ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΗΤΡΑΪΚΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΟΤΥΠΗ ΚΟΣΤΟΛΟΓΗΣΗ

Τοῦ Δρ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΣΠ. ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΑΤΟΥ

Τὰ τελευταῖα χρόνια, οἱ θεωρητικὲς ἔρευνες στὸ χῶρο τῆς Λογιστικῆς ἀποβλέπουν στὸ νὰ ἀναπτύξουν μεθόδους καὶ τεχνικὲς ποὺ θὰ ἐπιτρέψουν σ' αὐτὴ νὰ παίξει ἕνα σημαντικὸ ρόλο στὰ γενικότερα πλαίσια τῆς διαδικασίας λήψεως ἐπιχειρηματικῶν ἀποφάσεων.

Ἕνας πλατὺς τομέας τῶν πρωτοπορειακῶν αὐτῶν ἐρευνῶν καλύπτεται ἀπὸ τὶς προσπάθειες διατυπώσεως λογιστικῶν ὑποδειγμάτων μὲ τὰ ὁποῖα ἐπιχειρεῖται ἡ μεταφύτευση τῶν ἀναλύσεων εἰσροῶν - ἐκροῶν στὸ χῶρο τῆς μικροοικονομικῆς Λογιστικῆς.

Ὅπως εἶναι γνωστό, ἡ ἀνάλυση εἰσροῶν - ἐκροῶν ἀνακεφαλαιώνει τὶς συναλλαγὲς μιᾶς χρονικῆς περιόδου, ἀνάμεσα σὲ διάφορες οἰκονομικὲς μονάδες, μὲ τὴ μορφὴ μήτρας, καὶ μέ τὴ χρησιμοποίηση τοῦ μητραϊκοῦ λογισμοῦ ἀνακαλύπτει τὶς σχέσεις ἀνάμεσα στὴν τελικὴ ζήτηση καὶ στοὺς βαθμοὺς δραστηριότητας τῶν οἰκονομικῶν μονάδων.

Ἀνάλογες ὅμως ἐξαρτήσεις ὑπάρχουν καὶ στὴ συνδεσμολογία τῶν ἐσωτερικῶν δραστηριοτήτων μιᾶς οἰκονομικῆς μονάδας. Καὶ ἐπειδὴ οἱ ἐσωτερικὲς αὐτὲς δραστηριότητες παρακολουθοῦνται καὶ ἀπεικονίζονται ἀπὸ τοὺς διγραφικοὺς λογαριασμούς, οἱ μεταξὺ τῶν λογαριασμῶν διασυνδέσεις (ἀμοιβαῖες χρεωπιστώσεις) μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν σὰν ἐκροὲς τοῦ πιστούμενου λογαριασμοῦ καὶ εἰσροὲς τοῦ χρεούμενου[1].

Ὁ τομέας τῆς βιομηχανικῆς λογιστικῆς καὶ τῆς κοστολογήσεως εἶναι ἰδιαίτερα δεκτικὸς σ' αὐτοῦ τοῦ εἴδους τὶς ἀναλύσεις. Ἡ ἴδια ἡ φύση τῶν λογαριασμῶν παραγωγῆς πού, σὰ θέσεις κόστους, δέχονται τὶς ἀξίες τῶν στοιχείων τοῦ κόστους (εἰσροὲς), γιὰ νὰ προκύψει τὸ κόστος παραγωγῆς ποὺ θὰ ἐνσωματωθεῖ στοὺς τελικοὺς κοστολογικοὺς φορεῖς — τὰ παραγόμενα προϊόντα

1) Ἡ θεωρητικὴ αἰτιολόγηση αὐτῆς τῆς ἀπόψεως ἀναπτύσσεται διεξοδικὰ στὴν ἐργασία μας «Νέαι κατευθύνσεις εἰς τὴν θεωρητικὴν θεμελίωσιν τῆς Λογιστικῆς», Ἀθῆναι, 1975, σ. 84 κ.ἑ.

(ἐκροὲς) — καθιστᾶ τὴν ἐφαρμογὴ τῶν σχετικῶν μεθόδων ἰδιαίτερα ἀποτελεσματική [2].

Μὲ τὴν ἐργασία μας αὐτὴ ἐπιχειροῦμε μιὰν ἐπέκταση τῶν μητραϊκῶν ὑποδειγμάτων στὴν πρότυπη κοστολόγηση, ὑποδεικνύοντας ταυτόχρονα καὶ τὴ δυνατότητα ἐνσωματώσεως ἑνὸς ἁπλοῦ ὑποδείγματος τῶν Ἐπιχειρησιακῶν Ἐρευνῶν μέσα στὶς λογιστικὲς διαδικασίες. Τὰ ὑποδείγματα ποὺ προτείνονται δὲν εἶναι, φυσικά, γενικῆς ἐφαρμογῆς. Ἡ κοστολόγηση — εἴτε προϋπολογιστικὴ εἴτε ἱστορικὴ — ἔχει τόσες ἰδιομορφίες ἀπὸ τὴ μιὰ οἰκονομικὴ μονάδα στὴν ἄλλη, ὥστε, ὅταν πρόκειται νὰ ἐφαρμοσθεῖ στὴν πράξη ἕνα θεωρητικὸ ὑπόδειγμα, δὲν μπορεῖ νὰ ἀγνοηθοῦν οἱ ἰδιαίτερες ἀπαιτήσεις αὐτῆς τῆς πολυεδρικῆς πραγματικότητας. Ἔτσι ἡ ἐργασία μας αὐτὴ δὲ θὰ πρέπει νὰ θεωρηθεῖ ὅτι προτείνει μεθόδους ἐνεργείας στὸν λογιστὴ τῆς πράξεως· περσότερο ὑποδεικνύει ἕνα τρόπο μεθοδεύσεως τῆς σκέψεως, μιὰ στάση τοῦ πνεύματος ἡ ὁποία θὰ ὁδηγήσει στὴ διερεύνηση τῶν μεγάλων δυνατοτήτων ποὺ φαίνεται νὰ διανοίγει ἡ ἐφαρμογὴ τῶν μητραϊκῶν ὑποδειγμάτων στὸν κοστολογικὸ τομέα.

* * *

Τὸ ὑπόδειγμα ποὺ θά ἀναπτυχθεῖ προσιδιάζει στὸν τύπο τῆς βιομηχανικῆς παραγωγῆς κατὰ τὸν ὁποῖο διάφορα τεμάχια ποὺ παράγονται στὴ διάρκεια τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας ὑπεισέρχονται στὴ βιομηχανοποίηση ἐνδιάμεσων στοιχείων ἢ ἕτοιμων προϊόντων. Τὰ ἐνδιάμεσα στοιχεῖα μποροῦν, μὲ τὴ σειρά τους, νὰ ὑπεισέλθουν στὴν παραγωγὴ νέων στοιχείων ἢ ἕτοιμων προϊόντων.

Γιὰ τὶς ἀνάγκες τῶν ἀναπτύξεων ποὺ ἀκολουθοῦν. εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀνατρέξουμε στὴν ἔννοια τῆς τεχνολογικῆς μήτρας, ἔννοια χρήσιμη γιὰ τὸν ποσοτικὸ προγραμματισμὸ τῆς παραγωγῆς στὶς ἐπιχειρήσεις αὐτοῦ τοῦ εἴδους [3].

Τὸ πρόβλημα ποὺ ἀντιμετωπίζει ὁ ὑπεύθυνος γιὰ τὸν προγραμματισμὸ τῆς παραγωγῆς εἶναι νὰ μάθει ποιὰ ποσότητα τεμαχίων καὶ ἐνδιάμεσων στοιχείων πρέπει νὰ κατασκευασθεῖ ὥστε νὰ ἱκανοποιηθεῖ ἡ ζήτηση ποὺ ὑλοποιεῖται ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν παραγγελιῶν ποὺ ἔλαβε ἡ ἐπιχείρηση ἀπὸ τοὺς πελάτες της γιὰ ἕτοιμα προϊόντα [4].

---

2) Περισσότερα βλέπε στὴν ἐργασία μας ποὺ προαναφέραμε, σ. 139 κ.έ., ἑνότητα «Λογιστικὴ διὰ μητρῶν καὶ κοστολόγησις».

3) Περισσότερα γιὰ τὴν τεχνολογικὴ μήτρα βλέπε εἰς Kemeny — Schleifer — Snell — Thompson : «Les mathématiques modernes dans la pratique des affaires», Dunod, Paris, 1964, σ. 254 κ.έ.

4) Στὸν ὅρο «ἕτοιμα προϊόντα» θὰ περιλάβουμε ὅλα τὰ εἴδη ποὺ προορίζονται γιὰ πώληση. Μὲ τὸν ὅρο «ἐνδιάμεσα στοιχεῖα» ὑποδηλώνουμε τὰ εἴδη ποὺ θὰ ἐνσωματωθοῦν στὴν παραγωγὴ περισσότερο ἐξελιγμένων προϊόντων. Τὰ «τεμάχια» εἶναι ἁπλὰ κατασκευάσματα ποὺ ὑπεισέρχονται στὴν κατασκευὴ ἐνδιάμεσων στοιχείων ἢ προϊόντων. Ἕνα συγκεκριμένο εἶδος Α μπορεῖ νὰ χαρακτηρισθεῖ ἄλλοτε σὰν ἕτοιμο προϊὸν καὶ ἄλλοτε σὰν ἐνδιάμεσο στοιχεῖο (ἢ τεμάχιο), ἀνάλογα ἀπὸ τὸ ἂν προορίζεται γιὰ πώληση ἢ γιὰ τὶς ἀνάγκες τῶν ἑπομένων σταδίων τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας.

Αὐτὸ τὸ πρόβλημα παίρνει μεγαλύτερες διαστάσεις στὴν περίπτωση βιομηχανιῶν συναρμολογήσεως, ὅπου ἑκατοντάδες ἢ καὶ χιλιάδες τεμαχίων καὶ ἐνδιάμεσων προϊόντων ὑπεισέρχονται στὴν παραγωγὴ περισσότερο ἐξελιγμένων προϊόντων.

Ἡ τεχνολογικὴ μήτρα ἔχει τὴν ἀκόλουθη μορφή :

$$\begin{array}{cc} & \text{Παραγωγὴ προϊόντων} \\ & \begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots\cdots & \alpha_n \end{array} \\ Q = \text{Εἴδη} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & \cdots\cdots & q_{1n} \\ 0 & 0 & q_{23} & \cdots\cdots & q_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & q_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Μὲ α_i ὑποδηλώνουμε τὰ διάφορα προϊόντα, ἐνδιάμεσα στοιχεῖα καὶ τεμάχια ποὺ παράγονται ἀπὸ τὴν ἐπιχείρηση, ταξινομημένα σύμφωνα μὲ τὴν τεχνολογική τους τάξη. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἕνα εἶδος δὲ μπορεῖ νὰ ἀναγραφεῖ στὴ μήτρα παρὰ μόνο ὅταν ὅλα τὰ τεμάχια καὶ στοιχεῖα ποὺ ὑπεισέρχονται στὴν παραγωγή του ἔχουν ἤδη ἀναγραφεῖ.

Μὲ q_{ij} ὑποδηλώνουμε τὶς μονάδες τοῦ εἴδους α_i ποὺ εἶναι ἀναγκαῖες γιὰ τὴν κατασκευὴ μιᾶς μονάδας τοῦ εἴδους α_j. Ἀφοῦ τὰ εἴδη ἀναγράφονται στὴ μήτρα σύμφωνα μὲ τὴν τεχνολογική τους τάξη, εἶναι φανερὸ ὅτι θὰ ἔχουμε πάντα $i < j$. Μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι τὸ q_{ij} ἐκφράζει μιὰ ποσοτικὴ εἰσροὴ στὸν λογαριασμὸ παραγωγῆς τοῦ εἴδους α_j καὶ μιὰ ποσοτικὴ ἐκροὴ ἀπὸ τὸν λογαριασμὸ τοῦ εἴδους α_i, πράγμα ποὺ συνδέει ἐννοιολογικὰ τὴν τεχνολογικὴ μήτρα μὲ τὴ μητραϊκὴ λογιστική.

Θὰ καλέσουμε *διάνυσμα τῆς τελικῆς ἢ ἐξωτερικῆς ζητήσεως*, τὸ στηλοδιάνυσμα $d = [d_1, d_2 \cdot \cdot \cdot \cdot d_n]^*$, τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ποσότητες τῶν εἰδῶν $\alpha_1, \alpha_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \alpha_n$ ποὺ ζητοῦνται ἀπὸ τὴν πελατεία. Εἶναι, δηλαδή, οἱ ποσότητες ποὺ πρέπει νὰ πωλήσει ἡ ἐπιχείρηση, σύμφωνα μὲ τὶς παραγγελίες ποὺ ἔχει λάβει.

Θὰ καλέσουμε *διάνυσμα τῆς ἐνδιάμεσης ἢ ἐσωτερικῆς ζητήσεως* τὸ στηλοδιάνυσμα $x = [x_1, x_2 \cdot \cdot \cdot \cdot x_n]^*$, τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ποσότητες τῶν εἰδῶν $\alpha_1, \alpha_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \alpha_n$ ποὺ πρέπει νὰ παραχθοῦν γιὰ νὰ ἱκανοποιηθοῦν τόσο ἡ ἐξωτερικὴ ζήτηση ὅσο καὶ οἱ ἀνάγκες τῆς παραγωγῆς τῶν περισσότερο ἐξελιγμένων προϊόντων [5].

---

5) Οἱ ἀστερίσκοι ποὺ σημειώνονται σὲ διανύσματα ἢ μῆτρες σημαίνουν ἐναλλαγὴ τῶν διανυσμάτων ἢ μητρῶν τὶς ὁποῖες συνοδεύουν. Οἱ γραμμές, δηλαδή, αὐτῶν τῶν διανυσμάτων ἢ μητρῶν πρέπει νὰ θεωροῦνται σὰν στῆλες, καὶ οἱ στῆλες σὰν γραμμές.

Σὲ μερικὲς περιπτώσεις, οἱ ἀνάγκες τῶν ὑπολογισμῶν ἐπιβάλλουν ὥστε, ἀντὶ ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ διανύσματα, νὰ χρησιμοποιοῦνται οἱ ἀκόλουθες διαγώνιες μῆτρες:

Διαγώνια μήτρα τελικῆς ζητήσεως:

$$\text{διαγ}\ [d] = \begin{bmatrix} d_1\ , 0\ , \dots 0 \\ 0\ , d_2, \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0\ , 0\ , \dots d_n \end{bmatrix}$$

Διαγώνια μήτρα ἐνδιάμεσης ζητήσεως:

$$\text{διαγ}\ [x] = \begin{bmatrix} x_1\ , 0, \dots 0 \\ 0\ , x_2 \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0\ , 0, \dots x_n \end{bmatrix}$$

Ἀπὸ τούς ὁρισμοὺς ποὺ δώσαμε παραπάνω, προκύπτει ὅτι:

$$x = \mathbf{Q} \cdot x + d$$

$$x - \mathbf{Q} \cdot x = d$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \cdot x = d$$

$$x = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot d \qquad (1)$$

Χρήσιμο εἶναι, ἐπίσης, νὰ γνωρίζουμε δύο ἰδιότητες [6] τῆς μήτρας **Q**:

Ἰδιότητα Α: Ἂν n εἶναι ἡ τάξη τῆς μήτρας **Q**, θὰ ἔχουμε $\mathbf{Q}^k = \mathbf{0}$ γιὰ κάθε $k \geqslant n$.

Ἰδιότητα Β: Ἂν k εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμὸς γιὰ τὸν ὁποῖο $\mathbf{Q}^k = \mathbf{0}$, τότε:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \dots + \mathbf{Q}^{k-1}$$

Οἱ δύο αὐτὲς ἰδιότητες διευκολύνουν στὸν ὑπολογισμὸ τῆς μήτρας $(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}$

Μετὰ ἀπὸ τὶς παραπάνω ὑπομνήσεις, μποροῦμε νὰ περάσουμε στὶς ἀναπτύξεις τοῦ ὑποδείγματός μας.

Θὰ ὀνομάσουμε ποσοτικὴ μήτρα τῶν πρότυπων παρα-

6) Kemeny — Schleifer — Snell — Thompson, op. cit., σ.σ 255 καὶ 257.

γωγικῶν συντελεστῶν μία ὀρθογώνια μήτρα τῆς ὁποίας κάθε στήλη, ἀναφερόμενη στὴν παραγωγὴ τοῦ εἴδους α_i, περιέχει τὶς πρότυπες ποσότητες τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν (ὑλῶν, ὡρῶν ἐργασίας, ἐμμέσων ἐξόδων) ποὺ ἡ ἐπιχείρηση πρέπει νὰ προμηθευθεῖ ἀπὸ ἄλλες οἰκονομικὲς μονάδες γιὰ τὴν παραγωγὴ μιᾶς μονάδας τοῦ εἴδους α_i. Τὰ παραγόμενα ἀπὸ τὴν ἐπιχείρηση τεμάχια ἢ ἐνδιάμεσα στοιχεῖα ποὺ παρεμβαίνουν στὴν κατασκευὴ τοῦ προϊόντος α_i δὲν ἐμφανίζονται στὴ μήτρα αὐτή, ποὺ παρουσιάζεται μὲ τὴν ἀκόλουθη μορφή :

$$\mathbf{F} = \begin{array}{ccc} & & \text{Παραγωγὴ} \\ & & \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & , & \alpha_2 & \ldots\ldots & \alpha_n \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Παραγωγικοὶ} \\ \text{Συντελεστὲς} \end{array} & \begin{array}{c} m_1 \\ \ldots \\ m_m \\ h_1 \\ \ldots \\ h_r \\ f_1 \end{array} & \begin{bmatrix} m_{11} & , & m_{12} & \ldots\ldots & m_{1n} \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{m1} & , & m_{m2} & \ldots\ldots & m_{mn} \\ h_{11} & , & h_{12} & \ldots\ldots & h_{1n} \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{r1} & , & h_{r2} & \ldots\ldots & h_{rn} \\ f_{11} & , & f_{12} & \ldots\ldots & f_{1n} \end{bmatrix} \end{array}$$

Διαπιστώνουμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τῆς μήτρας ἐκφράζει μία πρότυπη ποσοτικὴ εἰσροὴ στὸν λογαριασμὸ παραγωγῆς τοῦ προϊόντος α_i καὶ μιὰ πρότυπη ποσοτικὴ ἐκροὴ στὸν ἀντίστοιχο λογαριασμὸ ὕλης ἢ ἐξόδου (m_i = ὕλη i, h_i = ὧρες ἐργασίας — εἰδικευμένης, ἀνειδίκευτης, ἡμερήσιας, νυκτερινῆς, ὑπερωριακῆς, κ.λπ. — f_i = ἔμμεσα βιομηχανικὰ ἔξοδα γιὰ τὰ ὁποῖα ὑποθέτουμε ὅτι καταλογίζονται στοὺς λογαριασμοὺς παραγωγῆς σύμφωνα μὲ τὰ δεδομένα ἑνὸς εὔκαμπτου προϋπολογισμοῦ, κατὰ μονάδα ἄμεσης ἐργασίας).

Ἡ ἐπιχείρηση, γιὰ νὰ ἀνταποκριθεῖ σὲ μιὰ τελικὴ ζήτηση **d**, στὴν ὁποία ἀντιστοιχεῖ ἐνδιάμεση ζήτηση x, πρέπει νὰ πραγματοποιήσει τοὺς ἐφοδιασμούς της, σὲ πρότυπες ποσότητες, σύμφωνα μὲ τὸ ὑπόδειγμα :

$$f = \mathbf{F} \cdot x = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot d \qquad (2)$$

ὅπου τὸ f εἶναι στηλοδιάνυσμα, ποὺ τὰ στοιχεῖα του ἐκφράζουν τὶς πρότυπες ποσότητες τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν οἱ ὁποῖες εἶναι ἀπαραίτητες γιὰ νὰ ἱκανοποιηθεῖ ἡ τελικὴ ζήτηση d.

Τὸ ἴδιο ὑπόδειγμα μπορεῖ νὰ πάρει καὶ τὴν ἀκόλουθη μορφή, ἂν ἀντὶ ἀπὸ τὰ διανύσματα x καὶ d χρησιμοποιήσουμε τὶς ἀντίστοιχες διαγώνιες μῆτρες :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} \cdot \text{διαγ}\,[x] = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot \text{διαγ}\,[d] \qquad (2')$$

ὅπου F_1 εἶναι ὀρθογώνια μήτρα, τῶν ἴδιων διαστάσεων μὲ τὴν **F**, στὴν ὁποία κάθε στήλη α_i περιέχει τὶς πρότυπες εἰσροὲς παραγωγικῶν συντελεστῶν ποὺ εἶναι ἀναγκαῖες γιὰ τὴν κατασκευὴ τῆς ποσότητας τοῦ προϊόντος α_i ποὺ ἱκανοποιεῖ τόσο τὴν ἐσωτερικὴ ὅσο καὶ τὴν ἐξωτερικὴ ζήτηση.

Ἂς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι $p = [p_1, p_2, \ldots\ldots p_{m+r}, 1]$ εἶναι γραμμοδιάνυσμα ποὺ τὰ στοιχεῖα του ἐκφράζουν τὶς πρότυπες τιμὲς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν [7], στὴν ἴδια τάξη μὲ τὴν ὁποία ἀναγράφηκαν οἱ παραγωγικοὶ συντελεστὲς ἐπικεφαλῆς τῶν σειρῶν τῆς μήτρας **F**.

Τὰ σύνολα τοῦ πρότυπου κόστους τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν μποροῦν νὰ προκύψουν σὰ συνιστῶσες ἑνὸς στηλοδιανύσματος c_f, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀκόλουθη μητραϊκὴ σχέση :

$$c_f = \text{διαγ}\,[p] \cdot f = \text{διαγ}\,[p] \cdot \mathbf{F} \cdot x = \text{διαγ}\,[p] \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot d \quad (3)$$

καὶ συνεπῶς τὸ συνολικὸ κόστος τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν εἶναι :

$$c_g = e \cdot c_f \quad (4)$$

ὅπου e εἶναι τὸ γραμμοδιάνυσμα - ἀθροιστής [8].

Ἡ ἔκφραση :

$$\mathbf{U} = \text{διαγ}\,[p] \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \quad (5)$$

εἶναι μήτρα τῆς ὁποίας ἡ στήλη j ἐκφράζει τὶς ἀξίες εἰσροῶν τῶν ἀρχικῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ποὺ ὑπεισέρχονται σὲ μία μονάδα τοῦ προϊόντος α_j εἴτε ἄμεσα εἴτε ἔμμεσα — ἔχοντας δηλαδὴ προηγουμένως ἐνσωματωθεῖ στὴν ἀξία ἑνὸς εἴδους α_i $(i < j)$ ποὺ χρησιμοποιήθηκε γιὰ τὴν παραγωγὴ τοῦ α_j .

Τὰ ἀθροίσματα τῶν γραμμῶν τῆς μήτρας **U** δίνουν, συνεπῶς, τὸ μοναδιαῖο πρότυπο κόστος κατὰ προϊόν :

$$c_u = e \cdot \mathbf{U} \quad (6)$$

---

7) Διευκρινίζουμα ὅτι τὸ στοιχεῖο τοῦ διανύσματος p ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὰ πρότυπα ἔμμεσα ἔξοδα εἶναι ἡ μονάδα, ἐπειδὴ ἐδῶ δὲν πρόκειται γιὰ τιμὴ ποὺ θὰ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθεῖ μὲ κάποια ποσότητα· πράγματι ἡ μήτρα F, στὴ σειρὰ τῶν ἐμμέσων ἐξόδων περιέχει ἤδη τὸ σύνολο τῶν πρότυπων ἐξόδων κατὰ μονάδα παραγωγῆς· ἔτσι ἡ μονάδα στὸ διάνυσμα τῶν τιμῶν χρησιμεύει μόνο γιὰ νὰ ἱκανοποιεῖ τὸ συμβιβαστὸ τῶν μητραϊκῶν πολλαπλασιασμῶν στὰ ὑποδείγματα ὅπου περιέχεται τὸ διάνυσμα p.

8) Τὸ γραμμοδιάνυσμα - ἀθροιστὴς μιᾶς μήτρας A εἶναι γραμμοδιάνυσμα συμβιβαστὸ ὥστε νὰ πολλαπλασιάζει τὴν μήτρα A, καὶ τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ στοιχεῖα εἶναι ἡ μονάδα. Ὅπως εἶναι εὔκολο νὰ διαπιστωθεῖ, τὸ γινόμενο τοῦ γραμμοδιανύσματος - ἀθροιστῆ ἐπὶ τὴ μήτρα, εἶναι γραμμοδιάνυσμα ποὺ στοιχεῖα του εἶναι τὰ ἀθροίσματα τῶν στηλῶν τῆς μήτρας. Τὸ στηλοδιάνυσμα - ἀθροιστὴς μιᾶς μήτρας A εἶναι στηλοδιάνυσμα συμβιβαστὸ ὥστε νὰ μεταπολλαπλασιάζει τὴ μήτρα A καὶ τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ στοιχεῖα, εἶναι ἡ μονάδα· τὸ γινόμενο τῆς μήτρας ἐπὶ τὸ στηλοδιάνυσμα αὐτὸ εἶναι στηλοδιάνυσμα ποὺ ἔχει γιὰ στοιχεῖα του τὰ ἀθροίσματα τῶν σειρῶν τῆς μήτρας. Ἂν τὸ γραμμοδιάνυσμα - ἀθροιστὴς προπολλαπλασιάζει ἕνα στηλοδιάνυσμα α, τὸ γινόμενο θὰ εἶναι διάνυσμα μὲ ἕνα μοναδικὸ στοιχεῖο, ἴσο πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων τοῦ α. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ ὅταν ἕνα γραμμοδιάνυσμα α μεταπολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ στηλοδιάνυσμα - ἀθροιστή.

Μετὰ τὸν προσδιορισμὸ τοῦ μοναδιαίου πρότυπου κόστους, μπορεῖ νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ πρότυπο κόστος τῆς τελικῆς παραγωγῆς κατ' εἶδος :

$$c_d = \text{διαγ} \, [c_u] \cdot d \tag{7}$$

Ἂν τώρα θέλουμε νὰ γνωρίζουμε τὰ συνολικὰ πρότυπα ἔξοδα ποὺ ἀπαιτήθηκαν γιὰ τὴν ἐνδιάμεση παραγωγὴ κατ' εἶδος, θὰ ἔχουμε :

$$c_i = \text{διαγ} \, [c_u] \cdot x \tag{8}$$

Μέχρι τώρα ἡ ἔρευνά μας ἔμεινε περιορισμένη στὴ χρησιμοποίηση τοῦ μητραϊκοῦ ὑπολογισμοῦ γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τοῦ πρότυπου κόστους. Ἀλλὰ οἱ ἀναλύσεις τῆς πρότυπης κοστολογήσεως δὲν μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὁλοκληρωμένες χωρὶς τὴ διερεύνηση τῶν ἀποκλίσεων ποὺ θὰ προκύψουν ἀπὸ τὴ σύγκριση τῶν πρότυπων τιμῶν μὲ τὶς πραγματικὲς ποὺ θὰ διαμορφωθοῦν στὴν πράξη. Αὐτὸ τὸ συγκριτικὸ στοιχεῖο πρότυπου καὶ πραγματικότητας θὰ μᾶς ἀπασχολήσει στὰ ἑπόμενα. Τὰ σύμβολα ποὺ χρησιμοποιήθηκαν ὡς τώρα γιὰ νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ πρότυπες ποσότητες καὶ τιμές, θὰ χρησιμοποιηθοῦν τονούμενα γιὰ νὰ ἐκφράσουν τὶς πραγματικὲς ποσότητες καὶ τιμές.

Θεωροῦμε ὅτι οἱ ποσότητες τῆς πραγματικῆς τελικῆς παραγωγῆς ἀπαρτίζουν ἕνα στηλοδιάνυσμα d', οἱ πραγματικὲς τιμὲς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς ἕνα γραμμοδιάνυσμα p' καὶ οἱ πραγματικὲς ἀναλώσεις τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς μία μήτρα $\mathbf{F}'$, τῶν ἴδιων διαστάσεων μὲ τὴ μήτρα $\mathbf{F}$. Ὑπάρχει ὅμως μιὰ βασικὴ διαφορὰ ἀνάμεσα στὶς μῆτρες $\mathbf{F}$ καὶ $\mathbf{F}'$: ἐνῶ μιὰ στήλη i τῆς πρώτης, ἀναφερόμενη στὴν παραγωγὴ τοῦ εἴδους a_i, περιέχει τὶς πρότυπες ποσότητες τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ποὺ ἡ ἐπιχείρηση πρέπει νὰ προμηθευθεῖ ἀπὸ ἄλλες οἰκονομικὲς μονάδες γιὰ τὴν παραγωγὴ **μιᾶς** μονάδας τοῦ εἴδους a_i, στὴ $\mathbf{F}'$ ἡ στήλη i περιέχει τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ποσοτήτων τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ποὺ ἀναλώθηκαν γιὰ τὴν παραγωγὴ **ὅλων** τῶν μονάδων τοῦ εἴδους a_i. Σημειώνουμε ἀκόμα ὅτι στὴ μήτρα $\mathbf{F}'$ ἐμφανίζονται οἱ ἄμεσες ἀναλώσεις· συνεπῶς στὴ στήλη i δὲν περιέχονται οἱ ἀναλώσεις παραγωγικῶν συντελεστῶν γιὰ ἐνδιάμεσα τεμάχια καὶ εἴδη τὰ ὁποῖα χρησιμοποιήθηκαν γιὰ τὴν παραγωγὴ τῶν μονάδων τοῦ a_i.

Ἡ πραγματικὴ παραγωγὴ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν πραγματικὴ ἐνδιάμεση ζήτηση δίδεται ἀπὸ τὴν ἔκφραση :

$$x' = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot d' \tag{9}$$

Μποροῦμε νὰ ὑπολογίσουμε τὸ πρότυπο κόστος τῶν συντελεστῶν ποὺ ἀναλώθηκαν γιὰ τὴν πραγματικὴ παραγωγή, μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς ὑποδείγματος, ἀνάλογου μὲ τὸ (3), ποὺ διατυπώνεται ἔτσι :

$$c_{fs} = \text{διαγ} \, [p] \, . \, \mathbf{F} \, . \, x' = \text{διαγ} \, [p] \, . \, \mathbf{F} \, . \, (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \, . \, d' \tag{10}$$

Τὸ πραγματικὸ κόστος τῶν συντελεστῶν ποὺ ἀναλώθηκαν ὑπολογίζεται μὲ τὴν ἀκόλουθη σχέση :

$$c'_f = \text{διαγ}\,[p']\,.\,\mathbf{F}'\,.\,e \tag{11}$$

Ἡ συνολικὴ ἀπόκλιση v_g θὰ εἶναι, λοιπόν :

$$v_g = ec_{fc} - ec'_f \tag{12}$$

Ἀλλὰ ἡ συνολικὴ ἀπόκλιση πρέπει νὰ ἀναλυθεῖ, γιὰ νὰ διαπιστωθεῖ ἡ προέλευσή της. Γιὰ τὶς ὕλες καὶ τὶς ὧρες ἄμεσης ἐργασίας ἡ ἀνάλυση πρέπει νὰ διαπιστώσει, γιὰ κάθε ὕλη καὶ κάθε εἶδος ἐργασίας :

— τὴν ἀπόκλιση ποσότητας, ποὺ θεωρεῖται σὰν τὸ γινόμενο τῆς διαφορᾶς ἀνάμεσα σὲ πρότυπες καὶ πραγματικὲς ποσότητες ἐπὶ τὶς ἀντίστοιχες πρότυπες τιμές,

— τὴν ἀπόκλιση τιμῆς, ποὺ θεωρεῖται σὰν τὸ γινόμενο τῆς διαφορᾶς ἀνάμεσα σὲ πρότυπη καὶ πραγματικὴ τιμὴ ἐπὶ τὴν πραγματικὴ ποσότητα.

Ἔχουμε λοιπόν :

Ἀποκλίσεις ποσότητας V_q :

$$V_q = \text{διαγ}\,[p]\,.\,(\mathbf{F}\,.\,\text{διαγ}\,[x'] - \mathbf{F}') \tag{13}$$

Ἀποκλίσεις τιμῆς V_p :

$$V_p = (\text{διαγ}\,[p] - \text{διαγ}\,[p'])\,.\,\mathbf{F}' \tag{14}$$

Ὅσο γιὰ τὶς ἀποκλίσεις τῶν ἐμμέσων ἐξόδων, αὐτὲς προκύπτουν ἀπὸ τὸ ὑπόδειγμα 13, συνολικὰ κατὰ παραγόμενο εἶδος. Ἡ ἀνάλυσή τους σύμφωνα μὲ τὸ σύστημα 2, 3 ἢ 4 ἀποκλίσεων, ποὺ ἔχει υἱοθετήσει ἡ ἐπιχείρηση [9], γίνεται ἰδιαιτέρως, ἀφοῦ ληφθοῦν ὑπόψη τὰ δεδομένα τοῦ κανονικοῦ βαθμοῦ δραστηριότητας, τοῦ πραγματικοῦ βαθμοῦ δραστηριότητας καὶ τοῦ βαθμοῦ ποὺ ἀντιστοιχεῖ θεωρητικὰ στὴν πραγματικὴ παραγωγή. Στὸ σημεῖο ὅμως αὐτὸ ἡ ἔρευνά μας δὲν ἔχει καταλήξει, ὡς τώρα, στὴ διατύπωση εὔχρηστων μητραϊκῶν ὑποδειγμάτων, γι' αὐτὸ ἡ ἀνάλυση αὐτὴ θὰ πρέπει νὰ πραγματοποιεῖται μὲ τὶς κλασσικὲς μεθόδους ποὺ ὑποδεικνύει ἡ πρότυπη κοστολόγηση [10].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

Θὰ ἐφαρμόσουμε τώρα τὶς θεωρητικὲς ἀναπτύξεις ποὺ προηγήθηκαν, σὲ ἕνα ἀριθμητικὸ παράδειγμα.

Ἡ ἐπιχείρηση Α παράγει τέσσερα εἴδη, ποὺ θὰ τὰ παραστήσουμε μέ α_ι ($\iota = 1,2,3,4$). Οἱ τεχνολογικὲς σχέσεις εἶναι οἱ ἀκόλουθες :

---

9) Ἀνάπτυξη τῶν συστημάτων ἀποκλίσεων βλέπε στὴν ἐργασία μας «Τὸ κόστος παραγωγῆς καὶ διαθέσεως». Ἐγκυκλοπαιδεία τοῦ Λογιστοῦ, τόμος Ε', ἐκδόσεις Πάμισος, Ἀθῆναι 1969, σ. 482 κ.ἑ.

10) Δημ. Παπαδημητρίου : «Τὸ Πρότυπον Κόστος», Ἀθῆναι, 1958 σ.σ. 216 κ.ἑ.

Γιὰ μία μονάδα $α_2$ ἀπαιτοῦνται 3 μονάδες $α_1$
» » » $α_3$ » 1 μονάδα $α_1$ καὶ 4 μονάδες $α_2$
» » » $α_4$ » 2 μονάδες $α_2$ καὶ 1 μονάδα $α_3$.

Ἡ τεχνολογικὴ μήτρα εἶναι λοιπόν :

$$Q = \text{Προϊόντα} \begin{array}{c} \\ α_1 \\ α_2 \\ α_3 \\ α_4 \end{array} \begin{array}{c} \text{Π α ρ α γ ω γ ὴ} \\ \begin{array}{cccc} α_1 & α_2 & α_3 & α_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (1α)$$

Ἀπὸ αὐτὴ τὴ μήτρα μποροῦμε νὰ ὑπολογίσουμε τὴν $(I—Q)^{-1}$, ἡ ὁποία, ὅπως εἶναι εὐνόητο, παραμένει ἀμετάβλητη ἐφόσο δὲν μεταβάλλονται οἱ τεχνολογικὲς σχέσεις :

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 & 19 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2α)$$

Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ποσοτικὴ μήτρα τῶν πρότυπων παραγωγικῶν συντελεστῶν εἶναι ἡ ἀκόλουθη :

$$F = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ h_1 \\ f_1 \end{array} \begin{array}{c} \text{Π α ρ α γ ω γ ὴ} \\ \begin{array}{cccc} α_1 & α_2 & α_3 & α_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 10 & 15 & 10 \\ 200 & 1000 & 1500 & 1000 \end{bmatrix} \end{array} \quad (3α)$$

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμό της, ἡ μήτρα **F** δείχνει ὅτι, γιὰ νὰ παραχθεῖ μία μονάδα ἑνὸς εἴδους, ἔστω τοῦ $α_2$, πέρα ἀπὸ τὶς 3 μονάδες τοῦ εἴδους $α_1$ πού, σύμφωνα μὲ τὴν τεχνολογικὴ μήτρα, εἶναι ἀναγκαῖες, χρειάζονται ἀκόμα 2 μονάδες ὕλης m_1, 4 μονάδες ὕλης m_3, 10 ὧρες ἄμεσης ἐργασίας καὶ 1000 δρχ. ἔμμεσα βιομηχανικὰ ἔξοδα [11].

11) Τὰ βιομηχανικὰ ἔξοδα ὑποθέτουμε ὅτι κατανέμονται ἀνάλογα μὲ τὶς ὧρες ἄμεσης ἐργασίας. Στὸ παράδειγμά μας ὑποθέτουμε ὅτι :

$$\frac{\text{Σύνολο πρότυπων βιομηχανικῶν ἐξόδων}}{\text{Σύνολο πρότυπων ὡρῶν ἄμεσης ἐργασίας}} = 100 \text{ δρχ.}$$

Θεωροῦμε, ἀκόμα, ὅτι ἡ τελικὴ ζήτηση γιὰ μιὰ περίοδο παραγωγῆς, εἶναι ἡ ἀκόλουθη :

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\
d & = & [\,40 & 10 & 30 & 20\,]^*
\end{array}
\qquad (4\alpha)
$$

Ἡ ἐνδιάμεση ζήτηση θὰ εἶναι τότε, σύμφωνα μὲ τὸ ὑπόδειγμα (1) :

$$
x = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 & 19 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 + 30 + 390 + 380 \\ 0 + 10 + 120 + 120 \\ 0 + 0 + 30 + 20 \\ 0 + 0 + 0 + 20 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 840 \\ 250 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad (5\alpha)
$$

Γιὰ νὰ πραγματοποιηθεῖ ὅμως ἡ παραγωγὴ πού προκύπτει ἀπὸ τὸ στηλοδιάνυσμα x, ἡ ἐπιχείρηση πρέπει νὰ προμηθευθεῖ ἀπὸ ἄλλες οἰκονομικὲς μονάδες τοὺς πιὸ κάτω παραγωγικοὺς συντελεστὲς (πρότυπες ποσότητες) :

$$
f = \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ h_1 \\ f_1 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 10 & 15 & 10 \\ 200 & 1000 & 1500 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 840 \\ 250 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4700 \\ 900 \\ 1040 \\ 5130 \\ 513.000 \end{bmatrix} \qquad (6\alpha)
$$

Ἂν ἐφαρμόσουμε τὸ ὑπόδειγμα (2′), τὸ ἀποτέλεσμα θὰ ἐκφράζει τὴν κατανομὴ τοῦ πρότυπου κόστους τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν κατὰ παραγωγικὸ τμῆμα :

$$
F_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 10 & 15 & 10 \\ 200 & 1000 & 1500 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 840 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 4.200 & 500 & 0 & 0 \\ 840 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 1.000 & 0 & 40 \\ 1.680 & 2.500 & 750 & 200 \\ 168.000 & 250.000 & 75.000 & 20.000 \end{bmatrix} \qquad (7\alpha)
$$

Ἡ τελευταία αὐτὴ μήτρα φανερώνει ὅτι ἡ πρότυπη παραγωγή, π.χ., τῶν 250 μονάδων α_2 ποὺ ἀντιπροσωπεύει τὴν ἐξωτερικὴ καὶ ἐσωτερικὴ ζήτηση αὐτοῦ τοῦ εἴδους, ἀπαιτεῖ πέρα ἀπὸ τὶς ἀναγκαῖες μονάδες τοῦ εἴδους α_1, 500 μονάδες ὕλης m_1, 1000 μονάδες ὕλης m_3, 2500 ὧρες ἄμεσης ἐργασίας καὶ 250.000 δρχ. ἔμμεσα βιομηχανικὰ ἔξοδα.

Ὑποθέτοντας ὅτι $\mathbf{p} = [\,50,\ 200,\ 80,\ 40,\ 1\,]$, τὸ συνολικὸ πρότυπο κόστος κάθε συντελεστῆ παραγωγῆς θὰ εἶναι, σύμφωνα μὲ τὸ ὑπόδειγμα (3):

$$\mathbf{c}_f = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4700 \\ 900 \\ 1040 \\ 5130 \\ 513000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 235000 \\ 180000 \\ 83200 \\ 205200 \\ 513000 \end{bmatrix} \qquad (8\alpha)$$

καὶ τὸ συνολικὸ πρότυπο κόστος παραγωγῆς:

$$\mathbf{c}_g = [\,1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\,] \cdot \begin{bmatrix} 235000 \\ 180000 \\ 83200 \\ 205200 \\ 513000 \end{bmatrix} = [\,1216400\,] \qquad (9\alpha)$$

Τὸ πρότυπο κόστος κατὰ μονάδα προϊόντος ὑπολογίζεται εὔκολα, μὲ τὴ βοήθεια τῶν ὑποδειγμάτων (5) καὶ (6):

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 10 & 15 & 10 \\ 200 & 1000 & 1500 & 1000 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 & 19 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 & 850 & 3650 & 5350 \\ 200 & 600 & 2600 & 4400 \\ 0 & 320 & 1280 & 2080 \\ 80 & 640 & 3240 & 4920 \\ 200 & 1600 & 8100 & 12300 \end{bmatrix} \qquad (10\alpha)$$

$$\mathbf{c}_u = \mathbf{e} \cdot \mathbf{U} = [\,730,\ 4010,\ 18870,\ 29050\,] \qquad (11\alpha)$$

Τὸ πρότυπο κόστος τῆς τελικῆς παραγωγῆς θὰ εἶναι κατ' εἶδος:

$$\mathbf{c}_d = \delta\iota\alpha\gamma\,[\,\mathbf{c}_u\,] \cdot \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 730 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18870 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29050 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 29200 \\ 40100 \\ 566100 \\ 581000 \end{bmatrix} \qquad (12\alpha)$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι :

$$c_g = e c_f = e c_d$$

Τὸ συνολικὸ κόστος ποὺ θὰ ἐπιτύχουμε σὲ κάθε ἐνδιάμεσο παραγωγικὸ στάδιο, θὰ εἶναι :

$$c_i = \begin{bmatrix} 730 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18870 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29050 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 840 \\ 250 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 621200 \\ 1002500 \\ 943500 \\ 581000 \end{bmatrix} \qquad (13\alpha)$$

Θὰ προχωρήσουμε τώρα στὸν ὑπολογισμὸ τῶν ἀποκλίσεων.

Ὑποθέτουμε ὅτι τὰ πραγματικὰ δεδομένα εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

Πραγματικὴ τελικὴ παραγωγή : $d' = [\,35,\ 12,\ 30,\ 19\,]^*$

Πραγματικὲς τιμὲς παραγωγικῶν συντελεστῶν : $p' = [\,45,\ 210,\ 80,\ 35,\ 1\,]$

Ἔμμεσα βιομηχανικὰ ἔξοδα : Δρχ. 530000

Πραγματικὲς ἀναλώσεις παραγωγικῶν συντελεστῶν :

Π α ρ α γ ω γ ὴ

$$F' = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ h_1 \\ f_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4100 & 500 & 0 & 0 \\ 830 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 980 & 0 & 40 \\ 1650 & 2500 & 720 & 200 \\ 180000 & 260000 & 70000 & 20000 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (14\alpha)$$

Πραγματικὴ ἐνδιάμεση παραγωγή, σύμφωνα μὲ τὸ ὑπόδειγμα (9):

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 & 19 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 35 \\ 12 \\ 30 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 + 36 + 390 + 361 \\ 0 + 12 + 120 + 114 \\ 0 + 0 + 30 + 19 \\ 0 + 0 + 0 + 19 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 822 \\ 246 \\ 49 \\ 19 \end{bmatrix} \qquad (15\alpha)$$

Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὶς ποσοτικὲς ἀποκλίσεις, θά χρησιμοποιήσουμε τὸ ὑπόδειγμα (13). Ὁ ὅρος **F** . διαγ [x΄] ποὺ περιέχεται σ' αὐτὸ ἐκφράζει τὶς πρότυπες ποσότητες τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὴν πραγματικὴ παραγωγή. Σύμφωνα μὲ τὰ δεδομένα τοῦ παραδείγματός μας, ἔχουμε :

$$\mathbf{F} \,.\, \delta\iota\alpha\gamma\,[\,x'\,] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 10 & 15 & 10 \\ 200 & 1000 & 1500 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 822 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 246 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4110 & 492 & 0 & 0 \\ 822 & 0 & 0 & 57 \\ 0 & 984 & 0 & 38 \\ 1644 & 2460 & 735 & 190 \\ 164400 & 246000 & 73500 & 19000 \end{bmatrix} \qquad (16\alpha)$$

Ἔχουμε λοιπόν:

$$\mathbf{F} \,.\, \delta\iota\alpha\gamma\,[\,x'\,] - \mathbf{F}' =$$

$$= \begin{bmatrix} 4110 & 492 & 0 & 0 \\ 822 & 0 & 0 & 57 \\ 0 & 984 & 0 & 38 \\ 1644 & 2460 & 735 & 190 \\ 164400 & 246000 & 73500 & 19000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4100 & 500 & 0 & 0 \\ 830 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 980 & 0 & 40 \\ 1650 & 2500 & 720 & 200 \\ 180000 & 260000 & 70000 & 20000 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ -6 & -40 & 15 & -10 \\ -15600 & -14000 & 3500 & -1000 \end{bmatrix}$$

Οἱ ποσοτικὲς ἀποκλίσεις θὰ εἶναι, τελικά:

$$V_q = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ -6 & -40 & 15 & -10 \\ -15600 & -14000 & 3500 & -1000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 500 & -400 & 0 & 0 \\ -1600 & 0 & 0 & -600 \\ 0 & 320 & 0 & -160 \\ -240 & -1600 & 600 & -400 \\ -15600 & -14000 & 3500 & -1000 \end{bmatrix} \qquad (17\alpha)$$

Τὸ τελευταῖο αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ὅπως παρουσιάζεται ἀμέσως μὲ τὴ μορφὴ πίνακα διπλῆς εἰσόδου, μποροῦμε νὰ ἀνασυντάξουμε δίνοντάς του τὴν ἀκόλουθη, περισσότερο εὔληπτη, μορφή:

ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

Συντελεστές	Παραγωγὴ $α_1$		Παραγωγὴ $α_2$		Παραγωγὴ $α_3$		Παραγωγὴ $α_4$	
Παραγωγῆς	Εὐνοϊκὲς	Δυσμενεῖς	Εὐνοϊκὲς	Δυσμενεῖς	Εὐνοϊκὲς	Δυσμενεῖς	Εὐνοϊκὲς	Δυσμε νεῖ
m_1	500			400				
m_2		1600						600
m_3			320					160
h_1		240		1600	600			400
f_1		15600		14000	3500			1000
	500	17440	320	16000	4100	—	—	2160

῞Οσο γιὰ τίς ἀποκλίσεις τιμῶν, ἐφαρμόζοντας τὸ ὑπόδειγμα (14), καταλήγουμε εὔκολα στὸ ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα :

$$V_p = \begin{bmatrix} 20500 & 2500 & 0 & 0 \\ -8300 & 0 & 0 & -600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8250 & 12500 & 3600 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (18α)$$

ἤ, μὲ τὴ μορφὴ καταστάσεως :

ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΤΙΜΩΝ

Συντελεστὲς	Παραγωγὴ $α_1$		Παραγωγὴ $α_2$		Παραγωγὴ $α_3$		Παραγωγὴ $α_4$	
Παραγωγῆς	Εὐνοϊκὲς	Δυσμενεῖς	Εὐνοϊκὲς	Δυσμενεῖς	Εὐνοϊκὲς	Δυσμενεῖς	Εὐνοϊκὲς	Δυσμενεῖς
m_1	20500		2500					
m_2		8300						600
m_3								
h_1	8250		12500		3600		1000	
f_1								
	28750	8300	15000	—	3600	—	1000	600

* *
*

Ὅπως σημειώσαμε καὶ στὴν ἀρχὴ τῆς ἐργασίας μας, σκοπός μας δὲν ἦταν νὰ προτείνουμε ἕνα ὑπόδειγμα ἄμεσα ἐφαρμόσιμο στὴν πράξη. Αὐτὸ ποὺ ἐπιδιώξαμε ἦταν τὸ νὰ γίνει ἀντιληπτὴ ἡ εὐκαμψία τοῦ μητραϊκοῦ λογισμοῦ σὲ ἀνάλογες ἐφαρμογές. Πράγματι, ἀπὸ ἐλάχιστες ἀρχικὲς μῆτρες καὶ διανύσματα ποὺ συνιστοῦν τὰ πρωταρχικὰ στοιχεῖα (Q, F, d, p, F', d', p'), μπορέσαμε νὰ ἀντλήσουμε μιὰν ὁλόκληρη σειρὰ χρήσιμων πληροφοριῶν, σχετικῶν μὲ τὴ διαμόρφωση τοῦ πρότυπου κόστους καὶ τῶν ἀποκλίσεων, ἐφαρμόζοντας τὴν κατάλληλη μητραϊκὴ σχέση. Ἀσφαλῶς οἱ πληροφορίες αὐτὲς μποροῦν νὰ προκύψουν μὲ τὶς κλασσικὲς διαδικασίες τῆς διγραφικῆς λογιστικῆς ἢ καὶ μὲ ἐξολογιστικοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς. Ὅμως, ὁ μητραϊκὸς χαρακτήρας τῶν ὑποδειγμάτων προσφέρεται περισσότερο ἀπὸ κάθε ἄλλη μορφὴ γιὰ τὸν προγραμματισμὸ τῆς ἐπιλύσεώς τους σὲ ἠλεκτρονικὸ διερευνητή, καὶ σ' αὐτὸ τὸ σημεῖο βρίσκεται ἡ ὑπεροχή τους ἀπέναντι στὶς ἄλλες μεθόδους. Καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ γεγονὸς ποὺ προοιωνίζεται τὴ σημαντικὴ ἀνάπτυξη τοῦ ἀνεξερεύνητου ἀκόμη αὐτοῦ τομέα τῆς μικροοικονομικῆς μητραϊκῆς λογιστικῆς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. BENZ W. : «Input - Output Analysis for Cost Accounting, Planning and Control» The Accounting Review, April 1973.
2. CHURCHILL N. : «Linear Algebra and Cost Allocation - Some Examples» The Accounting Review, October 1964.
3. CORCORAN A.W. : «Matrix Bookkeeping». The Journal of Accounting, No 3/1964.
4. CORCORAN A.W. & LEININGER W.E. : «Isolating Accounting Variances Via Partioned Matrices». The Accounting Review, January 1975.
5. GAMBLING T. : «Input - Output Analysis and the Cost Model – A Reply» The Accounting Review, April 1971.
6. IJIRI YUJI : «An Application of Input - Output Analysis to Some Problems in Cost Accounting», Graduate School of Bnsiness. Stanford University 1966.
7. KEMENY – SCHLEIFER – SNELL – THOMPSON : «Les mathématiques modernes dans la pratiqne des affaires», Dunod, Paris 1964.
8. LIVINGSTONE J. L. : «Matrix Algebra and Cost Allocation». The Accounting Review, July 1967.
9. LIVINGSTONE J. L. : «Input - Output Analysis for Cost Accounting, Planning and Control». The Accounting Review, January 1969.
10. SIGLOCH B. : «Input - Output Analysis and the Cost Model – A Comment» The Accounting Review, April 1971.

11. WERNER F. G : «Solving Financial Planning Problems Using Input-Output Models». The Accounting Review, April 1974.

12. WILLIAMS - GRIFFIN : «Matrix Theory and Cost Allocation» The Accounting Review, Juiy 1964.

13. WILLIAMS - GRIFFIN : «The Mathematical Dimension of Accountancy». South Western Publishing Co – Cincinati, 1964

14. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Δ. : «Τὸ Πρότυπον κόστος». Ἐκδ. Παπαζήση, Ἀθῆναι, 1958.

15. ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΑΤΟΥ Α. Σ. : «Νέαι κατευθύνσεις εἰς τὴν θεωρητικὴν θεμελίωσιν τῆς Λογιστικῆς», Ἀθῆναι 1975.

16. ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΑΤΟΥ Α. Σ. : «Ἐφαρμογὴ τοῦ ὑποδείγματος εἰσροῶν - ἐκροῶν εἰς τὰ πλαίσια τῆς μικροοικονομικῆς λογιστικῆς διὰ μητρῶν». Ἀνάτυπο ἀπὸ τὸν Ε' τόμο τῆς Ἐπιστημονικῆς Ἐπετηρίδος τῆς Α.Β.Σ.Θ., Θεσσαλονίκη, 1976.