ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΣ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ Ή ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΕΩΣ

Τοῦ κ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Α. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ
Ἐκτ. Καθηγητοῦ Α.Β.Σ.Π. – Γενικοῦ Διευθυντοῦ Ε.Σ.Υ.Ε.

Εἰσαγωγή

Ὁ «βαθμὸς προσαρμογῆς» ἢ ἄλλως ἡ προσέγγισις μὲ τὴν ὁποίαν μία καμπύλη (ἢ ἐπιφάνεια) παλινδρομήσεως συνοψίζει τὰ ἀντίστοιχα ἐμπειρικὰ δεδομένα* καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἐν γένει «ἀκρίβεια» τῶν δι' αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων, μετρεῖται, ὡς γνωστόν, εἰς τὴν πρᾶξιν εἴτε διὰ τοῦ μέσου τετραγωνικοῦ σφάλματος (μ.τ.σ.) περὶ τὴν ἐν λόγῳ καμπύλην (ἢ ἐπιφάνειαν), εἴτε συνηθέστερον — διὰ τοῦ ἀντιστοίχου δείκτου προσδιορισμοῦ.

Τόσον ὅμως τὸ μ.τ.σ. (σ^2) — καὶ ἰδιαιτέρως αὐτὸ — ὅσον καὶ ὁ δείκτης προσδιορισμοῦ R^2, παρουσιάζουν ὡρισμένα μειονεκτήματα — μὴ ἐπιθυμητὰς ἰδιότητας — τὰ ὁποῖα, πέραν τοῦ ὅτι περιορίζουν σημαντικὰ τὴν πρακτικὴν χρησιμότητα τῶν ἐν λόγω μέτρων, εἰς πολλὰς περιπτώσεις καθιστοῦν, ὡς θὰ ἴδωμεν, τὰ δι' αὐτῶν ἐξαγόμενα συμπεράσματα κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἐπισφαλῆ (μὴ ἀνταποκρινόμενα πλήρως εἰς τὴν πραγματικότητα).

Αἱ ἐν λόγῳ δυσχέρειαι αἴρονται ἢ τουλάχιστον ἀμβλύνονται σημαντικά, ὡς θὰ ἀποδειχθῇ κατωτέρω, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως — ἀντὶ τῶν ὡς ἄνω δεικτῶν ἢ ἐκ παραλλήλου πρὸς αὐτοὺς — ἑνὸς ἄλλου στατιστικοῦ μέτρου τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς μιᾶς καμπύλης (ἢ ἐπιφανείας) παλινδρομήσεως συγκεκριμένως δέ, τοῦ καλουμένου ἐν προκειμένῳ δ ε ί κ τ ο υ ἀ π ο τ ε λ ε σ μ α τ ι κ ό τ η τ ο ς.

Ἡ ἔννοια τῆς ἀ π ο τ ε λ ε σ μ α τ ι κ ό τ η τ ο ς (efficiency) μιᾶς καμπύλης (ἢ ἐπιφανείας) παλινδρομήσεως ὡς καὶ ὁ τρόπος ἀξιοποιήσεως τῆς ἐν λόγῳ ἐννοίας εἰς τὸ πρόβλημα τῆς ἀ ξ ι ο λ ο γ ή σ ε ω ς μιᾶς τοιαύτης καμπύλης (ἢ ἐπιφανείας) ὡς μέσου συνοπτικῆς περιγραφῆς τοῦ τρόπου ἀλληλεξαρτήσεως δύο (ἢ περισσοτέρων) μεταβλητῶν, παρουσιάζεται καὶ ἀναλύεται λεπτομερῶς κατωτέρω.

Κατὰ τὴν διερεύνησιν τοῦ τιθεμένου προβλήματος καὶ τὴν παρουσίασιν

---

* Τὸ σύνολον τῶν ἀριθμητικῶν ζευγῶν (ἢ πλειάδων) τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῶν ὑπὸ μελέτην μεταβλητῶν ἢ ἄλλως τὸ ἀντίστοιχον «σημειακὸν νέφος».

τῶν σχετικῶν ἀποτελεσμάτων ἀναφερόμεθα κατὰ βάσιν — διὰ λόγους ἁπλότητος καὶ συντομίας — μόνον εἰς διμεταβλητοὺς στατιστικοὺς πληθυσμούς. Ἐξ ὅσων ὅμως παρατίθενται, καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ διαδικασία διὰ τὴν γενίκευσιν τῶν ἐν λόγῳ ἐννοιῶν — τύπων, ἰδιοτήτων, ἐφαρμογῶν κλπ. — εἰς πολυμεταβλητοὺς πληθυσμοὺς καὶ τὰς συναφεῖς πρὸς αὐτοὺς ἐπιφανείας παλινδρομήσεως, εἶναι ἄμεσος καὶ ἁπλῆ.

I. Θέσις τοῦ Προβλήματος

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνας ἐρευνητὴς ἐπιθυμῶν νὰ μελετήσῃ τὸν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως δύο μεταβλητῶν (X,Y) καὶ εἰδικώτερον νὰ ἔχῃ μίαν συνοπτικὴν περιγραφὴν τοῦ τρόπου μὲ τὸν ὁποῖον ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς Y ἐπηρεάζεται ἢ σχετίζεται ἐν γένει πρὸς τὴν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς X, ἀποφασίζει νὰ προσαρμόσῃ πρὸς τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα μίαν καμπύλην παλινδρομήσεως τῆς μορφῆς

$$y = f(x, \alpha, \beta) \tag{1}$$

Ὑποθέσωμεν ἀκόμη — χάριν τῆς γενικότητος — ὅτι μεταξὺ τῶν ὑπὸ μελέτην μεταβλητῶν ὑφίσταται σχέσις στοχαστικῆς ὑφῆς — εἰς ἑκάστην δηλαδὴ τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου ἢ ἑρμηνευτικῆς μεταβλητῆς X δὲν ἀντιστοιχεῖ μία ἀλλ' ἐν γένει πλῆθος τιμῶν τῆς ἐξηρτημένης τοιαύτης Y — συγκεκριμένως δέ, ὅτι ἡ μεταβλητὴ X λαμβάνει τὰς τιμὰς $x_1, x_2, \cdots, x_k$, ἐνῷ ἀντιστοίχως πρὸς τὴν τιμὴν αὐτῆς x_i, $i = 1,2, \cdots, k$ ἡ μεταβλητὴ Y λαμβάνει τὰς τιμὰς $y_1, y_2, \cdots, y_\lambda$ ἢ συνοπτικῶς y_j, $j = 1,2, \cdots, \lambda$ καὶ μάλιστα ἑκάστην ἐξ αὐτῶν μὲ συχνότητα f_{ij}. Οὕτως, ὑποτίθεται ἐν προκειμένῳ ὅτι τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα συνίστανται ἐκ τῶν k λ ἀριθμητικῶν ζευγῶν (x_i, y_j), $i = 1, 2, \cdots, k$, $j = 1,2, \cdots, \lambda$ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐπαναλαμβάνεται f_{ij} φοράς. Ἐξυπακούεται βεβαίως ὅτι μερικαὶ τῶν συχνοτήτων f_{ij} δυνατὸν νὰ εἶναι μηδέν, ὡς εἶναι εὐνόητον ὅμως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\sum_i \sum_j f_{ij} = f_{..}$ ἰσοῦται πάντοτε πρὸς τὸ πλῆθος N τῶν ἐπὶ μέρους μονάδων τοῦ ὑπὸ ἔρευναν στατιστικοῦ πληθυσμοῦ.

Εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν, αἱ ἄγνωστοι παράμετροι — ἐν προκειμένῳ τὰ α καὶ β — τῆς ἐξισώσεως (1) ἢ ἄλλως ἡ καμπύλη παλινδρομήσεως Ἐλαχίστων Τετραγώνων

$$\hat{y} = f(x, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) \tag{2}$$

προσδιορίζονται, ὡς γνωστόν, δι' ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_i \sum_j f_{ij} \, [\, y_j - f(x_i, \alpha, \beta) \,]^2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_i \sum_j f_{ij} \, [\, y_j - f(x_i, \alpha, \beta) \,]^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

τὸ δὲ μ.τ.σ. σ^2 περὶ τὴν ἐν λόγῳ καμπύλην — ἐξίσωσις (2) — καὶ ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ R^2 ὑπολογίζονται ἐκ τῶν σχέσεων

$$\sigma^2 = \frac{1}{f_{..}} \sum_i \sum_j f_{ij} \, [\, y_j - f\,(x_i, \hat{\alpha}, \hat{\beta})\,]^2 \qquad (4)$$

καὶ

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{V(Y)} \qquad (5)$$

ὅπου V(Y) συμβολίζει τὴν διακύμανσιν τῶν — ἐκ παρατηρήσεως — τιμῶν τῆς Y ὑπολογιζομένην ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως

$$V(Y) = \frac{1}{f_{..}} \sum_i \sum_j f_{ij} \, (y_j - \mu_y)^2 \qquad (6)$$

Τὸ μ.τ.σ. σ^2 — σχέσις (4) — χαρακτηρίζον προφανῶς τὴν κατὰ μέσον ὅρον «διασπορὰν» ἢ ἄλλως τὴν «ἐγγύτητα» τῶν ἐπὶ μέρους σημείων τοῦ ὑπὸ μελέτην σημειακοῦ νέφους πρὸς τὴν προσαρμοσθεῖσαν καμπύλην παλινδρομήσεως — ἐξίσωσις (2) — ἀποτελεῖ βεβαίως ἓν μέτρον τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης πρὸς τὰ ἀντίστοιχα ἐμπειρικὰ δεδομένα, κατὰ συνέπειαν δέ, μέτρον καὶ τῆς ἐν γένει ἀκριβείας τῶν δι' αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων*. Δυστυχῶς ὅμως, ἡ ἐν λόγῳ ποσότης ὡς ἀπόλυτος ἀριθμὸς ἐκπεφρασμένος εἰς τὰς ἰδίας μονάδας μετρήσεως — ἀκριβέστερον, τετραγωνισμένας — μὲ τὴν ἐξηρτημένην μεταβλητὴν Y, παρουσιάζει — χρησιμοποιουμένη διὰ τὸν ὡς ἄνω σκοπὸν — τὰ αὐτὰ ἐν γένει μειονεκτήματα μὲ ἐκεῖνα τῆς διακυμάνσεως καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ πρακτικὴ χρησιμότης αὐτῆς — ὡς μέτρον τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης παλινδρομήσεως — εἶναι λίαν περιωρισμένη.

Οὕτω, δοθέντος ὅτι τὸ μ.τ.σ. σ^2 ἐπηρεάζεται ἐκ τῶν χρησιμοποιουμένων κατὰ περίπτωσιν μονάδων μετρήσεως, ἡ ἀξιολόγησις τῆς ἑκάστοτε ἀριθμητικῆς τιμῆς του καθίσταται ἐξαιρετικὰ δυσχερὴς καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ κατανόησις τῆς σημασίας του καὶ ἡ ὀρθὴ ἑρμηνεία αὐτοῦ εἶναι οὐσιαστικῶς ἀδύνατος. Εἰδικώτερον, ὁ χαρακτηρισμὸς μιᾶς οἱασδήποτε τιμῆς τοῦ ἐν λόγῳ μέτρου ὡς «μεγάλης» ἢ «μικρᾶς» ἄνευ τῆς χρησιμοποιήσεως κάποιου μέτρου συγκρίσεως — κάποιας συγκριτικῆς βάσεως — εἶναι καθαρῶς ὑποκειμενικὸς καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἐξαγωγὴ ἀντιστοίχων συμπερασμάτων ἐπισφαλὴς καὶ ἄνευ πρακτικῆς ἀξίας.

Ἐξ ἄλλου, δοθέντος ὅτι τὸ ὡς ἄνω μέτρον εἶναι ἀπόλυτος ἀριθμὸς ἐκφραζόμενος εἰς τὰς μονάδας τῆς ἀντιστοίχου ἐξηρτημένης μεταβλητῆς, δὲν προσφέρεται διὰ συγκριτικὴν ἀξιολόγησιν τῆς ἀκριβείας τῶν συμπερασμάτων τὰ ὁποῖα συνάγονται ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων καμπύλων παλινδρομήσεως ἀναφερομένων εἰς διάφορα σύνολα ἐμπειρικῶν δεδομένων ἢ ἄλλως εἰς διαφόρους μεταβλητάς.

* Ἀντανακλᾶ π.χ. τὸ «πόσον καλὰ» ἡ προσαρμοσθεῖσα καμπύλη περιγράφει τὸν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν, τὴν προσέγγισιν μὲ τὴν ὁποίαν αἱ τιμαὶ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς Y ὑπολογίζονται τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως ἐκ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου τοιαύτης X, κ.ο.κ.

Ἐν ὄψει τῶν ὡς ἄνω μειονεκτημάτων τοῦ μ.τ.σ., εἰς τὰς πλείστας τῶν πρακτικῶν ἐφαρμογῶν ὁ βαθμὸς προσαρμογῆς τῆς κατὰ περίπτωσιν χρησιμοποιουμένης καμπύλης παλινδρομήσεως καὶ γενικώτερον ἡ ἀκρίβεια τῶν δι' αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων, μετρεῖται κατὰ κανόνα διὰ τοῦ ἀντιστοίχου των δείκτου προσδιορισμοῦ (τύπος 5).

Ὁ δείκτης R^2, ὡς ἐκ τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ του, δὲν παρουσιάζει τὰ μειονεκτήματα τοῦ μ.τ.σ. καὶ ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἐν γένει περισσότερον εὔχρηστος.

Συγκεκριμένως, ὁ ἐν λόγῳ δείκτης εἶναι ἀριθμὸς καθαρὸς — ἄνευ συγκεκριμένων μονάδων — καὶ κατὰ συνέπειαν πάντοτε συγκρίσιμος, δὲν ἐπηρεάζεται — ἐν γένει — ἐκ τῶν χρησιμοποιουμένων κατὰ περίπτωσιν μονάδων μετρήσεως καὶ ὡς ἐκ τούτου διὰ τὴν κατανόησιν τῆς σημασίας καὶ τὴν ἑρμηνείαν τῶν ἑκάστοτε τιμῶν του δὲν ἀπαιτοῦνται πρόσθετοι πληροφορίαι — περὶ τῶν μονάδων, τῆς ἀρχῆς τῶν μετρήσεων κλπ. — τέλος δέ, πληροῖ πάντοτε τὴν διπλῆν ἀνισότητα

$$0 \leqslant R^2 \leqslant 1 \tag{7}$$

γεγονὸς τὸ ὁποῖον καθιστᾷ τὴν ἀξιολόγησιν τῶν ἑκάστοτε ἀριθμητικῶν τιμῶν του ἄμεσον, ἁπλῆν καὶ ἀντικειμενικήν.

Δυστυχῶς ὅμως καὶ τὸ μέτρον αὐτὸ παρουσιάζει ὡρισμένα μειονεκτήματα καὶ εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἡ χρῆσις αὐτοῦ — ὡς μέτρου τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως — εἶναι δυνατὸν νὰ ὁδηγήσῃ εἰς ἐσφαλμένα κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον συμπεράσματα καὶ ἀντιστοίχους παρανοήσεις.

Συγκεκριμένως, ἡ τιμὴ τοῦ δείκτου R^2 ἀντιπροσωπεύει, ὡς γνωστόν, κατὰ βάσιν — τοῦτο ἄλλωστε προκύπτει ἀμέσως καὶ ἐκ τῆς σχέσεως (5) — τὸ μέρος — ἢ ἄλλως τὸ ποσοστὸν — τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως V (Y) τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὴν ἐπίδρασιν τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἢ γενικώτερον τὴν σχέσιν τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς Y πρὸς τὴν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου τοιαύτης X ἢ ἄλλως, ὡς συνήθως λέγεται, τὸ μέρος τῆς διακυμάνσεως V(Y) τὸ ὁποῖον ἐπεξηγεῖται — ἑρμηνεύεται — ἐκ τῆς προσαρμοσθείσης καμπύλης παλινδρομήσεως. Οὕτως, ἡ τιμὴ τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου δυνατὸν νὰ εἶναι «μεγάλη» — πλησίον τῆς μονάδος — ὄχι διότι τὸ μ.τ.σ. σ^2 — δηλαδὴ ἡ διασπορὰ τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους περὶ τὴν προσαρμοσθεῖσαν καμπύλην παλινδρομήσεως — εἶναι «μικρὸν» — πρᾶγμα τὸ ὁποῖον θὰ ἰσοδυνάμει μὲ μεγάλον βαθμὸν προσαρμογῆς τῆς καμπύλης παλινδρομήσεως καὶ ἀντιστοίχως ὑψηλὴν ἐν γένει ἀκρίβειαν τῶν δι' αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων — ἀλλὰ διότι ἡ ἐπίδρασις τῆς X εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς Y εἶναι σχετικῶς μεγάλη. Τὸ ἀντίστροφον ἐπίσης, δηλαδὴ «μικρὰ» — πλησίον τοῦ μηδενὸς — τιμὴ τοῦ R^2 δὲν σημαίνει ἀπαραιτήτως — διὰ τοὺς ἰδίους ὡς ἄνω λόγους — ὅτι τὸ μ.τ.σ. σ^2 εἶναι «μεγάλο» καὶ ἡ σχετικὴ ἀκρίβεια τῶν ἐξαγομένων συμπερασμάτων μικρά.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ χρῆσις τοῦ δείκτου R^2 ὡς μέτρου τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως δὲν εἶναι πάντοτε ἀσφαλής, πολλάκις δὲ — ἴδε κατωτέρω σχετικὸν ἀριθμητικὸν παράδειγμα — εἶναι δυνατὸν νὰ ὁδηγήσῃ εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα.

Ἕνα δεύτερον — ἐξ ἴσου σημαντικὸν — μειονέκτημα τοῦ δείκτου R^2 τὸ ὁποῖον εἰς τὴν περίπτωσιν στοχαστικῶς ἐξηρτημένων μεταβλητῶν — τὴν πλέον συνήθη εἰς τὴν πρᾶξιν καὶ ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρουσαν στατιστικῶς περίπτωσιν — δυσχεραίνει τὴν ἀντικειμενικὴν ἀξιολόγησιν τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου, ἐνῷ παραλλήλως καθιστᾷ οὐσιαστικῶς ἀδύνατον τὴν σύγκρισιν δύο τοιούτων δεικτῶν ἀναφερομένων εἰς διάφορα σύνολα ἐμπειρικῶν δεδομένων — διάφορα σημειακὰ νέφη — εἶναι τὸ ἑξῆς.

Εἰς τὰς περιπτώσεις στοχαστικῶς ἐξηρτημένων μεταβλητῶν — ὅπου δηλαδὴ εἰς ἑκάστην τιμὴν τῆς X δὲν ἀντιστοιχεῖ μία ἀλλ' ἐν γένει πλῆθος τιμῶν τῆς Y — τὸ ἀνώτερον πέρας — ἀνωτάτη δυνατὴ τιμὴ — τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου δὲν εἶναι ἡ μονὰς — ὡς συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν σχέσεων συναρτησιακῆς ὑφῆς, δηλαδὴ μονοσημάντου ἀντιστοιχίας τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν — ἀλλ' ἡ ποσότης η^2 ἡ ὁποία, ἀποτελοῦσα τὸν δείκτην προσδιορισμοῦ τῆς καλουμένης στοιχειώδους καμπύλης παλινδρομήσεως, δίδεται, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἐκ τῆς σχέσεως

$$\eta^2 = 1 - \frac{E[V(Y/x)]}{V(Y)} \tag{8}$$

ὅπου $V(Y/x)$ συμβολίζει τὴν — δεσμευμένην — διακύμανσιν τῶν τιμῶν τῆς Y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν θέσιν x (ἢ ἄλλως εἰς τὴν τιμὴν $X = x$),

καὶ $E[V(Y/x)]$ τὴν μέσην τιμὴν τῶν ὡς ἄνω διακυμάνσεων διὰ τὰς διαφόρους — ἐκ παρατηρήσεως — τιμὰς τῆς X, ἤτοι διὰ $X = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Διὰ τοῦ ὅρου στοιχειώδης καμπύλη παλινδρομήσεως νοεῖται ἐν προκειμένῳ μία καμπύλη διερχομένη δι' ὅλων τῶν σημείων $[x_i, E(Y/x_i)]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ὅπου ἡ ποσότης $E(Y/x_i)$ συμβολίζει τὸν — δεσμευμένον — μέσον ὅρον τῶν τιμῶν τῆς Y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς $X = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Ἕνας ἁπλοῦς — θεωρητικῶς τουλάχιστον — τρόπος προσδιορισμοῦ μιᾶς τοιαύτης καμπύλης συνίσταται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν μιᾶς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως $k-1$ βαθμοῦ ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸν δεσμευμένον μέσον $E(Y/x)$ ὡς πολυωνυμικὴν συνάρτησιν τῆς X, ἤτοι μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$E(Y/x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{k-1} x^{k-1} \tag{9}$$

καὶ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν k ἀγνώστων παραμέτρων αὐτῆς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$ δι' ἐπιλύσεως τοῦ γραμμικοῦ συστήματος

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2 + \cdots + \alpha_{k-1} x_i^{k-1} = E(Y/x_i), \quad i = 1,2,\cdots,k \tag{10}$$

Τὸ μ.τ.σ. περὶ τὴν στοιχειώδη καμπύλην παλινδρομήσεως, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ὡς ἐκ τοῦ τρόπου προσδιορισμοῦ τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης αἱ δι' αὐτῆς ὑπολογιζόμεναι — ο ἱ ο ν ε ὶ — τιμαὶ τῆς Y ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἐκ παρατηρήσεως τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς $X = x_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ εἶναι οἱ δεσμευμένοι μέσοι $E(Y/x_i)$, ἰσοῦται προφανῶς — ἴδε τύπον (4) — πρὸς τὴν ποσότητα

$$\frac{1}{f_{..}} \sum_i \sum_j f_{ij} \left[y_j - E(Y/x_i) \right]^2 = \frac{1}{f_{..}} \sum_i f_{i.} V(Y/x_i)$$

ἐν ἄλλοις δηλαδὴ λόγοις πρὸς τὴν μέσην τιμὴν τῶν δεσμευμένων διακυμάνσεων $V(Y/x_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ διὰ τὴν ὁποίαν ἐχρησιμοποιήθη ἀνωτέρω τὸ σύμβολον $E[V(Y/x)]$. Κατὰ συνέπειαν, ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ η^2, ἐφαρμοζομένου καὶ ἐν προκειμένῳ τοῦ τύπου (5), δίδεται πράγματι ἐκ τῆς ὡς ἄνω σχέσεως (8).

Ἐξ ἄλλου, τὸ ὅτι ἡ ἀνωτάτη δυνατὴ τιμὴ τοῦ δείκτου R^2, — ὁ ὁποῖος ἀναφέρεται εἰς μίαν οἱανδήποτε καμπύλην παλινδρομήσεως — εἶναι ὁ στοιχειώδης δείκτης προσδιορισμοῦ η^2 καὶ γενικώτερον ἡ ἀνισότης

$$0 \leqslant R^2 \leqslant \eta^2 \leqslant 1 \tag{11}$$

ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς :

Τὸ ἄθροισμα $\sum_j f_{ij} (y_j - c)^2$ ἐλαχιστοποιεῖται, ὡς γνωστόν, ἐὰν ἡ σταθερὰ c λάβῃ τὴν τιμὴν

$$\hat{c} = \frac{1}{f_{i.}} \sum_j f_{ij} y_j = E(Y/x_i)$$

Κατὰ συνέπειαν, ἑκάστη τῶν δεσμευμένων διακυμάνσεων

$$V(Y/x_i) = \frac{1}{f_{i.}} \sum_j f_{ij} \left[y_j - E(Y/x_i) \right]^2, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

εἶναι ὁπωσδήποτε μικροτέρα ἢ τὸ πολὺ ἴση πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ποσότητα

$$\frac{1}{f_{i.}} \sum_i f_{ij} \left[y_i - f(x_i, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) \right]^2, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου εἰς τὴν ἰδίαν σχέσιν εὑρίσκονται μεταξύ των καὶ οἱ σταθμικοὶ μέσοι ὅροι αὐτῶν, ἤτοι ἰσχύει πάντοτε ἡ ἀνισότης

$$E\left[V(Y/x) \right] \leqslant \sigma^2 \tag{12}$$

Ἡ τελευταία αὐτὴ σχέσις συνεπάγεται προφανῶς — λόγῳ τῶν σχέσεων (5) καὶ (8) — καὶ τὴν πρὸς ἀπόδειξιν ἀνισότητα $R^2 \leqslant \eta^2$.

Πρὸς συμπλήρωσιν τῆς ἀποδείξεως τῆς σχέσεως (11), ἤτοι τοῦ ὅτι $0 \leqslant \eta^2 \leqslant 1$. ἀρκεῖ προφανῶς — λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς σχέσεως (8) — νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσχὺς τῆς ἀνισότητος

$$E\left[V(Y/x) \right] \leqslant V(Y) \tag{13}$$

Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς ἰσότητος

$$V(Y) = E\left[V(Y/x) \right] + V\left[E(Y/x) \right] \tag{14}$$

γνωστῆς ὡς ταυτότητος ἀ ν α λ ύ σ ε ω ς τ ῆ ς δ ι α κ υ μ ά ν σ ε ω ς, ὅπου $V[E(Y/x)]$ συμβολίζει τὴν διακύμανσιν τῶν δεσμευμένων μέσων $E(Y/x)$ τῶν τιμῶν τῆς Y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἐκ παρατηρήσεως τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς $X = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Πράγματι, ἐκ τῆς ἰσότητος (14) συνάγεται ἀμέσως ὅτι ἡ ποσότης $E[V(Y/x)]$, ἤτοι ἡ μέση τιμὴ τῶν δεσμευμένων διακυμάνσεων $V(Y/x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ — γνωστὴ καὶ ὡς ἐνδογενὴς διακύμανσις — εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως $V(Y)$, γίνεται δὲ τὸ πολὺ ἴση πρὸς αὐτὴν — ὅτε ἔχομεν $\eta^2 = 0$ — μόνον εἰς τὴν ὁριακὴν περίπτωσιν ὅπου $V[E(Y/x)] = 0$, ἐν ἄλλοις δηλαδὴ λόγοις, εἰς τὴν περίπτωσιν στατιστικῶς ἀσυσχετίστων μεταβλητῶν ὅπου $E(Y/x) = c$ (οἱ δεσμευμένοι δηλαδὴ μέσοι τῆς Y εἶναι ἴσοι πρὸς κάποιαν σταθερὰν ποσότητα καὶ ἑπομένως ἀνεξάρτητοι τῆς X).

Ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης ὅμως ἀνισότητος $0 \leqslant R^2 \leqslant \eta^2 \leqslant 1$, προκύπτει ἀμέσως τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ ἑκάστοτε τιμὴ τοῦ δείκτου R^2, μὴ δυναμένη νὰ ὑπερβῇ τὴν τιμὴν τοῦ ἀντιστοίχου δείκτου η^2, — ἀνεξαρτήτου τῆς κατὰ περίπτωσιν χρησιμοποιουμένης καμπύλης παλινδρομήσεως — ἢ ἄλλως ἐπηρεαζομένη ἐκ τοῦ ἀνωτάτου αὐτοῦ πέρατος, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀξιολογηθῇ αὐτοτελῶς, ἀλλὰ μόνον ἐν συνδασμῷ πρὸς τὴν τελευταίαν (τὴν ἀντίστοιχον δηλαδὴ τιμὴν τοῦ στοιχειώδους δείκτου προσδιορισμοῦ η^2). Οὕτω, μία «μικρὰ» τιμὴ τοῦ δείκτου R^2 δὲν θὰ πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς ἀντακλῶσα μικρὸν βαθμὸν προσαρμογῆς τῆς ἀντιστοίχου καμπύλης παλινδρομήσεως — ἰδιαιτέρως ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ δείκτου η^2, ἡ ὁποία χαρακτηρίζει τὴν ὑφισταμένην ἑκάστοτε δυνατότητα, εἶναι «μικρὰ» — ὅπως ἐπίσης μία μεγάλη τιμὴ τοῦ R^2 δὲν σημαίνει πάντοτε ὅτι ἡ προσαρμοσθεῖσα καμπύλη παλινδρομήσεως συνοψίζει τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα μὲ ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν ἢ ἄλλως ὅτι ἡ ἀκρίβεια τῶν δι' αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων εἶναι ὁπωσδήποτε μεγάλη.

Προφανῶς αἱ ἀνωτέρω δυσχέρειαι καθίστανται σοβαρώτεραι κατὰ τὴν συγκριτικὴν ἀξιολόγησιν δύο (ἢ περισσοτέρων) τοιούτων δεικτῶν (R_1^2, R_2^2, κλπ.) ἀναφερομένων εἰς διάφορα σύνολα ἐμπειρικῶν δεδομένων καὶ κατὰ συνέπειαν ἐχόντων διάφορα ἄνω πέρατα (η_1^2, η_2^2, . . . , κλπ.). Τὰ ὡς ἄνω μειονεκτήματα τοῦ δείκτου R^2 περιορίζουν σημαντικὰ — τουλάχιστον εἰς τὰς περιπτώσεις στοχαστικῶς ἐξηρτημένων μεταβλητῶν — τὴν πρακτικὴν χρησιμότητα τοῦ ἐν λόγῳ μέτρου, ὡς εἶναι δὲ εὐνόητον εἰς πολλὰς περιπτώσεις εἶναι δυνατὸν νὰ ὁδηγήσουν καὶ εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα.

Τόσον τὰ θεωρητικὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα ἀνακύπτουν ἐκ τῶν ἀναφερομένων ἀνωτέρω μειονεκτημάτων τοῦ μ.τ.σ. σ^2 καὶ τοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ R^2, ὅσον καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πρακτικαὶ δυσχέρειαι, αἴρονται ἢ τουλάχιστον ἀμβλύνονται σημαντικὰ διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τῆς ἀποτελεσματικότητος μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως καὶ τῆς χρησιμοποιήσεως ὡς μέτρου τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς μιᾶς τοιαύτης καμπύλης ἑνὸς ἀντιστοίχου δείκτου, καλουμένου ἐν προκειμένῳ δείκτου ἀποτελεσματικότητος.

Αἱ ἐν λόγῳ ἔννοιαι ὡς καὶ ὁ τρόπος ἀξιοποιήσεως αὐτῶν παρουσιάζονται καὶ ἀναλύονται λεπτομερῶς εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον. Προηγουμένως — πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ ὅλου προβλήματος — παρατίθεται ἐνδεικτικῶς ἓν ἁπλοῦν ἀριθμητικὸν παράδειγμα.

Ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ δεδομένα τοῦ κατωτέρω πίνακος (1) ἀποτελοῦν 20 ἀριθμητικὰ ζεύγη ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῶν μεταβλητῶν X_1 καὶ Y_1 καὶ ὅτι ἕνας ἐρευνητής, ἐπιθυμῶν νὰ ἔχῃ μίαν συνοπτικὴν περιγραφὴν τοῦ τρόπου μὲ τὸν ὁποῖον ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς Y_1 ἐπηρεάζεται ἢ σχετίζεται ἐν γένει μὲ τὴν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς X_1, ἀποφασίζει νὰ προσαρμόσῃ πρὸς τὸ ἀντίστοιχον σημειακὸν νέφος — τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισιν τῶν ἐν λόγῳ δεδομένων — τὴν εὐθεῖαν $y_1 = \alpha + \beta x_1$.

ΠΙΝΑΞ 1

	X_1						
	0	2	4	6	8	10	12
Y_1	30	25	26	23	23	35	36
	14	15	47	46	43	36	58
		29	26	24	39	58	
				47			

Τὸ σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (3) λαμβάνει ἐν προκειμένῳ τὴν μορφὴν

$$20\alpha + 120\beta = 680$$

$$120\alpha + 984\beta = 460$$

δι' ἐπιλύσεως δὲ αὐτοῦ λαμβάνομεν $\hat{\alpha} = 22$ καὶ $\hat{\beta} = 2$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ ζητουμένη εὐθεῖα παλινδρομήσεως ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{y}_1 = 22 + 2x_1$$

Τὸ μ.τ.σ. περὶ τὴν ἐν λόγῳ εὐθεῖαν καὶ ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ, ὑπολογιζόμενα ἐκ τῶν τύπων (4) καὶ (5), εἶναι

$$\sigma_1^2 = 103 \quad \text{καὶ} \quad R_1^2 = 0{,}34$$

Ἂς ἐξετάσωμεν κατ' ἀρχὴν τὸ μ.τ.σ. Τί σημαίνει ἡ εὑρεθεῖσα τιμή του καὶ πῶς θὰ πρέπει νὰ ἑρμηνευθῇ αὕτη; Εἶναι «μικρὰ» καὶ κατὰ συνέπειαν ὁ βαθμὸς προσαρμογῆς τῆς ὡς ἄνω εὐθείας καὶ ἡ ἀκρίβεια τῶν δι' αὐτῆς συναγομένων συμπερασμάτων ἱκανοποιητικὴ ἢ «μεγάλη» καὶ ὁ ἐρευνητὴς θὰ πρέπει νὰ προσαρμόσῃ κάποιαν ἄλλην γραμμὴν ἡ ὁποία νὰ παρουσιάζῃ μικρότερον σφάλμα;

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐκ μόνης τῆς ὑπολογισθείσης τιμῆς τοῦ μ.τ.σ. εἶναι ἀδύνατον νὰ δοθῇ ἀπάντησις εἰς τὰ ὡς ἄνω ἐρωτήματα. Ἡ δυσχέρεια αὕτη καθίσταται σαφεστέρα ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ σ_1^2 θὰ ἦτο δυνατὸν **νὰ** εἶναι ἑκατονταπλασία ($\sigma_1^2 = 10.300$) ἢ ὑποεκατονταπλασία ($\sigma_1^2 = 1{,}03$) ἐὰν ἀντιστοίχως ὡς μονὰς μετρήσεως τῆς Y_1, ἐλαμβάνετο ἡ ὑποδεκαπλασία ἢ ἡ δεκαπλασία τῆς ἀρχικῆς τοιαύτης. Μία ἀκόμη δυσχέρεια, ἀναφερομένη εἰς τὴν συγκριτικὴν ἀξιολόγησιν τοῦ μ.τ.σ. δύο διαφόρων καμπύλων παλινδρομήσεως, παρατίθεται κατωτέρω.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὸν δείκτην προσδιορισμοῦ. Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ ($R_1^2 = 0{,}34$) δίδει — κατ' ἀρχὴν τουλάχιστον — τὴν ἐντύπωσιν ὅτι εἶναι «μικρὰ» καὶ κατὰ συνέπειαν ὅτι ἡ προσέγγισις μὲ τὴν ὁποίαν ἡ προσαρμοσθεῖσα εὐθεία παλινδρομήσεως περιγράφει τὸν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν μεταβλητῶν (X_1, Y_1) ὄχι ἱκανοποιητική. Τόσον ὅμως τὸ ἐν λόγῳ μέτρον, ὅσον καὶ τὸ μ.τ.σ. περὶ τὴν ὡς ἄνω εὐθεῖαν παλινδρομήσεως ἀποκτοῦν ἐντελῶς διάφορον σημασίαν καὶ δίδουν διάφορον εἰκόνα τῆς καταστάσεως ἐὰν συγκριθοῦν ἀντιστοίχως πρὸς τὸν στοιχειώδη δείκτην προσδιορισμοῦ η^2 — ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμὴν τοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ — καὶ τὴν ποσότητα $E[V(Y/x)]$ τὴν ἐνδογενῆ δηλαδὴ διακύμανσιν τῶν δεδομένων — ἡ ὁποία ἀποτελεῖ, ὡς εἴδομεν, τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν τιμὴν τοῦ μ.τ.σ. σ^2.

Πράγματι, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (8) ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (1) προκύπτει ὅτι $E[V(Y/x)] = 93$ καὶ $\eta_1^2 = 0{,}40$, διὰ συγκρίσεως δὲ πρὸς τὰ ἐν λόγῳ ἐξαγόμενα τῶν ὑπολογισθεισῶν ἤδη τιμῶν τοῦ μ.τ.σ. $\sigma_1^2 = 103$ καὶ τοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ $R_1^2 = 0{,}34$ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ προσαρμοσθεῖσα εὐθεῖα παλινδρομήσεως παρουσιάζει ὑψηλὸν σχετικῶς βαθμὸν προσαρμογῆς — λαμβανομένων φυσικὰ ὑπ' ὄψιν τῶν ὑφισταμένων ἐν προκειμένῳ δυνατοτήτων — πρὸς τούτοις δὲ ὅτι ἡ προσαρμογὴ οἱασδήποτε ἄλλης καμπύλης δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁδηγήσῃ εἰς σημαντικὴν μείωσιν τοῦ σφάλματος καὶ ἀντιστοίχως βελτίωσιν τῆς ἀκριβείας τῶν ἐξαγομένων συμπερασμάτων. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανὲς ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ἐρευνητὴς θὰ ἤρκῆτο πιθανώτατα εἰς τὴν προσαρμοσθεῖσαν ἤδη εὐθεῖαν.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι μᾶς ἐνδιαφέρει ἀκόμη ἡ μελέτη τοῦ τρόπου ἀλληλεξαρτήσεως δύο ἄλλων — διαφόρων τῶν προηγουμένων — μεταβλητῶν X_2 καὶ Y_2 καὶ ὅτι τὰ διαθέσιμα ἐμπειρικὰ δεδομένα — δέκα ζεύγη τιμῶν τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν — εἶναι ἐκεῖνα τοῦ κατωτέρω πίνακος (2).

ΠΙΝΑΞ 2

	X_2			
	1	2	5	10
Y_2	160	100	20	10
	100	60	40	30
		50	30	

Τὸ σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (3) προκειμένου νὰ προσαρμόσωμεν πρὸς τὰ ἐν λόγῳ δεδομένα μίαν εὐθεῖαν παλινδρομήσεως $y_2 = \alpha + \beta\, x_2$ λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$10\alpha + 43\beta = 600$$

$$43\alpha + 289\beta = 1530$$

δι' ἐπιλύσεως δὲ αὐτοῦ ἔχομεν $\hat{\alpha} = 103$ καὶ $\hat{\beta} = -10$, ἤτοι τὴν εὐθεῖαν παλινδρομήσεως

$$\hat{y}_2 = 103 - 10x_2$$

Τὸ μ.τ.σ. περὶ τὴν ὡς ἄνω εὐθείαν καὶ ὁ ἀντίστοιχος δείκτης προσδιορισμοῦ — τύποι (4) καὶ (5) — εἶναι

$$\sigma_2^2 = 901 \quad \text{καὶ} \quad R_2^2 = 0{,}54$$

Προκειμένου νὰ ἀξιολογήσωμεν τὰ ὡς ἄνω μέτρα θὰ πρέπει καὶ ἐν προκειμένῳ νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἐνδογενὴς διακύμανσις — μ.τ.σ. περὶ τὴν στοιχειώδη καμπύλην παλινδρομήσεως — $E\,[\,V\,(Y/x)\,]$ καὶ ὁ ἀντίστοιχος στοιχειώδης δείκτης προσδιορισμοῦ η^2. Δι' ὑπολογισμοῦ τῶν ἐν λόγῳ ποσοτήτων ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (2) προκύπτουν τὰ ἐξαγόμενα $E\,[\,V\,(Y/x)\,] = 360$ καὶ $\eta^2_2 = 0{,}82$, διὰ συγκρίσεώς δὲ πρὸς αὐτὰ τοῦ ὑπολογισθέντος ἀνωτέρω μ.τ.σ. σ_2^2 καὶ τοῦ δείκτου R_2^2 συνάγεται ἀμέσως τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ βαθμὸς προσαρμογῆς τῆς ὡς ἄνω εὐθείας παλινδρομήσεως καὶ ἀντιστοίχως ἡ ἀκρίβεια τῶν δι' αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων εἶναι μικρά, ὑπάρχοντος σημαντικοῦ περιθωρίου διὰ τὴν βελτίωσίν της.

Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ὑποθέσωμεν ὅτι ἀποφασίζεται ἡ προσαρμογὴ μιᾶς καμπύλης — ὑπερβολῆς παλινδρομήσεως τῆς μορφῆς

$$y_2 = \alpha + \frac{\beta}{x_2}$$

Τὸ σύστημα τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων (3) — μετὰ τὴν ἐφαρμογὴν ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ γνωστοῦ μετασχηματισμοῦ $Z_2 = \dfrac{1}{X_2}$ — λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$10\alpha + 4{,}3\beta = 600$$

$$4{,}3\alpha + 2{,}89\beta = 387$$

δι' ἐπιλύσεως δὲ αὐτοῦ προκύπτει ὅτι ἡ ζητουμένη ὑπερβολὴ παλινδρομήσεως ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$y_2 = 6{,}7 + \frac{124}{x_2}$$

Τὸ μ.τ.σ. περὶ τὴν τελευταίαν ταύτην καμπύλην καὶ ὁ δείκτης προσδιορισμοῦ εἶναι ἀντιστοίχως

$$\sigma_2^2 = 363 \quad \text{καὶ} \quad R_2^2 = 0{,}81$$

Τὰ ἐν λόγῳ μέτρα συγκρινόμενα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τοιαῦτα τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως — ἡ ὁποία προσηρμόσθη προηγουμένως πρὸς τὰ αὐτὰ δεδομένα — ὁδηγοῦν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ προσέγγισις μὲ τὴν ὁποίαν ἡ ὡς ἄνω ὑπερβολὴ συνοψίζει τὰ δεδομένα τῆς παρατηρήσεως καὶ γενικώτερον περιγράφει τὸν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν μεταβλητῶν (X_2, Y_2) εἶναι κατὰ πολὺ ἀνωτέρα καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ ὑπερβολὴ δέον ἀναμφισβητήτως νὰ προτιμηθῇ τῆς ἀντιστοίχου εὐθείας. Ἐξ ἄλλου, διὰ συγκρίσεως τῶν ἐξαγομένων $\sigma_2^2 = 363$ καὶ $R_2^2 = 0{,}81$ πρὸς τὰς ἀντιστοίχους βασικὰς ποσότητας $E[V(Y/x)] = 360$ καὶ $\eta_2^2 = 0{,}82$ καθίσταται προφανὲς ὅτι δὲν ὑφίστανται οὐσιαστικὰ περιθώρια διὰ περαιτέρω βελτίωσιν καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν ὑπάρχει λόγος ἀναζητήσεως ἑτέρας καμπύλης παλινδρομήσεως.

Ἐξυπακούεται βεβαίως ὅτι τὰ λεχθέντα ἀνωτέρω—εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πίνακος (1) — ἀναφορικῶς πρὸς τὰς δυσχερείας αὐτοτελοῦς ἀξιολογήσεως τόσον τοῦ μ.τ.σ. ὅσον καὶ τοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ ἰσχύουν καὶ ἐν προκειμένῳ διὰ τὰ ἀντίστοιχα μέτρα τῆς προσαρμοσθείσης ὑπερβολῆς.

Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα ἕνα ἄλλο ἐρώτημα. Συγκεκριμένως, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἐρευνητὴς ἐνδιαφέρεται νὰ γνωρίζῃ εἰς ποίαν ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο περιπτώσεων — πίναξ (1) ἢ πίναξ (2) — ἡ ἐπιλεγεῖσα τελικῶς καμπύλη παλινδρομήσεως — ἤτοι ἡ εὐθεῖα $\hat{y}_1 = 22 + 2x_1$ καὶ ἡ ὑπερβολὴ $y_2 = 6{,}7 + \dfrac{124}{x_2}$ — συνοψίζει τὰ ἀντίστοιχα δεδομένα μὲ ἱκανοποιητικωτέραν σχετικῶς προσέγγισιν καὶ κατὰ συνέπειαν ποίας — ἐκ τῶν δύο καμπύλων — τὰ ἀποτελέσματα— συναγόμενα συμπεράσματα — παρουσιάζουν μεγαλυτέραν σχετικῶς ἀκρίβειαν.

Ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἡ σύγκρισις τῶν μ.τ.σ. $\sigma_1^2 = 103$ καὶ $\sigma_2^2 = 363$ εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων—ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἐκφράζονται ἐν γένει εἰς διαφόρους μονάδας—ἀδύνατος. Δυστυχῶς ὅμως καὶ ἡ σύγκρισις τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν προσδιορισμοῦ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁδηγήσῃ εἰς ἀσφαλῆ συμπεράσματα, καθ' ὅσον αἱ ὑφιστάμεναι εἰς ἕκαστον πρόβλημα δυνατότητες—ἀνωτάτη δυνατὴ τιμὴ τοῦ R^2—ἐκφραζόμεναι διὰ τῶν ἀντιστοίχων στοιχειωδῶν δεικτῶν προσδιορισμοῦ ($\eta_1^2 = 0{,}40$ καὶ $\eta_2^2 = 0{,}82$) εἶναι διάφοροι. Τοῦτο καθίσταται σαφέστερον ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δεικτῶν προσδιορισμοῦ τῶν προσαρμοσθεισῶν ἀνωτέρω δύο εὐθειῶν. Ὁ δείκτης τῆς δευτέρας εὐθείας—ἀναφερόμενος εἰς τὸν πίνακα (2) —$R_2^2 = 0{,}54$ εἶναι σημαντικῶς μεγαλύτερος τοῦ δείκτου τῆς πρώτης $R_1^2 = 0{,}34$, προφανῶς ὅμως—τοῦτο προκύπτει διὰ συγκρίσεως τῶν ἐν λόγῳ δεικτῶν πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους στοιχειώδεις δείκτας προσδιορισμοῦ $\eta_1^2 = 0{,}40$ καὶ $\eta_2^2 = 0{,}82$— ἡ πρώτη ἐξαντλεῖ εἰς πολὺ μεγαλύτερον βαθμὸν τὰ ὑφιστάμενα περιθώρια καλῆς προσαρμογῆς καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ σχετικὴ ἀκρίβεια τῶν δι' αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων—λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ἀντιστοίχων δυνατοτήτων—εἶναι περισσότερον ἱκανοποιητική.

Τὰ ἀνωτέρω ἀριθμητικὰ παραδείγματα—τὰ ὁποῖα, ὡς ἐλπίζεται, καθιστοῦν πληρεστέραν τὴν κατανόησιν τῶν μειονεκτημάτων τοῦ μ.τ.σ. σ^2 καὶ τοῦ δείκτου προσδιορισμοῦ R^2—θὰ μᾶς ἀπασχολήσουν καὶ πάλιν εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον, ὅπου εἰσάγεται καὶ ἀναλύεται λεπτομερῶς ἡ ἔννοια τῆς ἀποτελεσματικότητος μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως, προκειμένου νὰ διευκρινισθῇ δι' αὐτῶν ὁ τρόπος ἀξιοποιήσεως τοῦ ἀντιστοίχου δείκτου ἀποτελεσματικότητος ὡς μέτρου τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς μιᾶς τοιαύτης καμπύλης καὶ κατὰ συνέπειαν τῆς ἀκριβείας τῶν δι' αὐτῆς ἐξαγομένων συμπερασμάτων.

II. Ἡ ἔννοια τῆς ἀποτελεσματικότητος

Διὰ τοῦ ὅρου ἀποτελεσματικότης μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως ἢ καλλίτερον τῆς οἰκογενείας καμπύλων ἐκ τῆς ὁποίας ἐπιλέγεται αὕτη, νοεῖται ἐν προκειμένῳ ἡ δυνατότης αὐτῆς νὰ συνοψίσῃ τὰ ὑφιστάμενα ἑκάστοτε ἐμπειρικὰ δεδομένα μὲ τὴν πλέον ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν καὶ κατὰ συνέπειαν νὰ ἐπιτρέπῃ τὴν ἐξαγωγὴν συμπερασμάτων μὲ τὴν μεγίστην δυνατὴν ἀκρίβειαν.

Ἡ ἀκρίβεια ὅμως τῶν συμπερασμάτων τὰ ὁποῖα συνάγονται διὰ μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως καὶ εἰδικώτερον

(α) τὸ «πόσον καλὰ» περιγράφει αὕτη τὸν τρόπον ἀλληλεξαρτήσεως τῶν συνεξεταζομένων μεταβλητῶν ἢ ἄλλως τὴν νομοτέλειαν ἡ ὁποία διέπει τὴν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς μιᾶς ἐν σχέσει πρὸς τὴν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς ἄλλης, καὶ

(β) ἡ προσέγγισις μὲ τὴν ὁποίαν ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη ἐπιτρέπει τὸν ὑπολογισμὸν τιμῶν τῆς μιᾶς (τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς) ἐξ ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς ἄλλης (τῆς θεωρουμένης κατὰ περίπτωσιν ὡς ἀνεξαρτήτου ἢ ἑρμηνευτικῆς μεταβλητῆς)

ἐξαρτῶνται, ὡς γνωστόν, ἐκ τῆς διασπορᾶς ἢ ἄλλως τῆς κατὰ μέσον ὅρον ἐγγύτητος πρὸς αὐτὴν τῶν ἐπὶ μέρους σημείων τοῦ ἀντιστοίχου σημειακοῦ νέφους — γραφικῆς παραστάσεως τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως — ἡ ὁποία, ὡς ἤδη ἐλέχθη, μετρεῖται κατὰ βάσιν διὰ τοῦ μ.τ.σ. σ^2.

Κατὰ συνέπειαν, ἡ ἀποτελεσματικότης μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως εἶναι κατ' ἀρχὴν ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ μ.τ.σ. περὶ αὐτὴν καὶ μεγιστοποιεῖται μὲ τὴν ἐλαχιστοποίησιν αὐτοῦ (τοῦ μ.τ.σ. σ^2).

Ἐκ τῆς γενομένης ὅμως μέχρι τοῦδε ἀναλύσεως εἴδομεν ὅτι τὸ μ.τ.σ. σ^2 περὶ οἱανδήποτε καμπύλην παλινδρομήσεως δὲν δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον — ἴδε σχέσιν (12) — τῆς ποσότητος $E[\,V(Y/x)\,]$, ὁριζομένης ἐκ τῆς σχέσεως

$$E[\,V(Y/x)\,] = \frac{1}{f_{..}} \sum_i f_{i.}\; V(Y/x_i) = \frac{1}{f_{..}} \sum_i \sum_j f_{ij}\, [\,y_j - E(Y/x_i)\,]^2 \qquad (15)$$

— καὶ καλουμένης ἐν προκειμένῳ ἐνδογενοῦς διακυμάνσεως τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως — γίνεται δὲ ἴσον πρὸς αὐτὴν ἐὰν — καὶ μόνον ἐὰν — ἡ ἐπιλεγεῖσα καμπύλη παλινδρομήσεως διέρχεται δι' ὅλων τῶν δεσμευμένων μέσων τῆς Y ἢ ἄλλως τῶν σημείων $[\,x_i,\ E(Y/x_i)\,]$, $i = 1, 2, \cdots, k$, ἐν ἄλλοις δηλαδὴ λόγοις εἰς τὴν ὁριακὴν περίπτωσιν στοιχειώδους καμπύλης παλινδρομήσεως.

Οὕτω, καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ ἀποτελεσματικότης μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς μορφῆς καὶ τῆς εὐελιξίας τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης, ἀλλὰ καὶ τῆς διασπορᾶς τὴν ὁποίαν παρουσιάζουν κατὰ βάσιν τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα περὶ τὴν στοιχειώδη καμπύλην παλινδρομήσεως ἢ ἄλλως τῆς ἐνδογενοῦς διακυμάνσεως αὐτῶν. Εἶναι λοιπὸν εὔλογον, ἡ ἀποτελεσματικότης μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως νὰ χαρακτηρίζεται ἐκ τῆς δυνατότητος αὐτῆς νὰ ὁδηγήσῃ εἰς μ.τ.σ. σ^2 τὸ ὁποῖον νὰ πλησιάζῃ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν τιμήν του — ἤτοι τὴν ἐνδογενῆ διακύμανσιν $E[V(Y/x)]$ — ὡς ἐκ τούτου δέ, ὡς δείκτης τῆς ἀποτελεσματικότητος μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως προτείνεται ἐν προκειμένῳ τὸ πηλίκον τῆς ἐνδογενοῦς διακυμάνσεως $E[V(Y/x]$ πρὸς τὸ μ.τ.σ. σ^2 περὶ τὴν ἐν λόγῳ καμπύλην, ἤτοι ἡ ποσότης

$$e = \frac{E[V(Y/x)]}{\sigma^2} \tag{16}$$

ὅπου $E[V(Y/x)]$ καὶ σ^2 ὑπολογίζονται ἀντιστοίχως ἐκ τῶν τύπων (15) καὶ (4).

III. Ἰδιότητες τοῦ δείκτου ἀποτελεσματικότητος

Ὁ δείκτης ἀποτελεσματικότητος e παρουσιάζει τὰς κατωτέρω ἐπιθυμητὰς ἰδιότητας:

(α) Εἶναι ἀριθμὸς καθαρὸς — ἄνευ συγκεκριμένων μονάδων — καὶ συνεπῶς πάντοτε συγκρίσιμος

(β) Εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν κατὰ περίπτωσιν χρησιμοποιουμένων μονάδων μετρήσεως καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ κατανόησις τῆς σημασίας αὐτοῦ καὶ ἡ ἑρμηνεία τῶν τιμῶν του εἶναι ἄμεσος καὶ ἁπλῆ χωρὶς νὰ ἀπαιτοῦνται οἱαιδήποτε πρόσθετοι πληροφορίαι.

Αἱ ἀνωτέρω δύο ἰδιότητες τοῦ δείκτου e εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ του.

(γ) Ὁ δείκτης e λαμβάνει πάντοτε τιμὰς εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα $[0, 1]$, πληροῖ δηλαδὴ τὴν διπλῆν ἀνισότητα

$$0 \leqslant e \leqslant 1 \tag{17}$$

καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἀξιολόγησις τῶν τιμῶν αὐτοῦ εἶναι ἁπλῆ καὶ ἀντικειμενική.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀπορρέει εὐκόλως ἐκ τοῦ τύπου (12) ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν σχέσιν (14).

Ἐξ ἄλλου, ὡς πρὸς τὸν τρόπον ἀξιοποιήσεως καὶ τὰ πλεονεκτήματα τοῦ ἐν λόγῳ δείκτου ἐν σχέσει πρὸς τὸ μ.τ.σ. σ^2 καὶ ἰδιαιτέρως ὡς πρὸς τὸν δείκτην προσδιορισμοῦ R^2, δέον νὰ λεχθοῦν τὰ ἑξῆς:

(α) Ὁ δείκτης ἀποτελεσματικότητος μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως ἐπιτρέπει τὴν ἀντικειμενικὴν ἀξιολόγησιν αὐτῆς ὡς μέσου συνοπτικῆς περιγραφῆς τοῦ τρόπου ἀλληλεξαρτήσεως δύο μεταβλητῶν κλπ.; καθ' ὅσον οὗτος, ἀντιθέτως πρὸς τὸ μ.τ.σ. σ^2, τὸ ὁποῖον ὡς εἴδομεν εἶναι ἀδύνατον νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὸν ἐν λόγῳ σκοπὸν καὶ τὸν δείκτην προσδιορισμοῦ R^2, ὁ ὁποῖος ἀντανακλᾷ κατὰ βάσιν τὴν ἔντασιν μὲ τὴν ὁποίαν ἡ διαμόρφωσις τῶν τιμῶν τῆς Υ ἐπηρεάζεται ἢ σχετίζεται ἐν γένει πρὸς τὴν διαμόρφωσιν τῶν τιμῶν τῆς X, ἀποτελεῖ ἀποκλειστικῶς μέτρον τῆς δυνατότητος ἢ ἄλλως τοῦ «πόσον» ἡ χρησιμοποιηθεῖσα οἰκογένεια καμπύλων παρουσιάζει τὴν μεγίστην δυνατὴν προσαρμοστικότητα καὶ κατὰ συνέπειαν τὴν μεγίστην δυνατὴν ἀκρίβειαν ἀποτελεσμάτων. Τὸ πλεονέκτημα τοῦτο τοῦ δείκτου e καθίσταται σαφέστερον εἰς τὴν περίπτωσιν χρονολογικῶν σειρῶν καὶ τῶν ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰς γ ρ α μ μ ῶ ν τ ά σ ε ω ς.

(β) Ὁ δείκτης e ἐπιτρέπων—πέραν τῆς συγκριτικῆς ἀξιολογήσεως τοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς δύο διαφόρων καμπύλων προσαρμοζομένων εἰς τὰ αὐτὰ δεδομένα, πρᾶγμα ἐφικτὸν καὶ ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἀντιστοίχων μ.τ.σ.—τὴν μέτρησιν τῆς σχετικῆς ὑστερήσεως τῆς ἑκάστοτε προσαρμοζομένης καμπύλης ἐκ τῆς πλέον ἀποτελεσματικῆς τοιαύτης, διευκολύνει σημαντικὰ τὴν λῆψιν ἀποφάσεων ἐπὶ τοῦ προβλήματος τῆς ἐπιλογῆς τῆς καταλληλοτέρας κατὰ περίπτωσιν καμπύλης. Ἐν προκειμένῳ θὰ πρέπει βεβαίως νὰ ὑπομνησθῇ ὅτι διὰ τὴν ἐπιλογὴν τῆς καταλληλοτέρας ἑκάστοτε καμπύλης παλινδρομήσεως, δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν μόνον ὁ βαθμὸς προσαρμογῆς αὐτῆς — διότι τότε θὰ ἐπελέγετο πάντοτε μία στοιχειώδης καμπύλη παλινδρομήσεως—ἀλλὰ καὶ ἡ ἁπλότης αὐτῆς, ἡ εὐκολία κατανοήσεως τῆς ἐν γένει σημασίας της καὶ τέλος ἡ δυνατότης ἀμέσου παὶ πρακτικῆς ἀξιοποιήσεως τῶν δι' αὐτῆς συναγομένων συμπερασμάτων.

(γ) Τέλος, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ δείκτης ἀποτελεσματικότητος e χαρακτηρίζει τὸν βαθμὸν προσαρμογῆς μιᾶς καμπύλης παλινδρομήσεως ὄχι ἀπολύτως — ὅπως τὸ μ.τ.σ. σ^2—ἀλλ' ἐν σχέσει πρὸς τὰς ὑφισταμένας κατὰ περίπτωσιν δυνατότητας — δηλαδὴ ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἑκάστοτε ἐλαχίστην δυνατὴν τιμὴν τοῦ μ.τ.σ. ἀντιπροσωπευομένην ὑπὸ τῆς ποσότητος $E\,[V\,(Y/x)]$ —καθιστᾶ πέραν τῶν ἄλλων—ἄμεσον καὶ ἁπλῆν καὶ τὴν συγκριτικὴν ἀξιολόγησιν τῆς ἀκριβείας τῶν ἀποτελεσμάτων τὰ ὁποῖα συνάγονται ἐκ δύο διαφόρων καμπύλων παλινδρομήσεως, ἐν ἄλλοις δηλαδὴ λόγοις ἐκ καμπύλων ἀναφερομένων εἰς διάφορα σύνολα ἐμπειρικῶν δεδομένων.

Ἐν προκειμένῳ θεωρεῖται σκόπιμον νὰ ὑπομνησθῇ ὅτι ἡ ἁπλῆ σύγκρισις

—διὰ τὸν ὡς ἄνω σκοπὸν—τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν προσδιορισμοῦ εἶναι δυνατόν, ὡς ἤδη ἐλέχθη, νὰ ὁδηγήση εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα (ἴδε σχετικὰ σχόλια εἰς τὸ ὡς ἄνω ἀριθμητικὸν παράδειγμα).

Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῆς σημασίας τῆς χρησιμότητος καὶ τοῦ τρόπου ἀξιοποιήσεως τοῦ δείκτου ἀποτελεσματικότητος e ἀναφερόμεθα καὶ πάλιν εἰς τὸ παρατεθὲν ἀριθμητικὸν παράδειγμα.

Τὸ μ.τ.σ. τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως ἡ ὁποία προσηρμόσθη πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος (1) εὑρέθη $\sigma_1^2 = 103$. Ἐξ ἄλλου ἡ ἐνδογενὴς διακύμανσις $E[V(Y/x)]$ ὑπολογιζομένη ἐκ τῆς σχέσεως (15) εἶναι $E[V(Y/x)] = 93$. Κατὰ συνέπειαν, ὁ δείκτης ἀποτελεσματικότητος τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας ὑπολογιζόμενος ἐκ τοῦ τύπου (16) εἶναι $e=0{,}90$, ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος δὲ αὐτοῦ συνάγονται ἀμέσως τὰ κάτωθι συμπεράσματα :

(α) Ἡ προσαρμοσθεῖσα εὐθεῖα παλινδρομήσεως παρουσιάζει λίαν ἱκανοποιητικὴν προσαρμογὴν καθ' ὅσον ὁ δείκτης e ὀλίγον ὑπολείπεται τῆς μονάδος.

(β) Δὲν παρίσταται ἀνάγκη προσαρμογῆς ἄλλης — περισσότερον εὐελίκτου—γραμμῆς παλινδρομήσεως καθ' ὅσον ἡ ἀναμενομένη σχετικὴ βελτίωσις εἶναι ἀσήμαντος (μικροτέρα τοῦ 10%).

Ἄς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος (2). Τὸ μ.τ.σ. περὶ τὴν προσαρμοσθεῖσαν ἐν προκειμένῳ εὐθεῖαν παλινδρομήσεως εἶναι, ὡς εἴδομεν, $\sigma_2^2=901$, δοθέντος δὲ ὅτι ἡ ἀντίστοιχος ἐνδογενὴς διακύμανσις εἶναι $E[V(Y/x)] = 360$, ὁ δείκτης e λαμβάνει τὴν τιμὴν $e = 0{,}40$.

Ἐξ αὐτοῦ βεβαίως τοῦ ἀποτελέσματος προκύπτουν τὰ ἀντίθετα ἀκριβῶς πρὸς τὰ προηγούμενα συμπεράσματα καὶ ὡς ἐκ τούτου ἀνεζητήθη καταλληλοτέρα καμπύλη παλινδρομήσεως. Τὸ μ.τ.σ. περὶ τὴν προσαρμοσθεῖσαν ἐν συνεχείᾳ ὑπερβολὴν εὑρέθη, ὡς εἴδομεν, $\sigma_2^2 = 363$. Κατὰ συνέπειαν ὁ ἀντίστοιχος δείκτης ἀποτελεσματικότητος εἶναι ἐν προκειμένῳ $e = 0{,}99$. Ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος αὐτοῦ πέραν τοῦ λίαν ἱκανοποιητικοῦ βαθμοῦ προσαρμογῆς τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης, συνάγεται ἀκόμη τὸ συμπέρασμα ὅτι οὐδεμία ἄλλη καμπύλη δύναται οὐσιαστικῶς νὰ δώση ἱκανοποιητικώτερα ἀποτελέσματα καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν ὑφίσταται λόγος τοιαύτης ἀναζητήσεως.

Περαίνοντες τὸν σχολιασμὸν τῶν ἀνωτέρω ἀποτελεσμάτων θεωροῦμεν σκόπιμον νὰ συγκρίνωμεν τὴν εὐθεῖαν παλινδρομήσεως τοῦ πίνακος (1) καὶ τὴν ὑπερβολὴν τοῦ πίνακος (2). Ἐκ τῶν δεικτῶν $e_1 = 0{,}90$ (τῆς εὐθείας) καὶ $e_2 = 0{,}99$ (τῆς ὑπερβολῆς) καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ σχετικὴ—λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν δυνατοτήτων εἰς ἑκάστην περίπτωσιν—ἀκρίβεια τῶν ἀντιστοίχων ἀποτελεσμάτων δὲν εἶναι οὐσιαστικῶς διάφορος ἢ τουλάχιστον δὲν εἶναι τόσον σημαντικὴ ὅσον θὰ προέκυπτε ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δεικτῶν προσδιορισμοῦ οἱ ὁποῖοι, ὡς εἴδομεν, εἶναι $R_1^2 = 0{,}34$ καὶ $R_2^2 = 0{,}81$. Ἡ ἐν λόγῳ ἀντινομία καθίσταται πλέον σαφὴς ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δεικτῶν προσδιορισμοῦ τῶν δύο εὐθειῶν παλινδρομήσεως ($R_1^2 = 0{,}34$ καὶ $R_2^2 = 0{,}54$) ἐκ τῶν ὁποίων θὰ προέκυπτε ὅτι βαθμὸς προσαρμογῆς καὶ ἡ σχετικὴ ἀκρίβεια τῶν ἀποτελεσμάτων τὰ ὁποῖα ἐπιτυγχάνονται διὰ τῆς δευτέρας εὐθείας (τοῦ πίνακος 2) εἶναι ὑψηλοτέρα, ἐνῶ τόσον ἐκ τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν ἀποτελεσματικότητος ($e_1 = 0,90$, $e_2 = 0,40$) ὅσον καὶ ἐκ τῶν ἀποκλίσεων τῶν ὑπολογιζομένων — οἱονεὶ — καὶ ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῶν ἀντιστοίχων ἐξηρτημένων μεταβλητῶν φαίνεται σαφῶς ἡ ὑπεροχὴ — ὡς πρὸς τὸν βαθμὸν προσαρμογῆς κλπ. — τῆς πρώτης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ἀθανασιάδου Κ. «Στατιστική», 1958.

2. Κάκουλου Θ. «Στατιστική», 1972.

3. Παπαμιχαὴλ Δ. «Μαθήματα Στατιστικῆς», 1968.

4. Actor F. «Analysis of Straight — Line Data», 1966,

5. Cramer H. «Mathematical Methods of Statistics», 1968.

6. Kendall M. «The Advanced Theory of Statistics», 1952.

7. Oste B. «Statistics in Research», 1954.