < h\right] = \sqrt{1-P}$$

$$P_r\left[k < \frac{ns^2}{\sigma^2} < k'\right] = \sqrt{1-P}$$

Ἐθεωρήσαμεν k καὶ k' διότι ὡς γνωστὸν τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης διὰ τὴν διακύμανσιν σ^2 δὲν εἶναι συμμετρικόν, ὡς μᾶς τὸ παρέχει ὁ νόμος τοῦ X^2.

Ἡ πρώτη σχέσις δίδει ὡς ἄμεσον ἀποτέλεσμα τὴν ἐξίσωσιν :

$$\left(\frac{\bar{x}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2 = h^2 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{h^2\sigma^2 = n(m-\bar{x})^2} \qquad (1)$$

ἡ ὁποία παριστάνει ***παραβολὴν*** ὡς πρὸς m καὶ σ^2. Εἰς ταύτην τὰ n, $\bar{x}$ εἶναι γνωστά, τὸ δὲ h εὑρίσκεται ἐκ τοῦ πίνακος τοῦ κανονικοῦ νόμου μὲ βαθμὸν ἐμπιστοσύνης $\sqrt{1-P}$ π.χ. $\sqrt{0{,}95}$.

Ἡ δευτέρα σχέσις γράφεται :

$$\boxed{\frac{ns^2}{k'} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{k}} \qquad (2)$$

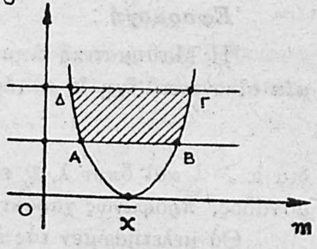
ὅπου τὰ k, k' ἔχουν εὑρεθῇ ἐκ τοῦ πίνακος τοῦ X^2 μὲ βαθμοὺς ἐλευθερίας $\nu = n-1$. Ἡ γεωμετρικὴ σημασία τῆς ἀνισότητος ταύτης εἶναι ὅτι τὸ σ^2 ἐμπίπτει ἐντὸς τοῦ χωρίου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα τῶν m :

$$\sigma^2 = \frac{ns^2}{k'} \quad \text{καὶ} \quad \sigma^2 = \frac{ns^2}{k}$$

Ἄρα ἡ ***περιοχὴ ἐμπιστοσύνης***, λύσις τοῦ συστήματος (1), (2), ἡ ὁποία θὰ καλύπτῃ μὲ πιθανότητα 1 — P τὰς ἀληθεῖς τιμὰς τῶν παραμέτρων m καὶ σ^2 εἶναι τὸ ***παραβολικὸν χωρίον*** ΑΒΓΔ .

β') Μεγάλα δείγματα :

Ἀπεδείχθη ὑπὸ τῶν καθηγητῶν Dugué, Wilks, Wald ἡ ἀκόλουθος γενικευμένη πρότασις : αἱ διὰ τῆς μεθόδου τῆς μεγίστης πιθανότητος εὑρεθεῖσαι ἐκτιμήσεις $\widehat{\theta_j}$ τῶν ἀγνώστων παραμέτρων θ_j $(j=1, \ldots, k)$ ἀκολουθοῦν **ἀσυμπτωτικῶς** (διὰ $n \to \infty$) μίαν κανονικὴν κατανομὴν εἰς τὸν χῶρον τῶν k διαστάσεων χαρακτηριζομένην ἀπὸ τὴν τετραγωνικὴν μορφήν :



Σχ. 2

$$u = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} I_{ij}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \cdot (\widehat{\theta_i} - \theta_i)(\widehat{\theta_j} - \theta_j)$$

ὅπου I_{ij} εἶναι τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας πληροφορίας τῶν **παραμέτρων** θ_j, καὶ ὅτι ἡ τετραγωνικὴ αὕτη μορφὴ ἀκολουθεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μεγάλων δειγμάτων, τὸν νόμον τοῦ X^2 μὲ k βαθμοὺς ἐλευθερίας.

Ὁμοίως καὶ ἡ τετραγωνικὴ μορφή :

$$V = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} I_{ij}(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}, \ldots, \widehat{\theta_k}) \cdot (\widehat{\theta_i} - \theta_i) \cdot (\widehat{\theta_j} - \theta_j)$$

ἀκολουθεῖ τὸν νόμον τοῦ X^2, ὅπου I_{ij} εἶναι τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας πληροφορίας **τῶν ἐκτιμήσεων** $\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}, \ldots, \widehat{\theta_k}$.

Ἑπομένως μία **περιοχὴ ἐμπιστοσύνης**, μὲ πιθανότητα $1 - P$, διὰ τὰς ἀληθεῖς παραμέτρους $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, ὁρίζεται εἰς τὸν χῶρον τῶν k διαστάσεων ὑπὸ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ **ὑπερελλειψοειδοῦς**, τοῦ ἔχοντος ἐξίσωσιν :

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} I_{ij}(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}, \ldots, \widehat{\theta_k}) \cdot (\widehat{\theta_i} - \theta_i)(\widehat{\theta_j} - \theta_j) = X^2_{1-P}(k)$$

Ἡ περιοχὴ αὕτη, εἰς τὴν περίπτωσιν 2 παραμέτρων, εἶναι μία ἔλλειψις εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο τούτων παραμέτρων καὶ καλύπτει μὲ μίαν πιθανότητα $1 - P$ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας (θ_1, θ_2) δηλ. τὰς ἀληθεῖς ἐν τῷ πληθυσμῷ τιμὰς τῶν παραμέτρων.

Βιβλιογραφία :

H. Cramèr: «Mathematical Methods of Statistics» § 32.6—33.1, 33.3, 34.1—34.3.

G. Darmois: «Cours de Statistique Mathématique Institut de Statistique, Université de Paris p. 201—210 καὶ 227—232.

M. Kendall: «The Advanced Theory of Statistics» Vol. II, p. 82.

Ἐφαρμογή :

Ἡ Μαθηματικὴ Δημογραφία μᾶς δίδει τὸν ἑξῆς νόμον : ἡ πιθανότης ἵνα *μία* οἰκογένεια ἔχῃ k παιδιὰ ἀκριβῶς δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$P_k = \lambda p^k$$

διὰ $k \geqslant 1$ καὶ ὅπου λ, p εἶναι δύο ἄγνωστοι θετικαὶ παράμετροι μικρότεραι τῆς μονάδος, προφανῶς χαρακτηριστικαὶ τῆς μελετωμένης κοινότητος ἀτόμων.

Θὰ μελετήσωμεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

1. Λαμβάνομεν εἰς τὴν τύχην ἐκ τοῦ δοθέντος πληθυσμοῦ δεῖγμα n οἰκογενειῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἔχει k_1 παιδιά, ἡ δευτέρα k_2 . . . καὶ ἡ n-οστὴ k_n παιδιά. Θέλομεν νὰ ἐκτιμήσωμεν ταυτοχρόνως, βάσει τῶν παρατηρήσεών μας, τὰς παραμέτρους λ καὶ p χρησιμοποιοῦντες τὴν μέθοδον τῆς *μεγίστης πιθανότητος* (maximum likelihood).

Ἡ πιθανότης, ἵνα μεταξὺ τῶν n οἰκογενειῶν τοῦ δείγματος ὑπάρχῃ μία οἰκογένεια μὲ k_1 παιδιά, μιὰ δευτέρα μὲ k_2 παιδιὰ κ.ο.κ. δίδεται, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν συνθέτων πιθανοτήτων, ὑπὸ τῆς ἀκολούθου συναρτήσεως πιθανότητος (γεγονότα ἀνεξάρτητα ἀλλήλων) :

$$(1) \quad L = (P_{k_1}) \cdot (P_{k_2}) \ldots (P_{k_n}) = (\lambda p^{k_1}) \cdot (\lambda p^{k_2}) \ldots (\lambda p^{k_n}) = \lambda^n p^N ,$$

ἐὰν θέσωμεν $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = N =$ ὁλικὸς ἀριθμὸς παιδιῶν.

Μία κατ' εὐθεῖαν ἐφαρμογὴ ὅμως τῆς μεθόδου τῆς μεγίστης πιθανότητος ὁδηγεῖ εἰς ἀδιέξοδον, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν.

Διὰ νὰ παρακάμψωμεν τὴν δυσκολίαν ταύτην εἰσάγομεν ἓν νέον στοιχεῖον βοηθητικὸν τὸ n_0, τὸ ὁποῖον δηλοῖ τὸν ἀριθμὸν τῶν οἰκογενειῶν τοῦ δείγματος *χωρὶς παιδιά*. Οὕτω, ἀφοῦ P_0, P_1, P_2, . . . , P_r δηλοῦν τὰς πιθανότητας, ἵνα *μία* οἰκογένεια ἔχῃ ἀντιστοίχως 0, 1, 2, . . . r παιδιά, τότε $P_0^{n_0}$ θὰ δηλοῖ τὴν πιθανότητα ἵνα n_0 οἰκογένειαι, μεταξὺ τῶν n, δὲν ἔχουν παιδιὰ (θεώρημα συνθέτων πιθανοτήτων),

$P_1^{n_1}$ = πιθανότης ἵνα n_1 οἰκογένειαι ἔχουν ἀνὰ *ἕνα* παιδὶ

$P_2^{n_2}$ = » ἵνα n_2 » » » *δύο* παιδιὰ

$P_r^{n_r}$ = » ἵνα n_r » » » r παιδιὰ

ὅπου $\sum_{i=0}^{r} n_i = n$.

Ἡ συνάρτησις (1) λαμβάνει τότε τὴν μορφήν :

$$L = (P_0^{n_0}) \cdot (P_1^{n_1}) \cdot (P_2^{n_2}), \ldots, (P_r^{n_r})$$

ἢ ἀντικαθιστῶντες τὰ P_1, P_2, . . . , P_r προκύπτει :

$$(2) \quad L = P_0^{n_0} . (\lambda p)^{n_1} . (\lambda p^2)^{n_2} \ldots (\lambda p^r)^{n_r} = P_0^{n_0} . \lambda^{n_1+n_2+\ldots n_r} . p^{n_1+2n_2+\ldots+rn_r}.$$

Ἀλλὰ προφανῶς P_0 θὰ εἶναι ἡ συμπληρωματικὴ πιθανότης τοῦ ἀθροίσματος τῶν πιθανοτήτων, ἵνα ἔχουν ἀπὸ 1 ἕως ∞ (καθαρῶς θεωρητικὴ σύλληψις, διότι ὑπάρχει κάποιο ὅριον) ἀριθμὸν παιδιῶν δηλ.

$$P_0 = 1 - \sum_{r=1}^{\infty} P_r = 1 - (P_1 + P_2 + P_3 + , \ldots ,) =$$

$$= 1 - \lambda (p + p^2 + p^3 + \ldots + p^r + \ldots) = 1 - \frac{\lambda p}{1 - p}$$

διότι ἡ πρόοδος εἶναι φθίνουσα, ἀφοῦ p εἶναι προφανῶς μικρότερον τῆς μονάδος, ὡς συνάγεται ἐκ τῆς μορφῆς τῆς πυκνότητος πιθανότητος, ἡ ὁποία χαρακτηρίζει τὸν νόμον τῆς δοθείσης κοινότητος ἀτόμων.

Ἐπίσης ἔχομεν ὅτι:

$$n_1 + n_2 + , \ldots , + n^r = n - n_0 \quad \text{καὶ} \quad n_1 + 2n_2 + 3n_3 + , \ldots , + rn^r = N$$

δηλ. ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς παιδιῶν, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὅλαι μαζὶ αἱ n οἰκογένειαι.

Ἡ συνάρτησις (2) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$(A) \quad \boxed{L = \left(1 - \frac{\lambda p}{1 - p}\right)^{n_0} . \lambda^{n-n_0} . p^N}$$

Ἡ παράστασις αὐτὴ δίδει ὑπὸ νέαν μορφὴν τὴν πιθανότητα ἵνα μεταξὺ τῶν n οἰκογενειῶν τοῦ δείγματος ὑπάρχουν n_0 οἰκογένειαι χωρὶς παιδιά, n_1 μὲ ἀνὰ 1 παιδὶ κ.ο.κ., ἐν τῷ συνόλῳ δὲ ἔχουν N παιδιά.

Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καὶ προκύπτει:

$$\log L = n_0 \log \left(1 - \frac{\lambda p}{1 - p}\right) + (n - n_0) \log \lambda + N \log p$$

αἱ δὲ ἐξισώσεις (ἀφοῦ εἶναι δύο παράμετροι πρὸς ἐκτίμησιν) τῆς μεγίστης πιθανότητος, συμφώνως πρὸς τὴν Ἀνάλυσιν, εἶναι:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \log L}{\partial p} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial p} = - n_0 . \frac{p / 1 - p}{1 - \dfrac{\lambda p}{1 - p}} + \frac{n - n_0}{\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial p} = - n_0 . \frac{\lambda / (1 - p)^2}{1 - \dfrac{\lambda p}{1 - p}} + \frac{N}{p} = 0 .$$

Ἡ λύσις τοῦ ἀνωτέρω συστήματος μᾶς δίδει ὡς ***ἐκτιμήσεις τῶν δύο παραμέτρων***:

$$\text{(B)} \quad \boxed{\widehat{p} = \frac{N + n_0 - n}{N}, \quad \widehat{\lambda} = \frac{(n - n_0)^2}{n(N + n_0 - n)}}$$

Εἰς μίαν συγκεκριμένην περίπτωσιν παρατηρήσεως 1000 οἰκογενειῶν εὑρέθη ὅτι ἔχουν ἐν ὅλῳ 2372 παιδιὰ καὶ ὅτι 198 οἰκογένειαι ἐξ αὐτῶν εἶναι χωρὶς παιδιά. Ἐὰν ζητοῦμεν τὴν τιμὴν τῶν παραμέτρων τοῦ νόμου τοῦ πληθυσμοῦ ἐκ τοῦ ὁποίου ἐλήφθη τὸ δεῖγμα ἀρκεῖ ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις:

$$n = 1000$$
$$N = 2372$$
$$n_0 = 198$$

ὅτε προκύπτει ὡς ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραμέτρων:

$$\boxed{\widehat{p} = 0{,}662, \quad \widehat{\lambda} = 0{,}41}$$

2. Ζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν ***τὸν μέσον ἀριθμὸν παιδίων*** κατὰ οἰκογένειαν, ὡς προκύπτει ἀπὸ τὸν θεωρητικὸν νόμον τοῦ θεωρουμένου πληθυσμοῦ, ἀνεξαρτήτως πάσης συγκεκριμένης παρατηρήσεως.

Ἀφοῦ τὸ k, ἀριθμὸς παιδιῶν κατὰ οἰκογένειαν, εἶναι ***τυχαία μεταβλητὴ*** τοῦ νόμου πιθανοτήτων, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα τῆς μεταβλητῆς ταύτης. Ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν (περίπτωσις ἀσυνεχοῦς μεταβλητῆς, ἀφοῦ ἡ k λαμβάνει μόνον ἀκεραίας, θετικὰς τιμάς).

$$E[k] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\lambda p^k = \lambda[p + 2p^2 + 3p^3 + , \ldots] =$$

$$= \lambda p(1 + 2p + 3p^2 +, \ldots) = \lambda p \cdot \frac{d}{dp}(p + p^2 + p^3 + \ldots) = \lambda p \frac{d}{dp}\left(\frac{p}{1-p}\right) = \frac{\lambda p}{(1-p)^2}$$

ἤτοι

$$\text{(Γ)} \quad \boxed{E[k] = \frac{\lambda p}{(1-p)^2}}$$

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο δίδει τὸν θεωρητικὸν μέσον ἀριθμὸν παιδίων τοῦ ὑπ' ὄψιν πληθυσμοῦ. Ἡμεῖς ὅμως διαθέτομεν τὸν ἐκ τῆς παρατηρήσεως ἐμπειρικὸν μέσον $\overline{k} = \frac{N}{n}$ καὶ ζητοῦμεν νὰ ἴδωμεν ἐὰν ἀποτελῇ ***μίαν ἐκτίμησιν χωρὶς συστηματικὸν σφάλμα*** (Umbiased estimation) τοῦ θεωρητικοῦ μέσου. Θὰ ἐρευνήσωμεν τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα $E[\overline{k}] = E\left[\frac{N}{n}\right]$. Ἐδῶ εἰσέρχονται δύο μεγέθη τὸ n καὶ τὸ N. Τὸ πρῶτον εἶναι ***σταθερὸν*** καὶ ὡρισμένον (ἀριθμὸς παρατηρηθεισῶν οἰκογενειῶν), ἐνῶ τὸ N = συνολικὸς ἀριθμὸς παιδίων, εἶναι ***τυχαία μεταβλητὴ*** καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν **n** τυχαίων μεταβλητῶν,

$k_1 + k_2 + k_3 + , \ldots , + k_n$, ὅπου ἕκαστον τῶν k_i δίδει τὸν ἀριθμὸν τῶν παιδίων ἀνὰ μιᾶς παρατηρηθείσης οἰκογενείας, ὡς ἐλέχθη ἐν ἀρχῇ.

Οὕτω ἔχομεν :

$$E\left[\frac{N}{n}\right] = \frac{1}{n} E[N] = \frac{1}{n} E[k_1+k_2+\ldots k_n] = \frac{1}{n} [E(k_1)+E(k_2)+\ldots]$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ τυχαῖαι μεταβληταὶ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ἀκολουθοῦν τὸν αὐτὸν νόμον πιθανότητος P_k τῆς τυχαίας μεταβλητῆς k, ἡ ἰσότης γίνεται :

$$E\left[\frac{N}{n}\right] = \frac{1}{n} [n \cdot E(k)] = E[k].$$

Ἤτοι ὁ ἐμπειρικὸς μέσος $\bar{k}$ ἀποτελεῖ μίαν χωρὶς συστηματικὸν σφάλμα ἐκτίμησιν τοῦ θεωρητικοῦ μέσου $E[k] = \frac{\lambda p}{(1-p)^2}$.

Πράγματι μία ἐπαλήθευσις τοῦ ἀποτελέσματος τούτου δίδεται ἀπὸ τὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν τῶν 1000 παρατηρηθεισῶν οἰκογενειῶν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν

$$n = 1000 \qquad N = 2372 \qquad \text{καὶ} \quad \lambda = \widehat{\lambda} = 0{,}41, \qquad p = \widehat{p} = 0{,}662$$

ὅτε προκύπτει :

ἐμπειρικὸς μέσος : $\bar{k} = \frac{N}{n} = \frac{2372}{1000} = 2{,}372$

θεωρητικὸς μέσος : $E[k] = \frac{\lambda p}{(1-p)^2} = \frac{0{,}41 \times 0{,}662}{(1-0{,}662)^2} = 2{,}37$

δηλ. ἀποτέλεσμα ταυτόσημον. Τὸ τελευταῖον ἀποτέλεσμα δίδει τὸν μέσον θεωρητικὸν ἀριθμὸν παιδιῶν κατὰ οἰκογένειαν εἰς τὸ σύνολον τοῦ ἐξεταζομένου πληθυσμοῦ. Μία γενικωτέρα ἐπαλήθευσις ἐπιτυγχάνεται, ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦ E[k] ἀντικαταστήσωμεν τὰς διὰ τῆς μεθόδου τοῦ maximum likelihood εὑρεθέντας γενικοὺς τύπους (B) ἐκτιμήσεως τῶν παραμέτρων p, λ. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν κάπως μακρῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων προκύπτει πράγματι ἀκριβῶς :

$$E[k] = \frac{N}{n}.$$

3. Ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Στατιστικῆς Ἀναλύσεως, μετὰ τὴν ἐκτίμησιν μιᾶς παραμέτρου, βάσει ἑνὸς δείγματος παρατηρήσεων, καθορίζομεν ***ἓν διάστημα ἐμπιστοσύνης*** διὰ τὴν θεωρητικὴν τιμὴν ταύτης ἐν τῷ πληθυσμῷ, μὲ μίαν ὡρισμένην πιθανότητα ἀκριβείας (κατώφλι ἐμπιστοσύνης). Δηλ. κατασκευάζομεν ἓν διάστημα καὶ λέγομεν ὅτι τοῦτο καλύπτει τὴν θεωρητικὴν τιμὴν τῆς παραμέτρου μὲ πιθανότητα 95 %. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ διάστημα εἶναι μία ***τυχαία μεταβλητὴ*** λαμβάνουσα διαφόρους τιμὰς (ἀνωτέραν, κατωτέραν), ἀναλόγως τοῦ ἀναστήματος τοῦ δείγματος, καὶ αἱ ὁποῖαι κινοῦνται γύρω ἀπὸ τὴν σταθερὰν ἄγνωστον θεωρητικὴν τιμὴν τῆς παραμέτρου. Ἐν τελευταίᾳ ἀναλύσει «διάστημα ἐμπιστοσύνης μὲ πιθανότητα 95 %» σημαίνει ὅτι ἐὰν κατασκευάσωμεν 100 τοιαῦτα

τυχαῖα διαστήματα, τὰ 95 ἐκ τούτων θὰ καλύπτουν τὴν θεωρητικὴν τιμήν. Ἡ θεωρία αὐτὴ ὁδηγεῖ καὶ εἰς τὰ tests σημαντικότητος μιᾶς (ἢ περισσοτέρων) βάσει δείγματος ἐκτιμηθείσης παραμέτρου.

Ἀντίστοιχον πρόβλημα τίθεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταυτοχρόνου ἐκτιμήσεως ***δύο*** ἀγνώστων παραμέτρων μὲ τὴν διαφορὰν ὅμως ὅτι δὲν πρόκειται περὶ ἑνὸς συμμετρικοῦ διαστήματος δηλ. ***ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος*** ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς παραμέτρου ἐντὸς τοῦ ὁποίου θὰ πίπτῃ ἡ ἀληθὴς τιμὴ ταύτης, ἀλλὰ περὶ ἑνὸς ***ἐπιπέδου χωρίου*** ἢ μᾶλλον μιᾶς ***περιοχῆς ἐμπιστοσύνης*** εὑρισκομένης ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τῶν πρὸς ἐκτίμησιν παραμέτρων, ἐντὸς τῆς ὁποίας θὰ ἐμπίπτουν αἱ ἀληθεῖς τιμαὶ αὐτῶν.

Τὴν περιοχὴν ταύτην θὰ προσπαθήσωμεν νὰ καθορίσωμεν βάσει τῶν ἐκτιμήσεων τῶν παραμέτρων λ καὶ p, μὲ πιθανότητα 95 %, στηριζόμενοι εἰς τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὸ Β′ μέρος τῆς παρούσης μελέτης.

3. 1 Θὰ ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὴν ***μήτραν πληροφορίας*** I(θ). Ἔχομεν εὕρει τὸν τύπον:

$$I(\theta) = \left(-E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2}\right] \right) = \left(\begin{array}{c:c} E\left[-\dfrac{\partial^2 \log L}{\partial p^2}\right] & E\left[-\dfrac{\partial^2 \log L}{\partial p\partial\lambda}\right] \\ \hdashline E\left[-\dfrac{\partial^2 \log L}{\partial p\partial\lambda}\right] & E\left[-\dfrac{\partial^2 \log L}{\partial\lambda^2}\right] \end{array} \right)$$

Ἤδη ὅμως ἔχομεν εὕρει ὅτι:

$$\frac{\partial \log L}{\partial p} = -\frac{n_0\lambda}{(1-p)(1-p-\lambda p)} + \frac{N}{p}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = -\frac{n_0 p}{1-p-\lambda p} = \frac{n-n_0}{\lambda}$$

Συνεχίζομεν τὴν παραγώγισιν καὶ προκύπτει:

$$-\frac{\partial^2 \log L}{\partial p^2} = \frac{-n_0\lambda(-2+2p-\lambda+2\lambda p)}{(1-p)^2(1-p-\lambda p)^2} + \frac{N}{p^2}$$

$$-\frac{\partial^2 \log L}{\partial p\partial\lambda} = \frac{n_0}{(1-p-\lambda p)^2}$$

$$-\frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda^2} = \frac{n_0\,p^2}{(1-p-\lambda p)^2} + \frac{n-n_0}{\lambda^2}$$

'Επειδὴ n = ἀριθμὸς **σταθερὸς** καὶ **ὡρισμένος**

n_0 = τυχαία μεταβλητὴ

N = τυχαία μεταβλητὴ

καὶ
$$E[n_0] = n \,.\, P_0 = n\left(1 - \frac{\lambda p}{1-p}\right) = \frac{n(1-p-\lambda p)}{1-p}$$

$$E[N] = n \,.\, E[k] = \frac{n\lambda p}{(1-p)^2}$$

κατόπιν ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς προηγουμένας σχέσεις τῶν δευτέρων παραγώγων τελικῶς προκύπτει ὡς ἀποτέλεσμα :

$$\boxed{-E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial p^2}\right] = \frac{n\lambda(2-2p+\lambda-2\lambda p)}{(1-p)^3(1-p-\lambda p)} + \frac{n\lambda}{p(1-p)^2}}$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial p \partial \lambda}\right] = \frac{E[n_0]}{(1-p-\lambda p)^2} = \frac{n(1-p-\lambda p)}{(1-p)(1-p-\lambda p)^2}$$

ἢ

$$\boxed{-E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial p \partial \lambda}\right] = \frac{n}{(1-p)(1-p-\lambda p)}}$$

καὶ τέλος

$$\boxed{-E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda^2}\right] = \frac{np}{\lambda(1-p-\lambda p)}}$$

'Αντικαθιστῶμεν $n = 1000$ καὶ $p = \widehat{p} = 0{,}662$, $\lambda = \widehat{\lambda} = 0{,}41$

δηλ. μὲ τὰς τιμὰς ἐκτιμήσεως καὶ εὑρίσκομεν τελικῶς ὡς στοιχεῖα τῆς μήτρας πληροφορίας :

$$E\left[-\frac{\partial^2 \log L}{\partial p^2}\right] = 91.590, \qquad E\left[-\frac{\partial^2 \log L}{\partial p \partial \lambda}\right] = 44\,053,$$

$$E\left[-\frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda^2}\right] = 24\,073.$$

Οὕτω ἡ μήτρα πληροφορίας ἐμφανίζεται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} 91\,590 & 44\,053 \\ 44\,053 & 24\,073 \end{pmatrix}$$

Διὰ νὰ καταλήξωμεν τελικῶς εἰς τὴν γενικευμένην ἀνισότητα τῆς ἐλαχίστης διακυμάνσεως πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς ἀντιστρόφου μήτρας I^{-1}. Γνωρίζομεν ὅτι εἰς μίαν τετραγωνικὴν μήτραν

$$I = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

ἀντιστοιχεῖ ὡς ἀντίστροφος τοιαύτη ἡ κάτωθι :

$$I^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{ab - c^2} & \dfrac{-c}{ab - c^2} \\ \dfrac{-c}{ab - c^2} & \dfrac{a}{ab - c^2} \end{pmatrix}$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ ἤδη ὑπολογισθέντα στοιχεῖα τῆς I καὶ προκύπτει τελικῶς :

$$I^{-1} = \begin{pmatrix} 3{,}71 \times 10^{-4} & -1{,}79 \times 10^{-4} \\ -1{,}79 \times 10^{-4} & 0{,}90 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Ἐπειδὴ τώρα ἡ μήτρα $V - I^{-1}$ (ἡ V εἶναι ἡ μήτρα τῶν διακυμάνσεων καὶ συνδιακυμάνσεων τῶν ἐκτιμήσεων $\widehat{p}$, $\widehat{\lambda}$) εἶναι ***ὡρισμένη - θετική*** τότε θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ μήτρα μὲ στοιχεῖα τὰς διαφορὰς τῶν στοιχείων δηλ. ἡ

$$\begin{pmatrix} V[\widehat{p}] - 3{,}71 \, . \, 10^{-4} & \operatorname{cov}[\widehat{p}, \widehat{\lambda}] + 1{,}79 \, . \, 10^{-4} \\ \operatorname{cov}[\widehat{p}, \widehat{\lambda}] + 1{,}79 \, . \, 10^{-4} & V[\widehat{\lambda}] - 0{,}98 \, . \, 10^{-4} \end{pmatrix}$$

εἶναι ***ὡρισμένη - θετική***.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι :

$$V[\widehat{p}] \geqslant 3{,}71 \,.\, 10^{-4}, \qquad V[\widehat{\lambda}] \geqslant 0{,}98 \,.\, 10^{-4}$$

$$\mathrm{cov}\,[\widehat{p}, \widehat{\lambda}] + 1{,}79 \,.\, 10^{-4} \geqslant 0 \,.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων ἔχει γίνει διὰ τῆς μεθόδου **τοῦ maximum τῆς πιθανότητος**, ἕπεται ὅτι αἱ διακυμάνσεις αὐτῶν λαμβάνουν τὰς ἐλαχίστας τιμάς. Ἤτοι :

$$V[\widehat{p}] = 3{,}71 \,.\, 10^{-4}, \qquad V[\widehat{\lambda}] = 0{,}98 \,.\, 10^{-4}$$

$$\mathrm{cov}\,[\widehat{p}, \widehat{\lambda}] = -1{,}79 \,.\, 10^{-4} \quad \text{ἢ} \quad \varrho[\widehat{p}, \widehat{\lambda}] \,.\, \sigma_{\widehat{\lambda}} \,.\, \sigma_{\widehat{p}} = -1{,}79 \,.\, 10^{-4} \,.$$

Μετὰ τὰς πράξεις εὑρίσκομεν ὡς τελικὰς τιμάς :

$$\boxed{\begin{array}{c} \sigma[\widehat{\lambda}] = 0{,}019, \qquad \sigma[\widehat{p}] = 0{,}010 \\[1ex] \text{σεντελ. συσχετ.} \quad \rho[\widehat{p}, \widehat{\lambda}] = -\,0{,}95 \end{array}}$$

3. 2 Μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν διακυμάνσεων καὶ συντελεστοῦ συσχετίσεως τῶν ἐκτιμήσεων τῶν παραμέτρων $\widehat{\lambda}$, $\widehat{p}$ τίθεται τὸ πρόβλημα νὰ εὑρεθῇ ***ἡ περιοχὴ ἐμπιστοσύνης*** ἡ ὁποία μὲ ὡρισμένον βαθμὸν βεβαιότητος νὰ καλύπτῃ τὰς ἀληθεῖς τιμὰς τῶν ἀγνώστων παραμέτρων λ καὶ p .

Συμφώνως πρὸς τὰ ἐκτεθέντα ἐν τῷ Β' μέρει, ἀφοῦ πρόκειται περὶ μεγάλου δείγματος (n = 1000) καὶ δύο παραμέτρων, ἡ περιοχὴ αὕτη θὰ εἶναι ***ἔλλειψις***. Εὑρέθη ὡς πίναξ πληροφορίας ὁ ἀκόλουθος :

$$I = \begin{pmatrix} 91\,590 & 44\,053 \\ 44\,053 & 24\,073 \end{pmatrix}$$

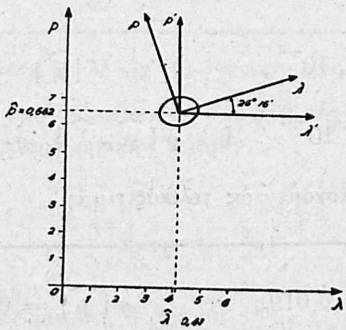
Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ὑπερελλειψοειδοῦς εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως ἐμπιστοσύνης εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν λ, p :

$$\boxed{91.590\,(\widehat{p}-p)^2 + 2 \times 44.053\,(\widehat{p}-p)\,(\widehat{\lambda}-\lambda) + 24.073\,(\widehat{\lambda}-\lambda)^2 = X^2_{0{,}95}(2) = 5{,}99}$$

Λαμβάνομεν ὡς νέαν ἀρχὴν τὸ σημεῖον ἐκτιμήσεως $(\widehat{\lambda}, \widehat{p})$ καὶ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις :

$$91 . 59\, p'^2 + 2 . 44\,053\, p'\lambda' + 24\,073\, \lambda'^3 = 5{,}99 .$$

Ἐπειδὴ εἶναι τῆς μορφῆς $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + H = 0$ ἕπεται ὅτι ἡ νέα ἀρχὴ εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως. Ἤτοι τὸ σημεῖον $(\widehat{\lambda} = 0{,}41,\ \widehat{p} = 0{,}662)$ εἶναι τὸ κέντρον της.



Σχ. 3

Ἀκολουθοῦντες τὸν γνωστὸν ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας μετασχηματισμὸν διὰ στροφῆς τῶν ἀξόνων, εὑρίσκομεν τελικῶς ὡς ἐξίσωσιν τῆς ἐλλείψεως, ἀναφερομένης εἰς τοὺς ἄξονας συμμετρίας της, τὴν κάτωθι :

$$\boxed{113.331{,}5\, P^2 + 2.331{,}5\, \lambda^2 = 5{,}99}$$

Γράφοντες αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{\lambda^2}{\dfrac{599}{2331{,}5}} + \dfrac{P^2}{\dfrac{599}{113331{,}5}} = 1$

παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔλλειψις μὲ ἡμιάξονας

$$\alpha = \frac{599}{2331{,}5} = 0{,}051 \quad \text{καὶ} \quad \beta = \frac{599}{113.331{,}5} = 0{,}0073$$

καλύπτει μὲ μίαν πιθανότητα 95 % τὰς ἀληθεῖς τιμὰς τῶν παραμέτρων λ καὶ p, δηλ. τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας (λ, p).