ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΙ
ΚΟΙΝΩΝΙΚΑΙ
ΤΕΧΝΙΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΑΙ

ΤΡΙΜΗΝΙΑΙΑ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ
ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΙΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΗΣ ΕΝ ΠΕΙΡΑΙΕΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΝ ΕΤΟΣ 1978	ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 1978	ΚΗ' ΤΟΜΟΣ	ΑΡΙΘΜ. ΤΕΥΧΟΥΣ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΑ ΑΣΑΦΗ ΣΥΝΟΛΑ

Τοῦ κ. ΑΝΤΩΝΙΟΥ Χ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν τῆς Α.Β.Σ.Π.

Ἡ ἀπροσδιοριστία καὶ ἡ ἀσάφεια, ποὺ συνοδεύουν συχνὰ τὰ δεδομένα ὡρισμένων προβλημάτων, καθιστοῦν ἀδύνατον τὴν δημιουργίαν δι' αὐτὰ (μαθηματικῶν) ὑποδειγμάτων μὲ βάσιν τὴν γλῶσσαν τῆς κλασσικῆς θεωρίας τῶν συνόλων. Αἱ δυσχέρειαι αὗται γίνονται περισσότερον ἔντονοι ὅταν τὰ προβλήματα ἀναφέρονται εἰς θέματα Οἰκονομικῆς, Πολιτικῶν καὶ Διοικητικῶν Ἐπιστημῶν, Κοινωνιολογίας, Ψυχολογίας, Φιλοσοφίας, Γλωσσολογίας, δηλαδὴ ἐπιστημῶν σχετικῶν μὲ τὴν συμπεριφορὰν τοῦ ἀνθρώπου.

Ἡ δημιουργία τῶν ἀσαφῶν συνόλων (fuzzy sets) ἀπὸ τὸν Zadeh [3] τὸ 1965, μὲ βάσιν τὰς θεωρίας τῆς πλειοτίμου λογικῆς, ὅπως τὰς ἐθεμελίωσαν οἱ Post (1921), Lukasiewicz (1937), Moisil (1940), ἐπιτρέπει σήμερον τὴν διερεύνησιν καταστάσεων ἀσαφείας· ἡ ὁποία ὅμως δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὴν ἀβεβαιότητα ἢ τὸ λάθος.

Εἰς τὸ παρὸν ἄρθρον γίνεται παρουσίασις βασικῶν ἐννοιῶν τῶν ἀσαφῶν συνόλων, ἀπαραιτήτων εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

1. Ὁρισμοὶ

Εἶναι γνωστὸν ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν κοινῶν συνόλων, ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως :

$$\begin{aligned} \mu_X(\chi) &= 1 \iff \chi \in X \\ &= 0 \iff \chi \notin X \end{aligned} \tag{1.1}$$

εἶναι δυνατὴ ἡ παρουσίασις τόσον αὐτῶν, ὅσον καὶ τῆς ἀλγέβρας των.

Οὕτως ὁ κατωτέρω πίναξ ἀναφέρεται εἰς τὸ συμπλήρωμα, τὴν ἕνωσιν καὶ τὴν τομὴν τῶν συνόλων A = { χ_3, χ_4, χ_5 } καὶ B = { χ_2, χ_3, χ_6 }, ὑποσυνόλων τοῦ βασικοῦ συνόλου ἀναφορᾶς E = { $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6$ }.

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
E	1	1	1	1	1	1
A	0	0	1	1	1	0
B	0	1	1	0	0	1
$\bar{A}$	1	1	0	0	0	1
$\bar{B}$	1	0	0	1	1	0
$A \cup B$	0	1	1	1	1	1
$A \cap B$	0	0	1	0	0	0

ΠΙΝΑΞ I

Ἐὰν τώρα τὸ πεδίον τιμῶν τῆς ἀνωτέρω χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως δὲν εἶναι τὸ B = { 0, 1 } ἀλλὰ τὸ M = [0, 1], τότε τὸ ἀντίστοιχον σύνολον καλεῖται ἀσαφὲς (ὑποσύνολον τοῦ βασικοῦ συνόλου ἀναφορᾶς E) καὶ συμβολίζεται μὲ $\underset{\sim}{X}$.

Διὰ τὰ ἀσαφῆ σύνολα ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθοι συμβολισμοὶ - ὁρισμοί :

$\mu_{\underset{\sim}{X}} : E \to M$ ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις συμμετοχῆς τῶν στοιχείων τοῦ ἀσαφοῦς συνόλου $\underset{\sim}{X}$ (ὑποσυνόλου τοῦ βασικοῦ συνόλου ἀναφορᾶς E).

$\mu_{\underset{\sim}{X}}(\chi)$ ὁ βαθμὸς συμμετοχῆς τοῦ στοιχείου χ εἰς τὸ ἀσαφὲς σύνολον $\underset{\sim}{X}$

$\chi \in_{\mu_{\underset{\sim}{X}}(\chi)} \underset{\sim}{X}$ τὸ στοιχεῖον χ ἀνήκει εἰς τὸ ἀσαφὲς σύνολον $\underset{\sim}{X}$ μὲ βαθμὸν συμμετοχῆς $\mu_{\underset{\sim}{X}}(\chi)$

μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὴ ἡ παρουσίασις τόσον αὐτῶν, ὅσον καὶ τῆς ἀλγέβρας των.

Οὕτως ὁ κατωτέρω πίναξ ἀναφέρεται εἰς δύο ἀσαφῆ σύνολα $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, ὑποσύνολα τοῦ πεπερασμένου συνόλου $E = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6\}$,

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
E	1	1	1	1	1	1
$\underset{\sim}{A}$	0	0,2	0,9	0	1	0
$\underset{\sim}{B}$	0,5	0,8	0	1	1	0,6

ΠΙΝΑΞ II

τὰ ὁποῖα περιγράφουν τὰς γνώμας (προτιμήσεις) δύο καταναλωτῶν διὰ τὴν ποιότητα ἓξ ἀγαθῶν $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6$.

Διὰ τὰ σύνολα αὐτὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

$\chi_1 \in_{0} \underset{\sim}{A}$ ἢ $\chi_1 \notin \underset{\sim}{A}$

$\chi_1 \in_{0,5} \underset{\sim}{B}$

$\chi_2 \in_{0,2} \underset{\sim}{A}$

$\chi_2 \in_{0,8} \underset{\sim}{B}$

$\chi_3 \in_{0,9} \underset{\sim}{A}$

$\chi_3 \in_{0} \underset{\sim}{B}$ ἢ $\chi_3 \notin \underset{\sim}{B}$

$\chi_4 \in_{0} \underset{\sim}{A}$ ἢ $\chi_4 \notin \underset{\sim}{A}$

$\chi_4 \in_{1} \underset{\sim}{B}$ ἢ $\chi_4 \in \underset{\sim}{B}$

$\chi_5 \in_{1} \underset{\sim}{A}$ ἢ $\chi_5 \in \underset{\sim}{A}$

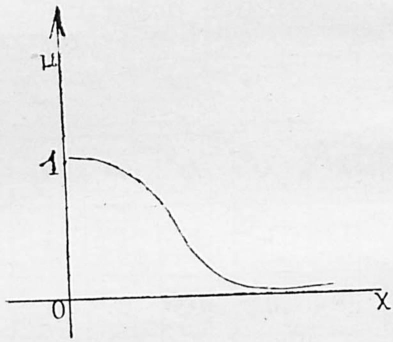
$\chi_5 \in_{1} \underset{\sim}{B}$ ἢ $\chi_5 \in \underset{\sim}{B}$

$\chi_6 \in_{0} \underset{\sim}{A}$ ἢ $\chi_6 \notin \underset{\sim}{A}$

$\chi_6 \in_{0,6} \underset{\sim}{B}$

Ἐξ ἄλλου τὸ ἀσαφὲς σύνολον $\underset{\sim}{X}$, ὑποσύνολον τοῦ ἀπεράντου ἀριθμησίμου (ἀντιστοίχως μὴ ἀριθμησίμου) συνόλου N (ἀντιστοίχως R^+), μὲ

$$\mu_{\underset{\sim}{X}}(\chi) = \frac{1}{1 + \kappa\chi^2}, \quad \kappa > 1$$



δύναται νὰ περιγράψῃ τὴν ἀσαφῆ πρότασιν „ὁ φυσικὸς (ἀντιστοίχως ὁ θετικὸς πραγματικὸς) ἀριθμὸς χ εἶναι μικρός".

2. Σχέσεις καὶ Πράξεις

Μὲ βάσιν τοὺς ἀνωτέρω συμβολισμοὺς καὶ ὁρισμοὺς ὁρίζονται κατωτέρω αἱ πλέον βασικαὶ σχέσεις καὶ πράξεις τῶν ἀσαφῶν συνόλων :

Ἰσότης $\quad \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \Longleftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi), \quad \forall\chi\in E \quad (2.1)$

Ἐγκλεισμὸς $\quad \underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \Longleftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi) \leqq \mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi), \quad \forall\chi\in E \quad (2.2)$

Ἕνωσις $\quad A \cup B \Longleftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(\chi) = \max\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi), \mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi)\right), \quad \forall\chi\in E \quad (2.3)$

Τομὴ $\quad \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \Longleftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(\chi) = \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi), \mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi)\right), \quad \forall\chi\in E \quad (2.4)$

Συμπλήρωμα $\underset{\sim}{\bar{A}} \Longleftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{\bar{A}}}(\chi) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi), \ \forall \chi \in E$ (2.5)

Οὕτω διὰ τὰ ἀσαφῆ σύνολα τοῦ πίνακος ΙΙ θὰ εἶναι :

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6
E	1	1	1	1	1	1
$\underset{\sim}{A}$	0	0,2	0,9	0	1	0
$\underset{\sim}{B}$	0,5	0,8	0	1	1	0,6
$\underset{\sim}{\bar{A}}$	1	0,8	0,1	1	0	1
$\underset{\sim}{\bar{B}}$	0,5	0,2	1	0	0	0,4
$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$	0,5	0,8	0,9	1	1	0,6
$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$	0	0,2	0	0	1	0

ΠΙΝΑΞ III

Διὰ τὰς ἀνωτέρω βασικὰς σχέσεις καὶ πράξεις τῶν ἀσαφῶν συνόλων ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τῶν κοινῶν συνόλων, ἐκτὸς ὡρισμένων ἐξαιρέσεων, ὅπως τὸ σύνολον-ἕνωσις $\underset{\sim}{X} \cup \underset{\sim}{\bar{X}}$ δὲν ἰσοῦται μὲ Ε * καὶ τὸ σύνολον-τομὴ $\underset{\sim}{X} \cap \underset{\sim}{\bar{X}}$ δὲν ἰσοῦται μὲ $\varnothing$ ** .

*) Εἰς τὰ κοινὰ σύνολα ἡ ἰσότης $X \cup \bar{X} = E$ ἐκφράζει τὴν ἀρχὴν τῆς τοῦ τρίτο ἀποκλίσεως (τῆς διτίμου λογικῆς).

**) Εἰς τὰ κοινὰ σύνολα ἡ ἰσότης $X \cap \bar{X} = \varnothing$ ἐκφράζει τὴν ἀρχὴν τῆς ἀντιφάσεως (τῆς διτίμου λογικῆς).

Ἐπίσης ἀντίστοιχα, πρὸς τὰς πράξεις τῶν κοινῶν συνόλων, ὁρίζονται τὸ ἀλγεβρικὸν γινόμενον $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}$, τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $\underset{\sim}{A} \hat{+} \underset{\sim}{B}$, ἡ διαφορὰ $\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B}$ καὶ τὸ διαζευκτικὸν ἄθροισμα $\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}$ δύο ἀσαφῶν συνόλων.

Τέλος, ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω πράξεων ὁρίζονται καὶ πράξεις ἀνταποκρινόμεναι εἰς τὴν φύσιν τῶν ἀσαφῶν συνόλων.

3. Ἀποστάσεις

Ἐκτὸς τῶν πράξεων, διάφοροι ἀποστάσεις, ἀντίστοιχοι πρὸς τὰς ἀποστάσεις τῶν κοινῶν συνόλων, ὁρίζονται καὶ διὰ τὰ ἀσαφῆ σύνολα.

Οὕτω γραμμικὴ (ἀντιστοίχως τετραγωνικὴ) ἀπόστασις μεταξὺ δύο ἀσαφῶν συνόλων $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ — ὑποσυνόλων ἑνὸς πεπερασμένου βασικοῦ συνόλου ἀναφορᾶς μὲ η στοιχεῖα — καλεῖται ὁ ἀριθμός :

$$d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sum_{i=1}^{\eta} \left| \mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi_i) \right|$$

ἀντιστοίχως $$e(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\eta} \left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(\chi_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(\chi_i) \right)^2}$$

Ἐκ τοῦ πίνακος III προκύπτουν :

$$d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = |0 - 0,5| + |0,2 - 0,8| + |0,9 - 0| + |0 - 1| + |1 - 1| + |0 - 0,6| = 3,6$$

$$e^2(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = (0 - 0,5)^2 + (0,2 - 0,8)^2 + (0,9 - 0)^2 + (0 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (0 - 0,6)^2 = 2,78$$

$$e(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = 1,66$$

Αἱ ἀνωτέρω δύο ἀποστάσεις, διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες ἀποστάσεως, ὁρίζονται καὶ ὅταν τὸ E εἶναι ἀπέραντον (ἀριθμήσιμον ἢ μή). Σχετικαὶ μὲ τὰς ἀποστάσεις εἶναι καὶ αἱ ἑπόμεναι δύο ἔννοιαι :

Διὰ κάθε ἀσαφὲς σύνολον $\underset{\sim}{X}$, τὸ (κοινὸν) σύνολον $\underset{\simeq}{X}$ διὰ τὸ ὁποῖον :

$$\mu_{\underset{\simeq}{X}}(\chi) = 1 \quad \text{ἐὰν} \quad \mu_{\underset{\sim}{X}}(\chi) > 0{,}5$$

$$= 0 \quad \text{ἐὰν} \quad \mu_{\underset{\sim}{X}}(\chi) \leqslant 0{,}5$$

καλεῖται *πλησιέστερον* ὑποσύνολον τοῦ $\underset{\sim}{X}$.

Διὰ κάθε ἀσαφὲς σύνολον $\underset{\sim}{X}$ καὶ $\alpha \in [0,1]$, τὸ (κοινὸν) σύνολον

$$X_\alpha = \{\chi \in E : \mu_{\underset{\sim}{X}}(\chi) \geqslant \alpha\}$$

καλεῖται *ὑποσύνολον στάθμης* α τοῦ $\underset{\sim}{X}$.

Οὕτως ἐκ τοῦ πίνακος III προκύπτουν :

$$\underset{\simeq}{A} = \{\chi_3, \chi_5\}$$

$$\underset{\simeq}{B} = \{\chi_2, \chi_4, \chi_5, \chi_6\}$$

$$A_{0,2} = \{\chi_2, \chi_3, \chi_5\}$$

$$B_{0,8} = \{\chi_2, \chi_4, \chi_5\}.$$

4. Ἐφαρμογαὶ

Ἡ ταχυτάτη ἐξάπλωσις τῆς θεωρίας τῶν ἀσαφῶν συνόλων, ἔγινε ἀφορμὴ νὰ ἀναπτυχθῇ τόσον ἡ μαθηματικὴ βάσις αὐτῆς, ὅσον καὶ ὁ χῶρος τῶν ἐφαρμογῶν της.

Οὕτως ὁ Goguen [1] τὸ 1967 ἐδημιούργησε τὰ L - ἀσαφῆ σύνολα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀντὶ τοῦ συνόλου M λαμβάνεται ἕνα γενικώτερον σύνολον L (συνήθως ἕνα δικτυωτόν).

Παράλληλα ἐμφανίζονται εἰς μὲν τὰς θεωρίας Ἀλγέβρας, Ἀναλύσεως, Γεωμετρίας, Τοπολογίας, Πιθανοτήτων, Λογικῆς κλπ., οἱ ἀσαφεῖς κλάδοι αὐτῶν, εἰς δὲ τὰς ἐφαρμογὰς τὰ ἀσαφῆ Μαθηματικὰ Προγράμματα, Παίγνια, Γραφήματα, Αὐτόματα κλπ.

Ἡ ἀνάπτυξις αὐτὴ εἶχεν ὡς ἄμεσον ἀποτέλεσμα τὴν ἐπέκτασιν τῶν θεωριῶν τῶν πληροφοριῶν, τῆς ταξινομίας, τῶν συστημάτων, τῶν ἀποφάσεων, τῶν ἐπικοινωνιῶν, τοῦ ἀρίστου ἐλέγχου κλπ. εἰς τὰς καταστάσεις ἀσαφείας.

Σήμερα ἕνα μεγάλο πλῆθος προβλημάτων τόσον τῆς ἀνθρωπίνου συμπεριφορᾶς, ὅσον καὶ τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν καὶ τῆς τεχνολογίας, χρησιμοποιοῦν στὰ ἀσαφῆ σύνολα καὶ τὸν λογισμὸν αὐτῶν, μὲ ἀρκετὴν ἐπιτυχίαν.

[1] Goguen, J. A : L - Fuzzy Sets. Jour. Math. Analysis and Appl. Vol. 18, April 1967.

[2] Kaufmann, A : Introduction à la théorie des sous ensembles flous. Masson 1977.

[3] Zadeh, L. A : Fuzzy Sets. Inform. and Control. Vol. 8, June 1965.