Η ΦΟΡΟΛΟΓΙΚΗ ΠΟΛΙΤΙΚΗ ΕΙΣ ΕΝΑ ΝΕΟΚΛΑΣΣΙΚΟΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΑΝΑΠΤΥΞΕΩΣ

Τοῦ κ. ΘΕΟΦΑΝΟΥΣ ΜΠΕΝΟΥ *

Τοῦ Πανεπιστημίου Atlantic Florida τῶν Η.Π.Α.

I. Εἰσαγωγὴ

Ὁ καθηγητὴς κ. E. Phelps, τὸ ἔτος 1965, εἰς ἓν ἄρθρον τὸ ὁποῖον ἐδημοσιεύθη εἰς τὴν «American Economic Review» (1), ἀπέδειξε τὴν ἀκόλουθον σπουδαίαν ἰδιότητα διὰ τὸν χρυσοῦν κανόνα ἀναπτύξεως μιᾶς οἰκονομίας. «Ἑκάστη ὅδευσις ἀναπτύξεως τῆς οἰκονομίας ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ καθαρὰ ἀπόδοσις τῶν ἐπενδύσεων εἶναι διαρκῶς μικροτέρα τοῦ ἐπιτοκίου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν ὅδευσιν ἀναπτύξεως τοῦ χρυσοῦ κανόνος εἶναι δυναμικῶς μὴ ἀποδοτική. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑπάρχει πάντοτε ὁποία τις ἑτέρα ὅδευσις ἀναπτύξεως, ἡ ὁποία ἄρχεται μὲ τὸ ἴδιον ἀπόθεμα κεφαλαίου καὶ παρέχει περισσότερα καταναλωτικὰ ἀγαθὰ τοὐλάχιστον δι' ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα».

Παρόμοιον πρόβλημα ἐξητάσθη ὑπὸ τῶν καθηγητῶν κ. κ. D. Gass καὶ M. Yaari εἰς μεταγενέστερον ἄρθρον των (2). Οὗτοι, χρησιμοποιοῦντες μαθηματικὸν ὑπόδειγμα ἐξετάζουν τὴν δυνατότητα ἐπιτεύξεως ἀρίστης κατανομῆς τοῦ εἰσοδήματος. Ἐπισημαίνουν δέ, ὅτι ἡ βασικὴ δυσχέρεια ἐπιτεύξεως τῆς ἀρίστης κατανομῆς, ἔγκειται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ οἰκονομικὴ ἀποκέντρωσις πιέζει τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα νὰ ἀποταμιεύουν μέρος τοῦ εἰσοδήματός των διὰ νὰ τὸ καταναλώσουν ὅταν θὰ παύσουν νὰ ἐργάζωνται. Αὐτὸ συντελεῖ οὕτως, ὥστε μέρος τοῦ εἰσοδήματος νὰ μὴ χρησιμοποιῆται ποτὲ οἰκονομικῶς. Εἰσηγοῦνται οὗτοι τὴν ἀνάπτυξιν τραπεζικοῦ συστήματος διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς ἀρίστης κατανομῆς τοῦ εἰσοδήματος.

Εἰς τὸ παρὸν ἄρθρον θὰ ἐξετάσωμεν ἀντίθετον περίπτωσιν, κατὰ τὴν

---

* Θὰ ἤθελα νὰ εὐχαριστήσω τοὺς Καθηγητὰς κ. κ. Ε. Δρανδάκην καὶ Κλ. Μπανταλούκαν διὰ τὴν βοήθειάν των εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην.

1) Second Essay on the Golden Rule of Accumulation, A E R, 1965, vol. LV, No 4, σελ. 794.

2) A Re–Examination of the Pure Consumption Loans Model, Cowles Foundation Discussion Paper, No 195, 1965.

ὁποίαν ἡ συμπεριφορὰ τῶν οἰκονομούντων ἀτόμων εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἡ οἰκονομία, ἂν καὶ ἀρχίζῃ ἀπὸ τὴν ὅδευσιν τοῦ χρυσοῦ κανόνος, τελικῶς ἀκολουθεῖ διάφορον ὅδευσιν ἀναπτύξεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀπό τινα χρονικὴν περίοδον καὶ μετέπειτα ὁ λόγος κεφαλαίου – ἐργασίας εἶναι πάντοτε μικρότερος τοῦ λόγου κεφαλαίου – ἐργασίας τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν ὅδευσιν τοῦ χρυσοῦ κανόνος. Περαιτέρω, εἰσηγούμεθα τὴν δέουσαν φορολογικὴν πολιτικήν, πρὸς ἀποφυγὴν τοιαύτης μετακινήσεως τῆς οἰκονομίας ἀπὸ τὴν ὅδευσιν τοῦ χρυσοῦ κανόνος ἀναπτύξεως (3). Τὸ μαθηματικὸν ὑπόδειγμα τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιήσωμεν εἶναι τὸ ἴδιον ὅπερ ἐχρησιμοποιήθη ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ κ. P. A. Diamond (4).

II. Τὸ μαθηματικὸν ὑπόδειγμα

Ὑποθέτομεν μίαν οἰκονομίαν εἰς τὴν ὁποίαν παρατηροῦμεν τὰ ἀκόλουθα φαινόμενα:

(α) Πληθυσμός. Ἡ χρονικὴ διάρκεια ζωῆς τῶν ἀτόμων τῆς ὑπὸ ἐξέτασιν οἰκονομίας διαιρεῖται εἰς δύο περιόδους. Εἰς τὴν πρώτην περίοδον τῆς ζωῆς των, ἐργάζονται τὰ ἐν λόγῳ ἄτομα παράγοντα μίαν μονάδα παραγωγῆς. Κατὰ τὴν δευτέραν περίοδον, παύουν ταῦτα νὰ ἐργάζωνται καὶ κατὰ συνέπειαν οὐδὲν παράγουν. Περαιτέρω, ὑποθέτομεν ὅτι ἕκαστον ἄτομον ἔχει τὴν ἰδίαν συνάρτησιν χρησιμότητος, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν καταναλωθέντων ἀγαθῶν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ζωῆς του. Ἐπίσης ὑποθέτομεν, ὅτι ἕκαστον ἄτομον προσπαθεῖ νὰ μεγιστοποιήσῃ τὴν συνάρτησιν χρησιμότητός του, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς Cobb - Douglas.

$$U = e_1^{\beta} \cdot e_2^{1-\beta} \qquad (1)$$

Ἔνθα: $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ εἶναι μία παράμετρος καὶ e_1, e_2 ἡ κατανάλωσις διὰ τὴν πρώτην καὶ δευτέραν περίοδον ἀντιστοίχως. Ἔστω, ὅτι συμβολίζομεν μὲ $L_{(t)}$ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀτόμων τῶν γεννηθέντων εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς περιόδου t. Κατὰ συνέπειαν, $L_{(t)}$ ἀποτελεῖ τὸ ἐργατικὸν δυναμικὸν τῆς οἰκονομίας κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον t, καὶ ἱκανοποιεῖ τὴν σχέσιν:

$$L_{(t)} = L_0 (1+\eta)^t \qquad (2)$$

Ἡ σχέσις (2) δηλοῖ, ὅτι τὸ ἐργατικὸν δυναμικὸν αὐξάνει κατὰ ἓν σταθερὸν ποσοστὸν η.

(β) Τεχνολογία. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ οἰκονομία παράγει ἑκάστην

3) Ὡς χρυσοῦς κανὼν ἀναπτύξεως ὁρίζεται ὁ λόγος ἐκεῖνος τοῦ κεφαλαίου πρὸς τὴν ἐργασίαν, ὁ ὁποῖος παρέχει τὴν μεγίστην κατὰ κεφαλὴν κατανάλωσιν.

4) P. A. Diamond, National Dept in a Neoclassical Growth Model, A E R, 1965.

χρονικὴν περίοδον παραγωγῆς προϊόν, τὸ ὁποῖον παριστῶμεν Y_t, διὰ τῆς χρήσεως δύο συντελεστῶν παραγωγῆς, τῆς ἐργασίας L_t καὶ τοῦ κεφαλαίου K_t. Ἡ παραγωγικὴ διαδικασία περιγράφεται μὲ μίαν συνάρτησιν παραγωγῆς, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς Cobb - Douglas :

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \qquad o \leqslant \alpha \leqslant 1 \tag{3}$$

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις παραγωγῆς εἶναι ὁμοιογενὴς πρώτου βαθμοῦ, μὲ θετικὰς τὰς πρώτας παραγώγους ὡς πρὸς K_t καὶ L_t.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν

$$k = \frac{K_t}{L_t}, \quad y_t = \frac{Y_t}{L_t},$$

λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$y_t = Ak^{\alpha} = f(k). \tag{4}$$

(γ) Ἀποταμίευσις. Ὑποθέτομεν, ὅτι ὑφίσταται πλήρης ἀνταγωνισμὸς καὶ ὅτι ἡ ἐργασία ἀμείβεται δι' ἑνὸς ἡμερομισθίου w_t, ἴσου πρὸς τὸ ὁριακὸν προϊόν της, ἤτοι :

$$w_t = f(k) - kf'(k) = (1 - a)\,Ak^{\alpha}. \tag{5}$$

Τὸ προϊὸν δὲ τοῦτο τῆς ἐργασίας κατανέμεται μεταξὺ παρούσης καταναλώσεως καὶ ἀποταμιεύσεως. Οὕτως, ἡ νέα γενεὰ παρέχει τὴν ἀναγκαίαν προσφορὰν κεφαλαίου εἰς τὴν ἀγορὰν καὶ ἀκολούθως καταναλίσκει εἰς τὴν δευτέραν περίοδον ζωῆς της ὅλας τὰς ἐπὶ μέρους ἀποταμιεύσεις καὶ τοὺς τόκους τοὺς ὁποίους θὰ λάβῃ.

Ἤδη παριστῶμεν τὴν κατανάλωσιν τῆς δευτέρας περιόδου διὰ τῆς ἑπομένης ἐξισώσεως :

$$e_{t+1}^2 = (1+i_{t+1})s_t. \tag{6}$$

Ἔνθα s_t δηλώνει τὴν κατὰ κεφαλὴν ἀποταμίευσιν καὶ i_{t+1} τὸ ἐπιτόκιον τῆς περιόδου $t+1$.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ οἰκονομία εὑρίσκεται ἀρχικῶς εἰς τὴν ὅδευσιν τοῦ χρυσοῦ κανόνος ἀναπτύξεως. Περαιτέρω ἕκαστον ἄτομον προσπαθεῖ, ὡς εἴπομεν, νὰ μεγιστοποιήσῃ τὴν συνάρτησιν χρησιμότητός του, ὑπὸ τὸν εἰσοδηματικὸν περιορισμόν :

$$e_1 + \frac{e_2}{1+i} = w$$

Ἐὰν σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Lagrange, ἔχουσαν οὕτω:

$$V = e_1^{\beta} \cdot e_2^{1-\beta} + \lambda \left(e_1 + \frac{e_2}{1+i} - w \right)$$

καὶ θέσωμεν τὰς πρώτας παραγώγους ὡς πρὸς e_1, e_2 καὶ λ ἴσας πρὸς τὸ μηδέν, ἐν συνεχείᾳ δὲ λύσωμεν τὸ σύστημα, θὰ λάβωμεν τὰς σχέσεις:

$$e_1 = \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \frac{1}{1+i} \cdot e_2,$$

$$e_1 = \beta w,$$

καὶ

$$e_2 = (1+i)s$$

Ἐπίσης εἰς παρομοίαν οἰκονομίαν, διὰ νὰ ἔχωμεν ἰσορροπίαν εἰς τὴν ἀγορὰν κεφαλαίου, ἡ κατωτέρω σχέσις θὰ πρέπει νὰ ἱκανοποιῆται.

$$K_{t+1} = S_t = s_t L_t \tag{7}$$

Ἔνθα τὸ μικρὸν s_t παριστᾷ τὴν κατὰ κεφαλὴν ἀποταμίευσιν. Δοθείσης τῆς ὑποθέσεως τοῦ πλήρους ἀνταγωνισμοῦ, τὸ ὕψος τοῦ ἐπιτοκίου θὰ εἶναι:

$$i_{t+1} = f'(k) = \alpha A(1+\eta)^{1-\alpha} (1-\beta)^{\alpha-1} w_t^{\alpha-1}. \tag{8}$$

Ὡσαύτως:

$$i_t = f(k) = \alpha A k^{\alpha-1} \tag{9}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων, λαμβάνομεν τὴν ἑπομένην:

$$i_{t+1} = \left[\frac{\alpha(1+\eta)}{(1-\alpha)(1-\beta)} \right]^{1-\alpha} \cdot i_t^{\alpha} \tag{10}$$

Ἡ μακροχρόνιος ἰσορροπία θὰ πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ τὴν σχέσιν:

$$i_{t+1}^{E} = \underset{t \to \infty}{\text{op}}\, i_t = \frac{\alpha(1+\eta)}{(1-\alpha)(1-\beta)} \tag{11}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι, $\frac{di}{dt} = 0$ καὶ ὅτι ἡ ἰσορροπία θὰ εἶναι σταθερὰ ἐφ' ὅσον $0 < \alpha < 1$.

Ἡ σχέσις (10) ἰσχύει δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ η, ἑπομένως καὶ διὰ

$$\eta = \frac{\alpha(1+\eta)}{(1-\alpha)(1-\beta)} \cdot \frac{1}{B}.$$

Ἔνθα B εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός, εἴτε μεγαλύτερος εἴτε μικρότερος τῆς μονάδος. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἀνωτέρω σχέσιν εἰς τὴν (11) τοιαύτην, θὰ ἔχωμεν:

$$i_t = \frac{\alpha B}{B(1-\alpha)(1-\beta)-\alpha} = B\eta.$$

Ἐκτὸς ἐὰν $B = 1$, δηλαδή, $i = \eta$, ὁπότε ἡ οἰκονομία δὲν ἀκολουθεῖ τὴν ὅδευσιν τοῦ χρυσοῦ κανόνος ἀναπτύξεως.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἡ οἰκονομία εὑρίσκεται εἰς τὴν ὅδευσιν τοῦ χρυσοῦ κανόνος ἀναπτύξεως. Τότε παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ B λαμβάνει τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς μονάδος. Τοῦτο θὰ ἔχῃ ὡς ἀποτέλεσμα τὴν μετακίνησιν τῆς οἰκονομίας ἐκ τῆς μέχρι τοῦδε ἀρίστης ὁδεύσεως ἀναπτύξεώς της. Οὕτως ἐκφράζουσα τὸ γεγονός, ὅτι τὰ ἄτομα προσπαθοῦν νὰ μεγιστοποιήσουν τὴν συνάρτησιν χρησιμότητός των διὰ τῆς περαιτέρω καταναλώσεως τοῦ κεφαλαίου των. Τὰ ἐρωτήματα, τὰ ὁποῖα ἀνακύπτουν εἶναι τὰ ἑξῆς: α) Πῶς ἡ οἰκονομία θὰ φθάσῃ εἰς νέαν δυναμικὴν κατάστασιν ἰσορροπίας; β) Δυνάμεθα νὰ ἐξάγωμεν τύπους οἱ ὁποῖοι θὰ περιγράφουν τὴν μετακίνησιν αὐτῆς τῆς οἰκονομίας ἐκ τῆς ὁδεύσεως τοῦ χρυσοῦ κανόνος ἀναπτύξεώς της εἰς τὴν νέαν ὅδευσιν ἀναπτύξεως; γ) Δυνάμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν αὔξησιν ἢ τὴν μείωσιν τῆς χρησιμότητος τῶν ἀτόμων κατὰ τὴν μεταβατικὴν περίοδον τῆς οἰκονομίας πρὸς τὴν νέαν θέσιν ἰσορροπίας; δ) Πῶς θὰ ἠδυνάμεθα διὰ μιᾶς καταλλήλου φορολογικῆς πολιτικῆς νὰ παρεμποδίσωμεν τὴν μετακίνησιν τῆς οἰκονομίας ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἰσορροπίας ἀναπτύξεώς της; Κατωτέρω θὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰ ἀνωτέρω τεθέντα ἐρωτήματα, ἀρχίζοντες μὲ τὴν ἐξαγωγὴν τύπων οἱ ὁποῖοι θὰ περιγράφουν τὴν μετάβασιν τῆς οἰκονομίας εἰς νέαν θέσιν ἰσορροπίας.

Ἡ σχέσις κεφαλαίων. Ἐν ἰσορροπίᾳ ἔχομεν:

$$k_0 = k_1.$$

Δοθέντος ὅτι $i_0 = B\eta$, λαμβάνομεν:

$$k_1 = (B\eta)^{-1} k_0 i_0. \tag{12}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν (12) εἰς τὴν (8) ἔχομεν:

$$k_{t+1} = (B\eta)^{-1} \alpha A k_t^{\alpha}.$$

Ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀρχικὴν τιμὴν διὰ $t = 0$, τότε:

$$k_t = \frac{1}{B^{1+\alpha+\alpha^2+\cdots\alpha^{t+1}}} \cdot \bar{k}, \; \bar{k} = k_0. \tag{1'}$$

Ἡ σχέσις ἐπιτοκίων. Γνωρίζομεν ὅτι:

$$i_1 = f'\left[\frac{S_0}{1+\eta}\right] = (B\eta)^{1-\alpha} \cdot i_o^{\alpha}.$$

Κατὰ συνέπειαν, θὰ ἔχωμεν:

$$i_t = B^{1-\alpha^t} \cdot \eta. \tag{14}$$

Ἡ σχέσις μισθῶν. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5) λαμβάνομεν:

$$w_t = \frac{1-\alpha}{\alpha} i_t \cdot k_t. \tag{15}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (15) τὴν τιμὴν τοῦ i_t, θὰ ἔχωμεν:

$$w_t = \frac{1-\alpha}{\alpha} B^{-\alpha(1+\alpha+\cdots+\alpha^{t-1})} \cdot \eta \bar{k}. \tag{16}$$

Ἡ σχέσις καταναλώσεως. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $e_t^1 = \beta w_t$, λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως:

$$e_t^1 = \frac{1+\eta}{1-\beta} B^{-(1+\alpha+\cdots+\alpha t)} \bar{k}.$$

Περαιτέρω, ἡ κατανάλωσις ἑνὸς ἀτόμου εἰς τὴν δευτέραν περίοδον θὰ εἶναι:

$$e_t^2 = (1+i_t)\, s_{t-1}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς αὐτὴν τὰς τιμὰς i_t καὶ s_{t-1} θὰ λάβωμεν:

$$e_t^2 = (1 + B^{1-\alpha^t} \cdot \eta)(1+\eta) B^{-(1+\alpha\cdots\alpha^{t-1})} \bar{k}. \tag{17}$$

Ἡ σχέσις ἀποταμιεύσεως. Γνωρίζομεν ὅτι:

$$s_0 = (1-\beta)\, w_0 = (1-\beta) \frac{1-\alpha}{\alpha} \eta \bar{k}.$$

καὶ γενικῶς ὅτι:

$$s_t = (1+\eta)\, B^{-(1+\alpha+\cdots+\alpha^{t})}\, \bar{k}, \text{ ἤ}$$

$$s_t = \frac{1-\alpha}{\alpha}(1-\beta)\, B^{-\alpha(1+\alpha+\cdots+\alpha^{t-1})}\, \eta\, \bar{k}. \tag{18}$$

Αἱ μακροχρόνιαι σχέσεις: α) Κεφαλαίου.

$$\hat{k} = \underset{t\to\infty}{\frac{1}{B^{1+\alpha+\cdots+\alpha^{t-1}}}} \cdot \bar{k} = B^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, \bar{k}. \tag{19}$$

β) Ἐπιτοκίου: $$\hat{i} = \underset{t\to\infty}{B^{1-\alpha^{t}}} \cdot \eta = B\eta. \tag{20}$$

γ) Ἡμερομισθίου $$\hat{\omega} = \underset{t\to\infty}{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\, B^{-\alpha(1+\alpha+\cdots+\alpha^{t-1})}\, \eta\, \bar{k}.$$

$$\hat{\omega} = \frac{1-1}{\alpha}\, B^{-\frac{\alpha}{1-1}}\, \eta\, \bar{k}. \tag{21}$$

δ) Ἀποταμιεύσεως. $$\hat{s} = \underset{t\to\infty}{(1+\eta)}\, B^{\frac{1-\alpha^{t}}{1-\alpha}}\, \bar{k}. \tag{22}$$

$$\hat{s} = (1+\eta)\, B^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, \eta\, \bar{k}.$$

ε) Καταναλώσεως. 1) Διὰ τὴν πρώτην περίοδον θὰ ἔχωμεν :

$$\hat{e}_1 = \underset{t\to\infty}{\beta\, \frac{1+\eta}{1-\beta}}\, B^{-\frac{1-\alpha^{t+1}}{1-\alpha}}\, \bar{k}. \tag{23}$$

$$\hat{e}_1 = \beta\, \frac{1+\eta}{1-\beta}\, B^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, \bar{k}.$$

2) Διὰ τὴν δευτέραν περίοδον θὰ ἔχωμεν :

$$\hat{e}_2 \underset{t \to \infty}{=} (1 + B^{1-\alpha^t} \eta)(1 + \eta) B^{-(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{t-1})} \bar{k}. \quad (24)$$

$$\hat{e}_2 = (1 + B\eta)(1 + \eta) B^{-\frac{1}{1-\alpha}} \bar{k}.$$

Αἱ μακροχρόνιαι σχέσεις τῶν τιμῶν ἰσορροπίας:

α) Κεφαλαίου.

$$\frac{\bar{k}}{\hat{k}} = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \begin{matrix} > 1 & \text{διὰ } B > 1 \\ < 1 & \text{διὰ } B < 1 \end{matrix} \quad (25)$$

β) Ἐπιτοκίου. $$\frac{\bar{i}}{\hat{i}} = \frac{\eta}{B\eta} B^{-1} \begin{matrix} > 1 & \text{διὰ } B > 1 \\ < 1 & \text{διὰ } B < 1 \end{matrix} \quad (26)$$

γ) Ἡμερομισθίου. $$\frac{\bar{\omega}}{\hat{\omega}} = B^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \begin{matrix} > 1 & \text{διὰ } B > 1 \\ < 1 & \text{διὰ } B < 1 \end{matrix} \quad (27)$$

δ) Ἀποταμιεύσεως. $$\frac{\bar{s}}{\hat{s}} = B^{\frac{1}{1-\alpha}} \begin{matrix} > 1 & \text{διὰ } B > 1 \\ < 1 & \text{διὰ } B < 1 \end{matrix} \quad (28)$$

ε) Καταναλώσεως τῆς πρώτης περιόδου.

$$\frac{e^1_{t+1}}{e_t^1} = B^{-\alpha^t} \begin{matrix} > 1 & \text{διὰ } B < 1 \\ < 1 & \text{διὰ } B > 1 \end{matrix} \quad (29)$$

Τοῦτο σημαίνει, ὅτι θὰ ἔχωμεν:

$$e_0^1 > e_1^1 > e_2^1 > e_3^1 > \cdots\cdots > \hat{e} \text{ διὰ } B > 1$$

Ἔνθα $\hat{e}$ ἡ κατανάλωσις εἰς τὴν νέαν ἰσορροπίαν.

στ) Καταναλώσεως τῆς δευτέρας περιόδου.

$$\frac{e^2_{t+1}}{e^2_t} = B^{-\alpha^t} \begin{matrix} > 1 & \text{διὰ} & B < 1 \\ < 1 & \text{διὰ} & B > 1 \end{matrix} \tag{30}$$

III. Συνάρτησις ἀπωλείας χρησιμότητος

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἀνάλυσιν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ποία θὰ εἶναι ἡ κατανάλωσις ἑνὸς οἰκονομοῦντος ἀτόμου εἰς δεδομένην χρονικὴν περίοδον t, γνωρίζομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς χρησιμότητος τοῦ ἀνωτέρω ἀτόμου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν συνολικὴν κατανάλωσιν τῶν δύο περιόδων. Ἑπομένως, δυνάμεθα διὰ τῆς κάτωθι ἐξισώσεως

$$A_t = \frac{U^t - U}{U}, \tag{31}$$

— ἔνθα U^t εἶναι ἡ χρησιμότης κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον t καὶ U ἡ χρησιμότης κατὰ τὴν περίοδον t = o — νὰ παρακολουθήσωμεν τὴν αὔξησιν ἢ τὴν μείωσιν τοῦ σχετικοῦ μεγέθους τῆς χρησιμότητος ἑνὸς ἀτόμου, καθὼς ἡ οἰκονομία ἀπομακρύνεται τοῦ ἀρχικοῦ ἐπιπέδου ἰσορροπίας. Πράγματι, ἡ τιμὴ τοῦ A θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ μηδενὸς εἰς τὴν ἀρχήν, ἀλλὰ βραδέως θὰ πλησιάσῃ τὸ μηδὲν καὶ μακροχρονίως θὰ καταστῇ ἀρνητική. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (31), θὰ λάβωμεν :

$$A_{(t)} = B^{-\frac{\alpha(1-\alpha^t)}{1-\alpha}} \left[\frac{1 + B^{1-\alpha^t}\eta}{1+\eta}\right]^{1-\beta} - 1 \tag{32}$$

καὶ διὰ $t \to \infty$

$$\hat{A} = B^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[\frac{1 + B\eta}{1+\eta}\right]^{1-\beta} - 1. \tag{33}$$

Ἐὰν θέλωμεν ἤδη νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν συνολικὴν αὔξησιν ἢ μείωσιν τῆς χρησιμότητος διὰ τὴν περίοδον ἀπὸ t = o ἕως $t = \bar{t}$, θὰ λάβωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως ἀπὸ μηδὲν ἕως $\bar{t}$. Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

$$\Omega(t) = \int_0^{\bar{t}} B^{-\frac{\alpha(1-\alpha^t)}{1-\alpha}} \left[\frac{1 + B^{1-\alpha^t}\eta}{1+\eta}\right]^{1-\beta} dt - t. \tag{34}$$

Ἐὰν θέσωμεν : $Y = \frac{\alpha(\ln B)}{1-\alpha}\alpha^t$, διὰ $B \neq 1$,

τότε θὰ λάβωμεν :

$$\Omega\ (Y) = \frac{B^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{(1+\eta)^{1-\beta}\ l\eta\alpha} \int_{o}^{\bar{t}} \left[(1+B\eta)\ e^{\frac{1-\alpha}{\alpha} y} \right]^{1-\beta} \cdot \frac{e_y}{y}\, dy$$

Ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς (35) δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν κατὰ προσέγγισιν διὰ δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ t.

IV. Φορολογικὴ πολιτικὴ

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ Κυβέρνησις διὰ νὰ διατηρήσῃ τὴν οἰκονομίαν εἰς τὴν ὅδευσιν ἀναπτύξεως τοῦ χρυσοῦ κανόνος, ὅταν παρατηρῇ ὅτι $B > 1$ ἐπιβάλλει φόρους εἰς τὴν ἀπερχομένην γενεὰν κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον $t = o$. Ἡ πολιτικὴ τῆς Κυβερνήσεως θὰ συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἐπενδύῃ τὸ ποσὸν τοῦτο τῶν φόρων, οὕτως ὥστε νὰ διατηρῇ τὸν ἀναγκαῖον ὄγκον κεφαλαίου, τὸν ἀπαιτούμενον διὰ τὴν χρυσῆν ὅδευσιν ἀναπτύξεως τῆς οἰκονομίας.

Ἂς συμβολίσωμεν μὲ t_0 τὸν δείκτην φορολογίας, διὰ $t = o$. Ἡ κατανάλωσις ἑνὸς οἰκονομοῦντος ἀτόμου, δι' αὐτὴν τὴν χρονικὴν περίοδον θὰ εἶναι:

$$e_0^2 = (1+\eta)^2\ \bar{k},$$

καὶ δι' ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν θὰ εἶναι:

$$C_0^2 = e_0^2\ L_{(-1)} = \frac{(1+\eta)^2\ \bar{k}}{1-\eta} = (1+\eta)\,\bar{k}. \qquad (36)$$

Τὰ συνολικὰ ἔσοδα τοῦ Κράτους θὰ ἀνέλθουν εἰς τὸ ποσὸν τῶν

$$T = t_0\ (1+\eta)\ \bar{k} \qquad (37)$$

Ἡ συνολικὴ ἀποταμίευσις διὰ τὴν περίοδον $t = 1$ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀποταμίευσιν τῆς περιόδου $t = o$ καὶ τὰ ἔσοδα τοῦ Δημοσίου, ἤτοι:

$$\frac{(1+\eta)\ \bar{k}}{B} + t_0\,(1+\eta)\,\bar{k} \qquad (38)$$

$$= (1+\eta)\ \bar{k}\ \left[\frac{1}{B} + t_0 \right].$$

Ἐὰν $t_0 = 1 - \frac{1}{B}$, τότε ἡ ἀνωτέρω σχέσις (38) καθίσταται:

$$\left(\frac{1}{B} + 1 - \frac{1}{B} \right) (1+\eta)\ \bar{k} = (1+\eta)\ \bar{k}. \qquad (39)$$

Οὕτω θὰ ἔχωμεν διὰ $t = 1$: $k_1 = \dfrac{s_0}{1+\eta} = \bar{k} = k_0$

Τοῦτο σημαίνει, ὅτι θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν περίοδον $t = 1$ τὸ ἴδιον κεφάλαιον μὲ ἐκεῖνο τῆς περιόδου $t = o$. Πράγματι, τὸ συνολικὸν κεφάλαιον θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ τὰς ἐπενδύσεις τῶν ἀτόμων καὶ ἀπὸ τὰς ἐπενδύσεις τοῦ Δημοσίου, ἤτοι

$$k_1 = \bar{k} = k_1^{\rho} + k_1^{g} = \frac{\bar{k}}{B} + \left(1 - \frac{1}{B}\right)\bar{k} = \bar{k}, \tag{40}$$

ἔνθα

k_1^{ρ} = ἰδιωτικὸν κεφάλαιον

k_1^{g} = δημόσιον κεφάλαιον

Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς δευτέρας περιόδου $t = 2$, θὰ ἔχωμεν τὸ κάτωθι κεφάλαιον:

(α) Ἰδιωτικόν: Τοῦτο θὰ συνίσταται ἀπὸ τὰς ἰδιωτικὰς ἀποταμιεύσεις, αἱ ὁποῖαι ἐπραγματοποιήθησαν κατὰ τὴν περίοδον $t = 1$ ὑπὸ τῆς νέας γενεᾶς, ἤτοι

$$s_1 = \frac{1+\eta}{B}\,\bar{k} \quad \text{(κατὰ κεφαλήν)}$$

$$\text{καὶ } (1+\eta)\, s_1 = \frac{(1+\eta)^2}{B}\,\bar{k} \quad \text{(δι' ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν)}$$

(β) Δημόσιον: Τοῦτο θὰ συνίσταται ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τὸ δημιουργηθὲν ἐκ τῆς φορολογίας καὶ αὐξηθὲν κατὰ τοὺς τόκους του, ἤτοι:

$$\left(1 - \frac{1}{B}\right)(1+\eta)(1+i)\,\bar{k} = (1+\eta)^2 \left(1 - \frac{1}{B}\right)\bar{k}.$$

ὁ δὲ λόγος κεφαλαίου — ἐργασίας θὰ εἶναι:

$$K_t = \frac{K_t^{\rho}}{L_t} + \frac{K_t^{g}}{L_t} = \bar{k} \tag{41}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] D. Cass καὶ M. Yaari, «Individual Saving, Aggregate Capital Accumulation, and Efficient Growth», Cowles Foundation Discussion Paper, No 198.

[2] P. A. Diamond, «National Debt in a Neoclassical Growth Model», The A E R, 1965.

[3] E. S. Phelps, «Second Essay on the Golden Rule of Accumulation», The A E R, Σεπτέμβριος 1965.

[4] P. A. Diamond, The Ramsey Problem and the Golden Rule of Accumulation, Cowles Foundation Discussion Paper, No 194.

[5] P. A. Samuelson, «An Exact Consumption — Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money», The J. P. E. Δεκέμβρ. 1958.

[6] P. A. Samuelson, «Reply» The J. P. E. 'Οκτώβριος 1959.

[7] P. A. Samuelson, «Infinity, Unanimity und Singularity,: A Peply», The J. P. E. Φεβρουάριος 1960.