ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΣΠΟΥΔΗ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΤΙΝΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

Ε. Δ. ΜΑΡΓΑΡΙΤΗ

Καθηγητοῦ τῆς Α.Σ.Β.Σ.
Ἀναπλ. Γεν. Διευθυντοῦ τῆς Ε.Σ.Υ.Ε.

1. Εἰσαγωγὴ

Χρονολογικὴ σειρὰ καλεῖται ἡ ἀποτύπωσις τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως ἑνὸς κινητικοῦ στατιστικοῦ μεγέθους, μεταβαλλομένου διὰ τοῦ χρόνου. Αἱ τιμαὶ τοῦ μεγέθους αἱ παρατηρούμεναι κατὰ τὰς διαδοχικὰς χρονικὰς στιγμὰς ἐξαρτῶνται σαφῶς ἐκ τοῦ χρόνου, χωρὶς τοῦτο νὰ σημαίνῃ ὅτι συνδέονται συναρτησιακῶς πρὸς τὸ χρόνον, ὑπὸ ἔννοιαν μαθηματικήν. Αἱ παρατηρήσεις γίνονται εἰς ὡρισμένην ἡμερομηνίαν ἤτοι κατὰ χρονικὰ διαστήματα σχεδὸν σταθερά.

Εἰς μίαν ἁπλῆν χρονολογικὴν σειρὰν αἱ τιμαὶ τοῦ ὑπὸ παρατήρησιν μεγέθους ἀποτελοῦν τὴν μίαν μεταβλητὴν τούτου (ἀριθμὸς ἐργατῶν, ἀποθέματα προϊόντων μιᾶς ἐπιχειρήσεως, νομισματικὴ κυκλοφορία, παραγωγὴ ἑνὸς ἀγαθοῦ, ὄγκος τοῦ ἐμπορίου κλπ.). Ἡ ἄλλη μεταβλητὴ εἶναι ὁ χρόνος.

Κατὰ τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισιν μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς σημειοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων τὰς χρονικὰς μονάδας (ἔτη, ἑξάμηνα, τρίμηνα, μῆνας κλπ.) ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων τὰς τιμὰς τοῦ μεγέθους.

Πρὸς παράστασιν τῶν μεταβλητῶν χρησιμοποιοῦμεν διὰ μὲν τὸν χρόνον τὸ σύμβολον t ἢ X διὰ δὲ τὰς τιμὰς τοῦ μεγέθους τὸ σύμβολον Y. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν εἰς τὰς ἁπλῶς χρονολογικὰς σειρὰς θὰ συναντῶμεν σταθερῶς τὰς ἐκφράσεις : μεταβλητὴ Y_i (τιμὴ τοῦ μεγέθους εἰς ὡρισμένην χρονικὴν στιγμήν), μεταβλητὴ X_i (χρονικὴ στιγμὴ εἰς ἣν ἀναφέρεται ἡ τιμὴ τοῦ Y_i). Ἡ μεταβλητὴ Y δύναται νὰ ὁρισθῇ διὰ τῆς τιμῆς αὐτῆς κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν X τῆς παρατηρήσεως ἢ διὰ τῆς τιμῆς της κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα τὸ χωρῖζον μίαν παρατήρησιν ἀπὸ τῆς προηγουμένης.

Ἡ μελέτη τῶν χρονολογικῶν σειρῶν προωθήθη κυρίως ἀπὸ τοὺς ***οἰκονομολόγους στατιστικούς***, οἱ ὁποῖοι, ὡς γνωστόν, ἐνδιαφέρονται διὰ δύο κυρίως τύπους προβλημάτων. Ὁ πρῶτος τύπος προβλημάτων εἶναι ἐκεῖνος εἰς τὸν ὁποῖον ἐπιχειρεῖται ἡ ἀνάλυσις ἡ σχετιζομένη μὲ μίαν κατανομὴν συχνότητος καὶ ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς στατιστικῆς μεθοδολογίας, χρησιμοποιοῦνται διάφοροι χαρακτηριστικαὶ τιμαὶ (μέσαι τιμαί, τιμαὶ διασπορᾶς κλπ.) μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ σπουδάσωμεν τὴν κατανομὴν ταύτην. Λέγομεν τότε ὅτι ἐξετάζομεν ἓν στατιστικὸν μέγεθος ***στατικόν***. Δυνατὸν εἶναι νὰ γίνῃ πρῶτον μία ἀνάλυσις τῆς καταστάσεως ἡ ὁποία θὰ ὑφίστατο λογικῶς ἐὰν αἱ οἰκονομικαὶ δυνάμεις εὑρίσκοντο εἰς μίαν κατάστασιν ἰσορροπίας ἄνευ μεσολαβήσεως οἱωνδήποτε μεταβολῶν. Ἐκκινοῦντες ἐκ τῆς ἰδεώδους ταύτης καταστάσεως δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν τότε ὡρισμένας μεταβολὰς καὶ νὰ περιγράψωμεν τὴν νέαν ἰσορροπίαν, ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ τελικῶς. Οὕτω, ἐὰν ἡ ζήτησις δι᾽ ἓν ἀγαθὸν ηὔξανε, φυσικὸν εἶναι νὰ δεχθῶμεν ὅτι θὰ ηὔξανε καὶ ἡ παραγωγὴ τούτου. Ἐρευνᾶται τότε ποία θὰ ἦτο ἡ ἐπίδρασις ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ. Μία τοιαύτη ἀνάλυσις ἀναφέρεται συνήθως ὡς στατική.

Εἷς δεύτερος τύπος ἀναλύσεως ἀποσκοπεῖ νὰ ἐξηγήσῃ τί συμβαίνει καθ' ὃν χρόνον τὸ σύστημα προσπαθεῖ νὰ καταφθάσῃ τὴν ἰσορροπίαν μᾶλλον, παρὰ τὴν κατάστασιν ἡ ὁποία ὑφίσταται μετὰ τὴν ἐπερχομένην ἰσορροπίαν. Αἱ ἐπὶ τοῦ δευτέρου τούτου τύπου ἀναλύσεως ἔρευναι τῶν οἰκονομολόγων ἀνέπτυξαν μεθόδους πρὸς μελέτην τῶν μεταβολῶν, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν χώραν διὰ τοῦ χρόνου, καὶ συνετέλεσαν εἰς τὴν ἐπιστημονικὴν πρόοδον τῆς σπουδῆς τῶν χρονολογικῶν σειρῶν. Κατὰ τὴν μελέτην τοῦ προβλήματος τούτου δὲν ἐνδιαφερόμεθα μόνον νὰ περιγράψωμεν τὴν παροῦσαν κατάστασιν ἑνὸς φαινομένου ἀλλ' ἐπίσης νὰ κατευθύνωμεν τὴν δρᾶσιν μας εἰς τὸ ἄμεσον μέλλον καὶ ἀκόμη νὰ προσπαθήσωμεν νὰ ἐπιτύχωμεν μερικὰς συνετὰς προβλέψεις διὰ τὸ ἀπώτερον μέλλον. Ἀλλά, πᾶσα πρόβλεψις μόνον ἐπὶ τῆς γνώσεως τοῦ παρελθόντος δύναται νὰ στηριχθῇ καὶ ἡ γνῶσις αὕτη εὑρίσκεται συγκεντρωμένη κατὰ μέγα μέρος τουλάχιστον, ὑπὸ τῶν χρονολογικῶν σειρῶν.

Ἡ μελέτη τῶν οἰκονομικῶν δεδομένων εἶναι ἐξόχως λεπτή. Πέραν τῶν δυσχερειῶν αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἀπὸ τὴν συγκέντρωσιν δεδομένων συγκρισίμων διὰ τοῦ χρόνου, πολλαὶ ἄλλαι ὀφείλονται εἰς τὸ πολύπλοκον τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων, εἰς τὴν περιπλοκὴν τῶν γεγονότων, μεταξὺ τῶν ὁποίων καθίσταται δύσκολον νὰ προσδιορίσωμεν ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα εἶναι αἰτίαι καὶ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα εἶναι ἀποτελέσματα. Εἶναι λοιπὸν ἀναγκαῖον νὰ σπουδάζωμεν ταυτοχρόνως περισσοτέρας σειράς, νὰ τὰς συγκρίνωμεν καὶ νὰ χρησιμοποιῶμεν τὴν μέθοδον τῆς συσχετίσεως διὰ τὴν σύγκρισιν ταύτην, ἡ ὁποία παίζει σπουδαιότατον ρόλον εἰς τὴν οἰκονομικὴν πρόβλεψιν.

Ἂν καὶ ἡ τεχνικὴ τῆς ἀναλύσεως τῶν χρονολογικῶν σειρῶν ἀνεπτύχθη κατὰ κύριον λόγον ὑπὸ τῶν οἰκονομολόγων στατιστικῶν, ἡ μελέτη τούτων δὲν ἔχει θεωρητικὸν χαρακτῆρα μόνον ἀλλὰ παρουσιάζει πρακτικὴν χρησιμότητα καὶ ἐνδιαφέρον δι' ἕνα πολὺ μεγάλον ἀριθμὸν ἀνθρώπων (ἐμπόρων, κοινωνιολόγων, βιολόγων, ἰατρῶν, ὑγιειονολόγων κλπ.).

Ἡ μελέτη τῆς διακυμάνσεως τῆς γαμηλιότητος π.χ., κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους, πέραν τοῦ δημογραφικοῦ ἐνδιαφέροντος ὅπερ παρουσιάζει, προσφέρει πολυτίμους πληροφορίας διὰ τὸ ἐμπόριον τῶν κοσμημάτων, τῶν ἐπίπλων, τῶν ἀσπρορούχων, τῶν τροφίμων κλπ., ἑκάστου γάμου συνεπαγομένου, ὡς εἶναι φυσικόν, ἀριθμόν τινα προμηθειῶν ἐκ τῆς ἀγορᾶς.

2. Αἱ κυριώτεραι συνιστῶσαι μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς

Οἱ οἰκονομολόγοι δὲν συμφωνοῦν πλήρως ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἔννοιαν τῶν ποικίλων κινήσεων αἱ ὁποῖαι συνθέτουν τὰς χρονολογικὰς σειράς. Μολονότι ἡ κατάταξις καὶ ἡ ἐξήγησις μερικῶν κινήσεων εἶναι ἀμφισβητήσιμοι ἐν τούτοις ὡρισμένα χαρακτηριστικὰ τῶν χρονολογικῶν σειρῶν καθίστανται ἐμφανῆ μὲ βραχυτάτην ἐπισκόπησιν. Εἰς τοῦτο μᾶς ὑποβοηθεῖ ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς, ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται μὲ τὰς ἰδιαζούσας γραφικὰς παραστάσεις, τὰς ὁποίας καλοῦμεν ***χρονογράμματα***, ὑπὸ τὴν βασικὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ὁλικὴ διάρκεια τῶν παρατηρήσεων εἶναι ἀρκούντως μεγάλη. Οὕτω γίνεται σήμερον γενικῶς παραδεκτὸν ὅτι αἱ κυριώτεραι ἐπὶ μέρους κινήσεις (συνιστῶσαι), αἱ ὁποῖαι συνθέτουν τὴν συνολικὴν κίνησιν τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

α) Μία κίνησις μακρᾶς διαρκείας ἢ ***γενικὴ τάσις*** ἢ ***αἰωνόβιος κίνησις*** (tendance générale ἢ séculaire, trend), ἡ ὁποία ἐμφανίζει μίαν κυριαρχοῦσαν τάσιν ἢ ροπὴν τῆς διακυμάνσεως ἑνὸς φαινομένου ἐπὶ μακρὰν σειρὰν ἐτῶν, εἴτε πρὸς αὔξησιν εἴτε πρὸς ἐλάττωσιν.

Ἡ κίνησις αὕτη εἶναι κυριαρχοῦν στοιχεῖον εἰς μίαν νεοϊδρυομένην βιομηχανίαν π.χ., ἡ ὁποία ἐξελίσσεται διὰ τοῦ χρόνου, εἰς χώρας τῶν ὁποίων αὐξάνει ὁμοίως ὁ πληθυσμὸς ἢ ἐπέρχονται ριζικαὶ μεταβολαὶ εἰς τὴν τεχνικὴν πρόοδον. Κλασσικὸν παράδειγμα· ἡ ἀνάπτυξις τῆς παραγωγῆς εἰς τὰς περισσοτέρας βιομηχανίας τῆς πλέον ἐξελιγμένης βιομηχανικῶς χώρας, τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν τῆς Ἀμερικῆς. Ἐκεῖ πρὸ παντὸς αἱ πρόοδοι τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν ἐφηρμόσθησαν εἰς τὴν βιομηχανίαν καὶ τὴν γεωργίαν κατὰ τρόπον συντελέσαντα εἰς μίαν πελωρίαν αὔξησιν τῆς παραγωγῆς. Συμβαδίζουσαι μὲ τὰς τεχνικὰς ταύτας προόδους, καὶ ἀναγκαῖα ἐπακόλουθα τούτων, ὑπῆρξαν καὶ αἱ ἀλλαγαὶ εἰς τὴν ἐμπορικὴν ὀργάνωσιν καὶ τὰς μεθόδους ἐξαπλώσεως τοῦ ἐμπορίου. Ἡ ἀνάπτυξις τῆς ἀνωνύμου ἑταιρίας ἐπέτρεψε τὴν συσσώρευσιν ἐπαρκοῦς κεφαλαίου διὰ τὴν εἰδίκευσιν καὶ τὴν μαζικὴν παραγωγήν, ἐνῶ ἡ ἐπιστημονικὴ ὀργάνωσις τῆς διαχειρίσεως καὶ τῆς ἐργασίας συνετέλεσαν ἀκόμη περισσότερον εἰς τὴν ἐκμετάλλευσιν τῶν τεχνικῶν προόδων καὶ τὴν αὔξησιν τῆς παραγωγῆς.

Ἀλλὰ παραλλήλως πρὸς τοὺς παράγοντας τούτους οἱ ὁποῖοι ἐπηρεάζουν τὴν ἀνάπτυξιν ὅλων τῶν βιομηχανιῶν εὑρίσκομεν ὅτι μερικαὶ τῶν βιομηχανιῶν τούτων ἀναπτύσσονται ἢ φθίνουν λόγῳ μεταβολῶν εἰς τὴν ζήτησιν. Νέα ἀγαθὰ καὶ προϊόντα δύνανται νὰ ἑλκύσουν τὴν εὔνοιαν καὶ νὰ ἀντικαταστήσουν τὰ παλαιὰ τοιαῦτα, ἱκανοποιοῦντα τὴν αὐτὴν ἀνάγκην, ὡς ἐπὶ παραδείγματι ἔγινε μὲ τὸ αὐτοκίνητον ἔναντι τῆς διτρόχου ἁμάξης. Ἡ ζήτησις δύναται ἐπίσης νὰ μειωθῇ διὰ τῆς ἐμφανίσεως ἑνὸς ὀλιγώτερον ἑλκυστικοῦ ἀλλὰ εὐθηνοτέρου ὑποκαταστάτου. Οὕτω τὸ ραιγιὸν ἀντικαθιστᾶ ἐν μέρει τὴν μέταξαν. Ὁ ρυθμὸς ὅμως τῆς ἀναπτύξεως δὲν εἶναι ἀπεριόριστος καὶ πολλὰ αἴτια συντελοῦν εἰς τὴν ἐξασθένισιν τοῦ ρυθμοῦ τούτου. Βελτιώσεις εἰς τὴν παραγωγικὴν πρόοδον εἶναι κατ᾽ ἀρχὰς ταχεῖαι, ἀλλ᾽ ἐφ᾽ ὅσον ὁ χρόνος παρέρχεται εἶναι δυνατὸν περαιτέρω βελτιώσεις νὰ ἔχουν συνεχῶς μικροτέραν ἐπὶ τῆς παραγωγῆς ἐπίδρασιν. Ἡ ἀνάπτυξις δύναται ὁμοίως νὰ ἐπιβραδυνθῇ ὑπὸ τῆς αὐξανομένης δυσχερείας προμηθείας πρώτων ὑλῶν. Οὕτω συνέβη ἐπὶ παραδείγματι εἰς τὴν παραγωγὴν ἀκατεργάστου σιδήρου εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας ἐξ ἀφορμῆς τῆς ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον δυσχερεστέρας ἐξορύξεως μεταλλευμάτων, τὰ ὁποῖα βαθμιαίως βαίνουν ἐξαντλούμενα. Ἕτερον αἴτιον διὰ τὴν ἐπιβράδυνσιν τοῦ ρυθμοῦ τῆς ἀναπτύξεως εἶναι ἡ δυσχέρεια ἐξευρέσεως διαθεσίμων κεφαλαίων σὺν τῇ παρόδῳ τοῦ χρόνου. Ὁ Raymond B. Prescott (1) ἐχαρακτήρισε τὴν ἐν γενικαῖς γραμμαῖς περιγραφεῖσαν ἀνωτέρω κίνησιν ὡς ἕνα «***νόμον ἀναπτύξεως***» ἐφαρμοζόμενον εἰς ἁπάσας τὰς βιομηχανίας. Ὁ νόμος οὗτος περιλαμβάνει τέσσαρα στάδια :

1ον) Περίοδον πειραματισμοῦ κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ρυθμὸς τῆς ἀναπτύξεως εἶναι μικρός.

---

1) Πρβλ. CROXTON : The problem of time series σελ. 365 καὶ ἐφεξῆς.

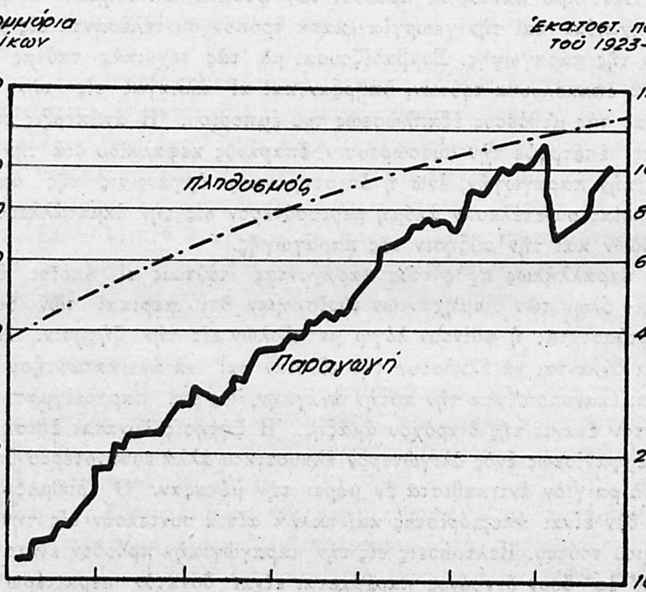
2ον) Περίοδον ἀναπτύξεως ἐπιτυγχανομένης διὰ τοῦ ἑταιρικοῦ ἐργοστασίου.

3ον) Περίοδον κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀνάπτυξις ἐπιβραδύνεται ἐφ' ὅσον προσεγγίζει τὸ σημεῖον κορεσμοῦ τῆς ἀγορᾶς.

4ον) Περίοδον σταθερότητος.

Ὑφίσταται τέλος διαφορὰ ἀπόψεων ὡς πρὸς τὴν ἐπίδρασιν τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν ἐπὶ τῆς γενικῆς τάσεως. Ὁπωσδήποτε εἶναι χρήσιμος ἡ μελέτη τόσον τῶν μακροχρονίων ὅσον καὶ τῶν βραχυχρονίων ἐπιδράσεων τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν, ὀφειλομένων εἴτε εἰς ἀλλαγὰς τῶν συστημάτων τοῦ ἐμπορίου εἴτε εἰς νομισματικὰς συνηθείας εἴτε εἰς τὴν τραπεζιτικὴν τεχνικήν.

Τὸ κατωτέρω χρονόγραμμα εἶναι παραστατικὸν τῆς γενικῆς ἢ αἰωνοβίου



Σχ. 1

τάσεως εἰς τὴν φυσικὴν παραγωγὴν τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν καὶ τὴν ἐξέλιξιν τοῦ πληθυσμοῦ αὐτῶν ἀπὸ 1870—1940 (1).

β) Μία **κυκλικὴ** κίνησις ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς διαδοχικὰς περιόδους εὐημερίας καὶ ὑφέσεως ἢ κάμψεως τῶν ὁποίων τὸ σύνολον διαμορφώνει τὸν **οἰκονομικὸν κύκλον**. Αἱ διακυμάνσεις αὗται ἀπεκλήθησαν κυκλικαὶ ἀντὶ περιοδικαὶ καθόσον ἡ διάρκειά των κατὰ κανόνα, μερικῶν ἐτῶν, δὲν εἶναι ἀπολύτως σταθερά. Δὲν πρέπει ἐξ ἄλλου αἱ κινήσεις αὗται νὰ συγχέωνται πρὸς τὰς συμπτωματικὰς κινήσεις. Ἡ μετάβασις ἐξ ἑνὸς χαμηλοῦ σημείου τοῦ κύκλου εἰς ἓν τοιοῦτον ὑψηλὸν γίνεται προοδευτικῶς. Ὑπάρχει εἷς ἰσχυρὸς δεσμὸς μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν σημείων.

---

1) Πηγή : CROXTON : σελ. 364.

Ἡ κυκλικὴ κίνησις παραλληλίζεται πρὸς τὴν κίνησιν τοῦ ἐκκρεμοῦς πέριξ μιᾶς καταστάσεως ἰσορροπίας καὶ ἀπεικονίζεται γραφικῶς ὑπὸ μιᾶς κυματοειδοῦς καμπύλης ἐκτεινομένης ἑκατέρωθεν τῆς γραμμῆς γενικῆς τάσεως. Καθ' ὃν ἀκριβῶς τρόπον ἓν ἐκκρεμὲς ἕλκεται ὑπὸ τῆς βαρύτητος πρὸς μίαν κατακόρυφον θέσιν, τείνει ὅμως σταθερῶς νὰ κινηθῇ μὲ παράβασιν τῆς θέσεως ἰσορροπίας αὐτοῦ, οὕτω λέγεται, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι τὸ ἐμπόριον σύρεται πρὸς μίαν ἰσορροπίαν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δυνάμεων τῆς ζητήσεως καὶ τῆς προσφορᾶς. Οὕτω ὁμοίως τὰ σφάλματα (ὑπὸ ἔννοιαν στατιστικὴν) κινούμενα πρὸς μίαν κατεύθυνσιν τείνουν νὰ προχωρήσουν καὶ νὰ κινηθοῦν πρὸς τὴν ἀντίθετον κατεύθυνσιν. Τὸ αὐτὸ δύναται νὰ παρατηρηθῇ καὶ διὰ μίαν βιομηχανικὴν παραγωγὴν καὶ ἐν γένει δι' οἱανδήποτε οἰκονομικὴν δραστηριότητα.

Μία τοιαύτη ἐξήγησις κύκλου συναλλαγῶν εἶναι γνωστὴ ὡς **ἐνδογενὴς θεωρία** («Self generative theory» τοῦ Wesley G. Mitchell).

Ἀλλ' ὡς ἀκριβῶς ὁ μηχανισμὸς ὁ θέτων εἰς κίνησιν ἓν ἐκκρεμὲς πρέπει περιπτωσιακῶς νὰ χορδισθῇ, οὕτω εἶναι δυνατόν, ἡ οἰκονομικὴ δραστηριότης νὰ καταφθάσῃ τὴν ἰσορροπίαν ἐὰν δὲν ὑφίσταντο ἄλλαι προωθήσεις ποικίλοντος βαθμοῦ ἐντατικότητος.

Ὑπάρχουν πολλοὶ οἱ ὁποῖοι ἀπορρίπτουν τὴν ἀντίληψιν τῶν ἐνδογενῶν κύκλων πιστεύοντες ὅτι οὗτοι δημιουργοῦνται, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ὑπὸ ἐξωτερικῶν ἐπιδράσεων.

γ) Μία **περιοδικὴ** κίνησις ἡ ὁποία ἐπαναλαμβάνεται κατὰ χρονικὰ διαστήματα ἴσα καὶ μὲ μίαν μορφὴν σχεδὸν σταθεράν. Ὁ πλέον συνήθης τύπος τοιαύτης κινήσεως, τὸν ὁποῖον συχνότερον συναντῶμεν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν οἰκονομικῶν σειρῶν, εἶναι ἡ ἐποχικὴ κίνησις ἔχουσα ὡς περίοδον τὸ ἔτος. Ἡ διακύμανσις αὕτη ἀπὸ τῆς κανονικῆς τιμῆς μεγέθους ἑνὸς φαινομένου δύναται νὰ ὀφείλεται πραγματικῶς εἰς τὴν ἐποχὴν (ὡς π.χ. ἡ μεταβολὴ τῶν τιμῶν τῶν λαχανικῶν καὶ φρούτων) συνδεομένη μὲ τὴν συγκομιδήν, ἡ μεταβολὴ εἰς τὴν παραγωγήν, συνδεομένη μὲ τὰς ἀγορὰς ἐπ' εὐκαιρία τῶν ἑορτῶν κ.λ.π.

Εἴς τινας περιπτώσεις αἱ περιοδικαὶ κινήσεις ἀναφαίνονται καὶ εἰς βραχύτερα χρονικὰ διαστήματα, ὅπως αἱ ἑβδομαδιαῖαι πωλήσεις ὡρισμένων προϊόντων ἢ ἀκόμη ἡ ὡριαία μεταβολὴ εἰς τὴν κατανάλωσιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος.

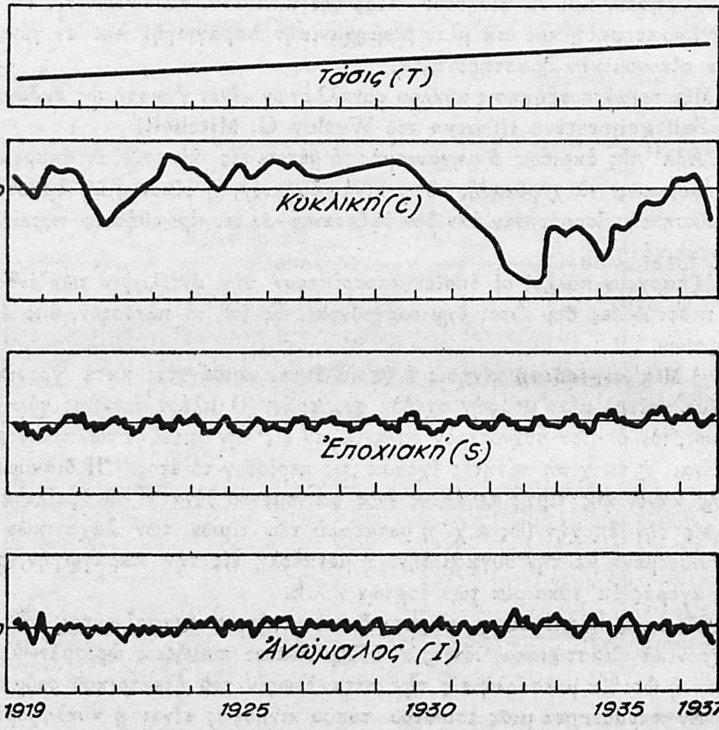
Ἓν παράδειγμα μιᾶς τοιούτου τύπου κινήσεως εἶναι ἡ κυκλοφορία βιβλίων εἰς τὴν αἴθουσαν μιᾶς βιβλιοθήκης καθ' ἑκάστην ἑβδομάδα. Μία ἔτι μεγαλυτέρα περιοδικότης (ἐσωμηνιαία) ἐμφανίζεται εἰς τὰς τραπεζιτικὰς χρεώσεις.

Εἶναι ἄξιον παρατηρήσεως ὅτι ἡ μορφὴ τῆς ἐποχικῆς μεταβολῆς δύναται νὰ ἀλλάσσῃ εἴτε βαθμιαίως εἴτε αἰφνιδίως μὲ τὴν πάροδον τῶν ἐτῶν, ἂν καὶ μερικαὶ χρονολογικαὶ σειραὶ διατηροῦν τὴν αὐτὴν γενικὴν πορείαν ἀλλ' ἀλλάσσουν εἰς ἔντασιν βαθμιαίως ἢ ἀνωμάλως ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος. Τοῦτο εἶναι ἰδιαιτέρως ἀληθὲς προκειμένου περὶ σειρῶν παραγωγῆς γεωργικῶν προϊόντων.

δ) Μία κίνησις **ἄρρυθμος ἢ διαταρακτική**, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ λόγων τοὺς ὁποίους δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προβλέψωμεν. Ἡ διαταρακτικὴ κίνησις καλεῖται καὶ **κατάλοιπος** κίνησις (**résiduelle**).

Αἱ διαταρακτικαὶ κινήσεις δύνανται νὰ εἶναι μικρᾶς σημασίας καὶ ὀφείλονται κατὰ κανόνα εἰς τὴν τύχην, θεωροῦνται δὲ ὡς ἀμελητέαι. Αἱ μεγάλης σημασίας διαταρακτικαὶ κινήσεις δύνανται νὰ ὀφείλωνται εἰς ἀπεργίας, εἰς νέας νομοθετικὰς διατάξεις τῆς διοικήσεως, εἰς χρηματιστηριακοὺς πανικούς, εἰς πολέμους, σεισμοὺς κ.λ.π. Τοιαῦται κινήσεις μολονότι αὗται καθ' ἑαυταὶ δὲν παρουσιάζουν θεωρητικὸν ἐνδιαφέρον δύνανται νὰ ἀσκήσουν μεγάλην ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς πορείας τοῦ ἐξεταζομένου φαινομένου μέχρι σημείου τελείας ἀνατροπῆς τῆς γενικῆς τάσεως, ὁπότε αὕτη διαχωρίζεται εἰς διαδοχικὰ τμήματα.

Μίαν ὀπτικὴν εἰκόνα τῶν τεσσάρων αὐτῶν κινήσεων, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὰς συνιστώσας μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς παρέχει ἡ ἀκόλουθος γραφικὴ παράστα-



Σχ. 2

σις, ἡ ὁποία ἐμφανίζει τὴν διακύμανσιν τῆς παραγωγῆς ἀκατεργάστου σιδήρου εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας τῆς Ἀμερικῆς ἀπὸ τοῦ 1919 μέχρι 1937.

3. Σκοπιμότης τῆς μελέτης τῶν διαφόρων συνιστωσῶν μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς

Ἡ ἀνάλυσις μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς ὡς καὶ ἡ σύγκρισις δύο ἢ περισσοτέρων χρονολογικῶν σειρῶν μεταξύ των ἐπιτυγχάνεται μόνον διὰ τῆς ἀπομονώσεως τῶν τεσσάρων συνιστωσῶν περὶ ὧν ἐγένετο ἀνωτέρω λόγος. Τοῦτο δὲ χρειάζεται εἴτε διὰ τὴν περιγραφὴν εἴτε διὰ τὴν διερεύνησιν τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς. Ἰδιαιτέρως εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα εἶναι τοῦτο ἐντελῶς ἀπαραίτητον διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ φθάσωμεν καὶ εἴς τινας προβλέψεις ἐπὶ τῆς πιθανῆς πορείας τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν φαινομένου.

Ὁ διαχωρισμὸς οὗτος τῶν ἀρχικῶν δεδομένων μιᾶς σειρᾶς εἰς τὰς συνιστώσας αὐτῆς ἀποτελεῖ ἓν τῶν πλέον λεπτῶν καὶ τῶν πλέον δυσχερῶν προβλημάτων τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως. Ἓν τοιοῦτον πρόβλημα δὲν εἶναι ἐπιδεκτικὸν μιᾶς γενικῆς τεχνικῆς λύσεως. Ἐὰν πρόκειται π.χ. νὰ συγκρίνωμεν τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα ἑνὸς βιομηχανικοῦ κλάδου ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μηνὸς εἰς τὸν ἄλλον, εἶναι λογικὸν νὰ ἐξετάσωμεν τὰς ἐποχικὰς διακυμάνσεις. Τοῦτο δὲν εἶναι τόσον ἀναγκαῖον ὅταν πρόκειται νὰ συγκρίνωμεν τὰς ποσότητας προϊόντων τὰς διατιθεμένας ὑπὸ τοῦ ἰδίου τούτου βιομηχανικοῦ κλάδου εἰς τὴν κατανάλωσιν.

Αἱ κατωτέρω ἐκτεθεισόμεναι μέθοδοι δὲν δύνανται νὰ θεωρηθοῦν παρὰ ἐνδείξεις γενικοῦ χαρακτῆρος τῶν ὁποίων ἡ ἐφαρμογὴ ἀπαιτεῖ τὴν προκαταρκτικὴν μελέτην τῆς συμφωνίας μεταξὺ τῶν ὑποθέσεων αἱ ὁποῖαι χρησιμεύουν ὡς βάσεις καὶ τῶν ἰδιαιτέρων συνθηκῶν τοῦ ὑπὸ παρατήρησιν φαινομένου.

Κατωτέρω περιοριζόμεθα εἰς τὴν μελέτην τῆς γενικῆς τάσεως παρέχοντες ἐν συνόψει τὴν θεωρητικὴν καὶ τεχνικὴν θεμελίωσιν τῆς μεθόδου ὡς καὶ μίαν σειρὰν ἐφαρμογῶν ἐπὶ στατιστικῶν σειρῶν εἰλημμένων ἐκ τῶν δεδομένων ἅτινα κατὰ καιροὺς ἐμφανίζονται εἰς τὴν Στατιστικὴν Ἐπετηρίδα τῆς Ἑλλάδος (Στ. Ε. Ε.).

4. Μέθοδοι προσδιορισμοῦ τῆς γενικῆς τάσεως

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς γενικῆς τάσεως δὲν δύναται νὰ γίνῃ παρὰ μόνον ὅταν διαθέτωμεν μίαν μακρὰν σειρὰν παρατηρήσεων (περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς κύκλους), συνήθως βάσει ἐτησίων δεδομένων δηλ. δεδομένων διὰ τὰ ὁποῖα αἱ ἐποχικαὶ κυμάνσεις καὶ αἱ μικραὶ συμπτωματικαὶ τοιαῦται ἔχουν ἀπαλειφθῆ.

Αἱ χρησιμοποιούμεναι μέθοδοι διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς γενικῆς τάσεως εἶναι :

α) ***Αἱ ἐμπειρικαί*** : Γραφικὴ μέθοδος, μέθοδος τῶν τμηματικῶν μέσων ὅρων, μέθοδος τῶν μέσων ὅρων τῶν κύκλων.

β) ***Αἱ ἀναλυτικαί*** : Μέθοδος τῶν ἀλγεβρικῶν καμπύλων, μέθοδος τῶν ὀρθογωνίων πολυωνύμων *.

Ἐκ τῶν μεθόδων τούτων προτιμῶμεν διὰ τὰ συγκεκριμένα παραδείγματα, ὧν ἐξέτασις γίνεται ἐν τοῖς κατωτέρω, τὴν ἀναλυτικήν, χρησιμοποιοῦντες διαφόρους μορφὰς καμπύλων, προσιδιαζουσῶν εἰς ἑκάστην περίπτωσιν.

5. Ἐκλογὴ τῆς καταλλήλου συναρτήσεως

Εἰς τὴν στατιστικὴν μέθοδον κατὰ τὴν μελέτην τῶν κατανομῶν συχνοτήτων, εἶναι γνωστὴ ἡ προσπάθεια νὰ προσαρμόζωμεν ἑκάστοτε τὰ δεδομένα τῶν παρατηρήσεων εἰς θεωρητικόν τι σχῆμα κατανομῆς. Ἔχουν εἰσαχθῆ πλεῖσται ὅσαι θεωρητικαὶ κατανομαὶ ἀνταποκρινόμεναι εἰς συναρτήσεις $y = f(x)$ αἵτινες ἄγουν εἰς γραφικὰς παραστάσεις ἐμφανιζούσας καμπύλας ἢ διαφόρους ἄλλας μορφὰς διαγραμμάτων, προσιδιαζούσας εἰς κατανομὰς συχνοτήτων, προερχομένας ἐκ παρατηρήσεων.

Τὰ πρότυπα ταῦτα τῶν θεωρητικῶν κατανομῶν, εἰς τὰ ὁποῖα προσαρμόζουν

---

* 1) Λεπτομερῆ περιγραφὴν τῶν διαφόρων μεθόδων εὑρίσκει τις εἰς Κ. Ἀθανασιάδη Στατιστική, σελ. 236. 2) Μ. Μπρίκα : Μαθήματα Στατιστικῆς, Τεῦχος ΙΙ σελ. 217—248. 3) E. Morice : Méthode Statistique, Deuxième partie, pages 427—440.

τὰς παρατηρήσεις, δὲν ἀνταποκρίνονται ἀκριβῶς πρὸς τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα. Ἐν τούτοις φροντίζομεν, κατὰ τὸ μέτρον τοῦ δυνατοῦ, ὅπου ἡ προσαρμογὴ ἀποβαίνει ἱκανοποιητικὴ ἢ ὅπου αἱ δύο κατανομαί, θεωρητικὴ καὶ ἐμπειρική, προσεγγίζουν ἀλλήλας κατὰ τρόπον ἀκριβῆ, νὰ ὑποκαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐκ παρατηρήσεως κατανομὴν τὴν θεωρητικὴν τοιαύτην διὰ τοὺς ἀκολούθους λόγους :

α) Ἡ μᾶζα τῶν παρατηρήσεων ἀντικαθίσταται ἀπό τινας παραμέτρους προσιδιαζούσας εἰς τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν τοῦ ***θεωρητικοῦ νόμου κατανομῆς***, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον καθιστᾶ τὴν ἀνάλυσιν τῆς δεδομένης σειρᾶς πλέον εὔκολον, πρὸ παντὸς ὅταν θέλομεν νὰ συγκρίνωμεν δύο σειράς. Αἱ παράμετροι ἄλλως τε αὗται ἔχουν συνήθως μίαν ἁπλῆν σημασίαν.

β) ***Ἡ θεωρητικὴ κατανομὴ*** ἔχει ἰδιότητας πολὺ γνωστάς, κατ᾿ εὐθεῖαν χρησιμοποιουμένας, αἱ ὁποῖαι δὲν παρουσιάζονται εἰς τὰ ἀρχικὰ δεδομένα. Ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἡ ἀναζήτησις νέων ἰδιοτήτων εἶναι εὐκολωτέρα εἰς τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν τοῦ θεωρητικοῦ νόμου παρὰ εἰς τοὺς ἐμπειρικούς, τοὺς ἐκ παρατηρήσεων δηλ. ἀριθμοὺς ἢ συχνότητας. Παράδειγμα ἔστω ἡ εὐθεῖα τάσεως ἢ μακροχρονίου ἐξελίξεως τῆς ὁποίας λεπτομερὴς σπουδὴ ἐγένετο εἰς τὴν Στατιστικήν μας.

γ) Ἡ θεωρητικὴ κατανομὴ ἐπιτρέπει ἀκόμη νὰ ἐπανεύρωμεν τὰ πραγματικὰ δεδομένα ἑκάστου διαστήματος τάξεως, ἂν ὄχι ἐκεῖνα ἀκριβῶς τὰ ὁποῖα ἔχομεν ἐκ παρατηρήσεως, τουλάχιστον ὅμως λίαν προσεγγίζοντα πρὸς αὐτά, παρέχοντα τὴν εὐχέρειαν νὰ ἐπιτύχωμεν μίαν γραφικὴν παράστασιν πλέον κανονικήν, πλέον ***«λείαν»***.

Πολὺ συχνά, πράγματι, τὰ ἀντιπροσωπευτικὰ διαγράμματα κατανομῆς τινὸς παρουσιάζουν ἀνωμαλίας ἀνεξηγήτους, κατ᾿ ἀντίθεσιν πρὸς τὴν ἐκ διαισθήσεως ἔννοιαν τῆς συνεχείας τῆς κατανομῆς. Αὐτὴ ἡ ἐξομάλυνσις (Lissage - Smoothing) τῆς ἐκ παρατηρήσεως κατανομῆς εἶναι ἓν σημαντικὸν πλεονέκτημα εἰς πᾶσαν μέτρησιν, ὅπου αἱ ἀποκλίσεις μεταξὺ ἐμπειρικῆς καὶ θεωρητικῆς κατανομῆς ὀφείλονται εἰς παράγοντας δευτερεύοντας, ξένους πρὸς τὸ ὑπὸ μελέτην φαινόμενον.

Παρὰ ταῦτα ἐπιβάλλεται νὰ γίνεται πάντοτε μιὰ κριτικὴ ἐξέτασις τῆς ἐπιτυγχανομένης ἑκάστοτε προσαρμογῆς.

Καὶ κατὰ τὴν μελέτην τῶν χρονολογικῶν σειρῶν παρουσιάζεται, τηρουμένων τῶν ἀναλογιῶν, τὸ αὐτὸ πρόβλημα δηλ. ἡ ἀναζήτησις τῆς πλέον καταλλήλου συναρτήσεως, ἡ ὁποία θὰ προσαρμόζῃ τὰ δεδομένα τῆς ἐμπειρίας εἰς ἕνα οἱονεὶ νόμον ἐξαρτήσεως τῆς μεταβλητῆς y ἐκ τῆς μεταβλητῆς **x** (τοῦ χρόνου ἐν προκειμένῳ).

Ἡ συνάρτησις $y = f(x)$ δύναται νὰ εἶναι γραμμικὴ δηλ. τῆς μορφῆς $y = \alpha + \beta x$ ὁπότε αἱ προσδιοριστέαι παράμετροι εἶναι τὸ α καὶ β ἢ πολυωνυμικὴ ἔχουσα μίαν τῶν μορφῶν : $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ ἢ $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ ἢ γενικώτερον : $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + k x^{\mu}$. Αἱ πρὸς προσδιορισμὸν παράμετροι εἶναι, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τόσαι ὅσος ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου σὺν 1.

Ἡ κλασσικὴ μέθοδος προσδιορισμοῦ τῶν παραμέτρων εἶναι ἡ γνωστὴ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. Ἐκτὸς τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων εἰς πλείστας ὅσας χρονολογικὰς σειρὰς χρησιμοποιοῦνται ἐκθετικαὶ συναρτήσεις διαφόρων μορφῶν ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τῆς ἀναλυτικῆς μορφῆς $y = f(x)$ τῆς γενικῆς τάσεως μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς δὲν ὑπάρχουν γενικοὶ κανόνες ἀλλ' ὡρισμένα ἐμπειρικὰ κριτήρια, ἐξ ὧν τὸ κυριώτερον, ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις τῶν ἀρχικῶν δεδομένων, δηλ. τὸ σχετικὸν ***χρονόγραμμα*** ἢ καλύτερον ***χρονοδιάγραμμα***. Ἐξ αὐτοῦ δύναταί τις νὰ εἰκάσῃ τὴν προσήκουσαν μορφὴν καμπύλης. Πολλάκις εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἐφαρμόσωμεν συνάρτησιν γραμμικήν, εἶτα δευτέρου βαθμοῦ καὶ ἐν συνεχείᾳ τρίτου βαθμοῦ καὶ νὰ ἐλέγξωμεν ἐκ τῶν ὑστέρων τὸν βαθμὸν τῆς ἱκανοποιητικωτέρας προσαρμογῆς, βάσει τοῦ τύπου τοῦ σφάλματος ἐκτιμήσεως, δηλαδὴ τοῦ ἀθροίσματος : $\Sigma(\Psi - y)^2$ ἔνθα Ψ τὰ θεωρητικὰ δεδομένα μετὰ τὴν προσαρμογὴν καὶ y τὰ ἐμπειρικὰ τοιαῦτα (ἀρχικὰ δεδομένα). Τὸ ἄθροισμα τοῦτο διαιρεῖται διὰ τοῦ πλήθους τῶν δεδομένων N, ἠλαττωμένου κατὰ τὸ πλῆθος τῶν προσδιοριστέων παραμέτρων καὶ ὅσον μικρότερον ἀποβαίνει τὸ πηλίκον τοῦτο τοσοῦτον ἱκανοποιητικωτέρα ἔχει γίνει ἡ προσαρμογή.

6. Εὐθύγραμμος τάσις

Κατὰ ταύτην ἡ μορφὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι $y = \alpha + \beta x$ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων προκύπτει τὸ ἀκόλουθον σύστημα ἐξισώσεων :

$$N\alpha + \Sigma x\beta = \Sigma y$$
$$\Sigma x\alpha + \Sigma x^2\beta = \Sigma xy$$

Αἱ δύο αὗται κανονικαὶ ἐξισώσεις τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐπιτρέπουν τὸν ὑπολογισμὸν τῶν παραμέτρων α καὶ β.

Εἶναι δυνατὸν νὰ διατάξωμεν τὰ δεδομένα μας κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν πάντοτε $\Sigma x = 0$. Πρὸς τοῦτο ἂν μὲν τὸ πλῆθος τῶν ἐτῶν εἶναι περιττὸν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ κεντρικὸν ἔτος ὡς αὐθαίρετον ἀρχὴν καὶ αἱ ἀποκλίσεις ἑκατέρωθεν αὐτοῦ ἐκφράζονται μὲ ἁπλοὺς ἀκεραίους ἀρνητικοὺς καὶ θετικοὺς ἀριθμοὺς τοιούτους ὥστε $\Sigma x = 0$ *.

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ πλῆθος τῶν ἐτῶν εἶναι ἄρτιον, πρὸς ἀποφυγὴν τῶν δεκαδικῶν ἀποκλίσεων ἑκατέρωθεν τῆς αὐθαιρέτου ἀρχῆς καὶ τῶν συναφῶν δυσχερειῶν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, μεταβάλλομεν τὴν κλίμακα τῶν τετμημένων, λαμβάνοντες ὡς μονάδα χρόνου τὸ ἑξάμηνον καὶ τότε αἱ ἀποκλίσεις ἑκατέρωθεν τῆς ἀρχῆς εἶναι π.χ. $-11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11$ οὕτως ὥστε καὶ πάλιν $\Sigma x = 0$.

Διὰ τῶν ἀνωτέρω τεχνικῶν διατάξεων τῶν δεδομένων αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἁπλουστεύονται πολύ, λαμβάνουσαι τὴν μορφήν :

$$N\alpha = \Sigma y$$
$$\Sigma x^2\beta = \Sigma xy$$

ἐξ ὧν προκύπτουν εὐκόλως αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων ἤτοι :

$$\alpha = \frac{\Sigma y}{N} \qquad \text{καὶ} \qquad \beta = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}.$$

Ἐφαρμογὴ 1η

Εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα 1 ἔχομεν τὰ δεδομένα τῆς κυκλοφορίας τραπεζο-

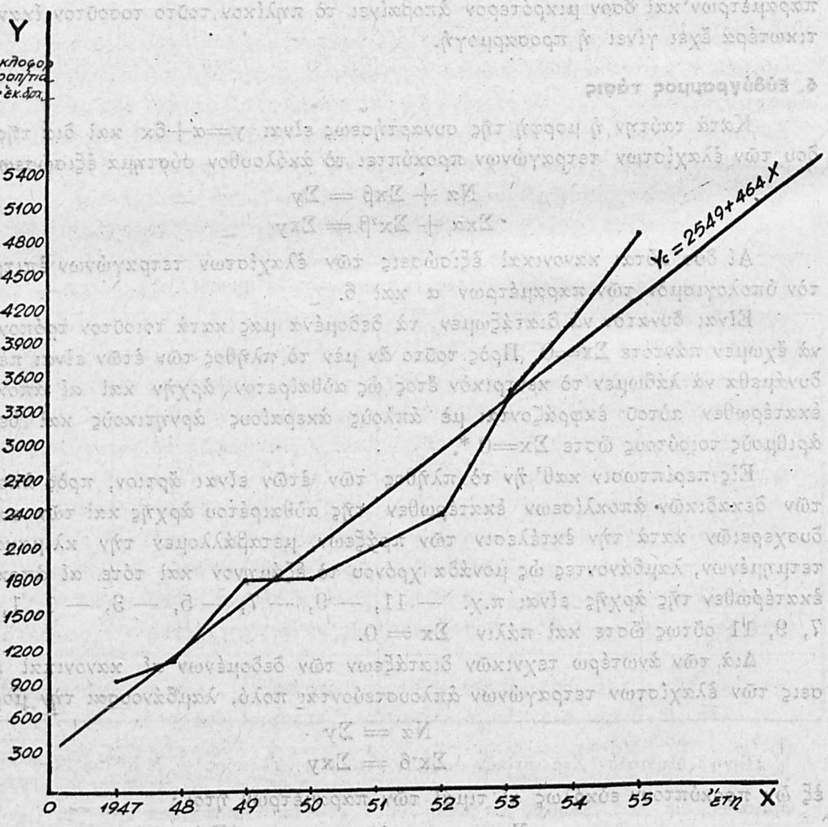
---

*. Βλ. σχετικῶς : Ε. Μαργαρίτη : Στατιστικὴ Κεφ. XII σελ. 201—205.

Πίναξ 1

Κυκλοφορία τραπεζογραμματίων κατὰ τὰ ἔτη 1947—1955

Ἔτη	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955
Τραπεζογραμμάτια εἰς ἑκατομμύρια δραχμῶν	973	1202	1859	1887	2199	2476	3503	3888	4591



Σχ. 3

γραμματίων κατὰ τὰ ἔτη 1947—1955. Μετὰ τὴν διάταξιν τῶν δεδομένων εἰς τὸν πίνακα 2 ὑπολογίζομεν, ὡς ἀνωτέρω, τὰς παραμέτρους α καὶ 6. Εὑρίσκομεν δὲ

$$\alpha = 2.549 \quad \text{καὶ} \quad 6 = 464$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τάσεως εἶναι:

$$y = 2.549 + 464\,x.$$

Ἡ σημασία τοῦ γωνιακοῦ συντελεστοῦ τῆς εὐθείας εἶναι γνωστή. Θεωρητικῶς δεχόμεθα ὅτι, ἂν ἡ τάσις αὐξήσεως τῆς κυκλοφορίας παραμείνῃ σταθερά, θὰ ἔχωμεν ἐτησίαν αὔξησιν κατὰ 464 ἑκατομμύρια. Δυνάμεθα βεβαίως, μὲ τὴν παραδοχὴν αὐτήν, νὰ κάμωμεν μίαν βραχυπρόθεσμον πρόβλεψιν καὶ νὰ ὑπολογίζωμεν τὸ ὕψος τῆς κυκλοφορίας διὰ τὰ ἀμέσως προσεχῆ ἔτη. Ἡ μέθοδος τοῦ ὑπολογισμοῦ εἶναι εὔκολος. Ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὸ x μὲ τὰς τιμὰς 5, 6, 7 κ.ο.κ., ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὸ ὕψος τῆς κυκλοφορίας διὰ τὰ ἔτη 1956, 1957, 1958 κ.ο.κ. Εἰς τὸ σχ. 3 ἀπεικονίζεται γραφικῶς ἡ σειρὰ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ὑπὸ μορφὴν πολυγωνικῆς γραμμῆς ὡς καὶ ἡ εὐθεῖα τάσεως.

Ἐφαρμογὴ 2α

Εἰς τὸν πίνακα 3 ἐμφαίνεται ἡ ἐτησία παραγωγὴ σίτου ἀπὸ τοῦ 1933—1940. Μετὰ τὴν τεχνικὴν διάταξιν τῶν δεδομένων εἰς τὸν πίνακα 4 εὑρίσκομεν τὰς τι-

Πίνα 2

Προσαρμογὴ εὐθυγράμμου τάσεως εἰς τὴν κυκλοφορίαν τῶν τραπεζογραμματίων (Τραπ/τια εἰς ἑκατομμύρια δραχμῶν)

Ἔτη	X	κυκλοφοροῦντα τραπεζ)τια Y	XY	X^2	$Y_c = 2549 + 464X$
1947	— 4	973	— 3.892	16	693
1948	— 3	1.202	— 3.606	9	1.157
1949	— 2	1.859	— 3.718	4	1.621
1950	— 1	1.887	— 1.887	1	2.085
1951	0	2.199	0	0	2.549
1952	1	2.476	2.476	1	3.013
1953	2	3.503	7.006	4	3.477
1954	3	3.888	11.664	9	3.941
1955	4	4.951	19.804	16	4.405
		22.938	27.847	60	22.941

Πηγή: Μηνιαῖον Στατιστικὸν Δελτίον, Τραπέζ. Ἑλλάδος — Μάρτιος 1956 σελ. 2.

$$Y_c = \alpha + 6X$$

$$\alpha = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{22.938}{9} = 2.549$$

$$\beta = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{27.847}{60} = 464 \qquad Y_c = 2.549 + 464X$$

μὰς τῶν παραμέτρων ἤτοι :

$$\alpha = 794 \qquad \kappa\alpha\grave{\iota} \qquad \beta = 16$$

καὶ ἡ μορφὴ τῆς εὐθείας τάσεως γίνεται :

$$y = 794 + 16\,x$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν θεωρητικῶν τιμῶν ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ x μὲ τὰς τιμὰς τῆς δευτέρας στήλης τοῦ πίνακος, ἤτοι — 7, — 5, — 3, — 1, 3, 3, 5, 7.

Ἐνταῦθα τὸ πλῆθος τῶν δεδομένων εἶναι ἄρτιον καὶ ἐλήφθη ὡς ἀρχὴ τῶν ἀποκλίσεων τὸ μέσον τοῦ διαστήματος μεταξὺ 1936 καὶ 1937 ὁπότε τὸ 1936 προηγεῖται κατὰ ἓν ἑξάμηνον, τὸ 1935 κατὰ δύο ἑξάμηνα κ.ο.κ.

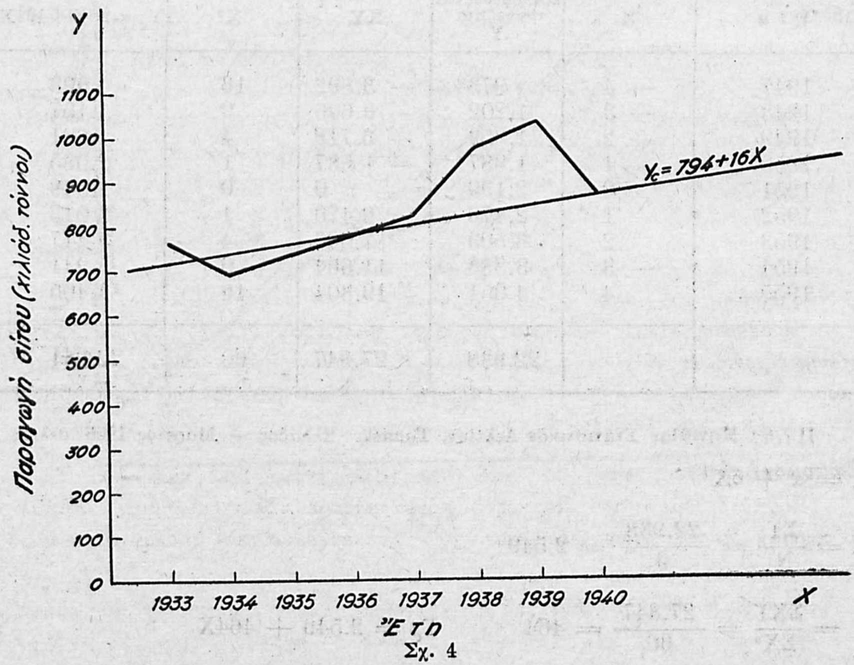
Εἰς τὸν πίνακα 4 συμπληροῦμεν τὰ θεωρητικὰ δεδομένα μὲ τὰ ἔτη 1952 καὶ ἐφεξῆς μέχρι 1956.

Εἶναι ἀξιοσημείωτον ὅτι αἱ θεωρητικαὶ προβλέψεις διὰ τὴν ἐξέλιξιν τῆς πα-

Πίνα 3

Παραγωγὴ σίτου κατὰ τὰ ἔτη 1933—1940

Ἔτη	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940
Παραγωγὴ σίτου εἰς χιλιάδας τόννων	773	699	740	532	818	980	1042	767



Σχ. 4

ραγωγῆς μέχρι τοῦ 1956 ἀνταποκρίνονται κατὰ τρόπον θαυμαστὸν πρὸς τὰ πραγματικὰ δεδομένα (πρόβλεψις Ὑπουργείου Γεωργίας διὰ τὸ ἔτος 1956 : 1420 ἑκατ. τόννων).

Εἰς τὸ σχ. 4 ἀπεικονίζονται γραφικῶς τὰ ἀρχικὰ δεδομένα καὶ ἡ εὐθεῖα τάσεως.

Ἐφαρμογὴ 3η

Καθ' ὅμοιον τρόπον προσδιορίζεται ἡ εὐθεῖα τάσεως εἰς τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος 5 ἔνθα ἐμφαίνεται ἡ παραγωγὴ ἀνύδρου οἰνοπνεύματος εἰς χιλιάδας χιλιογράμμων διὰ τὰ ἔτη 1921—1937.

Ἡ τεχνικὴ διάταξις διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν παραμέτρων α καὶ β ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα 6.

7. Προσαρμογὴ καμπύλων ἀνωτέρου βαθμοῦ

Ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐφαρμοζομένη εἰς καμπύλην τῆς μορφῆς :

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἀκόλουθον σύστημα κανονικῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} N\alpha + \Sigma x\beta + \Sigma x^2\gamma &= \Sigma y \\ \Sigma x\alpha + \Sigma x^2\beta + \Sigma x^3\gamma &= \Sigma xy \\ \Sigma x^2\alpha + \Sigma x^3\beta + \Sigma x^4\gamma &= \Sigma x^2 y\,. \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τούτου προκύπτουν αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων α β, γ καὶ κατ' ἀκοκουθίαν ἡ μορφὴ τῆς συναρτήσεως. Εἰς περίπτωσιν τριτοβαθμίου συναρτήσεως τῆς μορφῆς :

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

Τὸ σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εἶναι :

$$\begin{aligned} N\alpha + \Sigma x\beta + \Sigma x^2\gamma + \Sigma x^3\delta &= \Sigma y \\ \Sigma x\alpha + \Sigma x^2\beta + \Sigma x^3\gamma + \Sigma x^4\delta &= \Sigma xy \\ \Sigma x^2\alpha + \Sigma x^3\beta + \Sigma x^4\gamma + \Sigma x^5\delta &= \Sigma x^2 y \\ \Sigma x^3\alpha + \Sigma x^4\beta + \Sigma x^5\gamma + \Sigma x^6\delta &= \Sigma x^3 y \end{aligned}$$

διὰ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου προκύπτουν αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων α, β, γ, δ.

Ἡ μέθοδος εἶναι γενικὴ καὶ ὡς εἶναι προφανὲς μετὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς πρώτης ἐξισώσεως αἱ ἄλλαι προκύπτουν, κατὰ τρόπον μηχανικόν, διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς πρώτης ἐπὶ **x** καὶ μετατροπῆς τοῦ συμβόλου N εἰς τὸ ἀθροιστικὸν σύμβολον Σ.

Ἐφαρμογὴ 4η

Εἰς τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος 5 προσαρμόζομεν δευτεροβάθμιον καμπύλην. Ἡ τεχνικὴ διάταξις τῶν δεδομένων καὶ αἱ λεπτομέρειαι τῶν ὑπολογισμῶν ἐμφαίνονται εἰς τὸν πίνακα 7.

Ἡ μορφὴ τῆς καμπύλης εἶναι :

$$Y = 11.981 + 368\,x - 15\,x^2$$

Π ί ν α ξ 4

Προσαρμογὴ εὐθυγράμμου τάσεως εἰς τὴν παραγωγὴν σίτου
(Παραγωγὴ σίτου εἰς χιλιάδας τόννων)

Ἔ τ η	X	Παραγωγὴ σίτου Y	XY	X^2	$Y_c = 794+16X$
1933	— 7	773	— 5.411	49	682
1934	— 5	699	— 3.495	25	714
1935	— 3	740	— 2.220	9	746
1936	— 1	532	— 532	1	778
1937	1	818	818	1	810
1938	3	980	2.940	9	842
1939	5	1042	5.210	25	874
1940	7	767	5.369	49	906
		6351	2.679	168	6352
1952	31				1.290 *
1953	33				1.322 *
1954	35				1.354 *
1955	37				1.386 *
1956	39				1.418 *

* Ἀξίαι ροπῆς ἐκτεινόμεναι πέραν τῶν δεδομένων.

$$Y_c = \alpha + 6X$$

$$\alpha = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{6.351}{8} = 794$$

$$6 = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{2.679}{168} = 16 \qquad Y_c = 794 + 16\,X$$

Π ί ν α ξ 5

Παραγωγὴ οἰνοπνεύματος κατὰ τὴν περίοδον 1921—1937

Ἔ τ η	Παραχθὲν οἰνόπνευμα εἰς χιλιάδας χιλιογρ. ἀνύδρου	Ἔ τ η	Παραχθὲν οἰνόπνευμα εἰς χιλιάδας χιλιογρ. ἀνύδρου
1921	6.874	1930	12.428
1922	8.888	1931	11.122
1923	9.172	1932	11.360
1924	9.190	1933	10.600
1925	10.676	1934	13.219
1926	11.177	1935	13.541
1927	13.352	1936	13.853
1928	12.557	1937	16.051
1929	13.498		

Ἡ τελευταία στήλη τοῦ πίνακος 7 ἐμφαίνει τὰς θεωρητικὰς τιμὰς τοῦ y καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ προσαρμογὴ παρουσιάζεται πλέον ἱκανοποιητικὴ τώρα μὲ τὴν ἐφαρμογὴν παραβολῆς 2ου βαθμοῦ.

Ἐφαρμογὴ 5η

Εἰς τὰ αὐτὰ ὡς ἄνω δεδομένα προσαρμόζομεν καὶ παραβολὴν 3ου βαθμοῦ. Τὰ δεδομένα διατάσσονται τεχνικῶς εἰς τὸν πίνακα 8 ἔνθα εἰς τὴν στήλην y, χάριν ἁπλοποιήσεως τῶν πράξεων, ἐστρογγυλεύσαμεν τὰς ποσότητας εἰς ἑκατομμύρια χιλιογράμμων.

Οὕτω προέκυψεν ἡ μορφὴ τῆς τριτοβαθμίου παραβολῆς

$$y = 12 - 0{,}06\,x - 0{,}01\,x^2 + 0{,}01\,x^3$$

ἀπεικονιζομένη εἰς τὸ σχ. 5.

Εἰς τὸν πίνακα 9 παρέχονται αἱ λεπτομέρειαι τῶν ὑπολογισμῶν διὰ τὸν

Πίναξ 6

Προσαρμογὴ εὐθυγράμμου τάσεως εἰς τὴν παραγωγὴν οἰνοπνεύματος
(Παραγωγὴ οἰνοπνεύματος εἰς χιλιάδας χιλιογράμμων ἀνύδρου)

Ἔτη	X	Παραχθὲν οἰνόπνευμα Y	Y . X	X^2	$Y_c = 11621 + 368X$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1921	— 8	6.874	— 54.992	64	8.677
1922	— 7	8.888	— 62.216	49	9.045
1923	— 6	9.172	— 55.032	36	9.413
1924	— 5	9.190	— 45.950	25	9.781
1925	— 4	10.676	— 42.704	16	10.149
1926	— 3	11.177	— 33.531	9	10.517
1927	— 2	13.352	— 26.704	4	10.885
1928	— 1	12.557	— 12.557	1	11.253
1929	0	13.498	0	0	11.621
1930	1	12.428	12.428	1	11.989
1931	2	11.122	22.244	4	12.357
1932	3	11.360	34.080	9	12.725
1933	4	10.600	42.400	16	13.093
1934	5	13.219	66.095	25	13.461
1935	6	13.541	81.246	36	13.829
1936	7	13.853	96.971	49	14.197
1937	8	16.051	128.408	64	14.565
		197.558	150.186	408	197.557

$$Y_c = \alpha + 6X$$

$$\alpha = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{197.558}{17} = 11.621$$

$$6 = \frac{\Sigma YX}{\Sigma X^2} = \frac{150.186}{408} = 368 \qquad Y_c = 11.621 + 368\,X$$

ἔλεγχον τῆς καλυτέρας προσαρμογῆς καὶ ὡς προκύπτει ἐκ τῆς τελευταίας στήλης τοῦ πίνακος ἡ τριτοβάθμιος καμπύλη προσφέρεται ὡς ἡ καταλληλοτέρα εἰς τὸ συγκεκριμένον τοῦτο παράδειγμα.

Τοῦτο δὲ ἐπιβεβαιοῦται καὶ ἐκ τοῦ γραφικοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 5.

Π ν α ξ 7

Καμπύλη δευτέρου βαθμοῦ προσηρμοσμένη εἰς τὴν παραγωγὴν οἰνοπνεύματος
(Παραγωγὴ οἰνοπνεύματος εἰς χιλιάδας χιλιογράμμων ἀνύδρου)

Ἔτη	X	Παραχθὲν οἰνόπνευμα Y	YX	X^2	YX^2	X^4	$Y_c = 11981 + 368X - 15x^2$
1921	— 8	6.874	— 54.992	64	439.936	4.096	8.077
1922	— 7	8.888	— 62.216	49	435.512	2.401	8.670
1923	— 6	9.172	— 55.032	36	330.192	1.296	9.233
1924	— 5	9.190	— 45.950	25	229.750	625	9.766
1925	— 4	10.676	— 42.704	16	170.816	256	10.269
1926	— 3	11.177	— 33.531	9	100.593	81	10.742
1927	— 2	13 352	— 26.704	4	53.408	16	11.185
1928	— 1	12.557	— 12.557	1	12.557	1	11.598
1929	0	13.498	0	0	0	0	11.981
1930	1	12.428	12.428	1	12.428	1	12.334
1931	2	11.122	22.244	4	44.488	16	12.657
1932	3	11.360	34.080	9	102.240	81	12.950
1933	4	10.600	42.400	16	169.600	256	13.213
1934	5	13.219	66.095	25	330.475	625	13.446
1935	6	13.541	81.246	36	487.476	1.296	13.649
1936	7	13.853	96.971	49	678.797	2.401	13.822
1937	8	16.058	128.408	64	1.027.264	4.096	13.965
		197.558	150.186	408	4.625.532	17.544	197.557

Πηγή: Στατιστικὴ ἐπετηρὶς 1938, σελ. 470.

$$\Upsilon_c = \alpha + \beta X + \gamma X^2$$

$$\begin{array}{ll|l|l}
\Sigma\Upsilon = N\alpha + \Sigma X^2\gamma & & 197.558 = 17\alpha + 408\gamma & \gamma = -15 \\
\Sigma\Upsilon X = \Sigma X^2\beta & & 150.186 = 408\beta & \alpha = 11.981 \quad \beta = 368 \\
\Sigma\Upsilon X^2 = \Sigma X^2\alpha + \Sigma X^4\gamma & & 4.625.532 = 408\alpha + 17.544\gamma & \Upsilon_c = 11.981 + 368X - 15X^2
\end{array}$$

Ἐφαρμογὴ 6η

Καμπύλην τρίτου βαθμοῦ ἐφαρμόζομεν, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς τάσεως, καὶ εἰς τὰς ἑλληνικὰς ἐξαγωγὰς ἀπὸ τοῦ ἔτους 1921 — 1937. Τὰ δεδομένα ἐμφαίνονται εἰς τὸν πίνακα 10 αἱ δὲ λεπτομέρειαι τῶν ὑπολογισμῶν διὰ τὴν προσαρμογὴν τῆς καμπύλης εἰς τὸν πίνακα 11. Ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ὡς καὶ τῆς προσδιορισθείσης καμπύλης, ἐχούσης τὴν μορφήν :

$$y = 338{,}2 - 25{,}6\,x - 1{,}55\,x^2 + 0{,}35\,x^3$$

παρουσιάζεται εἰς τὸ σχ. 6.

Πίναξ 8

Καμπύλη τρίτου βαθμοῦ προσηρμοσμένη εἰς τὴν παραγωγὴν οἰνοπνεύματος (παραγωγὴ οἰνοπνεύματος εἰς ἑκατομμ. χιλιογρ. ἀνύδρου)

Ἔτη	X	Y	YX	YX^2	YX^3	X^2	X^3	X^4	X^6	Y_c
1921	—8	6,9	—55,2	441,6	—3532,8	64	—512	4096	263.144	6,7
1922	—7	8,9	—62,3	436,1	—3052,7	49	—343	2401	117.649	8,5
1923	—6	9,2	—55,2	331,2	—1987,2	36	—216	1296	46.656	9,8
1924	—5	9,2	—46,0	230,0	—1150,0	25	—125	625	15.625	10,8
1925	—4	10,7	—42,8	171,2	— 684,8	16	— 64	256	4.096	11,4
1926	—3	11,2	—33,6	100,8	— 302,4	9	— 27	81	729	11,8
1927	—2	13,4	—26,8	53,6	— 107,2	4	— 8	16	64	12
1928	—1	12,6	—12,6	12,6	— 12,6	1	— 1	1	1	12
1929	0	13,5	0	0	0	0	0	0	0	12
1930	1	12,4	12,4	12,4	12,4	1	1	1	1	11,9
1931	2	11,1	22,2	44,4	88,8	4	8	16	64	11,9
1932	3	11,4	34,2	102,6	307,8	9	27	81	729	12
1933	4	10,6	42,4	169,6	678,4	16	64	256	4.096	12,2
1934	5	13,2	66,0	330,0	1650,0	25	125	625	15.625	12,7
1935	6	13,5	81,0	486,0	2916,0	36	216	1296	46.656	13,4
1936	7	13,9	97,3	681,1	4767,7	49	343	2401	117.649	14,5
1937	8	16,1	128,8	1030,4	8243,2	64	512	4096	262.144	16
		197,8	149,8	4633,6	7834,6	408		17544	893.928	199,6

Ἡ ἐξίσωσις τάσεως

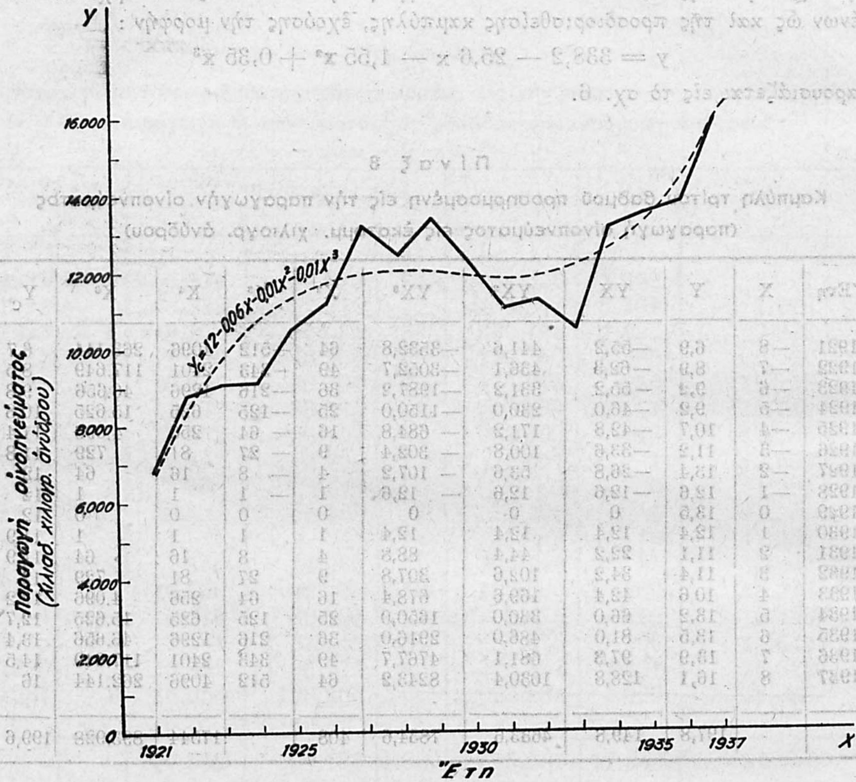
$$\underline{\underline{Y_c = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3}}$$

Αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις

$$\begin{array}{lll}
\Sigma Y = N\alpha + \gamma \Sigma X^2 & 197{,}8 = 17\alpha + 408\gamma & \alpha = 11{,}99 = 12 \\
\Sigma YX = \beta \Sigma X^2 + \delta \Sigma X^4 & 149{,}8 = 408\beta + 17544\delta & \beta = -0{,}063 = -0{,}06 \\
\Sigma YX^2 = \alpha \Sigma X^2 + \gamma \Sigma X^4 & 4633{,}6 = 408\alpha + 17544\gamma & \gamma = -0{,}0147 = -0{,}01 \\
\Sigma YX^3 = \beta \Sigma X^4 + \delta \Sigma X^6 & 7834{,}6 = 17544\beta + 893928\delta & \delta = 0{,}01
\end{array}$$

$$\underline{\underline{Y_c = 11{,}99 - 0{,}063X - 0{,}0147X^2 + 0{,}01X^3}}$$

ἢ $$\underline{\underline{Y_c = 12 - 0{,}06X - 0{,}01X^2 + 0{,}01X^3}}$$


y
16.000
14.000
12.000
10.000
8.000
6.000
4.000
2.000
0
Yc=12-0,06X-0,01X²-0,01X³
Παραγωγή οινοπνεύματος
(Χιλιαδ. χιλιογρ. ἀνύδρου)
1921
1925
1930
1935
1937
X
Ἔτη

Σχ. 5 (πίν. 8)

Πίναξ 9

Ἔλεγχος τῆς καλῆς προσαρμογῆς τῆς καμπύλης εἰς τὴν παραγωγὴν οἰνοπνεύματος (παραγωγὴ εἰς ἑκατομμύρια χιλιογράμμων ἀνύδρου)

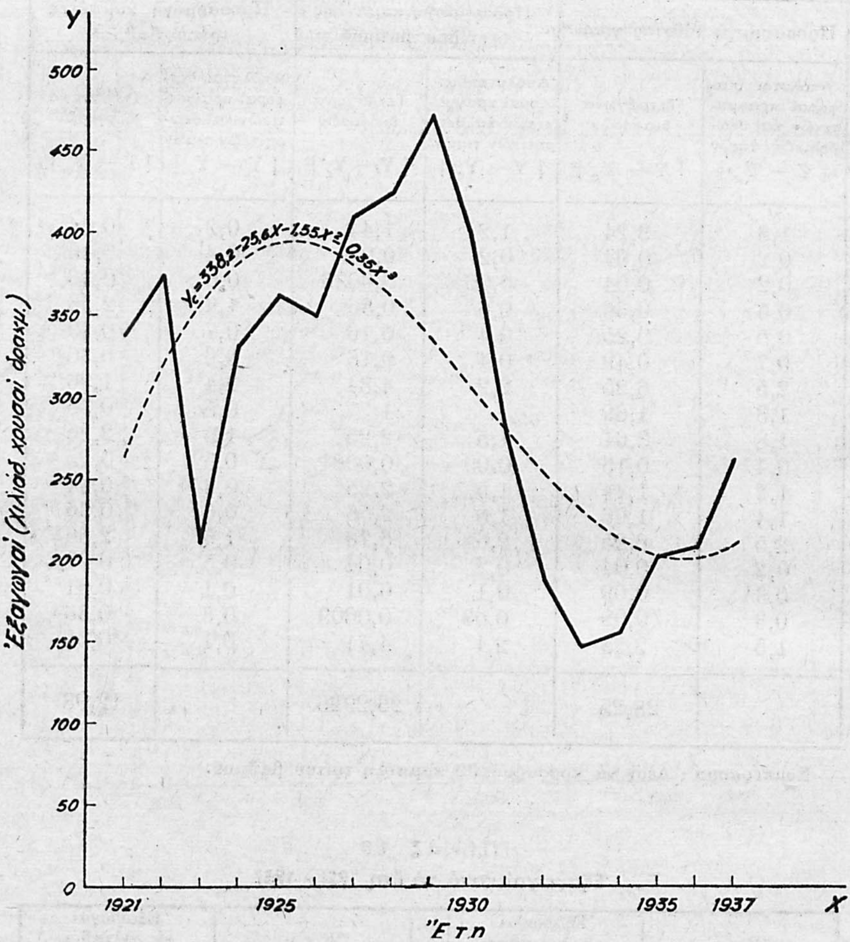
Προσαρμογὴ εὐθείας γραμ.		Προσαρμογὴ καμπύλης δευτέρου βαθμοῦ		Προσαρμογὴ καμπύλης τρίτου βαθμοῦ	
Ἀπόλυτοι διαφοραὶ πραγματικῶν καὶ θεωρητικῶν τιμῶν $[Y - Y_c]$	Τετράγωνα διαφορῶν $[Y - Y_c]^2$	Ἀπόλυτοι διαφοραὶ πραγματικῶν καὶ θεωρητικῶν τιμῶν $[Y - Y_c]$	Τετράγωνα διαφορῶν $[Y - Y_c]^2$	Ἀπόλυτοι διαφοραὶ πραγματικῶν καὶ θεωρητικῶν τιμῶν $[Y - Y_c]$	Τετράγωνα διαφορῶν $[Y - Y_c]^2$
1,8	3,24	1,2	1,44	0,2	0,04
0,2	0,04	0,2	0,04	0,4	0,16
0,2	0,04	0,06	0,0036	0,6	0,36
0,6	0,36	0,6	0,36	1,6	2,56
0,5	0,25	0,4	0,16	0,7	0,49
0,7	0,49	0,4	0,16	0,6	0,36
2,5	6,25	2,2	4,84	1,4	1,96
1,3	1,69	1	1	0,6	0,36
1,8	3,61	1,5	2,25	1,5	2,25
0,4	0,16	0,09	0,0081	0,5	0,25
1,2	1,44	1,5	2,25	0,8	0,64
1,4	1,96	1,6	2,56	0,6	0,36
2,5	6,25	2,6	6,76	1,6	2,56
0,2	0,04	0,2	0,04	0,5	0,25
0,3	0,09	0,1	0,01	0,1	0,01
0,3	0,09	0,03	0,0009	0,6	0,36
1,5	2,25	2,1	4,41	0,1	0,01
	28,25		26,2926		12,98

Συμπέρασμα : Δέον νὰ προσαρμοσθῇ καμπύλη τρίτου βαθμοῦ.

Πίναξ 10

Ἐξαγωγοὶ κατὰ τὰ ἔτη 1921 - 1937

Ἔτη	Ἐξαγωγαὶ εἰς χιλιάδας χρυσῶν δραχμῶν	Ἔτη	Ἐξαγωγαὶ εἰς χιλιάδας χρυσῶν δραχμῶν
1921	337	1930	400
1922	374	1931	279
1923	211	1932	183
1924	331	1933	148
1925	363	1934	157
1926	352	1935	203
1927	410	1936	209
1928	425	1937	265
1929	470		


Y
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
Ἐξαγωγαί (Χιλιάδ. χρυσαῖ δραχμ.)
$Y_c = 338,2 - 25,6X - 1,55X^2 + 0,35X^3$
1921
1925
1930
1935
1937
X
Ἔτη

Σχ. 6

Πίναξ 11

Καμπύλη τρίτου βαθμοῦ προσηρμοσμένη εἰς τὰς ἐξαγωγὰς (1921 - 1937)

(Ἀξία εἰς χιλιάδας χρυσῶν δραχμῶν)

Ἔτη	X	Y Ἐξαγωγαὶ	YX	YX^2	YX^3	X^2	X^3	X^4	X^6	Τιμαὶ ροπῆς Y_c
1921	—8	337	—2696	21.568	—172.544	64	—512	4096	262 144	265
1922	—7	374	—2618	18.326	—128.282	49	—343	2401	117.649	321
1923	—6	211	—1266	7 596	— 45.576	36	—216	1296	46 656	360
1924	—5	331	—1655	8.275	— 41 375	25	—125	625	15.625	384
1925	—4	363	—1452	5.808	— 23.232	16	— 64	256	4.096	393
1926	—3	352	—1056	3.168	— 9 504	9	— 27	81	729	392
1927	—2	410	— 820	1.640	— 3 280	4	— 8	16	64	380
1928	—1	425	— 425	425	— 425	1	— 1	1	1	362
1929	0	470	0	0	0	0	0	0	0	338
1930	1	400	400	400	400	1	1	1	1	311
1931	2	279	558	1.116	2 232	4	8	16	64	284
1932	3	183	549	1.647	4.941	9	27	81	729	257
1933	4	148	592	2 368	9.472	16	64	256	4.096	233
1934	5	157	785	3.925	19 625	25	125	625	15.625	215
1935	6	203	1218	7 308	43.848	36	216	1296	46.656	204
1936	7	209	1463	10.241	71.687	49	343	2401	117 649	203
1937	8	265	2120	16.960	135 680	64	512	4096	262.144	213
		5.117	—4303	110.771	—136.333	408		17544	893.928	5115

Πηγή : Στατιστ. ἐπετηρὶς 1938, σελ. 457.

Ἡ ἐξίσ. τάσεως

$$Y_c = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$$

Αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma Y = N\alpha + \gamma\Sigma X^2 \\ \Sigma YX = 6\Sigma X^2 + \delta\Sigma X^4 \\ \Sigma YX^2 = \alpha\Sigma X^2 + \gamma\Sigma X^4 \\ \Sigma YX^3 = 6\Sigma X^4 + \delta\Sigma X^6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 5.117 = 17\alpha + 408\gamma \\ -4.303 = 4086 + 17544\delta \\ 110.771 = 408\alpha + 17.544\gamma \\ -136.333 = 17544\beta + 893.928\delta \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha = 332{,}2 \\ 6 = -25{,}60 \\ \gamma = -1{,}55 \\ \delta = 0{,}35 \end{array}$$

$$Y_c = 338{,}2 - 25{,}6X - 1{,}55X^2 + 0{,}35X^3$$

8. Ἐκθετικαὶ καμπύλαι

Πολλάκις ἡ φύσις τῶν δεδομένων μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς εἶναι τοιαύτη ὥστε οὐδεμία τῶν προηγουμένων μορφῶν καμπύλων νὰ παρέχῃ ἱκανοποιητικὴν λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς τάσεως. Χρησιμοποιοῦνται τότε ἐκθετικαὶ συναρτήσεις διαφόρων μορφῶν.

Ἡ ἁπλουστέρα μορφὴ τοιαύτης συναρτήσεως εἶναι ἡ :

$$y = \alpha\beta^{x}$$

τῆς ὁποίας ἡ λογαριθμικὴ μορφὴ γίνεται :

$$\log y = \log \alpha + x \log \beta$$

αἱ δὲ κανονικαὶ ἐξισώσεις λαμβάνουν τότε τὴν μορφήν :

$$\Sigma \log y = N \log \alpha$$

$$\Sigma x \log y = \Sigma x^2 \log \beta .$$

Τοιαύτην καμπύλην χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν προσδιορισμὸν τῆς τάσεως εἰς τὸ κατωτέρω παράδειγμα.

Ἐφαρμογὴ 7η

Εἰς τὸν πίνακα 12 παρέχονται τὰ δεδομένα τῆς χωρητικότητος πλοίων καταπλευσάντων εἰς Ἑλλάδα ἀπὸ τοῦ 1921—1932.

Εἰς τὸν πίνακα 13 ἐμφαίνονται οἱ ὑπολογισμοὶ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς τάσεως. Ἡ προκύπτουσα λογαριθμικὴ μορφὴ τῆς συναατήσεως εἶναι :

$$\log y = 2{,}16553 + 0{,}01715\, x$$

Μία προσεκτικὴ σύγκρισις τῶν θεωρητικῶν δεδομένων, ἅτινα ἐμφαίνονται εἰς τὴν τελευταίαν στήλην τοῦ πίνακος 13, πρὸς τὰ ἀρχικὰ δεδομένα ἀποδεικνύει τὴν μὴ ἱκανοποιητικὴν σχετικῶς προσαρμογήν. Διὰ τοῦτο ἐπιχειρεῖται περαιτέρω ἡ χρῆσις τῆς τροποποιημένης ἐκθετικῆς συναρτήσεως, ἐχούσης τὴν μορφήν :

$$y = k + \alpha\beta^{x}$$

Ἡ συνάρτησις αὕτη ἔχει τρεῖς παραμέτρους k, α, β καὶ ἑπομένως ἀπαιτοῦνται τρεῖς ἐξισώσεις διὰ τὸν προσδιορισμὸν αὐτῶν. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν τριῶν συνθηκῶν αἱ ὁποῖαι θὰ μᾶς δώσουν τὰς τιμὰς τῶν k, α, β χρησιμοποιοῦμεν τὰς ἑξῆς δύο μεθόδους :

Μέθοδος 1η (τῶν ὑποχρεωτικῶν σημείων). Κατὰ ταύτην ἐκλέγομεν ὡς ὑποχρεωτικὰ σημεῖα τῆς καμπύλης τρία σημεῖα μὲ τετμημένας x_1, x_2, x_3 τοιαύτας ὥστε

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2$$

καὶ λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν τῶν τετμημένων τὸ σημεῖον x_1.

Τὰ τρία σημεῖα δι' ὧν θὰ διέρχεται οὕτω ἡ καμπύλη εἶναι :

$$(x_1\,,\ y_1)\,,\qquad (x_2\,,\ y_2)\,,\qquad (x_3\,,\ y_3)$$

ἢ

$$(0,y_1)\,,\qquad (x_2\,,\ y_2)\,,\qquad (2x_2\,,\ y_3)\,.$$

Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἀρχικὴν συνάρτησιν ἔχομεν :

$$y_1 = k + \alpha$$

$$y_2 = k + \alpha\beta^{x_2}$$

$$y_3 = k + \alpha\beta^{2x_2}$$

Ἑπομένως

$$\frac{y_3 - k}{y_2 - k} = \frac{y_2 - k}{y_1 - k} \quad \text{διότι} \quad \frac{y_3 - k}{y_2 - k} = \frac{\alpha\beta^{2x_2}}{\alpha\beta^{x_2}} = \beta^{x_2}$$

$$\text{καί} \quad \frac{y_2 - k}{y_1 - k} = \frac{\alpha\beta^{x_2}}{\alpha} = \beta^{x_2}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\frac{y_3 - k}{y_2 - k} = \frac{y_2 - k}{y_1 - k}$$

λαμβάνομεν, δυνάμει τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τῶν ἀναλογιῶν, τὴν σχέσιν :

$$\frac{y_3 - k}{y_2 - y_3} = \frac{y_2 - k}{y_1 - y_2}$$

ἐξ ἧς ὑπολογίζομεν τὸ k συναρτήσει τῶν y_1, y_2, y_3, ἤτοι

$$k = \frac{y_2^2 - y_3 y_1}{2y_2 - y_3 - y_1}$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ k εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$y_1 = k + \alpha$$

λαμβάνομεν

$$\alpha = y_1 - k = \frac{(y_2 - y_1)^2}{y_1 + y_3 - 2y_2}.$$

Ἐκ δὲ τῆς

$$y_2 = k + \alpha\beta^{x_2}$$

λαμβάνομεν

$$\alpha\beta^{x_2} = y_2 - k$$

ἢ

$$(y_1 - k)\beta^{x_2} = y_2 - k$$

$$\beta^{x_2} = \frac{y_2 - k}{y_1 - k}$$

καὶ διὰ λογαριθμίσεως ἔχομεν :

$$\log \beta = \frac{1}{x_2} \log \left(\frac{y_2 - k}{y_1 - k} \right).$$

Ἔχομεν οὕτω τὰς τρεῖς παραμέτρους k, α, β.

Μέθοδος 2α. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην ἀντὶ τῶν τριῶν σημείων χρησιμοποιοῦμεν ὅλα τὰ σημεῖα τὰ εὑρισκόμενα ἐντὸς τριῶν συνεχομένων χρονικῶν διαστημάτων ἴσης ἐκτάσεως.

Ἐὰν ἕκαστον τῶν διαστημάτων τούτων περιέχῃ **n** χρονικὰς μονάδας καὶ καλέσωμεν μὲ τὰ σύμβολα :

$$\Sigma_1 Y, \quad \Sigma_2 Y, \quad \Sigma_3 Y$$

τὰ ἀθροίσματα ὅλων τῶν τεταγμένων ἐντὸς ἑκάστου διαστήματος θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma_1 Y = nx + \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{n-1}$$

$$\Sigma_2 Y = nk + \alpha\beta^{n} + \alpha\beta^{n+1} + \ldots + \alpha\beta^{2n-1}$$

$$\Sigma_3 Y = nk + \alpha\beta^{2n} + \alpha\beta^{2n+1} + \ldots + \alpha\beta^{3n-1}$$

ἢ

$$\Sigma_1 Y = nk + \alpha\left(\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}\right)$$

$$\Sigma_2 Y = nk + \alpha\beta^n\left(\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}\right)$$

$$\Sigma_3 Y = nk + \alpha\beta^{2n}\left(\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}\right)$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν τὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων β, α, k. Αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι :

$$\beta^n = \frac{\Sigma_3 Y - \Sigma_2 Y}{\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y} \quad \text{ἢ} \quad \beta = \sqrt[n]{\frac{\Sigma_3 Y - \Sigma_2 Y}{\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y}}$$

$$\alpha = (\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y) \cdot \frac{\beta - 1}{(\beta^n - 1)^2}$$

$$k = \frac{1}{n}\left[\Sigma_1 Y - \alpha\left(\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}\right)\right].$$

Ἐφαρμογὴ 8η

Τὴν δευτέραν ταύτην μέθοδον προσδιορισμοῦ τῶν παραμέτρων β, α, k τῆς τροποποιημένης ἐκθετικῆς συναρτήσεως ἐφαρμόζομεν εἰς τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος 12.

Αἱ λεπτομέρειαι τῶν ὑπολογισμῶν τῆς μεθόδου ταύτης ἐμφαίνονται εἰς τὸν πίνακα 14 ἔνθα τὸ πρῶτον χρονικὸν διάστημα περιέχει τὰ ἔτη 1921—1924, τὸ δεύτερον τὰ ἔτη 1925—1928 καὶ τὸ τρίτον τὰ ἔτη 1929—1932.

Ἡ μορφὴ τῆς συναρτήσεως μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν παραμέτρων εἶναι :

$$Y = 21.788 - 15.143\,(0{,}0266)^x$$

ἡ δὲ προσαρμογὴ παρουσιάζεται λίαν ἱκανοποιητικὴ ὡς τοῦτο ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν θεωρητικῶν τιμῶν πρὸς τὰς ἐκ παρατηρήσεως τοιαύτας.

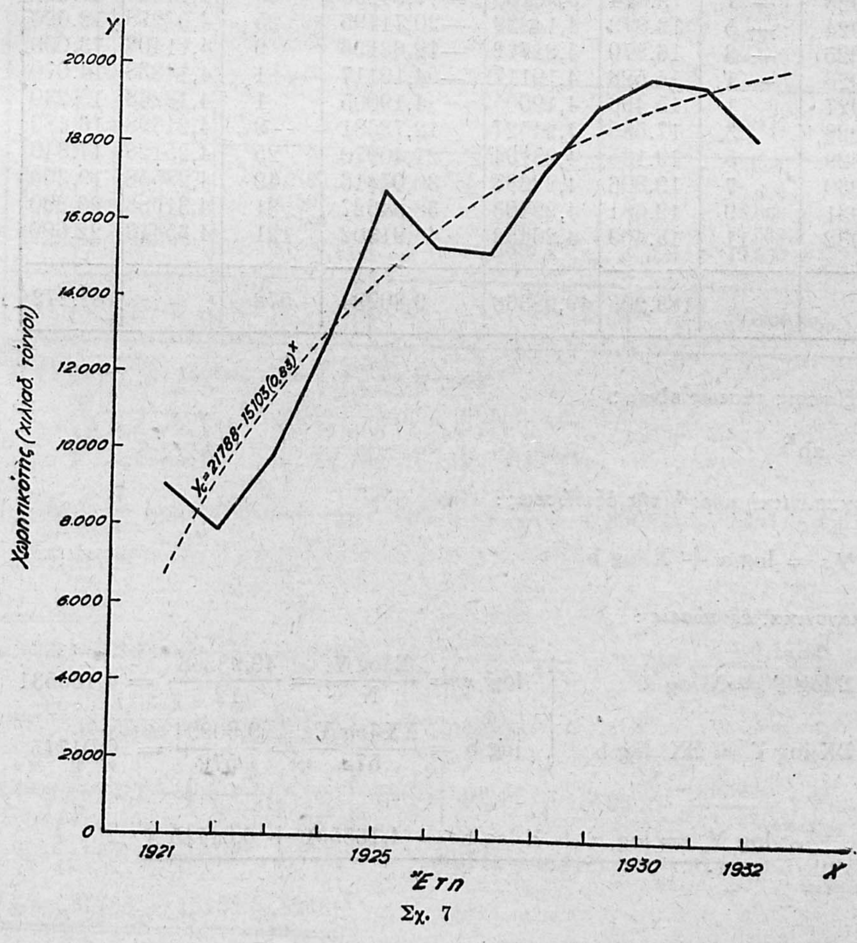
Πρὸς ἔλεγχον τῆς καλῆς προσαρμογῆς προβαίνομεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τετραγώνων τῶν διαφορῶν μεταξὺ θεωρητικῶν καὶ πραγματικῶν τιμῶν πρῶτον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἐκθετικὴν καμπύλην $Y = \alpha\beta^x$. Τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν αὐτῶν παρέχονται εἰς τὸν πίνακα 15.

Εἰς τὸ σχ. 7 ἀπεικονίζεται γραφικῶς ἡ ἐκθετικὴ καμπύλη ὡς καὶ ἡ ἀνώμαλος καμπύλη τῶν ἀρχικῶν δεδομένων.

Πίναξ 12

Κατάπλοι κατὰ τὴν περίοδον 1921—1932

Ἔτη	Χωρητικότης εἰς χιλιάδας τόννων	Ἔτη	Χωρητικότης εἰς χιλιάδας τόννων
1921	9.039	1927	15.486
1922	7.979	1928	17.585
1923	9.814	1929	19.135
1924	13.879	1930	19.806
1925	16.870	1931	19.681
1926	15.528	1932	18.403



Σχ. 7

Πίναξ 13

Ἐκθετικὴ καμπύλη τῆς μορφῆς $Y_c = ab^X$

Ὑπολογισμὸς εὐθυγράμμου τάσεως εἰς λογαρίθμους τῶν Y

(Y χωρητικότης καταπλευσάντων πλοίων ἀπὸ 1921 ἕως 1932)

(χωρητικότης εἰς χιλιάδας τόννων)

Ἔτη	X	Y	log Y	X . log Y	X^2	log Y_c	Y_c
1921	—11	9.039	3,95619	—43,51809	121	3,97688	9.482
1922	— 9	7.979	3,90195	—35,11755	81	4,01118	10.260
1923	— 7	9.814	3,99185	—27,94295	49	4,04548	11.100
1924	— 5	13.879	4,14239	—20,71195	25	4,07978	12.020
1925	— 3	16.870	4,22712	—12,68136	9	4,11408	13.000
1926	— 1	15.528	4,19117	— 4,19117	1	4,14838	14.070
1927	1	15.486	4,19005	4,19005	1	4,18268	15.230
1928	3	17.585	4,24527	12,73581	9	4,21698	16.480
1929	5	19.135	4,28194	21,40970	25	4,25128	17.840
1930	7	19.806	4,29688	30,07816	49	4,28558	19.300
1931	9	19.681	4,29403	38,64627	81	4,31988	20.890
1932	11	18.403	4,26482	46,91302	121	4,35418	22.600
		183.205	49,98366	9,80994	572		182.272

Ἡ ἐξίσωσις τάσεως εἶναι :

$$Y_c = \alpha b^X$$

ἡ λογαριθμικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως :

$$\log Y_c = \log \alpha + X \log b$$

Αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \Sigma \log Y = N \log \alpha \\ \text{II.} & \Sigma X \log Y = \Sigma X^2 \log b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \log \alpha = \dfrac{\Sigma \log Y}{N} = \dfrac{49{,}98366}{12} = 4{,}165531 \\ \log b = \dfrac{\Sigma X \log Y}{572} = \dfrac{9{,}80994}{572} = 0{,}01715 \end{array}$$

$$\underline{\log Y_c = \log \alpha + X \log b = 4{,}165531 + 0{,}01715\,X}$$

Πίναξ 14

Τροποποιημένη ἐκθετική $Y_c = k + ab^X$

Ὑπολογισμὸς τροποποιημένης ἐκθετικῆς τάσεως εἰς τὰ δεδομένα τῶν καταπλευσάντων πλοίων ἀπὸ 1921 ἕως 1932. (Χωρητ. χιλ. τόν.)

Ἔτη	X	Y χωρητικότης	Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τάσεως: $b^X = (0{,}8266)^X$	$ab^X = -15103.(0{,}8266)^X$	$Y_c = K + ab^X = 21788 - 15103\ (0{,}8266)^X$
1921	0	9.039	1	—15.103	6.685
1922	1	7.979	0,8266	—12.484	9.304
1923	2	9.814	0,6833	—10.320	11.468
1924	3	13.879	0,5648	— 8.530	13.258
$\Sigma_1 Y$		40.711			40.715
1925	4	16 870	0,4669	— 7.052	14.736
1926	5	15.528	0,3859	— 5.828	15.960
1927	6	15.486	0,3190	— 4.818	16.970
1928	7	17.585	0,2637	— 3.983	17.805
$\Sigma_2 Y$		65.469			65.471
1929	8	19.135	0,2180	— 3.292	18.496
1930	9	19.806	0,1801	— 2.720	19.068
1931	10	19.681	0,1489	— 2.249	19.539
1932	11	18.403	0,1230	— 1.858	19.930
$\Sigma_3 Y$		77.025			77.033

Ἡ ἐξίσωσις τῆς τάσεως εἶναι : $Y_c = k + ab^X$

$$b = \sqrt[n]{\frac{\Sigma_3 Y - \Sigma_2 Y}{\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y}} = \sqrt[4]{\frac{11.556}{24.758}} = \sqrt[4]{0{,}46676}$$

$$\log b = \frac{1}{4} \log 0{,}46676 = \frac{1}{4}\,\bar{1},66913 = \frac{1}{4}(-0{,}33087) = -0{,}08272 =$$
$$= \bar{1},91728 .$$

$$\underline{\underline{b = 0{,}8266}}$$

$$\alpha = (\Sigma_2 Y - \Sigma_1 Y)\frac{b-1}{(b^n - 1)^2} = 24758 . \frac{0{,}8266 - 1}{[(0{,}8266)^4 - 1]^2} = 24758\ \frac{-0{,}1734}{(-0{,}53315)^2} =$$
$$= \frac{-4293{,}03720}{0{,}28425} = \underline{\underline{-15103}} .$$

$$k = \frac{1}{n}\left[\Sigma_1 Y - \left(\frac{b^n - 1}{b - 1}\right)\alpha\right] = \frac{1}{4}\left[40711 + 15103\left(\frac{-0{,}53315}{-0{,}17340}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{4}(40711 + 15103 . 3{,}075) = \frac{1}{4}(40711 + 46442) = \frac{1}{4}\ 87153 = \underline{\underline{21788}}$$

$$\underline{\underline{Y_c = 21788 - 15103\ (0{,}8266)^X}}$$

Πίναξ 15

Ἔλεγχος τῆς καλῆς προσαρμογῆς τῆς καμπύλης εἰς τοὺς κατάπλους σκαφῶν (χωρητικότης εἰς χιλιάδας τόννων)

Προσαρμογὴ ἐκθετικῆς $Y_c = ab^x$		Προσαρμογὴ τροποποιημένης ἐκθετικῆς $Y_c = k+ab^x$	
Ἀπόλυτοι διαφοραὶ πραγματικῶν καὶ θεωρητικῶν τιμῶν $[Y - Y_c]$	Τετράγωνα διαφορῶν $[Y - Y_c]^2$	Ἀπόλυτοι διαφοραὶ πραγματικῶν καὶ θεωρητικῶν τιμῶν $[Y - Y_c]$	Τετράγωνα διαφορῶν $[Y - Y_c]^2$
443	196.249	2.354	5.541.316
2.281	5.202 961	1.325	1.755.625
1.286	1.653.796	1.654	2.735.716
1.859	3.455 881	621	385.641
3.870	14.875.900	2.134	4.553.956
1.458	2.125.764	432	186 624
256	65.536	1.484	2.202.256
1.105	1.221.025	220	48.400
1.295	1.677.025	639	408.321
506	256.036	738	544.644
1.209	1.461.681	142	20.164
4.197	17.614.809	1.527	2.331.729
	49.806.863		20 714.392

Συμπέρασμα: Δέον νὰ προσαρμοσθῇ εἰς τὰ ἀνωτέρω δεδομένα ἡ τροποποιημένη ἐκθετικὴ καμπύλη τῆς μορφῆς $Y_c = k + ab^x$.

9. Ἡ λογιστικὴ καμπύλη

Εἷς ἕτερος τύπος καμπύλης χρησιμοποιούμενος εἰς ἰδιαζούσας χρονολογικὰς σειρὰς εἶναι ἡ λογιστικὴ καμπύλη ἡ ὁποία παρουσιάζεται ὑπὸ τὴν ἀκόλουθον μορφήν :

$$u = \frac{k}{1 + e^{\alpha+\beta t}}.$$

Ἡ καμπύλη αὕτη ἔχει ὡς ἀσυμπτώτους ἀφ' ἑνὸς τὸν ἄξονα τῶν t καὶ ἀφ' ἑτέρου μίαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν t μὲ τεταγμένην ἴσην πρὸς k.

Πράγματι διὰ $\beta < 0$ ἔχομεν :

$$\text{διὰ } t \to +\infty, \quad u \to k$$
$$\text{» } t \to -\infty, \quad u \to 0$$

Διὰ $\beta > 0$ ἔχομεν :

$$\text{διὰ } t \to +\infty, \quad u \to 0$$
$$\text{» } t \to -\infty, \quad u \to k.$$

Διὰ τὴν προσαρμογὴν τῆς γενικῆς τάσεως μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς πρὸς μίαν καμπύλην τῆς ἀνωτέρω μορφῆς χρειάζεται νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς παραμέτρους α, β καὶ k. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον τῶν ὑποχρεωτικῶν σημείων ἐκλέγοντες τρία κατάλληλα σημεῖα τετμημένων t_1, t_2, t_3 κατὰ τρόπον ὥστε :

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$$

καὶ λαμβάνοντες ὡς ἀρχὴν τῶν τετμημένων τὸ σημεῖον t_2.

Ἡ λογιστικὴ καμπύλη ὀφείλει τὸ ὄνομά της εἰς τὸν Βέλγον μαθηματικὸν Verhufst, ὅστις ἐχρησιμοποίησε ταύτην πρὸς ἔκφρασιν τοῦ νόμου ἀναπτύξεως ἑνὸς πληθυσμοῦ ἤδη ἀπὸ τοῦ 1838.

Κατὰ τὰ πρόσφατα ἔτη αὕτη ἐχρησιμοποιήθη ἐκτεταμένως ὑπὸ τῶν Βιομετρῶν Raymond Pearl καὶ L. J. Reed εἰς πλείστας βιομετρικὰς ἐφαρμογὰς ἀντικείμενον τῶν ὁποίων εἶναι ἡ ἀνάπτυξις ἑνὸς πληθυσμοῦ ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν.

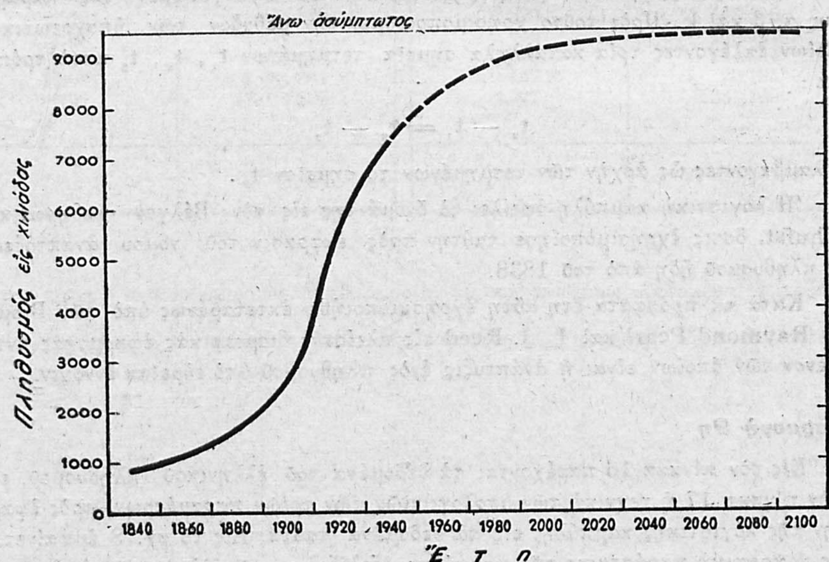
Ἐφαρμογὴ 9η

Εἰς τὸν πίνακα 16 παρέχονται τὰ δεδομένα τοῦ ἑλληνικοῦ πληθυσμοῦ, εἰς δὲ τὸν πίνακα 17 ἡ τεχνικὴ τῶν ὑπολογισμῶν τῶν τριῶν παραμέτρων πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς λογιστικῆς καμπύλης εἰς τὰ δεδομένα ταῦτα. Εἰς τὸ σχ. 8 ἐμφαίνεται τέλος ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς καμπύλης ἐξελίξεως τοῦ ἑλληνικοῦ πληθυσμοῦ.

Πίναξ 16

Ἑλληνικὸς πληθυσμὸς κατὰ τὴν περίοδον 1924 - 1948

Ἔτη	πληθυσμὸς εἰς χιλιάδας	Ἔτη	πληθυσμὸς εἰς χιλιάδας	Ἔτη	πληθυσμὸς εἰς χιλιάδας
1924	6.000	1933	6.624	1942	7.078
1925	5.958	1934	6.727	1943	7.141
1926	6.042	1935	6.837	1944	7.219
1927	6.127	1936	6.936	1945	7.356
1928	6.210	1937	7.029	1946	7.495
1929	6.286	1938	7.122	1947	7.720
1930	6.367	1939	7.222	1948	7.835
1931	6.463	1940	7.319		
1932	6.544	1941	7.281		



Σχ. 8

Πίναξ 17

Προσαρμογὴ τῆς λογιστικῆς καμπύλης εἰς τὰ δεδομένα τοῦ Ἑλλ. πληθυσμοῦ (1924-48)
(πληθυσμὸς εἰς χιλιάδας)

Ἔτη	t	Πληθυσμὸς u	$\log \mu = -0{,}25050 - 0{,}01852t$	$1+\mu$	$u' = \dfrac{9370}{1+\mu}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1924	−1	6000	−0,2198=$\bar{1}$,76802 *	1,5862	5908
1925	0	5958	1,74950	1,5617	**6000** u_1
1926	1	6042	1,73098	1,5383	6091
1927	2	6127	1,71246	1,5158	6182
1928	1	6210	1,69394	1,4942	6271
1929	4	6286	1,67542	1,4736	6359
1930	5	6367	1,65690	1,4538	6445
1931	6	6463	1,63838	1,4349	6530
1932	7	6544	1,61986	1,4167	6614
1933	8	6624	1,60134	1,3993	6696
1934	9	6727	1,58282	1,3827	6777
1935	10	6837	5,56430	1,3667	6856
1936	11	6936	1,54578	1,3514	**6934** u_2
1937	12	7029	1,52726	1,3367	7010
1938	13	9122	1,50674	1,3227	7084
1939	14	7222	1,49022	1,3092	7157
1940	15	7319	1,47170	1,2963	7228
1941	16	7281	1,45318	1,2839	7298
1942	17	7078	1,43466	1,2721	7366
1943	18	7141	1,41614	1,2607	7432
1944	19	7219	1,39762	1,2498	6497
1945	20	7356	1,37910	1,2394	7560
1946	21	7495	1,36058	1,2294	7622
1947	22	7720	1,34206	1,2155	**7682** u_3
1948	23	7835	1,32354		7709
1949	24		1,30502	1,2018	7797 **
1950	25		1,28650	1,1934	7852
1951	26	**7654**	1,26798	1,1853	**7905**
1952	27		1,24946	1,1776	7951
1953	28		1,23094	1,1702	8007
1954	29		1,21242	1,1631	8056
1955	30		1,19390	1,1563	8103
1956	31		1,17538	1,1498	8153
1957	32		1,15686	1,1435	8194
1958	33		1,13834	1,1375	8237
1959	34		1,11982	1,1318	8279
1960	35		1,10130	1,1263	8319
1961	36		1,08278	1,1210	8359
1962	37		1,06426	1,1160	8396
1963	38		1,04574	1,1111	8433
1964	39		1,02722	1,1065	8468
1965	40		1,00870	1,1020	8503
1966	41		2,99018	1,0978	8535
1967	42		2,97166	1,0937	8567
1968	43		2,95314	1,0898	8598
1969	44		2,93462	1,0860	8628
1970	45		2,91610	1,0824	8657

* Εἰς τὴν στήλην 4 τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀρνητικὸν καὶ διὰ λόγους τεχνικοὺς ἀναγράφεται μόνον εἰς τὸν πρῶτον λογάριθμον.

** Ἀξίαι τάσεως ἐκτεινόμεναι πέραν τῶν δεδομένων.

Τὰ τρία ἐπιλεγέντα σημεῖα εἶναι :

1925 : $t_1 = 0$

1936 : $t_2 = 11$

1947 : $t_3 = 22$

$$u_1 = \sqrt[3]{6000 \times 5958 \times 6042}$$

$$\log u_1 = \frac{1}{3} [\log 6000 + \log 5958 + \log 6042] =$$

$$= \frac{1}{3} [3,77815 + 3.77510 + 3,78118] = 3,77814$$

$$\underline{\underline{u_1 = 6000}}$$

$$u_2 = \sqrt[3]{6837 \times 6936 \times 7029}$$

$$\log u_2 = \frac{1}{3} [\log 6837 + \log 6936 + \log 7029] =$$

$$= \frac{1}{3} [3,83487 + 3,84111 + 3,84589] = 3,84096$$

$$\underline{\underline{u_2 = 6934}}$$

$$u_3 = \sqrt[3]{7495 \times 7720 \times 7836}$$

$$\log u_3 = \frac{1}{3} [\log 7495 + \log 7720 + \log 7835] =$$

$$= \frac{1}{3} [3,87477 + 3,88762 + 3,89404] = 3,88548$$

$$\underline{\underline{u_3 = 7682}}$$

$$k = \frac{2u_1u_2u_3 - u_2^2(u_1+u_3)}{u_1u_3 - u_2^2} = \frac{639203856000 - 657835430792}{46092000 - 48080356} =$$

$$= \frac{18631574792}{1988356} = \underline{\underline{9370}}$$

$$\alpha = \log_e \frac{k - u_1}{u_1} = 2,3026 \log_{10} \frac{k - u_1}{u_1} = 2,3026 \log_{10} \frac{9370 - 6000}{6000} =$$

$$= 2,3026 \times \log_{10} 0,5617 = 2,3026 \times \bar{1},74950 =$$

$$= 2,3026 (-1 + 0,74950) = \underline{\underline{-0,5768}}$$

$$b = \frac{1}{t_s} \log_e \frac{u_1(k-u_2)}{u_2(k-u_1)} = \frac{2,3026}{11} \log_{10} \frac{u_1(k-u_2)}{u_2(k-u_1)} =$$

$$= 0,209327 \log \frac{6000(9370-6934)}{6934(9370-6000)} = 0,209327 \times \log 0,6255 =$$

$$= 0,209327 \times \bar{1},79623 = 0,209327\,(-1 + 0,79623) = \underline{\underline{-0,04265}}$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐξομαλυνθείσης τάσεως εἶναι :

$$u(t) = \frac{9370}{1 + e^{-0,577-0,043t}}$$

Ἔνθα t ὁ χρόνος εἰς ἔτη, t=0 εἰς 1925.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἐξομαλυνθείσας ἀξίας εἶναι χρήσιμον νὰ θέσωμεν :

$$e^{\alpha + bt} = \mu$$

ὁπότε

$$u' = \frac{k}{1+\mu}$$

καὶ νὰ ὑπολογίσωμεν λογαριθμικῶς τὸ μ

$$\log_{10} \mu = 0,4343 \log_e \mu = 0,4343\,(\alpha + bt) = 0,4343\,(-0,5768-0,04265t) =$$

$$= \underline{\underline{-0,25050-0,01852\,t}}$$

Εἰς τὸν πίνακα 17 αἱ ἀξίαι τοῦ log μ ὑπολογίζονται εἰς τὴν στήλην (4).

Εἷς τελικὸς ἔλεγχος ἐπὶ τῶν ὑπολογισμῶν δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῆς συγκρίσεως τῶν τιμῶν τῶν ἐπιλεγέντων σημείων.