Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΥΠΟ ΤΩΝ κ. κ. Κ. ΠΛΗΘΕΙΔΗ - Β. ΜΕΤΑΞΑ

11. (Συνέχεια ἐκ τοῦ τεύχους 9. 10.)

Ἐὰν ἡ μεταβολὴ Δu δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

ὅπου ε εἶναι ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος τείνει εἰς τὸ μηδὲν μαζὶ μὲ τὰ Δx καὶ Δy, τότε λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι διαφορήσιμος καὶ τὴν παράστασιν :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$$

ὀνομάζομεν ***ὁλικὸν διαφορικόν***. Ὅταν αἱ μεταβολαὶ Δx καὶ Δy εἶναι ἀρκετὰ μικραὶ τότε ἡ παράστασις $\varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ εἶναι ἀρκετὰ μικρὴ ποσότης συγκρινομένη μὲ τὸ Δx καὶ Δy καὶ ἑπομένως τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν μᾶς δίδει τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως u μὲ μεγάλην προσέγγισιν. Ἐὰν γράψωμεν ἀντὶ Δx καὶ Δy, dx καὶ dy ὡς συνήθως,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy .$$

Ἐὰν ἡ συνάρτησις u εἶναι συνάρτησις τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x, y, z τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως ὁρίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz .$$

Παράδειγμα 5ον) Νὰ γίνῃ σύγκρισις τῶν τιμῶν τῶν du καὶ Δu διὰ τὴν συνάρτησιν $u = x^2 + 2y^2$ ὅταν $x = 2$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$.

Λύσις :

$$\begin{aligned} u + \Delta u &= (x + \Delta x)^2 + 2\,(y + \Delta y)^2 \\ &= x^2 + 2y^2 + 2x\Delta x + 4y\Delta y + (\Delta x)^2 + 2(\Delta y)^2 \\ u &= x^2 + 2y^2 \end{aligned}$$

διὰ ἀφαιρέσεως :

$$\Delta u = 2x\Delta x + 4y\Delta y + (\Delta x)^2 + 2\,(\Delta y)^2 .$$

Λαμβάνοντες τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς συναρτήσεως εὑρίσκομεν :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y$$

καὶ

$$du = 2xdx + 4ydy .$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ εὑρίσκομεν

$$\Delta u = 0{,}8 + 3{,}6 + 0{,}04 + 0{,}18 = 4{,}62$$

$$du = 0{,}8 + 3{,}6 = 4{,}4$$

ἤτοι $$\Delta u - du = 0{,}22 = 4{,}7\ \%\ \text{τοῦ}\ \Delta u\,.$$

Παράδειγμα 6ον) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $u = x^2yz^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyz^3\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2z^3\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2yz^3$$

καὶ $$du = 2xyz^3dx + x^2z^3dy + 3x^2yz^3dz\,.$$

Ἀνωτέρω ἐξητάσαμεν τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $u = f(x, y)$ ὅταν αἱ δύο μεταβληταὶ x καὶ y εἶναι ἀνεξάρτητοι. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μεταβλητὴ y εἶναι συνάρτησις τοῦ x, $y = g(x)$, τότε ἡ συνάρτησις u εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς μεταβλητῆς x.

Ἐκ τοῦ ὁλικοῦ διαφορικοῦ τῆς συναρτήσεως u,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ dx εὑρίσκομεν

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}$$

ὅπου $\dfrac{dy}{dx} = g'(x)$.

Τὴν παράγωγον $\dfrac{du}{dx}$ ὀνομάζομεν ***ὁλικὴν παράγωγον*** τῆς συναρτήσεως u ὡς πρὸς x. Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν καὶ αἱ δύο μεταβληταὶ x καὶ y εἶναι συναρτήσεις μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t λ.χ. $x = h(t)$ καὶ $y = g(t)$ ἔχομεν

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{dz}{dt}\,.$$

ὅπου $\dfrac{dx}{dt} = h'(t)$ καὶ $\dfrac{dy}{dt} = g'(t)$.

Ὁμοίως ἐὰν u εἶναι συνάρτησις τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x, y, z ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι συνάρτησις μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς t

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{dz}{dt}\,.$$

Αἱ παράγωγοι αὗται ἐκφράζουν τὸν λόγον μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως καὶ χρησιμοποιοῦνται ἰδιαιτέρως εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων εἰς τὰ ὁποῖα ὁ χρόνος λαμβάνεται ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή.

Παράδειγμα 6ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς πεπλεγμένης συναρτήσεως $\varphi(x, y) = 0$. Ἐὰν θέσωμεν $u = \varphi(x, y)$ τότε :

$$du = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy .$$

Ἀλλά, διὰ τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν $u = 0$ καὶ $du = 0$. Ὥστε ἀντικαθιστῶντες καὶ λύοντες ὡς πρὸς $\frac{dy}{dx}$ εὑρίσκομεν :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0\right)$$

Παράδειγμα 7ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως :

$$u = \pi x^2 y \qquad \text{ὅταν} \qquad y = \sqrt{x} + 1.$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2\pi xy + \pi x^2 \frac{dy}{dx}$$

ἀλλὰ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{du}{dx} = 2\pi x(\sqrt{x} + 1) + \frac{\pi x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{\pi x}{2}(5\sqrt{x} + 4).$$

Παράδειγμα 8ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως :

$$u = x + 4\sqrt{xy} - 3y \qquad \text{ὅταν} \qquad x = t^3, \quad y = \frac{1}{t}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2\sqrt{\frac{y}{x}} . \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x/y} - 3$$

καὶ

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t^2}.$$

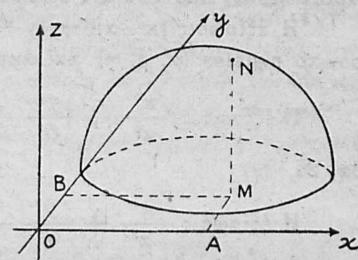
Ἄρα

$$\frac{du}{dt} = \left(1 + 2\sqrt{\frac{1}{t^4}}\right) 3t^2 - \left(2\sqrt{t^4} - 3\right)\frac{1}{t^2} = 3t^2 + 4 + \frac{3}{t^2}.$$

VII· 6. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν

Ἔστω $z = f(x, y)$ μονότιμός τις συνάρτησις καὶ $Oxyz$ σύστημά τι ὀρθογωνίων ἀξόνων, εἰς τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν τὸ ἐπίπεδον xoy ὡς ὁριζόντιον καὶ τὸν ἄξονα τῶν z ὡς κατακόρυφον. Ἂν θεωρήσωμεν τὰς μεταβλητὰς x, y, z ὡς συντεταγμένας τοῦ συστήματος, ἡ συντεταγμένη z παριστᾷ τὰ ὕψη (ἢ βάθη) τῶν σημείων τοῦ χώρου ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου xoy. Εἰς ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν τῶν x καὶ y ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον M (x, y) εἰς τὸ ἐπίπεδον xoy. Ἐκ τῆς συναρτήσεως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ z τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ ζεῦγος (x, y) καὶ ἐπὶ τῆς κατακορύφου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ M λαμβάνομεν τὸ τμῆμα MN ἴσον πρὸς τὸ z. Οὕτως, τὸ σημεῖον N ἔχει συντεταγμένας (x, y, z) αἱ ὁποῖαι ἐκ κατασκευῆς ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $z = f(x, y)$ εἶναι συνεχὴς ὡς πρὸς x καὶ y τότε δυνάμεθα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ εὕρωμεν ἄπειρα σημεῖα ὡς τὸ N εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων. Τὸ σύνολον τῶν ἀπείρων αὐτῶν σημείων συνιστᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τῆς δοθείσης συναρτήσεως. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ τέμνεται εἰς ἓν μόνον σημεῖον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν καθέτων πρὸς τὸ ἐπίπεδον xoy. Τὰ ὕψη τῶν σημείων αὐτῶν, ἄνωθεν ἢ κάτωθεν τοῦ ἐπιπέδου xoy παριστοῦν τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως διὰ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν x καὶ y.

Τὸ ἡμισφαίριον τοῦ σχήματος 56, μὲ τὴν βάσιν του ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου x0y παριστᾷ μίαν ἐπιφάνειαν, ἥτις πληροῖ τὰς ἀναλυτικὰς καθὼς καὶ τὰς γεωμετρικὰς ἰδιότητας τὰς περιγραφείσας ἀνωτέρω.



Σχ. 56

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $f(x, y, z) = 0$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὁρίζει τὴν πεπλεγμένην συνάρτησιν z, ἥτις ἐν γένει δὲν εἶναι μονότιμος. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν, ἡ ἐπιφάνεια ἡ παριστῶσα τὴν συνάρτησιν z τέμνεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z εἰς περισσότερα τοῦ ἑνὸς σημεῖα. Π.χ. ἐὰν συμπληρώσωμεν τὸ ἡμισφαίριον τοῦ 56ου σχήματος, αἱ ἐν λόγῳ εὐθεῖαι τέμνουσι τὴν σφαῖραν εἰς δύο σημεῖα. Γενικώτερον, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι εἰς μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν z, ἥτις ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $f(x, y, z) = 0$ ἀντιστοιχεῖ μία ἐπιφάνεια εἰς ἓν σύστημα ἀξόνων 0xyz. Καὶ ἀντιστρόφως, εἰς μίαν ἐπιφάνειαν ἀντιστοιχεῖ μία συνάρτησις τῆς μορφῆς αὐτῆς.

Εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἐφαρμογὰς αἱ μεταβληταὶ x, y, z, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἶναι θετικαὶ καὶ κατὰ συνέπειαν ἐξετάζομεν μόνον ἐκεῖνο τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὸ πρῶτον ὀγδοημόριον. Αἱ ἐπιφάνειαι τὰς ὁποίας συναντῶμεν εἰς τὰ οἰκονομικὰς ἐφαρμογὰς καὶ προβλήματα εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον πρώτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x, y, z. Ἐκ τῶν ἐπιφανειῶν τούτων θὰ ἀναφέρωμεν τὰς μᾶλλον χρησίμους διὰ τῶν ἀντιστοίχων ἐξισώσεών των, παραλείποντες τὴν διεξοδικὴν μελέτην ἥτις ἀποτελεῖ μέρος τῆς Ἀναλυτικῆς στερεᾶς γεωμετρίας. (Βλ. Νείλου Σακελλαρίου Ἀν. Γεωμετρία Τόμος ΙΙ).

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z, $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ εἰς τὴν ὁποίαν τουλάχιστον ἓν ἐκ τῶν A, B, Γ, εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, παριστᾷ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα,

$$\left(-\frac{\Delta}{A},\ 0,\ 0\right),\ \left(0,\ -\frac{\Delta}{B},\ 0\right),\ \left(0,\ 0,\ -\frac{\Delta}{\Gamma}\right).$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἑνὸς συγκεκριμένου ἐπιπέδου, δηλαδὴ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον πληροῖ ὡρισμένας γεωμετρικὰς ἰδιότητας, π.χ. ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τριῶν δοθέντων σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ διὰ μιᾶς δοθείσης εὐθείας καὶ ἑνὸς σημείου, θεωροῦμεν τὰς Α, Β, Γ, Δ ὡς παραμέτρους καὶ προσδιορίζομεν καταλλήλως τὰς τιμάς των συμφώνως πρὸς τὰς δοθείσας συνθήκας. Οὕτως, ἡ ἐξίσωσις ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον $x0y$ εἶναι $z=\gamma$. Ἡ ἐξίσωσις ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z εἶναι $\alpha x+\beta y=\gamma$.

Ἡ εὐθεῖα ἥτις εἶναι τομὴ δύο ἐπιπέδων δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν. Π.χ. αἱ ἐξισώσεις :

$$3x-5y+3z=5\,, \qquad x-y=3$$

λαμβανόμεναι μαζύ, παριστῶσι τὴν εὐθεῖαν, ἥτις εἶναι τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων τῶν παριστωμένων ὑπὸ τῶν δύο ἐξισώσεων.

Ἡ ἐξίσωσις $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$ παριστᾷ σφαῖραν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον (α, β, γ) καὶ ἀκτῖνα R.

Ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{\gamma^2}=1$ παριστᾷ ἐλλειψοειδὲς μὲ ἄξονας $(2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$.

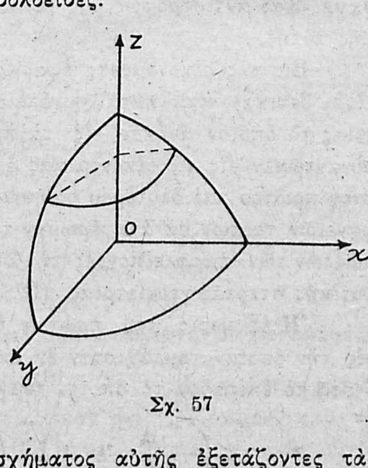
Ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}-\dfrac{z^2}{\gamma^2}=\pm 1$ παριστᾷ ὑπερβολοειδὲς καὶ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}-\dfrac{z^2}{\gamma^2}=0$ παριστᾷ κῶνον μὲ ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν z καὶ κορυφὴν εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

Αἱ ἐξισώσεις $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=z$ καὶ $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=z$, παριστοῦν ἀντιστοίχως ἐλλειπτικὸν καὶ ὑπερβολικὸν παραβολοειδές.

Διὰ τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν ἐπιφανείας τινὸς πολλάκις εἶναι προτιμότερον νὰ χαράσσωμεν μόνον τὸ μέρος ἐκεῖνο τῆς ἐπιφανείας τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὸ πρῶτον ὀγδοημόριον. Π.χ. ἡ τομὴ τῆς σφαίρας, $x^2+y^2+z^2=R^2$, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $z=\gamma$ $(0<\gamma<R)$ εἶναι κύκλος μὲ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν z καὶ παρίσταται ὑπὸ τῶν δύο ἐξισώσεων :

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \qquad z=\gamma$$

Τὸ σχῆμα 57 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῆς σφαίρας καθὼς καὶ τῆς τομῆς.



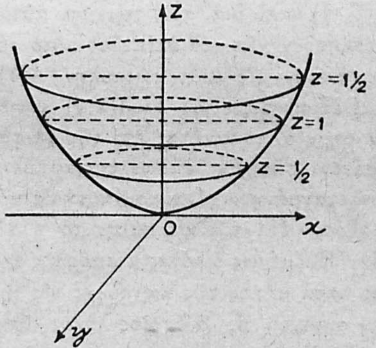
Σχ. 57

Ὅταν δίδεται ἡ ἐξίσωσις ἐπιφανείας τινὸς εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματίσωμεν ἰδέαν τοῦ σχήματος αὐτῆς ἐξετάζοντες τὰς ἐπιπέδους τομὰς τῆς ἐπιφανείας καὶ ἰδιαιτέρως τὰς ἐπιπέδους τομὰς ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν συντεταγμένων, χωρὶς εἰς τὴν πραγματικότητα νὰ χαράξωμεν τὴν ἐπιφάνειαν. Ἐξ ὅλων τῶν τομῶν, αἱ πλέον βοηθητικαὶ εἶναι αἱ τομαὶ ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z (ἢ παραλλήλων πρὸς τὸ ἐπίπεδον x0y). Τὰς τομὰς αὐτὰς ὀνομάζομεν ***ὁριζοντίους***. Ἐὰν $z = f(x, y)$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁριζόντιος τομὴ εἶναι μία καμπύλη τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου x0y. Εἰς δύο διαφορετικὰς ὁριζοντίους τομὰς ἀντιστοιχοῦν δύο διαφορετικὰ ὕψη καὶ ἀντιστρόφως εἰς δύο διαφορετικὰ ὕψη ἀντιστοιχοῦν δύο διαφορετικαὶ ὁριζόντιοι τομαί. Ἐὰν $z = \gamma$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τότε αἱ ἐξισώσεις τῆς τομῆς εἶναι

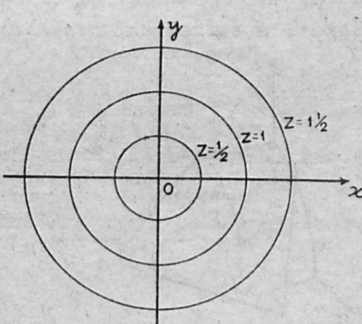
$$z = \gamma, \quad z = f(x, y).$$

Εἰς τὰς διαφόρους τομὰς τοῦ γ ἀντιστοιχοῦν διάφοροι διακεκριμέναι μεταξύ των τομαί. Ἐὰν τὰς ὁριζοντίους αὐτὰς τομὰς προβάλωμεν κατακορύφως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου x0y εὑρίσκομεν ἀπεριόριστον σειρὰν ἀπὸ καμπύλας, ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχής, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις περιλαμβάνονται εἰς τὴν ἐξίσωσιν $f(x, y) =$ σταθ., καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν δεικνύει, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ σταθεροῦ εἶναι γνωστή, πῶς μεταβάλλονται τὸ x καὶ y διὰ τὴν σταθερὰν αὐτὴν τιμὴν τοῦ ὕψους z.

Ἐκ τῶν προβολῶν τῶν ὁριζοντίων τομῶν δυνάμεθα εὐκόλως νὰ διακρίνωμεν τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας καθὼς καὶ τὰς μεταβολὰς τῆς συναρτήσεως z ὡς πρὸς τὰς μεταβολὰς τῶν x καὶ y.



Σχ. 58

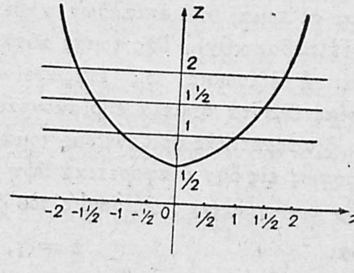


Σχ. 59

Π.χ. αἱ ὁριζόντιοι τομαὶ τοῦ παραβολοειδοῦς $x^2 + y^2 = 2z$ διὰ τὰς τιμὰς $z = 1/2, 1, 1\,1/2, \ldots$ εἶναι ὁμόκεντροι κύκλοι μὲ ἀκτῖνας 1, 2, 3 .... Ὅταν τὸ σημεῖον (x, y) κινῆται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου x0y ἡ τιμὴ τοῦ z αὐξάνει ἢ παραμένει σταθερὰ ἢ ἐλαττοῦται ἀναλόγως πρὸς τὸ μέτρον καθ' ὃ τὸ σημεῖον προχωρεῖ ἀπὸ χαμηλοτέρας προβολὰς εἰς ὑψηλοτέρας, ἢ παραμένει ἐπὶ τῆς αὐτῆς προβολῆς, ἢ προχωρεῖ ἀπὸ ὑψηλοτέρας εἰς χαμηλοτέρας προβολάς. Ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τῶν προβολῶν σημειώνομεν τὰ ὑψόμετρα τῶν ὁριζοντίων τομῶν, τὰς ὁποίας διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὀνομάζομεν καὶ ***ὑψομετρικὰς*** τομὰς τῆς ἐπιφανείας. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμεθα μὲ τὰς ἐπιπέδους τομὰς τὰς παραλλήλους πρὸς τὰ ἐπίπεδα x0z καὶ y0z τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν ***κατακορύφους***. Οὕτως ἔχομεν μίαν τομὴν τῆς ἐπιφανείας σχηματιζομένην ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x ἐὰν δόσωμεν σταθερὰν τιμὴν εἰς τὸ x, $x=\alpha$. Ἐπὶ τῆς τομῆς αὐτῆς τὸ z μεταβάλλεται μόνον ὅταν μεταβάλλεται τὸ y. Συνήθως προβάλλομεν τὰς τομὰς αὐτὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $y0z$. Ἐὰν $z = f(x, y)$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, αἱ ἐξισώσεις τῶν τομῶν αὐτῶν δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$z = f(\alpha, y) \qquad x = \alpha,$$

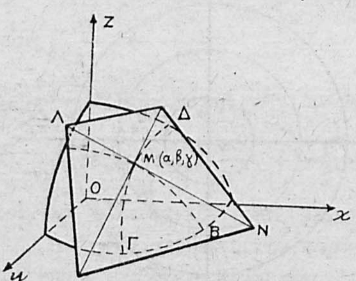
Αἱ ἐξισώσεις τῶν προβολῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $y0z$ δίδονται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $z = f(\alpha, y)$. Διὰ τὴν ἀνωτέρω ἐπιφάνειαν αἱ προβολαὶ αὐταὶ ἔχουν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^2 + y^2 = 2z$. Τὸ σχῆμα 60 δεικνύει τὴν προβολὴν τῆς τομῆς ὅταν $\alpha = 1$.



Σχ. 60

Ἡ μέθοδος τῆς μελέτης ἐπιφανείας τινὸς διὰ σειρᾶς ἐπιπέδων τομῶν καθέτων πρὸς ἕνα τῶν ἀξόνων (ἢ παραλλήλων πρὸς ἕνα τῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων), ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν μελέτην συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν, ὅταν εἰς τὴν μίαν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν δίδωμεν σταθερὰν τιμήν. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἀνάγομεν τὴν μελέτην τῆς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν εἰς τὴν μελέτην τῆς συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Χρησιμοποιοῦντες τὴν μέθοδον αὐτήν, εὑρίσκομεν τὴν γεωμετρικὴν σημασίαν τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς συναρτήσεως.

Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις $z = f(x, y)$ παριστᾷ μίαν ἐπιφάνειαν (Σχ.61). Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὸ σημεῖον $M(\alpha, \beta, \gamma)$ καὶ διὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον τὸ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον $x0z$, τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν εἰς μίαν καμπύλην AMB τῆς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις εἶναι $z=f(x,y)$ $y=\beta$.



Σχ: 61

Ὅταν σημεῖόν τι κινῆται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας παραμένον πάντοτε ἐπὶ τῆς καμπύλης αὐτῆς, ἡ συντεταγμένη z εἶναι συνάρτησις μόνον τοῦ x καθόσον ἐπὶ τῆς καμπύλης τὸ y εἶναι σταθερόν. Ἑπομένως ὁ λόγος μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου M, ὁ ὁποῖος λόγος ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον M, εἶναι

$\left(\frac{dz}{dx}\right)_M = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M$, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τῆς μερικῆς παραγώγου εἰς τὸ σημεῖον M.

Ὁμοίως ἡ παράγωγος $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M$ εἶναι ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης $\Gamma M \Delta$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ M καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον $y0z$. Αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν παραγώγων εἶναι θετικαὶ ἢ ἀρνητικαὶ ἐὰν τὸ z αὐξάνῃ ἢ ἐλαττοῦται ὅταν τὸ x (ἢ y) ἐλαττοῦται. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν δύο μερικῶν παραγώγων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον M. Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις ἐπιπέδου τινὸς δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $z = Ax +$

$By + \Gamma$. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\gamma = A\alpha + B\beta + \Gamma$ καὶ δι' ἀφαιρέσεως $z - \gamma = A(x-\alpha) + B(y-\beta)$. Ἑπομένως θὰ πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὰς παραμέτρους A καὶ B, ὥστε τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ νὰ εἶναι τὸ ἐφαπτόμενον. Τὸ ἐπίπεδον $y = \beta$ τέμνει τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ M κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΛMN. Αἱ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας εἶναι $y=\beta$ καὶ $z-\gamma=A(x-\alpha)$. Ἵνα τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι τὸ ἐφαπτόμενον, θὰ πρέπει ἡ ρηθεῖσα εὐθεῖα νὰ ἐφάπτεται τῆς καμπύλης AMB εἰς τὸ σημεῖον M. Ἄρα, τὸ A πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον $\frac{\partial z}{\partial x}$ εἰς τὸ σημεῖον M. Ὁμοίως, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ B πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον $\frac{dz}{dy}$ εἰς τὸ σημεῖον M, καὶ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἶναι:

$$z - \gamma = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x-\alpha) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (y-\beta).$$

VII.—7 Ὁμογενεῖς συναρτήσεις. Θεώρημα τοῦ Euler.

Ἡ συνάρτησις $z = f(x, y)$ λέγεται ***ὁμογενὴς*** βαθμοῦ ὁμογενείας ν ὅταν $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\nu f(x, y)$ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ λ σταθερὰς ἢ μεταβλητάς. Π.χ.

$x^2 - 2xy + 4y^2$ εἶναι ὁμογενὴς 2ου βαθμοῦ.

$x^3y + x^2y^2 - 5y^4$ » » 4ου βαθμοῦ.

$\dfrac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}$ » » βαθμοῦ μηδενικοῦ.

$\alpha x + \beta y$ » » 1ου βαθμοῦ.

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁμογενῶν συναρτήσεων θὰ ἀναφέρωμεν ἐκείνας τὰς ὁποίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν κατωτέρω.

α) Ἐὰν $z = f(x, y)$ εἶναι ὁμογενεῖς βαθμοῦ ν τότε ἡ συνάρτησις δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$z = x^\nu \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = y^\nu \psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Διότι $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\nu f(x, y)$ καὶ διὰ $\lambda = \frac{1}{x}$, $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^\nu} f(x, y)$

ἢ $f(x, y) = x^\nu \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ὅπου $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$z = y^\nu \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ ἐὰν θέσωμεν $f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = \psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

β) Αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ εἶναι ὁμογενεῖς συναρτήσεις βαθμοῦ $(\nu-1)$. Διότι

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \nu x^{\nu-1}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{\nu}\ \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \nu x^{\nu-1}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^{\nu-2}\ y\ \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

καὶ
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{\nu}\ \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = x^{\nu-1}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ἀλλὰ αἱ συναρτήσεις $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$ ἐξαρτῶνται μόνον ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ λόγου $\frac{y}{x}$ καὶ ἑπομένως εἶναι ὁμογενεῖς βαθμοῦ ὁμογενείας μηδέν. Ἄρα αἱ παράγωγοι εἶναι ὁμογενεῖς βαθμοῦ (ν—1).

γ) Θεώρημα τοῦ Euler. Αἱ παράγωγοι τῆς πρώτης τάξεως ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \nu z.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς εὑρεθείσας παραγώγους εἰς τὴν πρότασιν (β) ἀντιστοίχως ἐπὶ x καὶ y καὶ προσθέτοντες εὑρίσκομεν :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \nu x^{\nu}\ \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^{\nu-1}\ y\ \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + yx^{\nu-1}\ \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$= \nu x^{\nu}\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Χρησιμοποιοῦντες δὲ τὴν πρότασιν (α)

$$x\frac{\varrho z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \nu z.$$

δ) Αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα :

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \nu(\nu-1)\ z.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὰς παραγώγους ὡς πρὸς x καὶ y τῆς ἰσότητος τῆς προτάσεως (γ) εὑρίσκομεν

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\nu-1)\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\varrho y^2} = (\nu-1)\frac{\partial z}{\partial y}$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ x καὶ y ἀντιστοίχως τὰς ἰσότητας αὐτὰς καὶ προσθέσωμεν χρησιμοποιοῦντες καταλλήλως τὴν (γ) εὑρίσκομεν :

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\nu-1)\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \nu(\nu-1)\,z.$$

Ἐὰν ὁ βαθμὸς ὁμογενείας τῆς συναρτήσεως εἶναι μηδέν, ἐκ τῆς προτάσεως (α) εὑρίσκομεν $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ καὶ ἡ συνάρτησις ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ λόγου $\frac{y}{x}$ ἢ $\frac{x}{y}$.

Ἡ συνάρτησις ὀνομάζεται ***ὁμογενὴς γραμμικὴ*** ἐὰν ὁ βαθμὸς ὁμογενείας εἶναι ἕν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$ καὶ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται ἢ πολλαπλασιάζεται ἀντιστοίχως ἐπὶ λ ὅταν ἑκάστη τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν διπλασιασιασθῇ, τριπλασιασθῇ ἢ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ λ.

Λόγῳ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς ἡ συνάρτησις κατέχει ἀξιόλογον ρόλον εἰς τὰς οἰκονομικὰς θεωρίας καὶ ἐφαρμογάς, ἀποτελεῖ δὲ τὴν βασικὴν μαθηματικὴν ἔκφρασιν τῆς θεωρίας τῶν σταθερῶν ἀποδοχῶν ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς κλίμακος (Constant Returns to scale).

Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν θὰ πραγματευθῶμεν ἐν ὀλίγοις τὰς ἀναλυτικὰς καὶ γεωμετρικὰς ἰδιότητας τῆς συναρτήσεως αὐτῆς.

Διὰ $\nu = 1$ ἐκ τῶν προτάσεων (α), (β) καὶ (γ) εὑρίσκομεν :

α′) $z = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = y\,\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

β′) Αἱ παράγωγοι τῆς συναρτήσεως ἐξαρτῶνται μόνον ἐκ τοῦ λόγου $\frac{y}{x}$ ἢ $\frac{x}{y}$

γ′) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

δ′) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ καὶ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ἐκφράζονται μόνον διὰ τῆς παραγώγου $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Διότι ἐκ τῆς (γ′) ἔχομεν

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

καὶ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Ὁμοίως $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ (δ) ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν.

Ἐὰν Μ (α, β, γ) εἶναι ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς παριστωμένης ὑπὸ μιᾶς ὁμογενοῦς γραμμικῆς συναρτήσεως, τότε κάθε σημεῖον μὲ συντεταγμένας (μα, μβ, μγ), ὅπου μ εἶναι οἱοσδήποτε σταθερὸς ἀριθμός, κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Διότι $f(\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma) = \mu f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Τὰ σημεῖα (μα, μβ, μγ) κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΜ, ἥτις συνδέει τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων μετὰ τοῦ σημείου Μ καὶ ἑπομένως ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Ἄρα, κάθε εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων μετά τινος σημείου τῆς ἐπιφανείας κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Ἡ ἐπιφάνεια δύναται νὰ περιγραφῇ διὰ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν καὶ ὀνομάζεται ***εὐθειογενής***.

Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Μ ἔχει ἐξίσωσιν

$$z - \gamma = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M x-\alpha) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y-6).$$

Διὰ $x=0,\ y=0,\ z=0,\quad \gamma = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M \alpha + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) 6.$

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Euler προκύπτει ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων. Ἄρα, τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ἔχει κοινὰ μετὰ τῆς ἐπιφανείας ὄχι μόνον τὸ σημεῖον Μ ἀλλὰ ὁλόκληρον τὴν εὐθεῖαν ΟΜ. Αἱ προβολαὶ τῶν ὁριζοντίων τομῶν εἶναι ὁμοιόθετοι καμπύλαι ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν τῶν ἀξόνων. Διότι ἐὰν Ν (x, y) εἶναι ἓν σημεῖον τῆς προβολῆς τῆς ὁριζοντίου τομῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z=\gamma$ τότε τὸ σημεῖον Λ $(\mu x, \mu y)$ κεῖται ἐπὶ τῆς προβολῆς τῆς ὁριζοντίου τομῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $z = \mu\gamma$. Ἀλλὰ τὰ σημεῖα $(\mu x, \mu y)$ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΝ τῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καὶ $O\Lambda = \mu ON$. Ἑπομένως, μία ἀκτὶς ἀγομένη ἐκ τῆς ἀρχῆς ἀξόνων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Oxy τέμνει τὰς ὑψομετρικὰς προβολὰς γ καὶ $\mu\gamma$ εἰς δύο σημεῖα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ δεύτερον ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μ φορὰς τὴν ἀπόστασιν τοῦ πρώτου. Ἐπίσης αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν προβολῶν τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος τῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς εἶναι παράλληλοι.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι ἐὰν γνωρίζωμεν μίαν τῶν προβολῶν τῶν ὁριζοντίων τομῶν, τότε γνωρίζομεν ὁλόκληρον τὸ σύστημα τῶν προβολῶν λόγῳ τῆς ἀκτινικῆς αὐτῶν ὁμοιοθεσίας ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν.

Αἱ προβολαὶ τῶν κατακορύφων τομῶν τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων συντεταγμένων ἐπιπέδων Oxz, Oyz ἔχουν τὰς αὐτὰς ἰδιότητας μὲ τὰς προβολὰς τῶν ὁριζοντίων τομῶν. Ἐπίσης ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας ΟΜ εἶναι μία εὐθεῖα. Ἐὰν ὁ βαθμὸς τῆς ὁμογενείας εἶναι μεγαλύτερος, αἱ χαρακτηριστικαὶ αὗται ἰδιότητες ἰσχύουν μὲ μικρὰς ἀλλαγάς. Π.χ. ἐὰν $\nu = 2$ τότε $z = \alpha x^2 + 26xy + \gamma y^2$ καὶ αἱ προβολαὶ τῶν ὁριζοντίων τομῶν εἶναι ἀκτινικῶς ὁμοιόθετοι ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν, ἀλλὰ αἱ ἀποστάσεις μεταβάλλονται ἀναλόγως τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ γ ἐὰν $z = \gamma$ εἶναι ἡ πρώτη ὁριζόντιος τομὴ τῆς ὁποίας δίδεται ἡ προβολή. Παρομοία πρότασις ἰσχύει διὰ τὰς προβολὰς τῶν κατακορύφων τομῶν. Ἐὰν Μ εἶναι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ἡ κατακόρυφος τομὴ ἡ διερχομένη διὰ τῆς ΟΜ εἶναι πάντοτε παραβολὴ μὲ ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν z.

VII. 8. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα συναρτήσεων δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν

Εἰς τὰς παραγράφους (V. 5), (VII. 4) ἐξητάσαμεν τὸ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον μιᾶς συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καθὼς καὶ τοὺς τρόπους εὑρέσεως αὐτῶν. Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ μελετήσωμεν τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον μιᾶς συναρτήσεως δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν κατὰ τρόπον παράλληλον, ἐκθέτοντες μόνον τὰ ἀπαραίτητα διὰ τὰ ἑπόμενα Κεφάλαια, παραλείποντες δὲ τὴν πλήρη ἀνάλυσιν καὶ θεωρίαν τοῦ προβλήματος.

Λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\mathbf{u} = f(\mathbf{x}, y)$ ἔχει μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον $x=\alpha$,

$y=б$ (ἢ διὰ τὰς τιμὰς $x=\alpha$, $y=б$) ὅταν ἡ τιμὴ $f(\alpha, б)$ τῆς συναρτήσεως εἶναι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις εἰς τὴν περιοχὴν (γειτνίασιν) τοῦ σημείου $(\alpha, б)$.

Ὁμοίως λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον $x=\alpha$, $y=б$ ὅταν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $f(\alpha, \beta)$ εἶναι μικροτέρα ὅλων τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $(\alpha, б)$. Τοὺς ὁρισμοὺς αὐτοὺς δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ἀναλυτικῶς (μαθηματικῶς) ὡς ἑξῆς :

Ἐὰν ε καὶ η εἶναι ἀριθμοί, ἀριθμητικῶς μικρότεροι δοθέντος τινὸς θετικοῦ μικροῦ ἀριθμοῦ καὶ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν ε καὶ η

$$f(\alpha+\varepsilon, б+\eta) - f(\alpha, б) < 0 \qquad \text{(ἀρνητικὸς ἀριθμός)}$$

τότε ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον $(\alpha, б)$.

Ἐὰν

$$f(\alpha+\varepsilon, б+\eta) - f(\alpha, \beta) > 0 \qquad \text{(θετικὸς ἀριθμός)}$$

τότε ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον $(\alpha, б)$.

Ἡ ἀναγκαία συνθήκη διὰ νὰ ἔχῃ ἡ συνάρτησις $u = f(x, y)$ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον $(\alpha, б)$ εἶναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ὅταν $x=\alpha$, $y=б$.

Διότι, ὅταν $y=б$, $u = f(x, б)$ καὶ διὰ νὰ ἔχῃ ἡ συνάρτησις αὐτὴ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον διὰ $x=\alpha$ πρέπει

$$\left(\frac{df(x, б)}{dx}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial f(x, б)}{\partial x}\right)_{x=\alpha} = 0.$$

Ὁμοίως διὰ $x=\alpha$, $u = f(\alpha, y)$ καὶ ἑπομένως

$$\left(\frac{df(\alpha, y)}{dy}\right)_{y=б} = \left(\frac{\partial f(\alpha, y)}{\partial y}\right)_{y=б} = 0.$$

Ἡ συνθήκη αὐτὴ εἶναι ἀναγκαία καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Δηλαδή, διὰ νὰ ἔχῃ ἡ συνάρτησις $u = f(x, y, z)$ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον $(\alpha, б, \gamma)$ πρέπει

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

ὅταν $x=\alpha$, $y=б$, $z=\gamma$.

Ὅτι ἡ συνθήκη αὐτὴ εἶναι ἀναγκαία, ὄχι ὅμως καὶ ἀρκετή, φαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρω παραδείγματος.

Ἔστω $u = x^2 - y^2$. Ὅταν $y=0$, $u=x^2$ καὶ ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἔχει ἐλάχιστον $u=0$ ὅταν $x=0$. Ὅταν $x=0$, $u= -y^2$ καὶ ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἔχει μέγιστον $u=0$ ὅταν $y=0$.

Ἑπομένως, καίτοι αἱ δύο μερικαὶ παράγωγοι τῆς συναρτήσεως εἶναι 0 ὅταν τὴν θεωρήσωμεν ὡς συνάρτησιν δύο μεταβλητῶν διὰ $x=0$, $y=0$ ἡ συνάρτησις αὐτὴ δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον, οὔτε ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον $(0, 0)$.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀναγκαίας καὶ ἱκανῆς συνθήκης διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου μιᾶς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν ὑπερβαίνει τὴν μαθηματικὴν ἔκτασιν τοῦ παρόντος βιβλίου, ὅθεν θὰ περιορισθῶμεν μόνον εἰς τὴν ἔκθεσιν τῆς πορείας διὰ τὴν εὕρεσίν των.

α) Εὑρίσκομεν τὰς μερικὰς παραγώγους $\frac{\partial u}{\partial x}$ καὶ $\frac{\partial u}{\partial y}$ καὶ λύομεν τὸ σύστημα

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ὡς πρὸς τὰς πραγματικὰς ρίζας.

β) Εὑρίσκομεν τὰς μερικὰς παραγώγους δευτέρας τάξεως καθὼς καὶ τὴν παράστασιν

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

γ) Ἡ συνάρτησις, διὰ μίαν λύσιν τοῦ συστήματος ἔχει

$$\text{μέγιστον ἐὰν } \Delta > 0 \text{ καὶ } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\text{ἢ } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0$$

$$\text{ἐλάχιστον ἐὰν } \Delta > 0 \text{ καὶ } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\text{ἢ } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) > 0 .$$

Ἐὰν $\Delta < 0$ τότε ἡ συνάρτησις δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον. Ἡ πορεία αὐτὴ δὲν μᾶς δίδει ὅλα τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον· διότι ἐὰν $\Delta = 0$ τότε εἶναι ἐνδεχόμενον ἡ συνάρτησις νὰ ἔχῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἢ οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον. Εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν χρειάζεται περισσοτέρα ἔρευνα.

Παράδειγμα 1ον) Ἐὰν $\alpha > 0$ νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν ἡ συνάρτησις

$$u = 3\alpha xy - x^3 - y^3$$

ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμή του.

α) $$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\alpha y - 3y^2 , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 3\alpha x - 3y^2$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις

$$3\alpha y - 3x^2 = 0 , \qquad 3\alpha x - 3y^2 = 0$$

εὑρίσκομεν

$$x = 0 \qquad x = \alpha$$
$$y = 0 \qquad y = \alpha$$

β) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} 3\alpha , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y_2} = -6y ,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 36xy - 9\alpha^2 .$$

γ) ὅταν $x = 0$ καὶ $y = 0$, $\Delta = 9\alpha^2$ καὶ ἡ συνάρτησις δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον (0, 0).

Ὅταν $x = \alpha$ καὶ $y = \alpha$, $\Delta = 27\alpha^2$ καὶ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6\alpha$. Ἄρα, ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον (α, α). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμήν του ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν $x = \alpha$, $y = \alpha$ καὶ τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως εἶναι α^3.

Παράδειγμα 2ον) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 27 εἰς τρία μέρη τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι μέγιστον.

Ἐὰν x καὶ y εἶναι τὰ δύο μέρη τότε τὸ τρίτον θὰ εἶναι $27 - x - y$. Τὸ γινόμενον δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως :

$$u = f(x, y) = xy(27 - x - y)$$

α) $$\frac{\partial u}{\partial x} = 27y - 2xy - {}^2y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 27x - 2xy - x^2.$$

Λύοντες τὸ σύστημα

$$27y - 2xy - y^2 = 0, \qquad 27x - 2xy - x^3 = 0$$

εὑρίσκομεν

$$x = 0,\ 9,\ 27,\ 0.$$
$$y = 0,\ 9,\ 0,\ 27.$$

Ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος μόνον ἡ λύσις $x = 9$, $y = 9$, ἐνδέχεται νὰ δίδῃ μέγιστον.

β) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} 27 - 2x - 2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$$

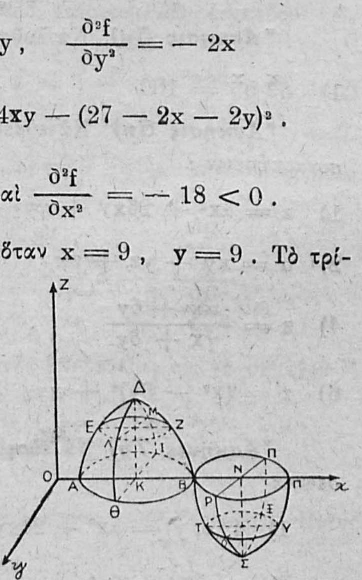
καὶ $$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4xy - (27 - 2x - 2y)^2.$$

γ) Ὅταν $x = 9$, $y = 9$, $\Delta = 243 > 0$, καὶ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -18 < 0$.

Ἑπομένως, τὸ γινόμενον γίνεται μέγιστον ὅταν $x = 9$, $y = 9$. Τὸ τρίτον μέρος εἶναι ἐπίσης 9 καὶ τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου $9^3 = 729$.

Διὰ συναρτήσεις τριῶν μεταβλητῶν τὸ πρόβλημα εἶναι ἀκόμη δυσκολώτερον.

Γεωμετρικῶς ἡ συνάρτησις $z = f(x, y)$ παριστᾷ ἐπιφάνειαν εἰς ἓν σύστημα ἀξόνων Oxyz. Ἐὰν xOy εἶναι τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον $z_1 = f(\alpha, \beta)$ τότε τὸ σημεῖον $M(\alpha, \beta, z_1)$ εἶναι τὸ ὑψηλότερον σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Ὁμοίως, ἐὰν ἡ συνάρτησις $z = f(\alpha, \beta)$ ἔχῃ ἐλάχιστον εἰς



Σχ. 62

τὸ σημεῖον M_1 τότε τὸ σημεῖον M_1 εἶναι τὸ χαμηλότερον σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Ἐπομένως τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον M ἢ M_1 εἶναι ὁριζόντιον, ἤτοι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον xOy καὶ ἡ ἐξίσωσίς του εἶναι $z = z_1$.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

Ἄσκησις 1η) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων :

1) $y = \ln(3x^2 + 5)$ 2) $y = \ln x^4$ 3) $y = x^2 \ln x$

4) $y = e^{x^2-3x+2}$ 5) $(3x^2 - 5x + 2)\, e^x$ 6) $x^\nu (\alpha + \beta x)^\mu$.

Ἄσκησις 2α) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ λογαριθμικῆς παραγωγήσεως :

1) $x^3 (x + 1)^2$ 2) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ 3) $x^2 \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

4) e^{3x^2-5x+2} 5) $(3x^2 - 5x + 2)\, e^x$ 6) $x^\mu e^{\alpha x+\beta}$

Ἄσκησις 3η) Νὰ γίνουν τὰ διαγράμματα τῶν κάτωθι συναρτήσεων μὲ ἀριθμητικὰς καὶ ἡμι-λογαριθμικὰς κλίμακας καὶ νὰ γίνῃ σύγκρισις τῶν διαγραμμάτων δι' ἑκάστην ἐξ αὐτῶν :

1) $y = x - 1$ 2) $y = 5 - x$.

Ἄσκησις 4η) Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ τὰς συναρτήσεις :

1) $y = x\, \lambda o\gamma_{10}^2$ 2) $y = \lambda o\gamma_{10}(x^2)$.

Ἄσκησις 5η) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

1) $3^x 5^x = 100$ 2) $3^{2x} = 13$ 3) $2^{x^2} = 5$.

Ἄσκησις 6η) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μερικαὶ παράγωγοι πρώτης τάξεως τῶν συναρτήσεων :

1) $z = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta$

2) $u = xy + yz + zx$ 3) $z = \alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3$

4) $z = \dfrac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}$ 5) $32z = 4x^2 + 25y^2$

6) $z = (x^3 - 3y)^2 + xy$ 7) $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Ἄσκησις 7η) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως τῶν συναρτήσεων :

1) $f(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ 2) $z = \alpha x + \beta y + \gamma e^{xy}$

3) $z = x^3 + 6x^2 y - 6xy^2 + y^3$ 4) $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$.

Ἄσκησις 8η) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ διαφορικὰ ἑκάστης τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1) $z = e^{xy}$ 2) $z = x^2 + 2xy - 3y^2$ 3) $z = \ln(x^2 + y^2)$

4) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ 5) $z = \dfrac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}$ 6) $u = ze^{xy}$.

Ἄσκησις 9η) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ du καὶ Δu διὰ τὴν συνάρτησιν :

$$u = xy + 3x - 5y$$

ὅταν $x = 3$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}4$.

Ἄσκησις 10η) Ἐὰν $u = xyz$ νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν ὅταν $x = 2$, $y = 1$, $z = -3$. Ἐὰν $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}01$, καὶ $dz = 0{,}05$ νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν du καὶ Δu.

Ἄσκησις 11η) Ἐὰν ἑκάστη ἐκ τῶν ἐξισώσεων ὁρίζει τὴν συνάρτησιν y νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν y πρὸς x.

1) $x^3 + xy^2 - 4 = 0$ 2) $x^4 - xy^3 = x + 2y + 4$

3) $y^3 + 2xy = x^2 + 4$ 4) $xy^2 + x - 16 = 0$.

Ἄσκησις 12η) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος $\dfrac{du}{dt}$ τῶν κάτωθι συναρτήσεων, ὅταν $t = 1$.

1) $u = xy + yz + zx$, $x = \dfrac{1}{t}$, $y = e^t$, $z = e^{-t}$

2) $u = \ln(xy) + e^{xy}$, $x = t$, $y = t^2$.

Ἄσκησις 13η) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῶν κάτωθι ἐπιφανειῶν εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον.

1) $4z = x^2 + y^2$ (2, 2, 2) 2) $z = 8 - x^2 - 2y^2$ (2, 1, 2)

3) $xyz = 16$ (2, 4, 2) 4) $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ (1, 3, 2).

Ἄσκησις 14η) Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $F(x, y, z) = 0$ ὁρίζει τὴν συνάρτησιν z νὰ δειχθῇ :

α) Ὅτι $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

β) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον M δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x - \alpha) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y - \beta) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z - \gamma) = 0.$$

Ἄσκησις 15η) Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι συναρτήσεων εἶναι ὁμογενεῖς; Ποῖος ὁ βαθμὸς ὁμογενείας ;

1) $5x - 3y$ 2) $x^2 + y^2 + xy$ 3) $x^2 + xy + 4$

4) $x^2 e^{y/x}$ 5) $\dfrac{xyz}{x+y+z}$ 6) $\ln \dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$.

Ἄσκησις 16η) Ἐὰν δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ λ, $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{\nu} f(x,y,z)$ νὰ δειχθῇ ὅτι $x f_x(x, y, z) + y f_y(x, y, z) + z f_z(x, y, z) = \nu f(x, y, z)$.

Ἄσκησις 17η) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν προβολῶν τῶν ὁριζοντίων καὶ κατακορύφων τομῶν τῶν ἐπιφανειῶν, $z = \sqrt{xy}$, $z = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.

Ἄσκησις 18η) Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ τομαὶ τῶν ἐπιφανειῶν

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0 .$$

Ἄσκησις 19η) Νὰ γίνῃ ἡ ὑψομετρικὴ παράστασις τῶν προβολῶν τῶν ὁριζοντίων τομῶν τῆς ἐπιφανείας, $z = x^2 + y^2$.

Ἄσκησις 20ή) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῶν συναρτήσεων:

1) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ 2) $z = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$

3) $z = x^3 - 3\alpha xy + y^3$ 4) $z = \alpha^{2]3} - x^{2]3} - y^{2]3}$.

Ἄσκησις 21η) Νὰ ἐξετασθῇ ἡ συνάρτησις ὡς πρὸς μέγιστον καὶ ἐλάχιστον:

$$z = x^2 + y^3 - 12y .$$

Ἄσκησις 22α) Αἱ διαστάσεις μεταλλικοῦ δοχείου εἶναι 6, 4, 3 ἑκ. Ἐὰν τὸ πάχος τοῦ δοχείου εἶναι 0,05 ἑκ. νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ μετάλλου τοῦ δοχείου.

Ἄσκησις 23η) Ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος καὶ τὸ ὕψος κυλινδρικοῦ δοχείου μετρηθέντα εὑρέθησαν 5,0 καὶ 12,6 ἑκατ. ἀντιστοίχως. Ἐὰν κατὰ τὴν μέτρησιν ἐγένετο ἐνδεχομένως λάθος 0,05 ἑκ. ποῖον εἶναι κατὰ προσέγγισιν τὸ μέγιστον δυνατὸν λάθος εἰς τὸν ὄγκον;

Ἄσκησις 24η) Ἡ ἐσωτερικὴ ἐπιφάνεια ὀρθογωνικοῦ κιβωτίου εἶναι 24 τετρ. μέτρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις διὰ νὰ ἔχῃ τὸ κιβώτιον τὸν μέγιστον δυνατὸν ὄγκον.

Ἄσκησις 25η) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς ν εἰς τρία μέρη x, y, z, τοιαῦτα ὥστε ἡ συνάρτησις $z = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$ νὰ εἶναι μεγίστη. Ποία ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως;

Ἄσκησις 26η) Ἐνίοτε εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ὠφελιμότητος παριστῶμεν τὴν ὠφελιμότητα δύο ἀγαθῶν διὰ συναρτήσεως $u = F(z)$ ὅπου $z = f(x, y)$ εἶναι γνωστὴ συνάρτησις τῶν x καὶ y τὰ ὁποῖα παριστοῦν τὰς ἀντιστοίχους ποσότητας τῶν δύο ἀγαθῶν. Τὸ μόνον δεδομένον διὰ τὴν συνάρτησιν u εἶναι ἡ ἀνισότης $F'(z) > 0$. Ἐὰν ὁρίσωμεν τὰς διαφορικὰς ὠφελιμότητας διὰ τῶν μερικῶν παραγώγων ὡς συνήθως, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν συνάρτησιν F(z). Δόσατε ἓν ἀριθμητικὸν παράδειγμα.

Ἄσκησις 27η) Βιομηχανία τις παράγει ξυράφια καὶ ξυριστικὰς λεπίδας. Τὸ κόστος ἑνὸς ξυραφίου εἶναι 20 δρ. τῶν δὲ λεπίδων 10 δρ. κατὰ δωδεκάδα. Ἐὰν ἡ τιμὴ τῶν ξυραφιῶν εἶναι x καὶ τῆς δωδεκάδος τῶν λεπίδων y αἱ ἡμερήσιαι ζητήσεις εἶναι ἀντιστοίχως $\dfrac{100\,000}{xy}$ καὶ $\dfrac{400\,000}{xy}$ κατὰ δωδεκάδα. Διὰ ποίας τιμὰς ἡ Βιομηχανία ἔχει τὴν μεγίστην πρόσοδον ;

Ἄσκησις 28η) Νὰ λυθῇ τὸ προηγούμενον πρόβλημα ὅταν τὸ κόστος εἶναι 40 δρ. καὶ 20 δρ. ἀντιστοίχως αἱ δὲ ζητήσεις :

$$\frac{4\,000\,000}{xy} \quad \text{καὶ} \quad \frac{8\,000\,000}{xy}$$

Ἄσκησις 29η) Βιομηχανία τις παράγει τὴν ποιότητα Α καὶ τὴν ποιότητα Β ἐκ τινος ὑφάσματος. Τὸ κόστος τῆς ποιότητος Α εἶναι 60 δρ. καὶ τῆς ποιότητος Β 50 δρ. κατὰ μέτρον. Ἐὰν x καὶ y εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν ποιοτήτων καὶ

$$p_1 = 250\,(y - x) \qquad p_2 = 32\,000 + 250\,(x - 2y)$$

αἱ ἀντίστοιχοι ζητήσεις, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ Βιομηχανία ἔχει τὴν μεγίστην πρόσοδον ὅταν πωλῇ τὴν ποιότητα Α πρὸς 49 δρ. τὴν δὲ ποιότητα Β πρὸς 89 δρ.

Ἄσκησις 30ή) Μονοπωλιακή τις ἐπιχείρησις ἀγοράζει x μονάδας ἀκατεργάστου ὕλης, πρὸς $250\,(100 + x^2)$ δρ. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τιμὴ u τοῦ κατειργασμένου προϊόντος εἰς τὴν ἀγορὰν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς ποσότητος x καὶ τοῦ χρόνου t τοῦ ἀπαιτουμένου διὰ τὴν βιομηχανοποίησιν. Ἐὰν t παριστᾷ ἔτη τότε $u = xe^{\frac{9t}{1+t}}$. Ἐὰν τὸ νόμιμον ἐπιτόκιον εἶναι 4 % τὸ ἀρχικὸν ποσὸν ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος ἀνέρχεται εἰς κεφάλαιον $250\,(100 + x^2)\,e^{0{,}04\,t}$. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ t ὥστε ὁ λόγος τοῦ u πρὸς τὸ κεφάλαιον νὰ εἶναι μέγιστος.

Ἄσκησις 31η) Ἐὰν ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας ἡ παραγωγὴ σταφίδος z εἰς λίτρας δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $z = 50\left(3x - \frac{x^2}{y}\right)$ ὅπου x παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν ριζῶν τῆς ἀμπέλου κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ $100\,y$ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατικῶν ὡρῶν διὰ τὴν παραγωγὴν αὐτήν :

α) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς z ὅταν $y = 2$· ὁμοίως ὅταν $x = 2$. Τί ἔννοιαν δύνανται νὰ ἔχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι ; Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμή των ὅταν

$$x = y = 2.$$

β) Πόσαι ρίζαι κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον δίδουν τὴν μεγίστην παραγωγὴν ὅταν διατίθενται 200 ἐργατικαὶ ὧραι κατὰ στρέμμα ;

Ἄσκησις 32α) Ἐὰν ἡ παραγωγὴ σίτου ἀπὸ y καλλιεργούμενα στρέμματα δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $z = \frac{24\,xy - 5x^2 - 16\,y^2}{x + y}$ εἰς τόννους ὅπου $100\,x$ παριστᾷ τὰς ἐργατικὰς - ὥρας διὰ τὴν παραγωγὴν αὐτήν :

α) Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ ὡρισμένου ἀριθμοῦ στρεμμάτων ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατικῶν ὡρῶν διὰ τὴν μεγίστην παραγωγήν. Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ ὅταν $y = 5$.

β) Διὰ σταθερὰν ποσότητα ἐργατικῶν - ὡρῶν, πόσα στρέμματα δίδουν τὴν μεγίστην παραγωγήν ; Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ ὅταν διατίθενται 1000 ἐργατικαὶ - ὧραι.

Ἄσκησις 33η) Εἷς ἀγρότης παράγει z τόννους κριθῆς ἀπὸ y στρέμματα, διαθέτων $100\,x$ ἐργατικὰς - ὥρας. Ἐὰν $10\,z = 24\,xy - 5\,x^2 - 16\,y^2$ καὶ ἐὰν ὁ ἀγρότης ἐχρησιμοποίησε διὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν παραγωγὴν 5 στρέμματα καὶ 1000 ἐργατικὰς ὥρας, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀγρότης διὰ μικρὰς αὐξήσεις Δx καὶ Δy ἔχει τὴν μεγίστην αὔξησιν τῆς παραγωγῆς ὅταν $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{4}$.

Ἄσκησις 34η) Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα ὡς τὸ προηγούμενον ἐὰν εἰς τὸ πρόβλημα 31 ἔχωμεν δύο ρίζας κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ διαθέτομεν 200 ἐργατικὰς ὥρας κατὰ στρέμμα.

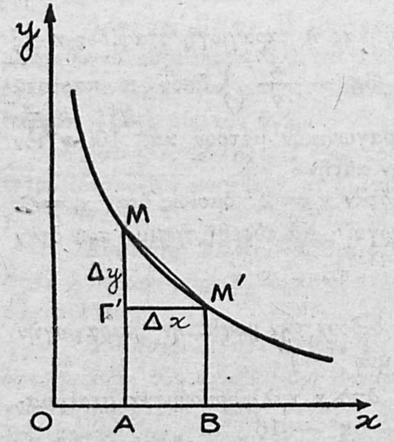
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

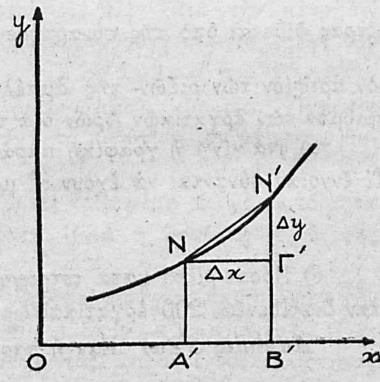
VIII.— 1. Εἰσαγωγὴ

Ἡ ἔννοια τῆς ἐλαστικότητος χρησιμοποιεῖται εὐρέως εἰς τοὺς περισσοτέρους τομεῖς τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας καὶ ἀποτελεῖ μίαν τῶν σπουδαιοτέρων ἐννοιῶν τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως. Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ἐλαστικότητος ἀποτελεῖ ἀπαραίτητον προϋπόθεσιν διὰ τὴν πλήρη κατανόησιν τῶν συγχρόνων ἐξελίξεων τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης.

Θὰ ἐπεξεργασθῶμεν τὴν ἔννοιαν τῆς ἐλαστικότητος κατ᾽ ἀρχὴν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ γεωμετρικοῦ αὐτῆς ὁρισμοῦ, δεδομένου ὅτι τοῦτο διευκολύνει τὴν κατανόησιν τοῦ θέματος.



Σχ. 63



Σχ. 64

Ἡ ἐλαστικότης εἰς σημεῖον καμπύλης τινος εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀναλογικῆς μεταβολῆς τῆς τεταγμένης διὰ τῆς ἀναλογικῆς μεταβολῆς τῆς τετμημένης (βλέπε VII 3).

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ γίνεται κατάδηλον ὅτι ἡ ἐλαστικότης καμπύλης τινὸς ἐν γένει μεταβάλλεται ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ἐὰν ἡ καμπύλη κατέρχεται συνεχῶς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ ἐλαστικότης εἶναι ἀρνητικὴ ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ (Σχ. 63). Ἐὰν ἡ καμπύλη ἀνέρχεται συνεχῶς, τότε ἡ ἐλαστικότης εἶναι θετικὴ ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ (Σχ. 64)· διότι εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ἐλαστικότης εἶναι :

$$\frac{\frac{\Gamma M}{AM}}{\frac{AB}{OA}} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

καὶ τὸ Δy εἶναι ἀρνητικόν, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἐλαστικότης εἶναι :

$$\frac{\frac{\Gamma' N'}{A'N}}{\frac{A'B'}{OA'}} = \frac{\frac{\Delta x}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

καὶ τὸ Δy εἶναι θετικόν.

Ἑπομένως, ὑπάρχουσι καμπύλαι κατὰ μῆκος τῶν ὁποίων ἡ ἐλαστικότης εἶναι πάντοτε θετικὴ ἢ ἀρνητική. Ὁμοίως, εἶναι φανερὸν ὅτι ὑπάρχουσι καμπύλαι τῶν ὁποίων ἡ ἐλαστικότης εἶναι σταθερά. Ἐπὶ παραδείγματι ἡ ἐλαστικότης τῆς εὐθείας τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x εἶναι μηδέν, ἡ δὲ ἐλαστικότης τῆς εὐθείας τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y εἶναι ἄπειρος, διότι διὰ μὲν τὴν πρώτην εὐθεῖαν $\Delta y = 0$ διὰ δὲ τὴν δευτέραν $\Delta x = 0$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἐπίσης προκύπτει ὅτι ἡ ἐλαστικότης εἶναι «καθαρὸς ἀριθμός», δηλαδὴ δὲν περικλείει οἰκονομικὰς μονάδας, εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν x καὶ y εἶναι οἰκονομικαὶ ποσότητες· διότι (βλέπε 1 : 4) αἱ ποσότητες x καὶ Δx ἔχουσι τὰς αὐτὰς διαστάσεις, καθὼς ἐπίσης καὶ αἱ ποσότητες y καὶ Δy.

Ἑπομένως, αἱ διαστάσεις τῆς ἐλαστικότητος κατὰ μῆκος οἱασδήποτε καμπύλης, ἥτις παριστᾷ γραφικῶς οἰκονομικὴν συνάρτησιν εἶναι (0, 0, 0). Ἄρα δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν τὰς ἐλαστικότητας οἱωνδήποτε καμπυλῶν. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ τῆς ἐλαστικότητος ἐνέχει σπουδαίαν σημασίαν διὰ τὴν μελέτην τῶν διαφόρων σχέσεων οἰκονομικῶν ποσοτήτων.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ καμπύλη τοῦ Σχ. 64 παριστᾷ καμπύλην ζητήσεως, τότε γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς ἀγαθοῦ τινος φέρει ὡς συνέπειαν τὴν πώλησιν μεγαλυτέρας ποσότητος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ αὐτοῦ. Τοῦτο εἶναι ἐν γένει ἀληθές. Ἄρα, ὑπάρχει ἀντίστροφος σχέσις μεταξὺ τιμῆς καὶ ζητήσεως, ἡ ὁποία διαφαίνεται καθαρῶς ἐκ τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως, ἥτις κατέρχεται συνεχῶς. Ἐν γένει, τοῦτο ἀποτελεῖ τὸ μόνον κοινὸν χαρακτηριστικὸν τῶν καμπυλῶν τῆς ζητήσεως τῶν διαφόρων ἀγαθῶν, διότι καίτοι αἱ ἀναλογικαὶ ἐλαττώσεις εἰς τὰς τιμὰς τῶν διαφόρων ἀγαθῶν συνεπάγονται ἐν γένει ἀναλογικὴν αὔξησιν τῆς ἐξ αὐτῶν πωλουμένης ποσότητος, ἡ αὐτὴ ἀναλογικὴ ἐλάττωσις εἰς τὰς τιμὰς π.χ. δύο ἀγαθῶν δὲν συνεπάγεται τὴν ἰδίαν ἀναλογικὴν αὔξησιν εἰς τὰς ἐξ αὐτῶν πωλουμένας ποσότητας. Οὕτω, ἐλάττωσις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ X κατὰ 5 % εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ ἐπιφέρῃ αὔξησιν τῆς ἐξ αὐτοῦ πωλουμένης ποσότητος κατὰ 10 %, ἐνῷ ἡ αὐτὴ ἐλάττωσις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ Υ εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ ἐπιφέρῃ αὔξησιν τῆς ἐξ αὐτοῦ πωλουμένης ποσότητος μόνον κατὰ 2 %. Καὶ τὸ ἀντίθετον εἶναι ἀληθές. Δηλαδή, αἱ αὐξήσεις εἰς τὰς τιμὰς διαφόρων ἀγαθῶν καίτοι συνεπάγονται ἐν γένει ἐλάττωσιν τῆς ἐξ αὐτῶν πωλουμένης ποσότητος, ἡ αὐτὴ αὔξησις εἰς τὰς τιμὰς π.χ. δύο ἀγαθῶν δὲν συνεπάγεται καὶ τὴν ἰδίαν μείωσιν εἰς τὰς ἐξ αὐτῶν πωλουμένας ποσότητας.

Ἐπίσης, διὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν καμπύλην, ἡ αὐτὴ ἀναλογικὴ μεταβολὴ εἰς τὴν τιμὴν συνεπάγεται ἐν γένει διαφορετικὰς ἀναλογικὰς μεταβολὰς εἰς τὴν πωλουμένην ποσότητα.

Ὁμοίως, ἐὰν ἡ καμπύλη τοῦ Σχ. 64 παριστᾷ καμπύλην προσφορᾶς, ἡ ἔννοια τῆς ἐλαστικότητος ἐπεκτείνεται διὰ τὴν καμπύλην αὐτὴν κατ' ἀνάλογον τρόπον ὡς ὁ ἀνωτέρω, λαμβανομένων ὑπ' ὄψει τῶν ἰδιοτήτων τῆς καμπύλης.

VIII. 2. Ἀναλυτικὸς ὁρισμὸς τῆς ἐλαστικότητος

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ καμπύλη τοῦ Σχ. 64 εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις συνεχοῦς συναρτήσεως $y = f(x)$ · τότε δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι $\Delta x \rightarrow 0$ καὶ

$$\text{ἐλαστικότης} = \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\text{δρ}} \frac{x}{y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\text{δρ}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}.$$

Ἐὰν γράψωμεν τὴν ἐλαστικότητα ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}$$

δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἐλαστικότης εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀπειροστικῆς ἀναλογικῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς ἀπειροστικῆς ἀναλογικῆς μεταβολῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος τῆς ἐλαστικότητος εἶναι ἡ λογαριθμικὴ παράγωγος τῆς συναρτήσεως y δηλαδή :

$$d(\lambda\gamma\, y) = \frac{dy}{y} \qquad (\text{βλ. VII : 1}).$$

Ὁμοίως, ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἡ λογαριθμικὴ παράγωγος τῆς μεταβλητῆς x. Ἑπομένως

$$\frac{d(\lambda\gamma y)}{d(\lambda\gamma x)} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

Συμβολικῶς παριστῶμεν τὴν ἐλαστικότητα μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$ διὰ τοῦ συμβόλου

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{E}{Ex} [f(x)].$$

Ὅθεν, ὁρίζομεν τὴν ἐλαστικότητα μιᾶς συναρτήσεως ὡς ἀκολούθως : Ἡ ἐλαστικότης τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ εἰς τὸ σημεῖον **x** εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀπειροστικῆς ἀναλογικῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως y διὰ τῆς ἀπειροστικῆς ἀναλογικῆς μεταβολῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x :

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{d(\lambda\gamma y)}{d(\lambda\gamma x)} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

Ἑπομένως, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐλαστικότητος καθίσταται φανερὸν ὅτι ἐὰν ἔχωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ εἰς λογαριθμικὰς κλίμακας τότε ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης εἰς ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης, τῆς λογαριθμικῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως, ἰσοῦται ἀριθμητικῶς μὲ τὴν τιμὴν τῆς ἐλαστικότητος εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

Ἐκ τῆς (2) εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ συμβολισμὸς $\frac{Ey}{Ex}$ τῆς ἐλαστικότητος συναρτήσεώς τινος y συνδέεται μετὰ τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τὸν παράγοντα $\frac{x}{y}$.

Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν τοὺς κανόνας εὑρέσεως τῶν παραγώγων ἀθροίσματος γινομένου κ.λ.π. δύο συναρτήσεων εἰς κανόνας εὑρέσεως ἐλαστικοτήτων.

Οὕτως, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν δύο μονοτίμους συναρτήσεις u καὶ υ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς χ τότε

$$\frac{E(u \pm \upsilon)}{Ex} = \frac{u\frac{Eu}{Ex} \pm \upsilon\frac{E\upsilon}{Ex}}{u \pm \upsilon} \qquad (3)$$

$$\frac{E(u\upsilon)}{Ex} = \frac{Eu}{Ex} + \frac{E\upsilon}{Ex} \qquad (4)$$

$$\frac{E\left(\frac{u}{\upsilon}\right)}{Ex} = \frac{Eu}{Ex} - \frac{E\upsilon}{Ex} \qquad (5)$$

Ἐπιπλέον, ἐὰν y εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς καὶ u εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x τότε

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{Ey}{Eu} \cdot \frac{Eu}{Ex} \qquad (6)$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω τύπων χρησιμοποιοῦμεν τοὺς κανόνας παραγωγήσεως. Π.χ. διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ τύπου 5 ἔχομεν :

$$\frac{E\left(\frac{u}{\upsilon}\right)}{Ex} = \frac{d\lambda\gamma\left(\frac{u}{\upsilon}\right)}{d\lambda\gamma x} = \frac{\frac{\left(\frac{u}{\upsilon}\right)'}{\frac{u}{\upsilon}}}{d\lambda\gamma x} = \frac{\frac{u'\upsilon - \upsilon' u}{u\upsilon}}{d\lambda\gamma x} =$$

---

*Ἐὰν $y = f(x)$ εἶναι μονότιμος καὶ μονοτόνως αὔξουσα ἢ φθίνουσα συνάρτησις, τότε καὶ ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις εἶναι μονότιμος καὶ μονοτόνως αὔξουσα ἢ φθίνουσα: $x = \varphi(y)$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁρίζομεν τὴν «ἐλαστικότητα» τῆς ἀντιστρόφου συναρτήσεως ἤτοι:

$$\frac{y}{x}\,\frac{dx}{dy}$$

ἥτις εἶναι ὁ ἀντίστροφος ἀριθμὸς τῆς ἐλαστικότητος τῆς f (x) .

$$\frac{\frac{u'}{u}-\frac{\upsilon'}{\upsilon}}{d\lambda\gamma x}=\frac{d\,(\lambda\gamma u)}{d\,\lambda\,\gamma\,x}-\frac{d\,(\lambda\gamma \upsilon)}{d\,\lambda\,\gamma\,x}=\frac{Eu}{Ex}-\frac{E\upsilon}{Ey}\,.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ οἱ ὑπόλοιποι τύποι. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὕρεσις τῆς ἐλαστικότητος τοῦ γινομένου καὶ τοῦ πηλίκου δύο συναρτήσεων εἶναι εὐκολωτέρα ἀπὸ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐλαστικότητος τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς, ὡς συμβαίνει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς λογαριθμικῆς παραγωγήσεως.

Ἐφαρμόζομεν τοὺς προαναφερθέντας τύπους εἰς τὰς κατωτέρω ἁπλᾶς συναρτήσεις.

1) $$\frac{E\,(u+3)}{Ex}=\frac{u}{u+3}\,\frac{Eu}{Ex}$$

2) $$\frac{E\,(3u)}{Ex}=B\,\frac{Eu}{Ex}\,.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐλαστικότης ἑνὸς σταθεροῦ ἀριθμοῦ εἶναι μηδέν.

3) $$\frac{E\,(\alpha x+\beta)}{Ex}=\frac{\alpha x}{\alpha x+\beta}$$

4) $$\frac{E\,(\lambda x^{\alpha})}{Ex}=\alpha$$

5) $$\frac{E\,(\partial e^{\alpha x})}{Ex}=\partial x\,.$$

Ἐκ τῆς 3 βλέπομεν ὅτι ἡ ἐλαστικότης μιᾶς γραμμικῆς συναρτήσεως εἶναι κλασματικὴ συνάρτησις. Ἐκ τῆς 4 βλέπομεν ὅτι ἡ ἐλαστικότης μιᾶς δυνάμεως τοῦ **x** εἶναι σταθερά, ἡ δὲ ἐλαστικότης τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως εἶναι γραμμική. Ἑπομένως αἱ συναρτήσεις μὲ σταθερὰν ἐλαστικότητα δίδονται ὑπὸ τῆς $y=\lambda x^{\alpha}$. Ἐὰν α εἶναι θετικόν, τότε ἡ συνάρτησις $y=\lambda x^{\alpha}$ ἔχει σταθερὰν ἐλαστικότητα α εἰς ὅλα τὰ σημεῖα. Ἐὰν τὸ α εἶναι ἀρνητικὸν (—α), τότε αἱ συναρτήσεις μὲ ἐλαστικότητα (—α) δίδονται ὑπὸ τῶν συναρτήσεων $yx^{\alpha}=\lambda$. Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς μὲν πρώτης ὁμάδος τῶν συναρτήσεων αὐτῶν εἰς λογαριθμικὰς κλίμακας εἶναι εὐθεῖα μὲ συντελεστὴν κατευθύνσεως α, ἡ δὲ γραφικὴ παράστασις τῆς δευτέρας ὁμάδος εἶναι ἐπίσης εὐθεῖα μὲ συντελεστὴν κατευθύνσεως —α. Εἰς τὰς εἰδικὰς περιπτώσεις $\alpha=1$ καὶ $\alpha=-1$ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι καμπύλαι εἶναι $y=\lambda x$ καὶ $xy=\lambda$. Ἡ τελευταία συνάρτησις ἥτις παριστᾷ ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν, εἰς λογαριθμικὰς κλίμακας παριστᾷ εὐθεῖαν μὲ συντελεστὴν κατευθύνσεως —1.

Ὡς ἐτονίσθη καὶ ἀνωτέρω, ἡ ἐλαστικότης κατὰ μῆκος μιᾶς καμπύλης ἐν γένει δὲν εἶναι σταθερά. Εἰς ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐλαστικότης εἶναι 1, δηλ. $\frac{E}{Ex}\,[\,f\,(x)\,]=1$, ἡ ἀναλογικὴ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀναλογικὴν μεταβολὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x. Ὁμοίως, ἐὰν $\frac{E\,[\,f\,(x)\,]}{Ex}>1$, ἡ ἀναλογικὴ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον x εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀναλογικῆς μεταβολῆς τοῦ **x**·

Ἐπίσης ἐὰν $\frac{E}{Ex}[f(x)] < 1$, ἡ ἀναλογικὴ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον x εἶναι μικροτέρα τῆς ἀναλογικῆς μεταβολῆς τοῦ x. Ἐὰν $\frac{E}{Ex}[f(x)] =$ -1 εἰς μίαν ἀναλογικὴν αὔξησιν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία ἀναλογικὴ ἐλάττωσις τῆς συναρτήσεως καὶ ἑπομένως κατ' ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ προβαίνωμεν εἰς παρατηρήσεις ὡς αἱ ἀνωτέρω.

Δεδομένου ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y}\,\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{x/y} = \frac{\frac{d\,f(x)}{dx}}{\frac{f(x)}{x}}$$

προκύπτει ὅτι ἡ ἐλαστικότης τῆς συναρτήσεως εἴς τι σημεῖον ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορικὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς μέσης τιμῆς.

Ἡ ἐλαστικότης τῆς μέσης τιμῆς δοθείσης συναρτήσεως εὑρίσκεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (5) καὶ εἶναι :

$$\frac{E}{Ex}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \frac{E}{Ex}[f(x)] - 1 \qquad (7)$$

Ἄρα, ἡ ἐλαστικότης τῆς μέσης τιμῆς τῆς συναρτήσεως εἶναι μηδὲν ὅταν ἡ ἐλαστικότης τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ εἶναι 1. Ἀλλά, ὅταν ἡ ἐλαστικότης εἶναι μηδέν, τότε καὶ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως εἶναι μηδέν· ἑπομένως, εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ἔχομεν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $x\,f(x)$ τότε :

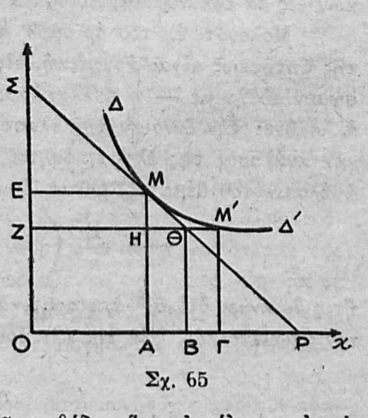
$$\frac{E}{Ex}[x\,f(x)] = \frac{E}{Ex}[f(x)] - 1 \qquad (8)$$

καὶ ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον ὅταν ἡ ἐλαστικότης τῆς συναρτήσεως f (x) εἶναι -1. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται φανερὸν ὅτι εἰς τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ μέση τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι ἐλαχίστη ἢ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαστικότης 1, ἡ διαφορικὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι ἐλαχίστη ἢ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαστικότης 1, ἡ διαφορικὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἰσοῦται μὲ τὴν μέσην τιμήν της (βλέπε Κεφ. V. Πρ. 18).

VIII. Ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως

Ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως ὁρίζεται ὡς : ***ἡ ἀναλογικὴ μεταβολὴ τῆς ποσότητος διὰ τῆς ἀναλογικῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς.***

Δηλαδή, θεωροῦμεν τὴν ποσότητα ὡς συνάρτησιν τῆς τιμῆς. Συνήθως, τὴν ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος η. Κατ' ἀρχὴν θὰ μετρήσωμεν τὴν ἐλαστικότητα εἰς ἕνα σημεῖον τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως ΔΔ' (Σχῆμα 65ον), διὰ τῆς γεωμετρικῆς μεθόδου ἥτις ὀφείλεται εἰς τὸν



Σχ. 65

A. Marshall. Ἔστω Μ τὸ σημεῖον· φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Μ τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως ἥτις τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα Ρ καὶ Σ. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τιμὴ ἐλαττοῦται ἀπὸ ΟΕ εἰς ΟΖ. Τότε ἡ ποσότης αὐξάνεται ἀπὸ ΟΑ εἰς ΟΓ. Ἐὰν ἡ ἐλάττωσις τῆς τιμῆς εἶναι ἀρκετὰ μικρὰ (δηλ. τὸ σημεῖον M_1 εἶναι πολὺ πλησίον εἰς τὸ σημεῖον Μ), τότε δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν ποσότητα ΟΒ ὡς κατὰ προσέγγισιν ἴσην πρὸς τὴν ποσότητα ΟΓ καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως εὑρίσκομεν :

$$\eta = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\frac{AB}{OA}}{\frac{EZ}{OE}} = \frac{AB}{EZ} \cdot \frac{OE}{OA}$$

ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΜΡ καὶ ΜΗΘ ἔχομεν :

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{AP}{EO} \quad \text{καὶ δι᾽ ἀντικαταστάσεως} \quad \eta = \frac{AP}{EO} \cdot \frac{EO}{OA} = \frac{AM}{AO}$$

Ὁμοίως, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΜΡ καὶ ΕΜΣ ἔχομεν

$$\frac{AP}{AO} = \frac{MP}{M\Sigma}. \quad \text{Ἄρα} \quad \eta = \frac{MP}{M\Sigma}.$$

Ἐπομένως,

$$\eta = \frac{AP}{OA} = \frac{OE}{E\Sigma} = \frac{MP}{M\Sigma},$$

καὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως εἰς τὸ σημεῖον Μ δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἕνα ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν λόγων. Ἡ μέθοδος αὐτὴ καίτοι ἁπλῆ, εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἐλαστικότητος εἴς τι σημεῖον τῆς καμπύλης δὲν ἐξυπηρετεῖ τὴν σύγκρισιν ἐλαστικότητος εἰς διάφορα σημεῖα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως, ἢ τὴν σύγκρισιν ἐλαστικοτήτων διαφορετικῶν καμπυλῶν τῆς ζητήσεως εἰς τὸ αὐτὸ διάγραμμα. Ἡ τοιαύτη σύγκρισις καθίσταται εὐκολωτέρα, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως, ὅταν αἱ καμπύλαι τῆς ζητήσεως εἶναι χαραγμέναι εἰς λογαριθμικὰς κλίμακας, καίτοι λόγῳ τῆς ἀνεπαρκοῦς χρησιμοποιήσεως τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰ οἰκονομικά, τοιούτου εἴδους διαγράμματα δὲν συνειθίζονται.

Μολονότι ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐλαστικότητος προκύπτει ὅτι ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως εἶναι ἀρνητική, εἰς τὸν ἀναλυτικὸν ὁρισμὸν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὴν μὲ $-\eta$ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα. Τοῦτο δὲν ἀλλοιώνει τὴν ἔννοιαν τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως, οὔτε καὶ τὴν προηγουμένην ἀνάλυσιν τῆς ἐλαστικότητος, ἀλλὰ τουναντίον ἐξυπηρετεῖ εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν τοῦ θέματος. Οὕτω, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\eta = \frac{P}{x}\left(-\frac{dx}{dp}\right) = \frac{OE}{OA} \cdot \frac{AP}{OE} = \frac{AP}{OA}$$

ἥτις δεικνύει ὅτι δι᾽ ἀπειροστικὰς μεταβολὰς ὁ ἀναλυτικὸς ὁρισμὸς συμπίπτει μὲ τὸν γεωμετρικόν. Ἐκ τῆς (2) προκύπτει ὅτι :

$$\eta = -\frac{d\,\lambda\gamma\, x}{d\,\lambda\gamma\, p}$$

καὶ ἐὰν ἐξετάσωμεν τὴν ζήτησιν λαμβάνοντες ἀναλογικὰς μεταβολὰς τῆς τιμῆς καὶ τῆς ἀντιστοιχούσης ζητήσεως, τὴν δὲ ἀντίστοιχαν γραφικὴν παράστασιν λάβωμεν εἰς λογαριθμικὰς κλίμακας, ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως εἰς δοθέν τι σημεῖον τῆς καμπύλης, ἰσοῦται ἀριθμητικῶς μὲ τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖο αὐτό. Ἡ τοιαύτη γεωμετρικὴ ἰδιότης τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως, καθιστᾷ εὐκολωτέραν τὴν σύγκρισιν ἐλαστικοτήτων εἰς διαφορετικὰ σημεῖα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης, καθὼς καὶ τὴν σύγκρισιν ἐλαστικοτήτων διαφορετικῶν καμπυλῶν εἰς τὸ αὐτὸ διάγραμμα. Ὁ ὁρισμὸς καὶ ἡ ἀνάλυσις τῆς ἐλαστικότητος τῆς προσφορᾶς εἶναι ἀνάλογος μὲ τὸν ὁρισμὸν καὶ τὴν ἀνάλυσιν τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως.

Ἐὰν $\eta = 1$ δι' ὡρισμένην τιμὴν καὶ ζήτησιν, τότε εἰς μικρὰν αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν τῆς τιμῆς, ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ ἀναλογικὴ αὔξησις ἢ ἐλάττωσις τῆς ζητήσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως εἶναι ***μοναδιαία***. Ἐὰν $\eta > 1$ διά τινα ὡρισμένην τιμὴν καὶ ζήτησιν, τότε εἰς μίαν μικρὰν ἐλάττωσιν τῆς τιμῆς, ἀντιστοιχεῖ μεγαλυτέρα ἀναλογικὴ αὔξησις τῆς ζητήσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ ζήτησις εἶναι ***ἐλαστική***. Ἐὰν $\eta < 1$ διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν καὶ ζήτησιν, τότε εἰς μικρὰν ἐλάττωσιν τῆς τιμῆς, ἀντιστοιχεῖ μικροτέρα ἀναλογικὴ αὔξησις τῆς ζητήσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ ζήτησις εἶναι ***ἀνελαστική***. Ὅταν καμπύλη τις τῆς ζητήσεως ἔχει ἐλαστικότητα μηδέν, τότε λέγομεν ὅτι ἡ καμπύλη αὐτὴ εἶναι ***ἀπολύτως ἀνελαστική***. Ὅταν ἡ ἐλαστικότης καμπύλης τινὸς τῆς ζητήσεως εἶναι ἄπειρος τότε λέγομεν ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι ***ἀπολύτως ἐλαστική***.

VIII.— 4. Ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως καὶ ἡ πρόσοδος

Ὡς γνωστόν, ἡ σχέσις μεταξὺ ζητήσεως καὶ τιμῆς εἶναι ἀντίστροφος· δηλαδή, ὅταν ἡ τιμὴ ἀγαθοῦ τινος ἐλαττοῦται, τότε ἡ ζήτησις διὰ τὸ ἀγαθὸν τοῦτο κατὰ κανόνα αὐξάνει· καὶ τἀνάπαλιν (ἴδε γενικὴν παρατήρησιν II : 10). Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀνωτέρω ἀρχῆς, αἱ καμπύλαι τῆς ζητήσεως εἶναι μονότιμοι καὶ μονοτόνως φθίνουσαι (βλέπε κεφ. II 6). Ἡ ἐλαστικότης τοιαύτης καμπύλης τῆς ζητήσεως εἶναι ἐν γένει συνεχὴς συνάρτησις τῶν σημείων τῆς καμπύλης, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τῆς ἐλαστικότητος μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον. Αἱ πλέον ἐνδιαφέρουσαι ἐκ τῶν καμπυλῶν αὐτῶν εἶναι ἐκεῖναι, τῶν ὁποίων ἡ ἐλαστικότης μεταβάλλεται ἀπὸ ἐλαστικὰς τιμὰς εἰς ἀνελαστικὰς καὶ ἰδιαιτέρως αἱ καμπύλαι ἐκεῖναι διὰ τὰς ὁποίας ὅταν ἡ ζήτησις (1) αὐξάνῃ ἡ ἐλαστικότης αὐτῆς ἐλαττοῦται ἀπὸ τιμὰς μεγαλυτέρας τῆς μονάδος διὰ μικρὰς ζητήσεις εἰς τιμὰς μικροτέρας τῆς μονάδος διὰ μεγάλας ζητήσεις. Δηλαδή, ὅσον ἡ ζήτησις γίνεται μεγαλυτέρα τόσῳ γίνεται καὶ πλέον ἀνελαστική. Λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς μεταβολῆς τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως ἀπὸ τιμὰς μεγαλυτέρας τῆς μονάδος εἰς τιμὰς μικροτέρας τῆς μονάδος διὰ τοιαύτην καμπύλην πάντοτε ὑπάρχει ὡρισμένη τιμὴ τῆς ζητήσεως διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως εἶναι μοναδιαία (θεώρημα Role),

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $p = f(x)$ εἶναι δοθεῖσα τις συνάρτησις τῆς ζητήσεως.

---

1) Αἱ καμπύλαι αὐταὶ εἶναι αἱ πλέον ἐνδιαφέρουσαι διότι συνήθως παριστοῦν πραγματικὰς ἀποτελεσματικὰς ζητήσεις.

Τότε, ὡς γνωστόν, ἡ ὁλικὴ πρόσοδος :

$$R = xp = xf(x).$$

ἡ διαφορικὴ πρόσοδος :

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(xp) = p + x\frac{dp}{dx} = p\left(1 + \frac{x}{p}\frac{dp}{dx}\right).$$

Δεδομένου ὅτι :

$$\eta = -\frac{pdx}{xdp}, \quad \frac{dR}{dx} = p\,(1 - 1/\eta) \tag{8}$$

Ἑπομένως, ἐὰν ἡ ζήτησις εἶναι ἐλαστική, δηλαδὴ $\eta > 1$, ἡ διαφορικὴ πρόσοδος $\frac{dR}{dx}$ εἶναι θετικὴ καὶ ἡ ὁλικὴ πρόσοδος αὐξάνει, ὅταν αὐξάνῃ καὶ ἡ παραγωγή. Ἐὰν $\eta < 1$, τότε ἡ διαφορικὴ πρόσοδος $\frac{dR}{dx}$ εἶναι ἀρνητικὴ ἡ δ' ὁλικὴ πρόσοδος ἐλαττοῦται ὅταν αὐξάνῃ ἡ παραγωγή. Ἐὰν $\eta = 1$ ἡ διαφορικὴ πρόσοδος $\frac{dR}{dx}$ εἶναι μηδὲν ἡ δ' ὁλικὴ πρόσοδος συνήθως ἔχει τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμὴν (ἴδε κεφ. V 5).

Ἐὰν πρὸς στιγμὴν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως, $p = f(x)$ παριστᾷ καμπύλην ἐξ ἐκείνων τῶν ὁποίων αἱ βασικαὶ ἰδιότητες περιγράφονται ἀνωτέρω, εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ ὁλικὴ πρόσοδος αὐξάνει συνεχῶς ὅταν αὐξάνῃ καὶ ἡ παραγωγὴ ($\eta > 1$) καὶ φθάνει εἰς τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμὴν ὅταν $\eta = 1$, κατόπιν δ' ἐλαττοῦται, ἐνῷ ἡ παραγωγὴ ἐξακολουθεῖ νὰ αὐξάνῃ ὅταν $\eta < 1$.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ζήτησις παριστᾷ τὴν μέσην πρόσοδον καὶ συνεπῶς ἡ ἰσότης (8) δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\frac{dR}{dx} = R_M\,(1 - 1/\eta)$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν ὅτι ἡ διαφορικὴ πρόσοδος εἶναι μικροτέρα τῆς μέσης προσόδου ὅταν ἡ ζήτησις εἶναι ἐλαστική. Ὅταν ἡ παραγωγὴ αὐξάνῃ συνεχῶς, ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως ἐλαττοῦται συνεχῶς καὶ διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν τῆς παραγωγῆς γίνεται μοναδιαία. Διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς παραγωγῆς ἡ διαφορικὴ ζήτησις εἶναι μηδέν. Ἐὰν ἡ παραγωγὴ αὐξηθῇ πέραν τοῦ σημείου αὐτοῦ, τότε ἡ διαφορικὴ πρόσοδος εἶναι ἀρνητική.

VIII. 5. Ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως. Ἡ ἐπιχείρησις καὶ ἡ ἀγορὰ

Ἡ ἔννοια τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως ἐνέχει σπουδαίαν σημασίαν ἐν σχέσει μὲ τὴν θέσιν τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὴν ἀγοράν. Εἰς τὴν παράγραφον 3 τοῦ παρόντος κεφαλαίου ἐξετάζομεν τὰς πλέον ἐνδιαφερούσας ἐκ τῶν καμπυλῶν τῆς ζητήσεως, τῶν ὁποίων ἡ ἐλαστικότης μεταβάλλεται ἀπὸ ἐλαστικὰς τιμὰς εἰς ἀνελαστικὰς καὶ ἰδιαιτέρως ἐκείνας διὰ τὰς ὁποίας, ὅταν ἡ ζήτησις αὐξάνει ἡ ἐλαστικότης αὐτῶν ἐλαττοῦται ἀπὸ τιμὰς μεγαλυτέρας τῆς μονάδος διὰ μικρὰς ζητήσεις εἰς τιμὰς μικροτέρας τῆς μονάδος διὰ μεγάλας ζητήσεις. Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ περίπτωσις τῶν ἀνωτέρω καμπυλῶν, τὴν ὁποίαν ἀναλύομεν καὶ μαθηματικῶς, ἀποτελεῖ περίπτωσιν γενικωτέρου χαρακτῆρος ἐν σχέσει μὲ τὴν ἐπιχείρησιν, μὲ τὸν ρόλον καὶ μὲ τὴν θέσιν αὐτῆς εἰς τὴν ἀγοράν. Αἱ καμπύλαι τῆς γενικῆς περιπτώσεως συμπίπτουν μὲ τὰς καμπύλας ζητήσεως διὰ προϊόντα διαφόρων ἐπιχειρήσεων λειτουργουσῶν ὑπὸ συνθήκας μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ (βλέπε VI. 10).

Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως ἐπιχειρήσεώς τινος, λειτουργούσης ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ. Λαμβάνομεν τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα: Σιτοπαραγωγός τις προσφέρει τὸν σῖτον αὐτοῦ εἰς τὴν ἀγορὰν ἐπαρχιακῆς τινος πόλεως. Ὁ σιτοπαραγωγὸς δύναται νὰ πωλήσῃ 200, 300, 400 ἢ καὶ περισσοτέρας ὀκάδας σίτου εἰς τὴν ὑπάρχουσαν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς, ἥτις ρυθμίζεται ἀπὸ τὸν νόμον τῆς ζητήσεως καὶ τῆς προσφορᾶς. Ἐὰν ὁ σιτοπαραγωγὸς θελήσῃ νὰ προσφέρῃ τὸν σίτον του εἰς τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς ὑπαρχούσης εἰς τὴν ἀγοράν, οἱ πελάται, οἱ ὁποῖοι ὑποτίθεται ὅτι γνωρίζουν τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος εἰς τὴν ἀγοράν, φυσικὰ δὲν θὰ προμηθευθοῦν σῖτον ἀπὸ τὸν ἐν λόγῳ σιτοπαραγωγόν. Κατ' ἀκολουθίαν, μόνον ἐὰν ὁ σιτοπαραγωγὸς πωλῇ τὸ προϊὸν αὐτοῦ εἰς τὴν κρατοῦσαν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς, τότε μόνον δύναται νὰ διαθέσῃ τὴν ὑπ' αὐτοῦ παραγομένην ποσότητα σίτου. Δεδομένου ὅμως ὅτι εἰς τὴν ἀγορὰν τῆς ἐπαρχιακῆς πόλεως ἐπικρατοῦν συνθῆκαι ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ, ὁ σιτοπαραγωγὸς δὲν δύναται νὰ διαθέσῃ οὔτε τὴν ἐλαχίστην ποσότητα εἰς τὴν ἀγορὰν ἐὰν αὐξήσῃ τὴν τιμήν του ἔστω καὶ κατὰ ἐλάχιστον. Ὅθεν ἐκ τοῦ παραδείγματος αὐτοῦ προκύπτει ὅτι ἡ ζήτησις διὰ προϊὸν προσφερόμενον ὑπὸ ἐπιχειρήσεώς τινος εἰς ἀγορὰν λειτουργοῦσαν ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ, εἶναι ἀπολύτως ἐλαστική.

Αἱ ζητήσεις εἰδῶν πρώτης ἀνάγκης, τὰ ὁποῖα προσφέρονται εἰς τὴν ἀγορὰν ἀπὸ μονοπώλια ἢ συνησπισμένας μονοπωλιακὰς ἐπιχειρήσεις (καρτέλ, τράστ κλπ.) εἶναι ἐν γένει ἀνελαστικαί [1]. Π.χ. ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι μεγάλη τις ἐπιχείρησις φαρμακευτικῶν εἰδῶν κατορθώνει νὰ γίνῃ εἴς τινα ἀγορὰν τὸ μονοπώλιον ὡρισμένου φαρμακευτικοῦ εἴδους λ.χ. κινίνου, ἡ ζήτησις διὰ τὸ προϊὸν τῆς ἐπιχειρήσεως αὐτῆς εἶναι ἀνελαστική, δεδομένου ὅτι ἡ ἐπιχείρησις εἶναι ὁ ἀπόλυτος ρυθμιστὴς τῆς τιμῆς εἰς τὴν ἀγοράν. Ἑπομένως ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ ἐκμεταλλευθῇ οἱανδήποτε εὐκαιρίαν διὰ τῆς ρυθμίσεως τῆς τιμῆς τοῦ προϊόντος της, ἐπιτυγχάνουσα τὴν μεγίστην πρόσοδον καὶ ὅταν ἡ ζήτησις εἶναι ἀνελαστική.

VIII. 5. Ἡ ἐλαστικότης τοῦ κόστους

Ἔστω ὅτι $\Pi = F(x)$ ἡ συνάρτησις τοῦ ὁλικοῦ κόστους ἐπιχειρήσεώς τινος (βλέπε II. 5). Ἐὰν ὀνομάσωμεν u τὴν ἐλαστικότητα τῆς συναρτήσεως τότε

$$u = \frac{x}{\Pi}\,\frac{d\Pi}{dx} = \frac{d\,(\lambda\gamma\Pi)}{d\,(\lambda\gamma x)} \quad \text{ἢ} \quad u = \frac{\dfrac{d\Pi}{dx}}{\dfrac{\Pi}{x}} = \frac{\text{διαφορικὸν κόστος}}{\text{μέσον κόστος}} \qquad (9)$$

1) Βλέπε P. Samuelson: Economics (second edition σελ. 135).

Ἐκ τῆς (7) δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ἐλαστικότητα τοῦ μέσου κόστους διὰ τῆς ἐλαστικότητος τοῦ ὁλικοῦ κόστους. Ἤτοι, ἐὰν ὀνομάσωμεν Π τὸ μέσον κόστος :

$$\frac{x}{\Pi}\frac{d\pi}{dx} = \frac{x^2}{\Pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{\Pi}{x}\right) = \frac{x^2}{\Pi x^2}\left(x\frac{d\Pi}{dx} - \Pi\right) =$$

$$\frac{x}{\Pi}\frac{d\Pi}{dx} - 1 = u - 1 . \qquad (10)$$

Ἐκ τῆς ὁποίας ἰσότητος καθίσταται δῆλον ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ ὁλικοῦ κόστους θὰ πρέπει νὰ ἐξετασθῇ ἐν σχέσει μὲ τὴν μεταβολὴν τοῦ μέσου κόστους, δηλαδὴ ἐν σχέσει μὲ τὸ κόστος τῆς μιᾶς μονάδος εἰς τὰ διαφορετικὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς. Ἑπομένως,

Συμπέρασμα 1ον) Ἐὰν $u < 1$ δι' ὡρισμένην παραγωγὴν x, τότε εὑρισκόμεθα πρὸ τῆς περιπτώσεως τῆς αὐξανομένης προσόδου x, διότι μία μικρὰ ἀναλογικὴ αὔξησις τῆς παραγωγῆς ἔχει ὡς συνέπειαν μίαν μικροτέραν ἀναλογικὴν αὔξησιν τοῦ ὁλικοῦ κόστους. Δηλαδή, λαμβάνομεν μίαν μικρὰν αὔξησιν τῆς παραγωγῆς διὰ μιᾶς μικροτέρας αὐξήσεως τοῦ κόστους. Ἐπίσης, ἐκ τῆς (9) συνάγομεν ὅτι τὸ μέσον κόστος εἶναι μικρότερον τοῦ διαφορικοῦ, καθὼς ἐπίσης ἐκ τῆς (10) συνάγομεν ὅτι τὸ μέσον κόστος ἐλαττοῦται ὅταν αὐξάνῃ ἡ παραγωγή.

Συμπέρασμα 2ον) Ἐὰν $u = 1$ δι' ὡρισμένην τινὰ παραγωγήν, τότε εὑρισκόμεθα πρὸ τῆς περιπτώσεως τῆς σταθερᾶς προσόδου, διότι μία μικρὰ ἀναλογικὴ αὔξησις τῆς παραγωγῆς συνεπάγεται ἴσην ἀναλογικὴν αὔξησιν τοῦ ὁλικοῦ κόστους.

Τὸ μέσον κόστος ἰσοῦται μὲ τὸ διαφορικὸν καὶ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἐλαχίστην του τιμήν.

Συμπέρασμα 3ον) Ἐὰν $u > 1$ διά τινα ὡρισμένην παραγωγὴν x, τότε εὑρισκόμεθα πρὸ τῆς περιπτώσεως τῆς φθινούσης προσόδου, ἡ ὁποία εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἀντίθετος τῆς αὐξανομένης προσόδου ὅταν $u < 1$.

Ὑπὸ ὁμαλὰς συνθήκας, ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἶναι συνεχῶς αὔξουσα. Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως, ὅταν ἡ παραγωγὴ εἶναι μηδέν, εἶναι θετικὴ (σταθερὸν κόστος). Αἱ πλέον ἐνδιαφέρουσαι ἐκ τῶν συναρτήσεων τοῦ κόστους εἶναι ἐκεῖναι εἰς τὰς ὁποίας ἡ ἐλαστικότης εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος εἰς μικρὰς ποσότητας παραγωγῆς καὶ αὐξάνει συνεχῶς εἰς τιμὰς μεγαλυτέρας τῆς μονάδος ὅταν ἡ παραγωγὴ εἶναι μεγάλη. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχει μία ὡρισμένη παραγωγή, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐλαστικότης εἶναι μοναδιαία καὶ ἡ πρόσοδος πέραν τῆς παραγωγῆς αὐτῆς παύει νὰ εἶναι αὔξουσα, μεταβαλλομένη εἰς φθίνουσαν ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτοῦ τῆς παραγωγῆς. Τὸ μέσον κόστος εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν συνεχῶς ἐλαττοῦται, ἕως ὅτου ἡ παραγωγὴ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον ὅπου ἡ ἐλαστικότης τοῦ ὁλικοῦ κόστους εἶναι μοναδιαία. Ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου, τὸ μέσον κόστος ἄρχεται αὐξανόμενον. Ἑπομένως, εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ τὸ μέσον κόστος ἔχει τὴν ἐλαχίστην αὐτοῦ τιμήν. Ἐπίσης, τὸ

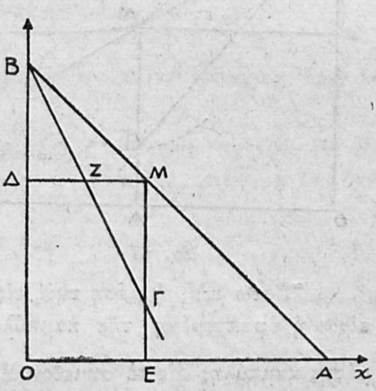
---

1. Βλ. D. Ricardo : «Principles of Political Economy» Ch. II.
2. A. Marshall : «Principles of Economics».

διαφορικὸν κόστος εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ μέσον κόστος ὅταν ἡ παραγωγὴ εἶναι μικροτέρα τῆς παραγωγῆς διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐλαστικότης τοῦ ὁλικοῦ κόστους εἶναι μοναδιαία. Πέραν τῆς παραγωγῆς αὐτῆς, τὸ διαφορικὸν κόστος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέσου κόστους. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ τῆς παραγωγῆς τὸ διαφορικὸν κόστος ἰσοῦται μὲ τὸ μέσον.

VIII. 7. Γεωμετρικὴ ἐφαρμογὴ τῆς ἐλαστικότητος

Ὁ γεωμετρικὸς ὁρισμὸς τῆς ἐλαστικότητος βοηθεῖ εἰς τὸν καθορισμὸν τῆς ἀλληλοεξαρτήσεως μεταξὺ μέσων καὶ διαφορικῶν καμπυλῶν. Ὡς γνωστόν, ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως εἶναι καὶ ἡ καμπύλη τῆς μέσης προσόδου. Ἐὰν ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΒ, (Σχῆμα 66ον) τότε ἡ καμπύλη τῆς διαφορικῆς προσόδου εἶναι ἐπίσης εὐθεῖα καὶ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Β. Ὡσαύτως ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Ζ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΔΜ διότι ἡ ὁλικὴ πρόσοδος παρίσταται διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου ΔΜΕΟ, καθὼς ἐπίσης διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου ΝΓΕΟ καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΒΖΔ καὶ ΖΜΓ εἶναι ἴσα. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται ὅτι ΒΖ=ΖΜ. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω δὲ προτάσεως καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ καμπύλη τῆς διαφορικῆς προσόδου διχοτομεῖ πᾶσαν κάθετον ἀγομένην πρὸς τὸν ἄξονα τῆς τιμῆς ἀπὸ οἱονδήποτε σημεῖον ἐπὶ τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως. Συνεπῶς, ὅταν γνωρίζωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὴν ζήτησιν, δυνάμεθα νὰ σύρωμεν τὴν εὐθεῖα τῆς διαφορικῆς προσόδου. Ἡ γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τῆς σχέσεως διαφορικὴ πρόσοδος = p (1—1/n) (Κεφ. 8) συνάγεται ὡς ἀκολούθως :



Σχ. 66

$$ΕΓ = ΕΜ - ΓΜ$$

καὶ ἐπειδὴ $$\frac{ΔΒ}{ΔΜ} = \frac{ΕΜ}{ΕΑ} \quad \text{καὶ} \quad ΓΜ = ΔΒ$$

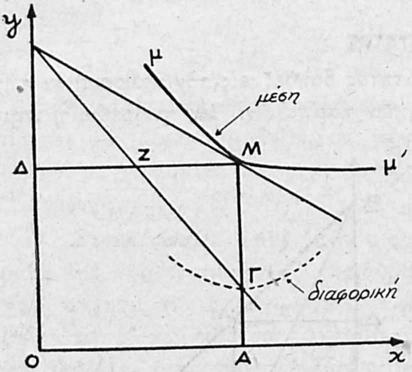
ἕπεται ὅτι $$ΓΜ = \left(\frac{ΕΜ}{ΕΑ}\right). ΔΜ .$$

Ἄρα, $$ΕΓ = ΕΜ - ΓΜ = ΕΜ - ΕΜ \frac{ΔΜ}{ΕΑ} = ΕΜ \left(1 - \frac{ΔΜ}{ΕΑ}\right)$$

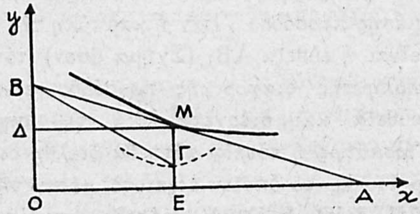
καὶ : $$ΕΓ = ΕΜ\,(1 - 1/n)$$

Ἤτοι, διαφορικὴ πρόσοδος = p (1 — 1/n) .

Ἡ σχέσις αὐτὴ ἐπαληθεύει δι' οἱανδήποτε καμπύλην τῆς ζητήσεως. Γενικώτερον, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι δίδεται ἡ μέση καμπύλη μμ' (Σχῆμα 67ον) καὶ ὅτι ζητεῖται ὅπως προσδιορίσωμεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν διαφορικήν. Ἔστω, Μ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς καμπύλης μμ'. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἴς τι σημεῖον Β . Ἡ διαφορικὴ τιμὴ τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Α (x, O) εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν διαφορικὴν τιμὴν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Μ, ὅθεν δυνάμεθα πρὸς στιγμὴν νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἐφαπτομένην ὡς μέσην καμπύλην καὶ ἡ ἀντίστοιχος διαφορική της θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΓ. Ἑπομένως, ἡ ἀντίστοιχος διαφορικὴ καμπύλη τῆς δοθείσης μμ' θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Γ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὁσαδήποτε σημεῖα τῆς διαφορικῆς καμπύλης· κατὰ συνέπειαν ἡ διαφορικὴ καμπύλη εἶναι κατασκευάσιμος ὅταν δίδεται ἡ μέση καμπύλη.



Σχ. 67



Σχ. 68

Ἔστω ΕΜ, ἡ μέση τιμὴ εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ ΕΓ ἡ διαφορική. Ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ τότε ἡ ἐλαστικότης τῆς μέσης καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶναι $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΒΜ καὶ ΕΜΑ λαμβάνομεν $\frac{ΜΑ}{ΒΜ} = \frac{ΕΜ}{ΔΒ}$ καὶ ἑπομένως ἡ ἐλαστικότης εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶναι:

$$\frac{ΜΑ}{ΜΓ} = \frac{\text{μέση τιμή}}{(\text{μέση - διαφορική})\ \text{τιμή}}$$

ἐπειδὴ ΒΔ = ΜΓ.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ε τὴν ἐλαστικότητα τῆς μέσης καμπύλης

$$ε = \frac{Μ}{Μ - Δ}, \quad Μ = \frac{ε}{ε - 1} Δ, \quad Δ = Μ \frac{ε - 1}{ε}$$

ὅπου Μ εἶναι ἡ μέση καὶ Δ ἡ διαφορικὴ τιμή.

Οὕτως, ἡ διαφορικὴ τιμὴ εὑρίσκεται ἐκ τῆς μέσης ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἐλαστικότητα εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ ἀπόστασις ΜΓ μεταξὺ δύο ἀντιστοίχων σημείων ἐπὶ τῆς μέσης καὶ διαφορικῆς καμπύλης, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐλαστικότητα τῆς μέσης καμπύλης. Ὅσῳ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἐλαστικότης τῆς μέσης καμπύλης εἴς τι σημεῖον, τόσῳ πλησιέστερον κεῖται τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον ἐπὶ τῆς διαφορικῆς καμπύλης [1].

VIII. 8. Ἀριθμητικὰ παραδείγματα

Παράδειγμα 1ον) Ἔστω p=α—6x ἡ γραμμικὴ συνάρτησις τῆς ζητήσεως. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ παριστωμένη ὑπὸ τῆς συναρτήσεως ἀνήκει εἰς τὴν

1) Βλ. Robinson: «Economics of Imperfect Competition» Chapter 2.

ὁμάδα ἐκείνην τῶν καμπυλῶν, αἵτινες ἀποτελοῦν τὸν πλέον ἐνδιαφέροντα τύπον.

Ἡ ἐλαστικότης

$$\eta = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{\alpha - 6x}{x}(-1/6) = 1/\beta \quad \frac{\alpha}{x} - 6$$

ἐλαττώνεται δὲ συνεχῶς ὅταν αὐξάνῃ τὸ x. Ἐπίσης ἐὰν ἔχωμεν τὴν ὑπερβολικὴν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως $p = \frac{\alpha}{x + 6} - \gamma$ ἡ ἐλαστικότης

$$\eta = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\alpha}(1 + \beta/x)(\alpha - 6\gamma - \gamma x).$$

Ὡσαύτως, ἡ ἐλαστικότης εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐλαττοῦται συνεχῶς ὅταν τὸ x αὐξάνει.

Παράδειγμα 2ον) Αἱ ἁπλούστεραι συναρτήσεις, αἵτινες ἀνήκουν εἰς τὸν πλέον ἐνδιαφέροντα τύπον τῶν καμπυλῶν τοῦ κόστους εἶναι τὰ τριώνυμα τοῦ δευτέρου βαθμοῦ· δηλαδή,

$$\Pi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

ὅπου α, 6, γ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί.

Ἡ ἐλαστικότης :

$$u = \frac{x(2\alpha x + 6)}{\alpha x^2 + 6x + \gamma}$$

εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x, ὡς τοῦτο δύναται νὰ δειχθῇ ἐκ τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως, ἥτις εἶναι πάντοτε θετική. Αἱ καμπύλαι τοῦ ὁλικοῦ κόστους, αἵτινες παρουσιάζουν τὰς εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον περιγραφείσας ἰδιότητας τοῦ ὁλικοῦ κόστους, εἶναι τρίτου 6αθμοῦ ὡς πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τῆς παραγωγῆς x. Δηλαδή, εἶναι τῆς μορφῆς $\Pi = \alpha x^3 - 6x^2 + \gamma x + \delta$, ὅπου α, 6, γ, δ εἶναι σταθεροὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $6^2 < 3\alpha\gamma$. Ἡ καμπύλη τοῦ ὁλικοῦ κόστους ἔχει ἓν σημεῖον καμπῆς, ἡ δὲ καμπύλη τοῦ διαφορικοῦ κόστους λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην αὐτῆς τιμὴν διὰ μίαν τιμὴν τῆς παραγωγῆς μικροτέραν ἐκείνης ἥτις καθιστᾷ τὸ μέσον κόστος ἐλάχιστον.

Ἐκ τοῦ ὁλικοῦ κόστους εὑρίσκομεν :

$$\text{μέσον κόστος} = \Pi_M = \alpha x^2 - 6x + \gamma + \frac{\delta}{x}$$

$$\text{διαφορικὸν κόστος} = \Pi_\Delta = \frac{d\Pi}{dx} = 3\alpha x^2 - 26x + \gamma$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{d^2\Pi}{dx^2} = 6\alpha x - 26$$

(Συνεχίζεται)