Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ

Τοῦ κ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΡΗΓΑ

1. Εἰσαγωγὴ

Ἕνας ἐπιστημονικὸς κλάδος ὁ ὁποῖος ἀνεπτύχθη κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη μὲ ταχὺν ρυθμὸν εἶναι ἡ θεωρία τῶν «συστημάτων ἐλέγχου» (control systems).

Τὰ συστήματα ἐλέγχου εὑρίσκουν ἐφαρμογὴν εἰς πολλοὺς τομεῖς, ὡς εἰς τὴν βιομηχανίαν, διαστημικὴν τεχνικήν, στρατιωτικὴν τεχνικήν, εἰς τοὺς πυρηνικοὺς ἀντιδραστήρας, εἰς διαφόρους ἠλεκτρονικὰς τεχνικὰς (Radar, ἠλεκτρονικοὺς ὑπολογιστάς), εἰς τὴν ἰατρικήν, οἰκονομικὴν κλπ. Τὰ συστήματα ἐλέγχου σχετίζονται καὶ μὲ τὴν κυβερνητικήν.

Τὰ προβλήματα ἀρίστου ἐλέγχου (optimal control) ἐμφανίζονται ὅταν εἰς τὰ συστήματα ἐλέγχου ἐμφανίζεται μία ἀντικειμενικὴ συνάρτησις ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἀριστοποιεῖται ὑπὸ ὡρισμένους περιορισμούς.

Τὸ πρόβλημα τοῦ ἀρίστου ἐλέγχου συνδέεται μὲ τὴν θεωρίαν τοῦ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν (calculus of variation), τὸν δυναμικὸν προγραμματισμὸν (dynamic programming) καὶ τὴν ἀρχὴν ἀριστοποιήσεως τοῦ Pontryagin.

Μὲ τὸν λογισμὸν τῶν μεταβολῶν ἠσχολήθησαν διάφοροι μαθηματικοὶ ὡς οἱ Lagrange, Euler, Legendre, Jaeobi, Weierstrass κ,ἄ.

Ἡ θεωρία τοῦ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν ἀρχίζει ἀπὸ τὸν 17ον αἰῶνα διὰ τοῦ προβλήματος τῆς «βραχυστοχρονίας» (brachistochrone) δηλ. τοῦ ἐλαχίστου χρόνου. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐτέθη ὑπὸ τοῦ Γαλιλαίου τὸ 1630 καὶ ἐλύθη ὑπὸ τῶν Ἑλβετῶν μαθηματικῶν James καὶ John Bernoulli τὸ 1690.

Τὸ πρόβλημα τοῦ ἐλαχίστου χρόνου τίθεται ὡς ἀκολούθως : νὰ προσδιορισθῇ ἡ τροχιὰ ἡ ὁποία συνδέει δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β εἰς τὸν ἐλάχιστον χρόνον. Ἕνα ἄλλο πρόβλημα τοῦ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν εἶναι τὸ πρόβλημα τῶν γεωδαισιακῶν (geodesics). Τοῦτο τίθεται ὡς ἑξῆς : νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τόξον μιᾶς ἐπιφανείας τὸ ὁποῖον συνδέει δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας. Ὅλα τὰ τόξα τὰ ὁποῖα συνδέουν σημεῖα εἰς μίαν ἐπιφάνειαν καλοῦνται γεωδαισιακαί. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ John Bernoulli τὸ 1697.

Ὁ δυναμικὸς προγραμματισμὸς εἶναι μία ὑπολογιστικὴ μέθοδος διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων ἀριστοποιήσεως. Θεμελιωτὴς τοῦ δυναμικοῦ προγραμματισμοῦ θεωρεῖται ὁ Richard Bellman (1957). Τὸ πρόβλημα τοῦ δυναμικοῦ προγραμματισμοῦ διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς προβλήματος μὲ n μεταβλητάς, εἶναι νὰ μεταφερθῇ αὐτὸ τὸ πρόβλημα εἰς n ὑποπροβλήματα ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει μόνον μίαν μεταβλητήν.

Ἡ ἀρχὴ ἀριστοποιήσεως τοῦ Pontryagin ἢ ἀρχὴ μεγίστου (ἢ ἐλαχίστου) (Pontryagin Maximum or Minimum Principle) ἀνεπτύχθη ὑπὸ τῶν Ρώσων μαθηματικῶν L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenco, τὸ 1950. Ἡ θεωρία των ἔγινε περισσότερον γνωστὴ ἀπὸ τὸ 1962 διὰ τῆς δημοσιεύσεως τῆς μεταφράσεως τῆς ἐργασίας των ὑπὸ τὸν τίτλον : «The Mathematical Theory of Optimal Processes». Τὰ προβλήματα ἀρίστου ἐλέγχου χωρίζονται εἰς δύο κατηγορίας, εἰς ντετερμινιστικὰ καὶ στοχαστικά. Ὁ ἄριστος ἔλεγχος εὑρίσκει ἐφαρμογὴν τόσον εἰς τὴν μικροοικονομικὴν ὅσον καὶ εἰς τὴν μακροοικονομικήν.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς θεωρίας τοῦ ἀρίστου ἐλέγχου ἔχουν μελετηθῇ προβλήματα : ἐλέγχου ἀποθεμάτων, συντηρήσεως καὶ ἀντικαταστάσεως μηχανῶν, χρηματοδοτήσεως, marketing, ἐλέγχου μολύνσεως περιβάλλοντος, ἐκμεταλλεύσεως δασῶν κ.λπ.

Μὲ τὴν τεχνικὴν τοῦ ἀρίστου ἐλέγχου ἔχουν μελετηθῇ : ὑποδείγματα ἀρίστης μεγεθύνσεως (optimal growth), (ὡς τὰ ὑποδείγματα Ramsey, Samuelson-Solow, Usawa κ.λπ.), ὑποδείγματα ἀρίστου δανεισμοῦ εἰς κεφαλαιαγορὰς (Bardan, Hamada), ὑποδείγματα κατανομῆς ἐπενδύσεως εἰς ὑπαναπτύκτους οἰκονομίας (Fox, Johansen, Dixit, Marglin), οἰκονομετρικὰ ὑποδείγματα McFadden), προβλήματα διαφορικῶν παιγνίων κ.ο.κ.

2. Τὰ συστήματα ἐλέγχου

Τὰ συστήματα ἐλέγχου δύνανται νὰ περιγραφοῦν ὑπὸ ἑνὸς συστήματος διαφορικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς :

$$\dot{x}(t) = f\,[\,x(t),\, u(t),\, t\,] \tag{1}$$

$$y(t) = g\,[\,x(t),\, u(t),\, t\,] \tag{2}$$

ὅπου t εἶναι ὁ χρόνος καὶ x(t) εἶναι ἕνα n — διάστατο διάνυσμα — στήλη μὲ συνιστώσας συναρτήσεις τοῦ χρόνου :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Τὸ u(t) εἶναι ἕνα k — διάστατο διάνυσμα μὲ συνιστώσας συναρτήσεις τοῦ χρόνου :

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_k(t) \end{bmatrix}$$

Τὸ x(t) συμβολίζει τὴν κατάστασιν (state) τοῦ συστήματος, τὸ u(t) συμβολίζει τὴν μεταβλητὴν εἰσόδου (input variable) ἢ μεταβλητὴν ἐλέγχου (control variable).

$$\text{Ἡ } \mathring{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \mathring{x}_1(t) \\ \mathring{x}_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \mathring{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

Ἡ y(t) εἶναι ἕνα l — διάστατο διάνυσμα — στήλη, ἡ ὁποία συμβολίζει τὴν μεταβλητὴν ἐξόδου (output variable). Ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις (1) συμβολίζει τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς καταστάσεως (state differential equation), ἐνῶ ἡ (2) συμβολίζει τὴν ἐξίσωσιν ἐξόδου (output equation) τοῦ συστήματος.

Τὰ συστήματα ἐλέγχου διακρίνονται εἰς δύο κατηγορίας : τὰ γραμμικὰ (linear) καὶ μὴ γραμμικὰ (non-linear). Κατωτέρω μελετῶνται τὰ γραμμικὰ συστήματα ἐλέγχου.

Ταῦτα περιγράφονται διὰ τῶν :

$$\mathring{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) \tag{3}$$

$$y(t) = C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t) \tag{4}$$

ὅπου A(t), B(t), C(t), D(t) μῆτραι μὲ στοιχεῖα συναρτήσεις τοῦ χρόνου. Ἐὰν αἱ μῆτραι A,B,C,D, εἶναι σταθεραὶ τὸ σύστημα ὁρίζεται ὡς σύστημα σταθεροῦ χρόνου (time invariant).

Ἔστω ὅτι εἰς ἕνα σύστημα ἐλέγχου ἔχομεν τὴν

$$\mathring{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5) \quad \text{μὲ}$$

$$x(0) = x_0 \quad (6)$$ (ἀρχικὴ κατάστασις κατὰ τὴν χρο-

νικὴν στιγμὴν $t = 0$) Τὰ $\mathring{x}(t)$, $x(t)$, $x(0)$, x_0 εἶναι διανύσματα n - διαστάσεως καὶ $u(t)$ διάνυσμα k - διαστάσεως. Ἡ A εἶναι σταθερὰ μήτρα τύπου mxn καὶ ἡ B μία σταθερὰ μήτρα τύπου nxk.

Ἡ λύσις τῆς (5) δηλ. ἡ $x(t)$ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι ἡ

$$x(t) = e^{At}\, x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-At}\, B\, u(r)\, dr \qquad (7).$$

Ὡς ὁλοκλήρωμα ἑνὸς διανύσματος $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}$ ὁρίζομεν τὸ διάνυσμα τῶν ὁλοκληρωμάτων τῶν συνιστωσῶν αὐτοῦ :

$$\int v dt = \begin{bmatrix} \int v_1 dt \\ \int v_2 dt \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \int v_n\, dt \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Ὡς e^{At} ὁρίζομεν τὸ $e^{At} = I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \cdots +$

$$\frac{1}{\nu!} A^{\nu} t^{\nu} + \cdots \qquad (9),$$

ὅπου I ἡ μοναδιαία μήτρα.

Ἡ (5) ἔχει ὁμοιότητα μὲ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$\mathring{x} = ax + bu \qquad (5') \qquad \text{μὲ}$$

$$x(0) = x_0 \qquad (6') \qquad \text{καὶ } a,\ b \text{ σταθεράς.}$$

Ἡ λύσις τῆς (5') εἶναι ἡ

$$x = e^{at}\, x_0 + e^{at} \int_0^t e^{-ar}\, bu(r)\, dr \qquad (7').$$

Παράδειγμα 1

Θεωροῦμεν τὸ σύστημα :

$$\begin{bmatrix} \mathring{x}_1 \\ \mathring{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \text{μὲ} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ὅπου ὡς u(t) ὁρίζομεν τὴν συνάρτησιν $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{διὰ} \quad t < 0 \\ 1 & » \quad t > 0 \end{cases}$

Θὰ εἶναι $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, κ.λπ.

Ἐὰν λάβωμεν ἐκ τῆς e^{At} τοὺς 3 πρώτους ὅρους τότε θὰ εἶναι:

$$e^{\pm At} = \begin{bmatrix} 1 \pm t + 0.5\, t^2 \pm \cdots\cdots & 0 \\ \pm t + t^2 \pm \cdots\cdots & 1 \pm t + 0.5\, t^2 \pm \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

ὁπότε

$$e^{-A\tau} B\, u(r) = \begin{bmatrix} 1 - r + 0.5\, r^2 - \cdots\cdots \\ 1 - 2r + 1.5\, r^2 - \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

καὶ

$$\int_0^t e^{-Ar} B\, u(r)\, dr = \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} t^3 - \cdots\cdots \\ t - t^2 + \frac{1}{2} t^3 - \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

καὶ ἐκ τοῦ τύπου

$$x(t) = e^{At} \left[x_0 + \int_0^t e^{-Ar} B\, u(r)\, dr \right]$$

θὰ εἶναι:

$$x(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 + t - \frac{1}{2} t^2 + \cdots\cdots \\ 1 + t - t^2 + \cdots\cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2t + t^2 + \cdots \\ 1 + 3t + 2.5\, t^2 + \cdots \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συστημάτων ἐλέγχου εἶναι δυνατὸν ἀντὶ διαφορικῶν ἐξισώσεων, νὰ ἔχωμε ἐξισώσεις διαφορῶν, ὡς εἰς τὸ κατωτέρω ὑπόδειγμα τοῦ Mc Fadden (1969).

Κατὰ τὸ ἐν λόγῳ ὑπόδειγμα ἰσχύουν:

$$Y_t = C_t + S_t + I_t \qquad (1)$$

$$X_t = C_t + I_t + K_t + G_t \qquad (2)$$

$$B_t = E - M_t - K_t \qquad (3)$$

$$B_t = Y_t - X_t \qquad (4)$$

καὶ

$$S_t = -\alpha_0 + \alpha_1 Y_t \qquad (5) \qquad \alpha_1 > 0$$

$$M = -\beta_0 + \beta_1 Y_t \qquad (6) \qquad \beta_1 > 0$$

$$I_t = \gamma_0 - \gamma_1 r_t \qquad (7) \qquad \gamma_1 > 0$$

$$K_t = \delta_0 - \delta_1 r_t \qquad (8) \qquad \delta_1 > 0$$

ὅπου

Y_t : ἐγχώριον προϊὸν (= εἰσόδημα καταναλωτῶν)
X_t : συνολικὴ δαπάνη
C_t : κατανάλωσις
S_t : ἀποταμίευσις
I_t : ἐγχωρία ἐπένδυσις
M_t : εἰσαγωγαὶ ξένων ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν
K_t : καθαρὰ ἐκροὴ κεφαλαίων
T_t : φόροι
G_t : δημόσιαι δαπάναι δι' ἀγαθὰ καὶ ὑπηρεσίας
B_t : καθαρὸ πλεόνασμα εἰς ἰσοζύγιον πληρωμῶν
E : ἐξαγωγαὶ ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν, θεωρουμένων σταθερῶν
r_t : ἐγχώριος τιμὴ ἐπιτοκίου
r_f : ξένη τιμὴ ἐπιτοκίου θεωρουμένης σταθερᾶς.

Ὡς διάνυσμα κατατάσεως θεωρεῖται τὸ $z_t = \begin{bmatrix} B_t \\ Y_t \end{bmatrix}$ καὶ ὡς διάνυσμα ἐλέγχου τὸ $x_t = \begin{bmatrix} \Delta r_t \\ \Delta D_t \end{bmatrix}$

ὅπου $\Delta r_t = r_{t+1} - r_t$, $\Delta D_t = D_{t+1} - D_t$, καὶ

$D_t = G_t - I_t$ εἶναι ἐγχώριον ἔλειμμα.

Ὁ ἔλεγχος Δr_t θεωρεῖται ὅτι ἀντιπροσωπεύει νομισματικὴ πολιτική, ἐνῶ τὸ ΔD_t δημοσιονομικὴ πολιτική.

Θὰ εἶναι

$$\begin{aligned} B_t &= Y_t - X_t = \\ &= C_t + S_t + I_t - (C_t + I_t + K_t + G_t) = \\ &= -(\alpha_0 + \gamma_0 + \delta_0) + (\gamma_1 + \delta_1) r_t + \alpha_1 Y_t - D_t \qquad (9) \end{aligned}$$

Ὁμοίως

$$B_t = E - M_t - K_t =$$
$$= E - (-\beta_0 + \beta_1 Y_t) - (\delta_0 - \delta_1 r_t) =$$
$$= E + \beta_0 - \delta_0 - \beta_1 Y_t + \delta_1 r_t \qquad (10)$$

Ἀπὸ τὰς (9), (10) λύοντες ὡς πρὸς t θὰ λάβωμεν

$$Y_t = \mu E + \mu (\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0) - \mu\gamma_1 r_t + \mu D_t \qquad (11)$$

Ἡ (9) γίνεται τελικῶς :

$$B_t = -\mu\beta_1 (\alpha_0 + \gamma_0 + \delta_0) + \mu\alpha_1 E + (\delta_1 + \mu\beta_1 \gamma_1) r_t - \mu\beta_1 D_t \qquad (12)$$

Ἐκ τῆς (12) θὰ λάβωμεν :

$$B_{t+1} = -\mu\beta_1 (\alpha_0+\gamma_0+\delta_0) + \mu\alpha_1 E + (\delta_1+\mu\beta_1 \gamma_1) r_{t+1} - \mu\beta_1 D_{t+1} \qquad (13)$$

Τὴν (12) ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν (13) θὰ ἔχωμεν :

$$B_{t+1} - B_t = (\delta_1+\mu\beta_1 \gamma_1) (r_{t+1} - r_t) - \mu\beta_1 (D_{t+1} - D_t) \text{ ἢ}$$
$$B_{t+1} = B_t + (\delta_1+\mu\beta_1\gamma_1) \Delta r_t + (-\mu\beta_1) \Delta D_t \qquad (14)$$

ὁμοίως $$Y_{t+1} = Y_t + (-\mu_1 \gamma_1) \Delta r_t + \mu D_t \qquad (15)$$

ἢ $$\begin{bmatrix} B_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_t \\ Y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 + \mu\beta_1\gamma_1 & -\mu\beta_1 \\ -\mu\gamma_1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r_t \\ \Delta D_t \end{bmatrix} \qquad (16)$$

ἢ $$Z_{t+1} = Z_t + H x_t \qquad (17)$$ ὅπου

$$Z_t = \begin{bmatrix} B_t \\ Y_t \end{bmatrix}, \; Z_{t+1} = \begin{bmatrix} B_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} \delta_1 + \mu\beta_1 \gamma_1 & -\mu\beta_1 \\ -\mu\gamma_1 & \mu \end{bmatrix}$$

$$x_t = \begin{bmatrix} \Delta r_t \\ \Delta D_t \end{bmatrix}$$

Ἡ H^{-1} ὑπάρχει ὅταν ἡ ὁρίζουσα $|H| \neq 0$ δηλαδὴ

$$|H| = \begin{vmatrix} \delta_1 + \mu\beta_1 \gamma_1 & -\mu\beta_1 \\ -\mu\gamma_1 & \mu \end{vmatrix} = \mu\delta_1 + \mu^2 \beta_1\gamma_1 - \mu^2 \beta_1\gamma_1 = \mu\delta_1 \neq 0$$

ἢ $\delta_1 \neq 0$.

Ἡ (17) δεικνύει πῶς μεταβάλλονται τὸ καθαρὸ πλεόνασμα εἰς τὸ ἰσοζύγιον πληρωμῶν καὶ τὸ ἐγχώριον προϊὸν ἀπὸ τὰς μεταβολὰς τοῦ ἐλλείμματος καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.

Αὔξησις εἰς τὸ ἐγχώριον ἔλλειμμα ἐλαττώνει τὸ πλεόνασμα τοῦ ἰσοζυγίου πληρωμῶν (ἐπειδὴ $\mu\beta_1 > 0$), ἐνῶ αὐξάνει τὸ ἐγχώριον προϊόν. Ἀντιθέτως ὕψωσις τῆς τιμῆς τοῦ ἐπιτοκίου αὐξάνει τὸ πλεόνασμα τοῦ ἰσοζυγίου πληρωμῶν καὶ ἐλαττώνει τὸ ἐγχώριον προϊόν. Ἀπὸ τὴν (17) θὰ ἔχωμεν :

$$x_t = H^{-1} (Z_{t+1} - Z_t) \qquad (18)$$

Δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ὡς Z_{t+1} τὴν ἐπιθυμητὴν κατάστασιν κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t + 1$, ὁπότε ὁ ἔλεγχος λαμβάνει τὴν τιμὴν x_t κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t.

3. Ἐλεγξιμότης, Παρατηρησιμότης, Εὐστάθεια

α) Ἐλεγξιμότης (Controllability)

Μία κατάστασις $x_1(t)$ ἑνὸς συστήματος εἶναι «ἐλέγξιμος» (controllable) ἐὰν ὅλαι αἱ ἀρχικαὶ συνθῆκαι x_0 εἰς οἱονδήποτε προηγούμενον χρόνον t_0 δύναται νὰ μεταφερθοῦν εἰς $x_1(t)$ ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου ὑπὸ κάποιας συναρτήσεως ἐλέγχου $u(t,x_0)$.

β) Παρατηρησιμότης (observability)

Μία κατάστασις $x(t)$ ἑνὸς συστήματος εἰς κάποιον δεδομένον t εἶναι «παρατηρήσιμος» (observable), ἐὰν γνῶσις τῆς εἰσόδου $u(t)$ καὶ τῆς ἐξόδου $y(t)$ ἐντὸς ὡρισμένου χρονικοῦ διαστήματος $[\, t_0, t\,]$ προσδιορίζει τελείως τὸ $x(t)$.

γ) Εὐστάθεια (stability)

Θεωροῦμεν τὸ $\dot{x}(t) = f\,[\,x(t), t\,]$ μὲ μίαν μερικὴν λύσιν τὸ $x_0(t)$. Τότε τὸ $x_0(t)$ εἶναι εὐσταθὴς κατὰ Lyapunov ἐὰν διὰ κάθε t_0 καὶ διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἕνα $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ (ἐξαρτώμενο ἐκ τοῦ ε καὶ πιθανῶς ἐκ τοῦ t_0) τοιοῦτον ὥστε ἡ $\| x(t_0) - x_0(t_0) \| \leqslant \delta$ συνεπάγεται $\| x(t) - x_0(t) \| < \varepsilon$ διὰ κάθε $t \geqslant t_0$.

Ὡς $\| x \|$ συμβολίζομεν τὴν norm τοῦ διανύσματος x· π.χ. ἡ Εὐκλείδιος norm $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ ὅπου x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, εἶναι αἱ συνιστῶσαι τοῦ x.

Διὰ τὰς τρεῖς προηγουμένας ἐννοίας ὑπάρχουν κριτήρια τὰ ὁποῖα προσδιορίζουν πότε ἕνα σύστημα εἶναι ἐλέγξιμον, παρατηρήσιμον καὶ εὐσταθές.

4. Ἡ Ἀρχὴ Μεγίστου (Ἐλαχίστου) τοῦ Pontryagin

Ἡ ἀρχὴ μεγίστου τοῦ Pontryagin ὁρίζεται ὡς ἀκολούθως : μεταξὺ ὅλων τῶν ἐλέγχων $u = u(t)$ οἱ ὁποῖοι μεταφέρουν τὸ σημεῖον φάσεως ἐκ τῆς θέσεως x_0 εἰς τὴν θέσιν x_1 (ἐὰν ἕνας τέτοιος ἔλεγχος ὑπάρχει) νὰ εὑρεθῇ ἕνας διὰ τοῦ ὁποίου ἡ συναρτησοειδής :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt \qquad (1)$$

λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην (μεγίστην) τιμὴν ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i\,(x, u),\ i = 1. 2, \ldots, n \qquad (2)$$

Ὡς «ἐπιτρεπτοὶ ἔλεγχοι» (admissible controls) θεωροῦνται αἱ συναρτήσεις $u = u(t)$ αἱ ὁποῖαι εἶναι κατὰ τμήματα συνεχεῖς.

Δηλ. εἶναι συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι εἶναι συνεχεῖς δι' ὅλα τὰ μελετώμενα t ἐκτὸς ἑνὸς ὡρισμένου ἀριθμοῦ τῶν t εἰς τὰ ὁποῖα ἡ u(t) δύναται νὰ εἶναι ἀσυνεχὴς α' εἴδους, δηλ. ὑπάρχουν τὰ ὅρια :

$$u(r - 0) = \lim_{\substack{t \to r \\ t < r}} u(t)\ ,\quad u\,(r + 0) = \lim_{\substack{t \to r \\ t > r}} u(t)$$

Εἰσάγομεν τὸ σύστημα τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν

$\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{a=o}^{n} \frac{\partial f^a\,(x, u)}{\partial x^i}\,\psi_a\ ,\quad i = 0,1,2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Ἐὰν ἐπιλέξωμεν ἕν $u(t)\ \varepsilon\ U$ (ὅπου U τὸ σύνολον τῶν ἐπιτρεπτῶν ἐλέγχων), $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ καὶ λαβωμεν τὴν τροχιὰν φάσεως $x^*(t)$ τοῦ συστήματος (2) μὲ ἀρχικὰς συνθήκας $x^*(t_0) = x_0{}^*$, τὸ σύστημα (3) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \sum_{a=o}^{n} \frac{\partial f^a\,(\,x(t), u(t)\,)}{\partial x^i}\,\psi_a\ ,\ i = 0, 1, \ldots, n \qquad (4)$$

Ὡς x^* ὁρίζομεν τὸ $n + 1$ - διάστατο διάνυσμα :

$$x^* = (\,x^0, x^1, \ldots\ldots, x^n\,) = (x^0, x)$$

Ὁμοίως $\dfrac{dx^*}{dt} = f^*(x,u)$.

Τὸ σύστημα (4) εἶναι γραμμικὸν καὶ ὁμοιογενές. Ὡς ἐκ τούτου διὰ κάθε ἀρχικὴν συνθήκην ὑπάρχει ἡ μοναδικὴ λύσις :

$$\psi^* = (\,\psi^0, \psi_1, \ldots, \psi_n\,) = (\psi_0, \psi)$$

Κάθε λύσις τοῦ συστήματος (4) θὰ ὁρίζεται ὡς ἡ λύσις τοῦ συστήματος

(3) ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸν ἐπιλεγέντα ἔλεγχον u(t) καὶ εἰς τὴν τροχιὰν φάσεως $x^*(t)$.

Συνδυάζομεν τὰς (2) καὶ (3) ὡς ἀκολούθως :

Ὁρίζομεν τὴν H^* ὡς ἑξῆς :

$$H^* (\psi^*, x, u) = (\psi^*, f^* (x, u)) = \sum_{a=o}^{n} \psi^a f^a (x, u) \qquad (5)$$

Τὰ (2) καὶ (3) δύνανται νὰ γραφοῦν τῇ βοηθείᾳ τῆς H^* μὲ τὴν ἀκόλουθον μορφὴν τοῦ Χαμιλτονείου (Hamiltonian) συστήματος :

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial \psi_i} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad (6)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial H^*}{\partial x^i} \qquad i = 0, 1, 2 \ldots, n \qquad (7)$$

Οὕτω λαμβάνοντες ἕναν αὐθαίρετον ἐπιτρεπτὸν ἔλεγχον u(t), $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ καὶ τὰς ἀρχικὰς συνθήκας

$$x^*(t) = x^*_0$$

δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἀντίστοιχον τροχιὰν

$$x^*(t) = (x^0(t), x^1 (t) , \ldots , x^n (t))$$

ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τὴν (6).

Ἐν συνεχεία εὑρίσκομεν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος (7).

$$\psi^*(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots , \psi_n (t))$$

ἀντιστοιχοῦσα εἰς συναρτήσεις u(t) καὶ $x^*(t)$.

Διὰ σταθερὰς τιμὰς τοῦ ψ^* καὶ x, ἡ συνάρτησις H^* γίνεται μία συνάρτησις τῆς παραμέτρου $u \varepsilon U$. Ἐὰν συμβολίσωμεν τὸ ἐλάχιστον τῶν ἄνω φραγμάτων (supremum) τῶν τιμῶν αὐτῆς τῆς συναρτήσεως διὰ

$M^* (\psi^*, x)$ θὰ εἶναι :

$$M^* (\psi^*, x) = \sup_{u \varepsilon U} H^* (\psi^*, x, u)$$

Ἐὰν ἡ συνεχὴς συνάρτησις H^* λάβη τὸ ἄνω ὅριον της εἰς U τότε ἡ $M^* (\psi^*, x)$ εἶναι τὸ μέγιστον τῶν τιμῶν τοῦ H^* διὰ σταθερὰ ψ^* καὶ x. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ κατωτέρω θεώρημα 1 (ἀναγκαία συνθήκη δι' ἀριστοποίησιν) θὰ ὁρίζεται ὡς ἡ ἀρχὴ τοῦ μεγίστου.

Θεώρημα 1

Ἔστω $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, ὅτι εἶναι ἕνας ἐπιτρεπτὸς ἔλεγχος οὕτως ὥστε ἡ ἀντίστοιχος τροχιὰ $x^*(t)$, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ ἕνα σημεῖον x_0^* εἰς τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_0 καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον x_1^* εἰς τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1. Ἀναγκαία συνθήκη διὰ νὰ εἶναι τὰ $u(t)$ καὶ $x^*(t)$ ἄριστα εἶναι ὅτι πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μία μὴ μηδενικὴ συνεχὴς διανυσματικὴ συνάρτησις ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $u(t)$ καὶ $x^*(t)$ $\psi^*(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n((t))$ ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

Διὰ κάθε t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ ἡ συνάρτησις $H^*(\psi^*(t), x(t), x)$ τῆς μεταβλητῆς $u \varepsilon U$, λαμβάνει τὸ μέγιστόν της εἰς τὸ σημεῖον $u = u(t)$:

$$H^*(\psi^*(t), x(t), u(t)) = M^*(\psi^*(t), x(t)).$$

Τὸ θεώρημα 1 δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον ἐὰν θέσωμεν $f^0(x, u) = 1$.

Ἡ συνάρτησις H^* θὰ λάβῃ τὴν μορφὴν

$$H^* = \psi_0 + \sum_{v=1}^{n} \psi_v f^v(x,u)$$

Εἰσάγοντες τὸ n—διάστατο διάνυσμα $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ καὶ τὴν συνάρτησιν H :

$$H(\psi, x, u) = \sum_{v=1}^{n} \psi_v f^v(x, u) \qquad (5')$$

θὰ ἔχωμεν κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ προηγούμενα :

$$\frac{d\mathbf{x}^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (6')$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (7')$$

Διὰ σταθερὰς τιμὰς τῶν ψ καὶ x ἡ H εἶναι μία συνάρτησις τοῦ u. Συμβολίζομεν τὸ ἄνω φρᾶγμα τῶν τιμῶν αὐτῆς τῆς συναρτήσεως διὰ $M(\psi,x)$, δηλ.

$$M(\psi,x) = \sup_{u \varepsilon U} H(\psi,x,u)$$

Ἐπειδὴ

$$H(\psi,x,u) = H^*(\psi^*, x, u) - \psi_0 \text{ θὰ εἶναι}$$

$$M(\psi,x) = M^*(\psi^*, x) - \psi_0 \qquad \text{ὡς ἐκ τούτου}$$

$$H(\psi(x), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)) = -\psi_0 \geqslant 0.$$

Οὕτω καταλήγομεν εἰς τὸ θεώρημα :

Θεώρημα 2

Ἔστω ὅτι $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ εἶναι ἕνας ἐπιτρεπτὸς ἔλεγχος ὁ ὁποῖος μεταφέρει τὸ σημεῖον φάσεως ἐκ τοῦ x_0 εἰς τὸ σημεῖον x_1 καὶ ἔστω ὅτι $x(t)$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τροχιά, οὕτως ὥστε $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Ἀναγκαία συνθήκη διὰ νὰ εἶναι τὰ $u(t)$ καὶ $x(t)$ ἄριστα, εἶναι ὅτι πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μία μὴ μηδενικὴ συνεχὴς διανυσματικὴ συνάρτησις

$$\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$$

ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ $u(t)$ καὶ $x(t)$ οὕτως ὥστε :

Διὰ κάθε t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ ἡ συνάρτησις

$$H(\psi(t), x(t), u) \text{ τῆς μεταβλητῆς } u \epsilon U$$

λαμβάνει τὸ μέγιστόν της εἰς τὸ σημεῖον $u = u(t)$:

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)).$$

5. Παράδειγμα Ἀρχῆς Rontryagin

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{d^2x}{dt^2} = u$, ὅπου u εἶναι μία πραγματικὴ παράμετρος ἐλέγχου ἡ ὁποία ἔχει περιορισμὸν $|u| \leqslant 1$. Ἐπειδὴ $x^1 = x$ καὶ $x^2 = \dfrac{dx}{dt}$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ :

$$\frac{dx^1}{dt} = x^2, \quad \frac{dx^2}{dt} = u \tag{1}$$

Ἄς θεωρήσωμεν τὸ πρόβλημα κατὰ τὸ ὁποῖον μεταφέρεται ἡ κατάστασις ἐκ μιᾶς ἀρχικῆς x_0 εἰς τὴν (0,0) εἰς τὸν συντομώτερον χρόνον. Δηλαδὴ τὸ (0,0) θεωραῖται ὅτι εἶναι ἡ τελικὴ κατάστασις x_1.

Ἡ συνάρτησις **H** εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἔχει τὴν μορφήν :

$$H = \psi_1 x^2 + \psi_2 u \tag{2}$$

Ὁπότε $\dfrac{d\psi_1}{dt} = 0$, $\dfrac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1$

διὰ τὰς μεταβλητὰς ψ_1 καὶ ψ_2. Ἐξ αὐτῶν

$$\psi_1 = c_1 \text{ καὶ } \psi_2 = c_2 - c_1 t \qquad (c_1 \text{ καὶ } c_2 : \text{σταθεραί}).$$

Τὸ μέγιστον τῆς (2), ἐπειδὴ $-1 \leqslant u \leqslant 1$ λαμβάνεται ὅταν

$$u(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t) = \operatorname{sign}(c_2 - c_1 t) \tag{3}$$

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει ὅτι κάθε ἄριστος ἔλεγχος u(t), $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ εἶναι μία κατὰ τμήματα σταθερὰ συνάρτησις ἡ ὁποία λαμβάνει τὰς τιμὰς $\pm$ 1.

Διὰ τὸ χρονικὸν διάστημα διὰ τὸ ὁποῖον $u \equiv 1$ θὰ ἔχωμε :

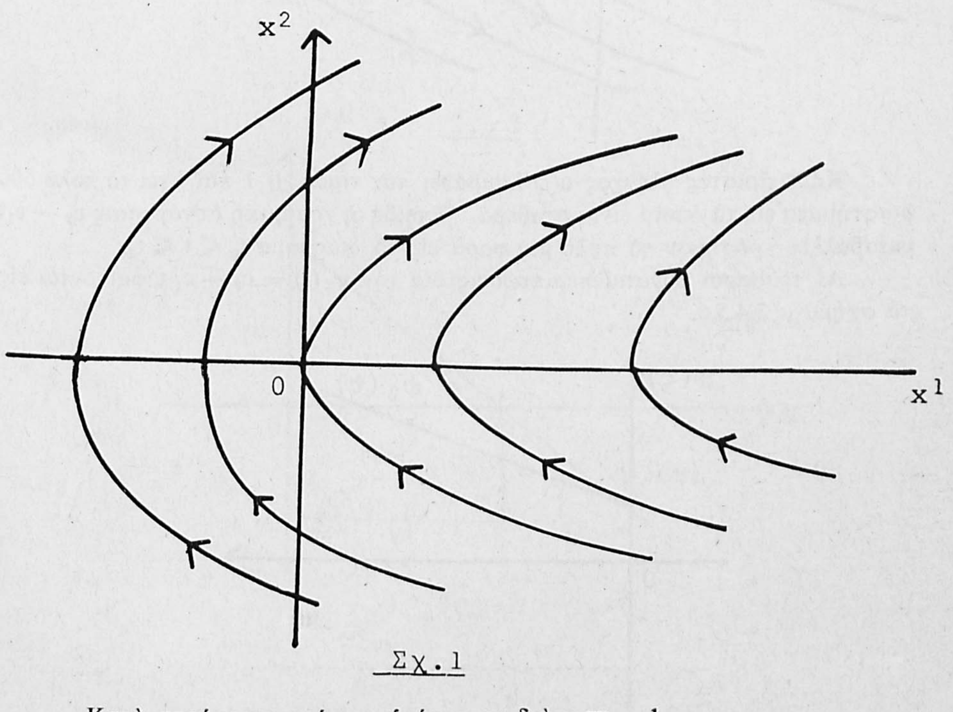
$$\frac{dx^2}{dt} = u = 1 \quad \text{ἢ} \quad dx^2 = dt \quad \text{ἢ} \quad x^2 = t + s^2 \quad (4) \quad \text{καὶ}$$

$$\frac{dx^1}{dt} = t + s^2 \quad \text{ἢ} \quad dx^1 = (t + s^2)dt \quad \text{ἢ} \quad x^1 = \frac{t^2}{2} + s^2 t + s^1 =$$

$$\text{ἢ} \quad x^1 = \frac{1}{2}(t + s^2)^2 + \left(s^1 - \frac{(s^2)^2}{2}\right) \quad (5), \quad s^1, s^2 : \text{σταθεραὶ}$$

ὁλοκληρώσεως. Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) δι᾽ ἀπαλοιφῆς τοῦ t λαμβάνομεν τὴν

$$x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2 + s \quad (6) \quad \text{ὅπου } s = s^1 - \frac{1}{2}(s^2)^2,$$ μία σταθερά. Οὕτω ὅταν $u \equiv 1$ τὸ διάγραμμα φάσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν οἰκογένεια τῶν παραβολῶν (6) (σχ. 1).



Σχ. 1

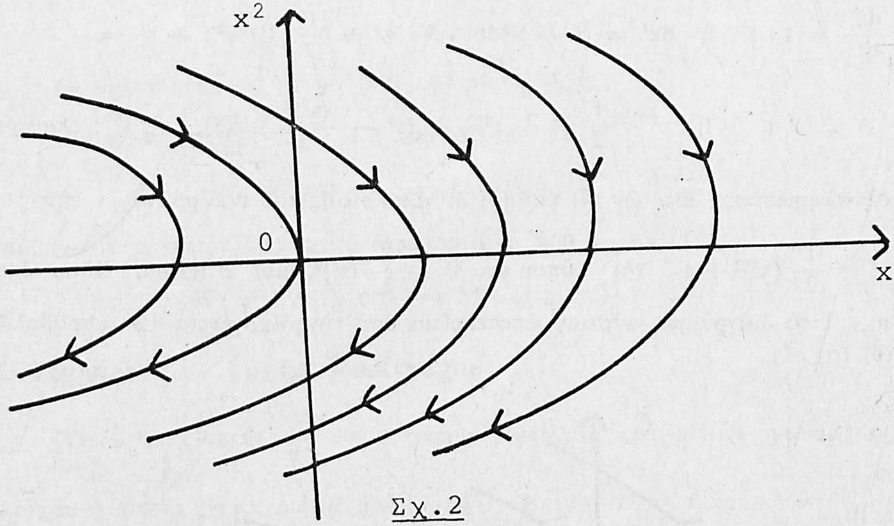
Κατὰ παρόμοιον τρόπον εὑρίσκομεν διὰ $u \equiv -1$.

ὅτι $\quad x^2 = -t + s'^2 \quad (7) \quad$ καὶ

$$x^1 = -\frac{t^2}{2} + s'^2 t + s'^1 = -\frac{1}{2}(-t + s'^2)^2 + \left(s'^1 + \frac{1}{2}(s'^2)^2\right) \quad (8)$$

καὶ $$x^1 = -\frac{1}{2}(x^2)^2 + s' \quad (9)$$

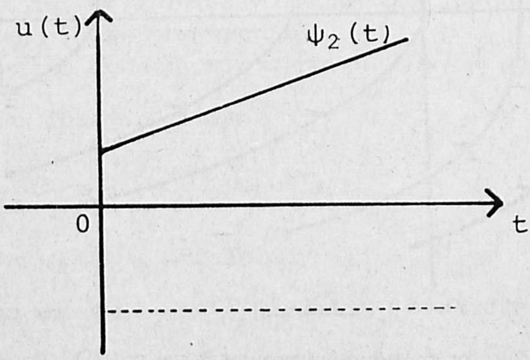
Ἡ οἰκογένεια τῶν παραβολῶν (9) δεικνύεται εἰς τὸ σχ. 2.



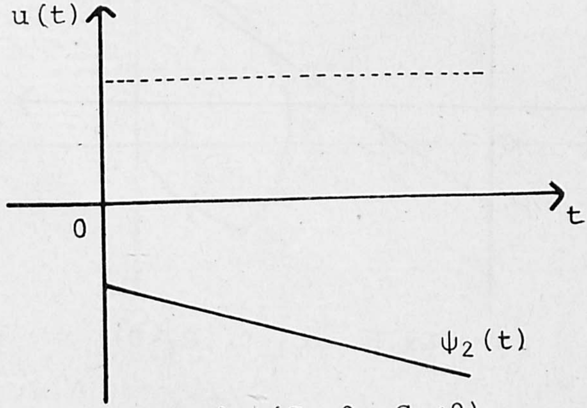
Σχ.2

Κάθε ἄριστος ἔλεγχος u(t) λαμβάνει τὰς τιμὰς ± 1 καὶ ἔχει τὸ πολὺ δύο διαστήματα εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι σταθερά. Ἐπειδὴ ἡ γραμμικὴ συνάρτησις $c_2 - c_1 t$ μεταβάλλει πρόσημον τὸ πολὺ μιὰ φορὰ εἰς τὸ διάστημα $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

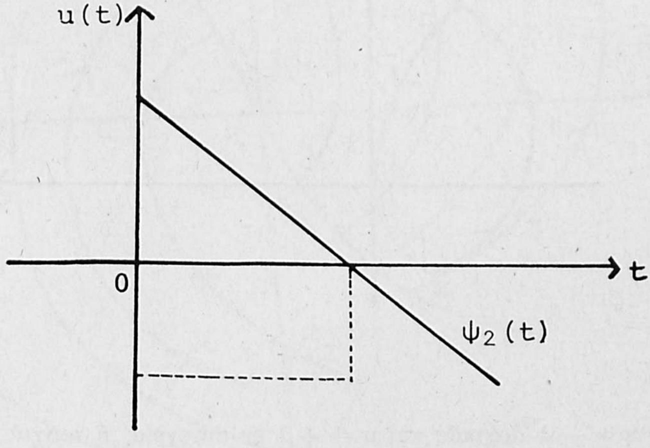
Αἱ τέσσαραι δυναταὶ περιπτώσεις διὰ τὴν $\psi_2(t) = c_2 - c_1 t$ φαίνονται εἰς τὰ σχήματα 3,4,5,6.



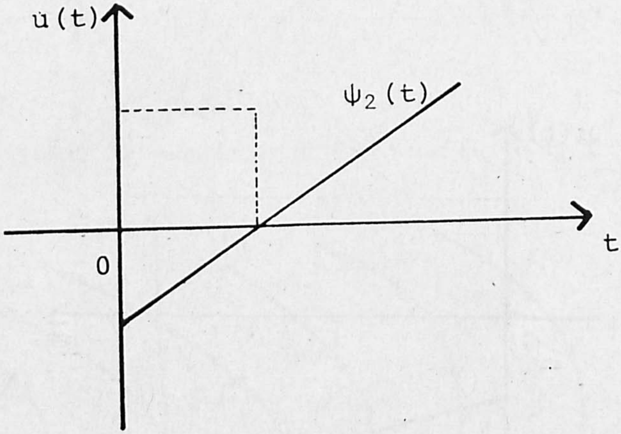
Σχ.3 ($C_1 \leqslant 0$, $C_2 \geqslant 0$)



Σχ.4. $(C_1 \geq 0,\ C_2 \leq 0)$

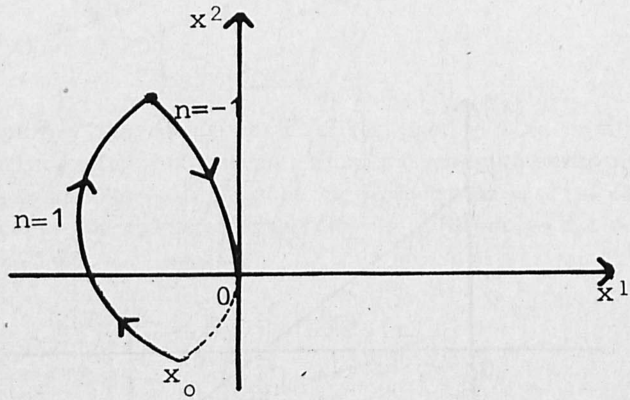


Σχ.5. $(C_1 > 0,\ C_2 > 0)$



Σχ.6. ($C_1<0$, $C_2<0$)

Ἐὰν u (t) = 1 ἀρχικῶς καὶ κατόπιν —1, ἡ τροχιὰ φάσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τμήματα παραβολῶν ὡς εἰς τὸ (σχ. 7).

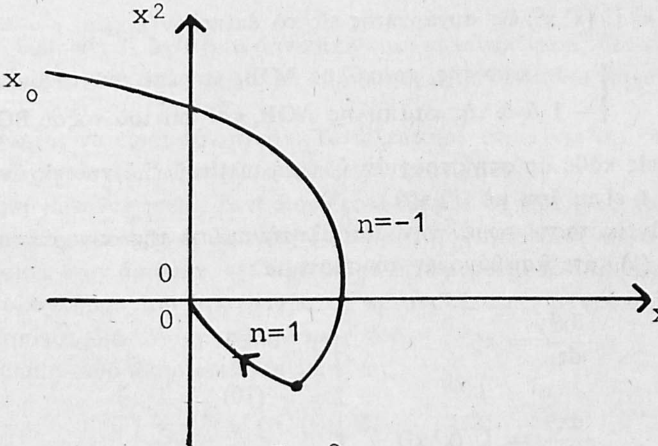


Σχ.7

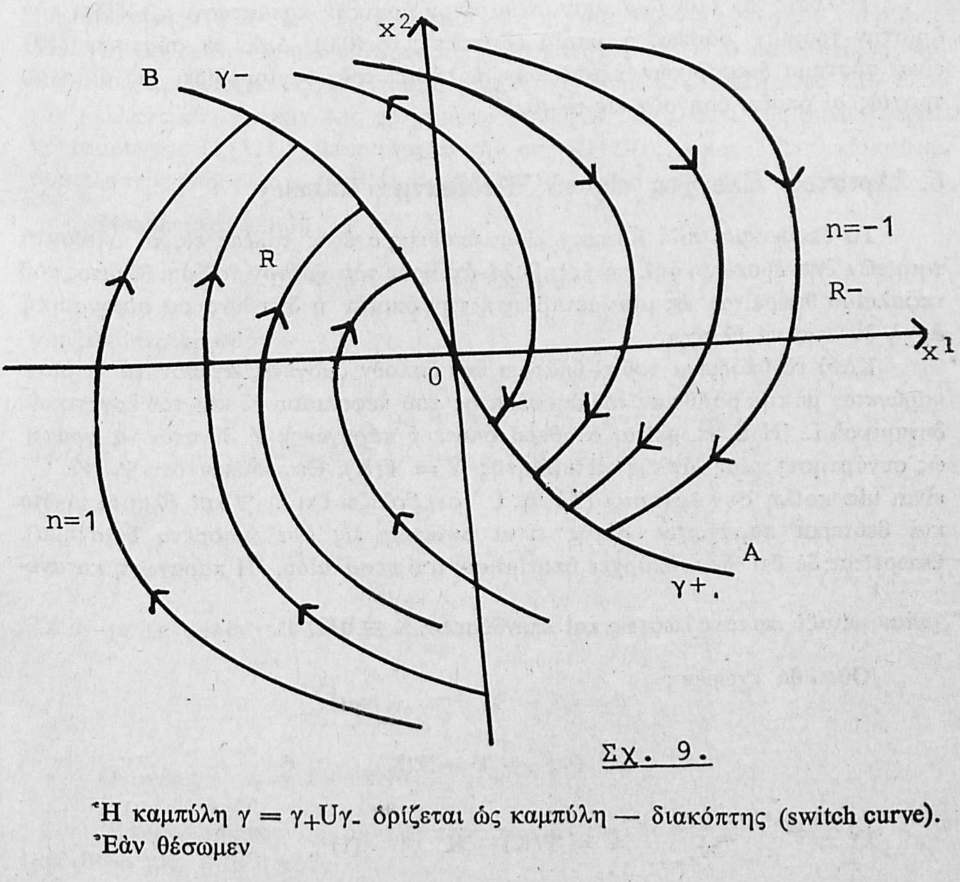
Ἐὰν u = — 1 ἀρχικῶς καὶ u = + 1 ἐν συνεχείᾳ, ἡ τροχιὰ φάσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τμήματα παραβολῶν ὡς εἰς (σχ. 8).

Ὡς καμπύλη γ_+ (σχ. 9) ὁρίζεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος ὅλων τῶν σημείων τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ μεταφερθοῦν εἰς τὸ (0,0) ὑπὸ τοῦ ἐλέγχου u = 1.

Ὡς καμπύλη γ_- (σχ. 9) ὁρίζεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος ὅλων τῶν σημείων τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ μεταφερθοῦν εἰς τὸ (0,0) ὑπὸ τοῦ ἐλέγχου u = — 1.



Σχ. 8



Σχ. 9.

῾Η καμπύλη $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$ ὁρίζεται ὡς καμπύλη — διακόπτης (switch curve). ᾿Εὰν θέσωμεν

$U(x) = U(x^1, x^2)$ ὡς συνάρτησις εἰς τὸ ἐπίπεδον $x_1 x_2$ μέ :

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{κάτω τῆς καμπύλης AOB, καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου AO,} \\ -1 & \text{ἄνω τῆς καμπύλης AOB, καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου BO.} \end{cases}$$

Τότε εἰς κάθε ἀρίστην τροχιὰν ἡ **τιμὴ** $u(t)$ τοῦ ἐλέγχου εἰς ἕναν αὐθαίρετον χρόνον t εἶναι ἴση μὲ $U(x(t))$.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν **μεταβλητὴν** u ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $U(x)$ εἰς τὸ σύστημα (1) τότε λαμβάνομεν τὸ **σύστημα** :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= x^2 \\ \frac{dx^2}{dt} &= U(x^1, x^2) \end{aligned}\right| \quad (10)$$

Ἡ λύσις τοῦ (10) (διὰ μίαν αὐθαίρετον ἀρχικὴν κατάστασιν x_0) δίδει τὴν ἀρίστην τροχιὰν φάσεως ἡ ὁποία ὁδηγεῖ **εἰς τὸ** (0,0). Δηλ. τὸ σύστημα (10) εἶναι σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων ἡ **λύσις** τοῦ ὁποίου δίδει τὰς ἀρίστας τροχιὰς αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν εἰς τὸ (0,0).

6. Ἄριστος Ἔλεγχος εἰς τὸ Ὑπόδειγμα Ramsey

Τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Ramsey εἶναι ὑπόδειγμα ἑνὸς τομέως εἰς τὸ ὁποῖον ἡ τιμὴ τῶν ἐπενδύσεων δηλ. ἡ μεταβολὴ **ὡς πρὸς** τὸν χρόνον τοῦ ἀποθέματος τοῦ κεφαλαίου θεωρεῖται ὡς μία μεταβλητὴ **τὴν ὁποίαν** ἡ διευθύνουσα οἰκονομικὴ ἀρχὴ δύναται νὰ ἐλέγχῃ.

Κατὰ τὸ ὑπόδειγα τοῦτο ὑπάρχει **ἕνα ἁπλοῦν** ὁμογενὲς ἀγαθὸν τὸ ὁποῖον παράγεται μὲ τὴν βοήθειαν **τοῦ ἀποθέματος τοῦ** κεφαλαίου K καὶ τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ L. Ἡ L θεωρεῖται σταθερὰ **ὁπότε** ἡ παραγωγὴ Y δύναται νὰ γραφῇ ὡς συνάρτησις μιᾶς ἁπλῆς μεταβλητῆς $Y = \Psi(K)$. Θεωροῦμεν ὅτι Ψ, $\Psi \varepsilon C''$ εἶναι μία κοίλη συνάρτησις. (Τὸ $\Psi \varepsilon C''$ συμβολίζει ὅτι ἡ Ψ καὶ ὅλαι αἱ πρῶται καὶ δεύτεραι παράγωγοι αὐτῆς εἶναι **συνεχεῖς** εἰς ἕνα ὡρισμένο διάστημα). Θεωρεῖται δὲ ὅτι δὲν ὑπάρχει ὑποτίμησις **τοῦ κεφαλαίου**. Ἡ παραγωγὴ κατανέμεται μεταξὺ καταναλώσεως καὶ **ἐπενδύσεων** $\dot{K} \equiv dK/dt$.

Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

$$C + \dot{K} = Y = \Psi(K) \qquad \text{ἤ}$$

$$C = \Psi(K) - \dot{K} \qquad (1)$$

Θεωροῦμεν ὅτι $C \geqslant 0$ (μία ἀρνητικὴ τιμὴ καταναλώσεως δὲν εἶναι δυνατὴ) καὶ ὅτι $\Psi(K) \geqslant 0$ (μία ἀρνητικὴ τιμὴ τῆς παραγωγῆς δὲν εἶναι δυνατή). Πάντως τὸ $\dot{k}$ ἐπιτρέπεται νὰ εἶναι ἀρνητικόν. Τὸ τελευταῖον σημαίνει ὅτι τὸ κεφάλαιον πρέπει νὰ καταναλωθῇ ἐφ' ὅσον δὲν ὑπάρχει ὑποτίμησις.

Ἡ τιμὴ καταναλώσεως προσδιορίζεται ὡς μία συνάρτησις τοῦ t, ἡ C(t). Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἑνὸς μέτρου χρησιμότητος, μὲ κάθε συνάρτησιν C(t) προσδιορίζομεν ἕναν ἀριθμὸν u [C(t)] ὁ ὁποῖος ἐπιτρέπει τὸν ἀριθμητικὸν προσδιορισμὸν ὁλοκλήρου τοῦ προγράμματος καταναλώσεως. Δὲν ὑπάρχει δὲ ἕνας μοναδικὸς τρόπος διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ u.

Ὁ Ramsey προσδιόρισε τὸ u νὰ εἶναι :

$$u[C] = \int_0^\infty U(C(t))\,dt \qquad (2$$

ὅπου U εἶναι μία πραγματική, συνεχής, κοίλη καὶ ὄχι φθίνουσα συνάρτησις τῆς τιμῆς καταναλώσεως. Τὸ U δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ μέτρον τῆς «στιγμιαίας χρησιμότητος» ἢ ἡ τιμὴ τῆς χρησιμότητος εἰς οἱανδήποτε χρονικὴν στιγμὴν t. Ἡ U(C) θεωρεῖται ὡς μία συνάρτησις χρησιμότητος. Οὕτω ὁ ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς τοποθετημένος εἰς ἕνα πρόγραμμα C(t) εἶναι τὸ ὁλοκλήρωμα καθ' ὅλον τὸν μελλοντικὸν χρόνον τῆς χρησιμότητος U(C). Ἐὰν ἀντὶ τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος $U(C(t))$ θεωρήσωμεν τὴν $e^{-\delta t}\,U(C(t))$ ὅπου $\delta > 0$ εἶναι ἕνας συντελεστὴς ἀποσβέσεως, τότε τὸ πρόβλημα Ramsey διατυποῦται ὡς ἀκολούθως :

Νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ

$$J[K, C] = \int_0^\infty e^{-\delta t}\,U(C(t))\,dt \qquad (3)$$

ἀπὸ τὸν περιορισμόν :

$$\dot{K} = \Psi(K) - C \qquad (4)$$

Τότε ἡ
$$H = \lambda_0 e^{-\delta t} U + \lambda_1 [\Psi(K) - C] \qquad (5)$$

καὶ

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial K} = -\lambda_1 \Psi' \qquad (6)$$

Τὸ H μεγιστοποιεῖται ὅταν

$$\frac{dH}{dC} = \lambda_0 e^{-\delta t} U' - \lambda_1 = 0 \qquad (7)$$

Θέτοντες $\lambda_0 = 1$ θὰ εἶναι $\lambda_1 = e^{-\delta t} U'$ (8)

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν $U = -\alpha(C - C^*)^2$ καὶ $\Psi = \beta K$, $\beta > 0$ τότε

$$\dot{\lambda}_1 = -\beta \lambda_1 \quad (6) \quad \text{καὶ}$$

$$\lambda_1 = e^{-\beta t} \cdot 2\alpha \, (C^* - C) \quad (8')$$

Δύναται δὲ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\lambda_1 = \rho \, e^{-\beta t} \quad (9)$$

Ἀπὸ τὰς (8′) καὶ (9) θὰ ἔχωμεν

$$\rho \, e^{-\beta t} = e^{-\delta t} \, 2\alpha \, (C^* - C) \quad \text{ἢ}$$

$$C = C^* + \frac{\rho}{2\alpha} e^{(\delta-\beta)t} \quad (10)$$

καὶ ἐκ τῆς (4) θὰ λάβωμεν :

$$\dot{K} = \beta K - C = \beta K - (C^* + \frac{\rho}{2\alpha} e^{(\delta-\beta)t} \quad \text{ἢ}$$

$$\dot{K} - \beta K = \frac{\rho}{2\alpha} e^{(\delta-\beta)t} - C^* \quad (11)$$

Δοκιμάζομεν ὡς λύσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (11) τὴν $K = \gamma \, e^{(\delta-\beta)t} - \varepsilon$ ἡ ὁποία εἶναι λύσις ἐὰν

$$\gamma = -\frac{\rho}{2\alpha \, (2\beta - \delta)} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon = K^*, \; 2\beta - \delta \neq 0.$$

οὕτω

$$K = K^* - \frac{\rho}{2\alpha \, (2\beta - \delta)} e^{(\delta-\beta)t}$$

Τὴν λύσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ διερευνήσωμεν περαιτέρω διακρίνοντες περιπτώσεις $\beta > \delta$, $\beta = \delta$, $\beta < \delta$, $2\beta < \delta$, $2\beta > \delta$.

7. Ἄριστος Ἔλεγχος εἰς ἕνα Μακροοικονομικὸν Ὑπόδειγμα

Θεωροῦμεν τὸ ἀκόλουθον Κεϋνσιανὸν ὑπόδειγμα :

$$C = C_0 \, e^{r_1 t} + \alpha_1 \, (Y - T^*) \quad (1) \qquad 0 < \alpha_1 < 1$$

$$T^* = \bar{T} + n\gamma \quad (2) \qquad 0 < n < 1$$

$$I = I_0 e^{r_2 t} + \alpha_2 Y \qquad (3) \qquad 0 < \alpha_1 < 1$$

$$M = M_0 e^{r_3 t} + mY \qquad (4) \qquad 0 < m < 1$$

$$X = X_0 e^{r_4 t} \qquad (5)$$

$$G = \overline{G} \qquad (6)$$

$$E \equiv C + I + G + X \qquad (7)$$

$$\dot{Y} = g\,(E - Y) \qquad (8)$$

ὅπου C = ἡ κατανάλωσις

I = ἐπένδυσις

T^* = φόροι

G = δημοσία δαπάνη

X = ἐξαγωγαὶ

M = εἰσαγωγαὶ

Y = ἐθνικὸν εἰσόδημα

E = συνολικὴ ζήτησις (διὰ ἐγχώριον προϊόν).

Θεωροῦμεν ὅτι αἱ ἐξωγενεῖς συνιστῶσαι τῶν C, I, M, X ἀναμένεται ὅτι θὰ αὐξάνουν μὲ τιμὰς r_1, r_2, r_3, r_4 ἀντιστοίχως.

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν τοὺς ὑπολογισμοὺς θεωροῦμεν ὅτι $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$.

Ὑπάρχουν δύο μέσα ἀσκήσεως πολιτικῆς εἰς τὸ ὑπόδειγμα τὸ $\overline{G}$ καὶ $\overline{T}$.

Τὰ μέσα αὐτὰ θεωρούμενα ὡς συναρτήσεις τοῦ χρόνου ἀποτελοῦν τὸν ἔλεγχον τοῦ ὑποδείγματος.

Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ λαμβάνων ἀποφάσεις ἐπιθυμεῖ τὰ Y καὶ G νὰ ἀκολουθοῦν δεδομένας τροχιὰς καὶ ὅτι τόσον ὁ προϋπολογισμὸς ὅσον καὶ οἱ τρέχοντες λογαριασμοὶ εἰς τὸ ἰσοζύγιον πληρωμῶν νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν ἰσοσκελισμένοι.

Ἡ συνάρτησις προτιμήσεως ἀνὰ πᾶσαν χρονικὴν στιγμὴν δίδεται ὑπὸ τῆς

$$W = \frac{1}{2}\left[w_1 (Y - Y_0 e^{\theta 1t})^2 + w_2 (\overline{G} - G_0 e^{\theta 2t})^2 + w_3 (X - M)^2 + w_4 (\overline{G} - T^*)^2 \right] \qquad (9)$$

ὅπου w_i, $i = 1,2,3,4$ εἶναι συντελεσταὶ τοὺς ὁποίους (τὰ βάρη τὰ ὁποῖα) ὁ λαμβάνων ἀποφάσεις ἐκθέτει ἐπὶ τῶν ἀποκλίσεων τῶν πραγματικῶν τιμῶν τῶν Y, $\overline{G}$, $(X - M)$, $(\overline{G} - T^*)$ εἰς χρόνον t καὶ τῶν ἐπιθυμητῶν τιμῶν τῶν $Y_0 e^{\theta 1t}$ $G_0 e^{\theta 2t}$, 0, 0, κατὰ τὴν ἰδίαν χρονικὴν στιγμήν.

Ὁ λαμβάνων ἀποφάσεις ἐπιθυμεῖ τὰ Y καὶ G νὰ αὐξάνουν μὲ τιμὰς θ_1, θ_2 ἀντιστοίχως. Y_0 καὶ G_0 εἶναι αἱ ἀρχικαὶ τιμαὶ τῶν Y καὶ G. Οἱ συντελεσταὶ πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικοί, μὲ ἕνα ἐξ αὐτῶν θετικόν. Οὕτω τὸ πρόβλημα εἶναι νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ ἡ $S = \int_o^T W\,dt.$ (10)

Ἀντικαθιστῶντες τὰς (1), (2), (3), (5), (6), (7) εἰς τὴν (8) θὰ ἔχωμεν

$$\dot{Y} = \alpha Y - g\alpha_1 \overline{T} + g\overline{G} + g\,e^{rt} A \qquad (11) \text{ ὅπου}$$

$$\alpha \equiv g(\alpha_1 - \alpha_1 n + \alpha_2 - 1) < 0 \qquad (12)$$

$$A \equiv C_0 + I_0 + X_0 \qquad (13)$$

$$r = r_1 = r_2 = r_3 = r_4 \qquad (14)$$

Τὸ πρόβλημα εἶναι νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ ἡ (10) ὑπὸ τὸν περιορισμόν (11). Ἡ **Hamiltonian** εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν εἶναι

$$H = \lambda_1(t)\,\dot{Y} + W \qquad (15)$$

ἰσχύει δὲ καὶ $\lambda_1(T) = 0$ (16)

Τὸ βοηθητικὸν σύστημα εἶναι :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial Y} = -\lambda_1\alpha - w_1(Y - Y_0 e^{\theta_1 t}) + w_3 m\,[(X_0 - M_0)e^{rt} - mY] + + w_4 n(\overline{G} - \overline{T} - nY) \qquad (17)$$

Ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς (10) ὑπὸ τὸν περιορισμὸν (11) βάσει τῆς θεωρίας τῆς ἀρχῆς τοῦ μεγίστου τοῦ **Pontryagin** θεωρεῖ ὡς ἀναγκαίας συνθήκας τὴν ἐλαχιστοποίησιν τοῦ **H** εἰς κάθε στιγμὴν τοῦ χρόνου ὡς $\overline{G}$ καὶ $\overline{T}$. Θὰ εἶναι

$$\frac{\partial H}{\partial \overline{G}} = g\lambda_1 + w_2(\overline{G} - G_0 e^{\theta_2 t}) + w_4(\overline{G} - \overline{T} - nY) = 0 \qquad (18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \overline{T}} = g\alpha_1\lambda_1 - w_4(\overline{G} - \overline{T} - nY) = 0 \qquad (19)$$

Ἐπιλύοντες τὴν (18) καὶ (19) ὡς πρὸς $\overline{G}$ καὶ $\overline{T}$ θὰ ἔχωμεν :

$$\overline{G}(t) = \left(\frac{-1 + \alpha_1}{w_2}\right)\lambda_1(t) + G_0 e^{\theta_2 t} \qquad (20)$$

$$\overline{T}(t) = \left(\frac{-1 + \alpha_1}{w_2} + \frac{\alpha_1}{w_4}\right) g\,\lambda_1(t) - nY(t) + G_0 e^{\theta_2 t} \qquad (21)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς (20), (21) εἰς τὰς (17) καὶ (11) καὶ λύοντες ὡς πρὸς Y(t) καὶ $\lambda_1(t)$ θὰ λάβωμεν τὰς ἀρίστας τροχιάς. Θὰ εἶναι

$$\dot{Y} = \alpha_{11} Y + \alpha_{12}\lambda_1 + \alpha_{13} e^{\theta t} \tag{23}$$

$$\dot{\lambda}_1 = \alpha_{21} Y + \alpha_{22}\lambda_1 + \alpha_{23} e^{\theta t} \tag{24}$$

ὅπου

$$\alpha_{11} = g(\alpha_1 + \alpha_2 - 1) \tag{25}$$

$$\alpha_{12} = g\left(\frac{\alpha_1 - 1}{w_2}\right) - g^2\alpha_1\left(\frac{\alpha_1 - 1}{w_2} + \frac{\alpha_1}{w_4}\right) \tag{26}$$

$$\alpha_{13} = [(1 - \alpha_1) G_0 + A] g \tag{27}$$

$$\alpha_{21} = -w_1 - w_3 m^2 \tag{28}$$

$$\alpha_{22} = w_4 n \left[\frac{\alpha_1 - 1 - g(\alpha_1 - 1)}{w_2} - \frac{g\,\alpha_1}{w_4}\right] - \alpha \tag{29}$$

$$\alpha_{23} = w_1 Y_0 - w_3 m M_0 + w_3 m X_0 \tag{30}$$

καὶ ἔχοντες ἁπλοποιήσει τοὺς μὴ ὁμογενεῖς ὅρους ἀφήνοντες ὅλας τὰς τιμὰς μεγεθύνσεως ἴσας μὲ θ.

Ἐπιλύοντες τὸ σύστημα (23) — (24) θὰ ἔχωμεν τὰς ἀρίστας τροχιάς :

$$\bar{Y}(t) = \frac{c_1(q_1 - \alpha_{22})}{\alpha_{21}} e^{q_1 t} + \frac{c_2(q_2 - \alpha_{22})}{\alpha_{21}} e^{q_2 t} + B^* e^{\theta t} \tag{31}$$

$$\bar{\lambda}_1(t) = c_1 e^{q_1 t} + c_2 e^{q_2 t} + B e^{\theta t} \tag{32}$$

ὅπου q_1, q_2 ρίζαι τῆς

$$q^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) q + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) \tag{33}$$

καὶ

$$B = \frac{\alpha_{13}\alpha_{21} + \alpha_{23}\theta - \alpha_{23}\alpha_{11}}{(\theta - q_1)(\theta - q_2)} \tag{34}$$

$$B^* = \frac{\alpha_{23} - \alpha_{22} B + \theta B}{\alpha_{21}} \tag{35}$$

Αἱ c_1, c_2 εἶναι σταθεραὶ αἱ ὁποῖαι προσδιορίζονται ἐκ τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν $Y(0) = Y_0$ καὶ $\lambda(T) = 0$. Εὑρίσκομεν τὰ c_1, c_2 ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς (31), (32) ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὸν ἄριστον ἔλεγχον.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1 Burmeister E., & Dobell A., Mathematical Theories of Economic Growth, MacMillan Co., New York.

2) Benavie A., Mathematical Techniques for Economic Analysis, Prentice Hall.

3) Dixit A., The Theory of Eguilibrium Growth, Oxford University Press.

4) Hadley G. & Kemp M., Variational Methods in Economic, North - Holland /American Elsevier.

5) Hahn F., Readings in the Theory, of Growth, MacMillan St Martin's Press.

6) Morishima M., Equilibrinm Stability and Growth, Oxford at the Clarendon Press.

7) Pontryagin L. S., The Mathematical Theory of Optimal Processes, Intercience Publishers.

8) Tintner G. & Senqupta J., Stochastic Economics, Academic Press.