Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΥΠΟ ΤΩΝ κ. κ. Κ. ΠΛΗΘΕΙΔΗ - Β. ΜΕΤΑΞΑ

12. (Συνέχεια ἐκ τοῦ τεύχους 11.)

Τὸ διαφορικὸν κόστος $\frac{d\Pi}{dx}$ εἶναι πάντοτε θετικὸν δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x ἐπειδὴ $\beta^2 < 3\alpha\gamma$ καὶ $\frac{d^2\Pi}{dx^2} = 0$ μόνον ὅταν $x = \frac{\beta}{3\alpha}$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σημεῖον $x = \frac{\beta}{3\alpha}$ ἡ καμπύλη τοῦ ὁλικοῦ κόστους ἔχει σημεῖον καμπῆς καὶ συνεχῶς αὐξάνει. Ἡ καμπύλη τοῦ μέσου κόστους λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην αὐτῆς τιμὴν ὅταν ἡ παραγωγὴ ἰσοῦται πρὸς τὴν μόνην θετικὴν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως $2\alpha x^3 - \beta x^2 - \delta = 0$ καὶ ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ $x = \frac{3\beta}{\alpha}$. Ἡ καμπύλη τοῦ διαφορικοῦ κόστους εἶναι παραβολὴ μὲ θετικὴν ἐλαχίστην τιμὴν $\frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{3\alpha}$ εἰς τὸ σημεῖον $x = \frac{3\beta}{\alpha}$.

VIII.— 9. Πρακτικαὶ ἐφαρμογαὶ τῆς ἐλαστικότητος. Τὸ πρόβλημα Leontief [1]

Ἡ Προσωρινὴ Ἐθνικὴ Οἰκονομικὴ Ἐπιτροπή, Temporavy National Economic Committee (T.N.E.C.) ὑπῆρξεν Ἐπιτροπὴ τῆς Γερουσίας τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν, ἡ ὁποία συνεστήθη κατὰ τὴν δευτέραν προεδρικὴν περίοδον τοῦ F. D. Roosevelt μὲ τὸν σκοπὸν νὰ ἐξερευνήσῃ τὴν μονοπωλιακὴν δραστηριότητα τῶν μεγάλων βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν. Ἡ μονοπωλιακὴ ἐπιχείρησις M. S. Steel Corporation, ἐν ὄψει τῶν ἐπικειμένων ἀκροάσεων τῆς ἀνωτέρω ἐπιτροπῆς εἰς τὴν βιομηχανίαν τοῦ χάλυβος προητοίμασεν ἔκθεσιν ὑπὸ τὸν τίτλον The Analysis of steel Prices, Volume and Costs. Ἡ ἐν λόγῳ ἔκθεσις περιέχει τὴν ἐτησίαν πρόσοδον, παραγωγὴν καὶ διαφορικὸν κόστος τῆς M. S. Steel Corporation ἐπὶ δωδεκαετῆ περίοδον, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 1927 ἕως τὸ 1938. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων αὐτῶν ὁ οἰκονομολόγος τοῦ Πανεπιστημίου Χάρβαντ W. Leontief ἐξεπόνησε τὴν ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως διὰ τὸν παραγόμενον χάλυβα ὑπὸ τῆς μονοπωλιακῆς U.S. Steel δι' ἕκαστον ἔτος. Τὸ πρόβλημα Leontief ἐνέχει σπουδαίαν σημασίαν, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπειδὴ δεικνύει τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐννοίας τῆς ἐλαστικότητος (εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἡ ἐλαστικότης εὑρίσκεται δι' ἐμμέσου μεθόδου) ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι δεικνύει τὴν ἀνελαστικότητα τῆς ζητήσεως τοῦ χάλυβος, ἥτις εἶναι εἶδος πρώτης ἀνάγκης διὰ μίαν βιομηχανικὴν οἰκονομίαν.

Δεδομένου ὅτι ἡ U. S. Steel Corporation εἶναι μονοπωλιακὴ ἐπιχείρησις καὶ ἔχει ὡς ἀντικειμενικὸν σκοπὸν τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους, τὸ διαφορικὸν κόστος τῆς ἐπιχειρήσεως αὐτῆς θὰ πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ διαφο-

1) Βλ. Wassily Leontief : Elasticity of Demand and cost Data. The American Economic Review. Dec. 1940.

ρικὴν πρόσοδον. Ἑπομένως, ἐὰν π΄(x) εἶναι τὸ διαφορικὸν κόστος τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν παραγωγὴν x τόννων χάλυβος διὰ δοθεῖσάν τινα χρονικὴν περίοδον, ἡ δὲ ἀντίστοιχος συνάρτησις τῆς ἀποτελεσματικῆς ζητήσεως διὰ τὸν χάλυβα τῆς U. S. Steel εἶναι p = f(x), τότε :

$$f'(x) \, . \, x + f(x) = \pi'(x) \qquad (1)$$

ἡ ἐλαστικότης τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως :

$$\eta = -\frac{P}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{-f(x)}{x \, . \, f'(x)}$$

δι᾽ ἀντικαταστάσεως ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν :

$$\eta = -\frac{f(x)}{\pi'(x) - f(x)} \, .$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἐλαστικότητα, ὅταν εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ γνωρίζωμεν τὴν ζήτησιν καὶ τὸ διαφορικὸν κόστος.

Πίναξ 13

Ἔτος	1 f (x) : x Millions of dollars	2 x Millions of tons.	3 f (x) Dollars	4 π΄ (x) Dollars	5 η
1927	947	13.0	72.8	50.6	3.28
1928	992	14.0	70.9	51.0	3.56
1929	1 068	15.1	70.7	50.1	3.43
1930	814	11.1	68.7	48.1	3.37
1931	524	8.1	64.7	47.7	3.82
1932	283	4.4	64.3	46.1	3.53
1933	370	6.2	59.7	45.0	4.06
1934	419	6.1	68.7	48.3	3.39
1935	540	7.6	71.1	49.2	3.25
1936	792	11.0	72.0	49.9	3.26
1937	1 022	13.2	77.4	54.7	3.41
1938	606	7.8	77.7	55.7	3.53

Ἡ μὲν πρώτη στήλη τοῦ πίνακος δίδει τὴν ἐτησίαν ὁλικὴν πρόσοδον, ἡ δὲ δευτέρα στήλη δίδει τὴν ὁλικὴν παραγωγήν. Διὰ διαιρέσεως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν κατὰ μονάδα (μέσην πρόσοδον καὶ ἑπομένως ζήτησιν) τὴν ὁποίαν καταχωροῦμεν εἰς τὴν τρίτην στήλην. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τῆς U. S. Steel, τὸ διαφορικὸν κόστος κατὰ τὴν περίοδον τῶν 12 ἐτῶν ἐδίδετο ὡς σταθερὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ἦτο ἀνεξάρτητος ἀπὸ τῆς παραγωγῆς.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τῆς ἐκθέσεως καὶ λαμβάνων ὑπ᾽ ὄψει τὸ ἐπίπεδον τῆς παραγωγῆς, τῆς παραγωγικότητος καὶ τῆς τιμῆς δι᾽ ἕκαστον ἔτος χωριστά, (χρησιμοποιῶν τὸ ἔτος 1938 ὡς τὸ βασικὸν) ὁ Leontief καταλήγει εἰς τὸ πραγματικὸν διαφορικὸν κόστος δι᾽ ἕκαστον ἔτος τὸ ὁποῖον εἶναι ἀπαραίτητον διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (2). Τὸ πραγματικὸν διαφορικὸν κόστος δίδεται εἰς τὴν στήλην 4 τοῦ πίνακος. Εἰς τὴν στήλην 5 δίδεται ἡ ἐλαστικότης, ὡς αὕτη εὑρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (2). Ἡ οὕτως εὑρεθεῖσα ἐλαστικότης 3.82 διὰ τὸ 1931, δὲν παριστᾷ τὴν ἐλαστικότητα τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως τοῦ χάλυβος τῆς U. S. Steel διὰ τὸ ἔτος 1931, ἀλλὰ παριστᾷ τὴν ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως εἰς ὡρισμένον σημεῖον τῆς καμπύλης τοῦ ἔτους αὐτοῦ καὶ συγκεκριμένως τοῦ σημείου εἰς τὸ ὁποῖον $p = 64.7$ καὶ $x = 8.1$ ἑκατομμύρια τόννων. Αὕτη εἶναι ἡ ζητηθεῖσα καὶ προσφερθεῖσα ποσότης χάλυβος εἰς τὴν τιμὴν αὐτήν.

Εἰς τὸ ἔτος 1932, ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως τῆς U. S. Steel εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ ἔχῃ ἐντελῶς διαφορετικὸν σχῆμα ἀπὸ τοῦ ἔτους 1931, ἀλλ' ὁπωσδήποτε διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $p = 64.3$ καὶ $x = 4.4$ ἡ δ' ἀντίστοιχος ἐλαστικότης εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι 3.53.

Ἡ εὕρεσις τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως διὰ τῆς ἀνωτέρω μεθόδου δὲν ἀπαιτεῖ τὴν πλήρη γνῶσιν τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως. Π.χ. εἰς τὸ πρόβλημα Leontief δὲν χρειάζεται νὰ γνωρίζωμεν ὁλόκληρον τὴν καμπύλην τῆς ζητήσεως δι' ἕκαστον ἔτος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐλαστικότητα ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος.

Οἱ ἀριθμοὶ τῆς στήλης 5 τοῦ πίνακος 13, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἐλαστικότητες, εἶναι κατὰ πολὺ μεγαλύτεροι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰς ἐλαστικότητας εἰς τὴν ἔκθεσιν τῆς U. S. Steel Co. Τοῦτο εἶναι ἀποτέλεσμα χρησιμοποιήσεως δύο διαφορετικῶν συναρτήσεων τῆς ζητήσεως. Ὁ μὲν Leontief χρησιμοποιεῖ τὴν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως εἰς τὴν ἀγορὰν μόνον διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς U. S. Steel, εἰς δὲ τὴν ἔκθεσιν χρησιμοποιεῖται ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως διὰ τὴν ὁλικὴν παραγωγὴν τοῦ χάλυβος εἰς τὴν ἀγοράν. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας εὑρίσκομεν τὴν ἐλαστικότητα ὡς θετικήν. Εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἡ ἐλαστικότης εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος καὶ ἐπομένως ἡ ζήτησις διὰ τὸν χάλυβα εἶναι ἐλαστική, εἰς δὲ τὴν δευτέραν, ἡ ἐλαστικότης εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος καὶ ἐπομένως ἡ ζήτησις διὰ τὸν χάλυβα εἶναι ἀνελαστική.

Ἡ διαφορὰ αὐτὴ μεταξὺ τῶν δύο περιπτώσεων ἐξηγεῖται καὶ ἐκ τοῦ γεγονότος καθ' ὅ, ὁ μὲν Leontief χρησιμοποιῶν τὴν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως μόνον διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς U. S. Steel θεωρεῖ τὴν ἀνωτέρω ἐπιχείρησιν ὡς ὀλιγοπωλιακήν, εἰς δὲ τὴν ἔκθεσιν ὅπου χρησιμοποιεῖται ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως μόνον διὰ τὴν ὁλικὴν παραγωγὴν τοῦ χάλυβος εἰς τὴν ἀγορὰν ἡ U. S. Steel αὐτομάτως θεωρεῖται ὡς μονοπώλιον ἑνὸς εἴδους πρώτης ἀνάγκης διὰ τὴν βιομηχανικὴν παραγωγὴν τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν. Δεδομένου ὅτι τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς παραγωγῆς τοῦ χάλυβος τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν ἐλέγχεται ἀμέσως ἢ ἐμμέσως ἀπὸ τὴν U. S. Steel, ἡ ἐν λόγῳ ἑταιρία δύναται νὰ θεωρηθῇ μᾶλλον ὡς μονοπώλιον. Οἱ ἀριθμοὶ οἵτινες παριστοῦν τὰς ἐλαστικότητας εἰς τὴν στήλην 5 εὑρίσκονται ἐκ τῆς 2, ἥτις εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς θεωρητικῆς ὑποθέσεως ἡ ὁποία ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς (1), δηλαδὴ τῆς ὑποθέσεως καθ' ἣν τὸ διαφορικὸν κόστος ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορικὴν πρόσοδον, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ὡς γνωστὸν τὴν πρώτην συνθήκην ὑπάρξεως σημείου ἰσορροπίας ἑνὸς μονοπωλίου ἢ μονοπωλιακῆς ἐπιχειρήσεως, αἱ δὲ ἐλαστικότητες εἶναι μερικαὶ ἐλαστικότητες εἰς τὰ σημεῖα ἰσορροπίας τῆς U. S. Steel.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ διαφορικὸν κόστος δὲν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορικὴν πρόσοδον, τότε δύο τινὰ δύνανται νὰ συμβοῦν, ἤτοι : α) Ἡ διαφορικὴ πρόσοδος νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διαφορικοῦ κόστους, ἤτοι :

$$xf'(x) + f(x) > \pi'(x)$$

ἢ

$$xf'(x) > \pi'(x) - f(x) \tag{3}$$

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος (3) εἶναι ἀρνητικὰ διότι : $f'(x) < 0$ καὶ $x > 0$.

$$\eta = \frac{f(x)}{xf'(x)} < \frac{f(x)}{\pi'(x) - f(x)} \tag{4}$$

β΄) Ἐὰν ἡ διαφορικὴ πρόσοδος εἶναι μικροτέρα τοῦ διαφορικοῦ κόστους δηλαδή:

$$xf'(x) + f(x) < \pi'(x)$$

ἢ

$$xf'(x) < \pi'(x) - f(x) \tag{5}$$

δεδομένου ὅτι $xf'(x)$ εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀνισότητος (5) δύναται νὰ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ σχετικὸν μέγεθος τοῦ διαφορικοῦ κόστους ὡς πρὸς τὴν μέσην πρόσοδον. Εἶναι λογικὸν νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ διαφορικὸν κόστος, ὑπὸ ὁμαλὰς συνθήκας εἶναι μικρότερον τῆς μέσης προσόδου, δηλαδή :

$$\pi'(x) < f(x).$$

τότε :

$$\eta = \frac{f(x)}{xf'(x)} > \frac{f(x)}{\pi'(x) - f(x)} \tag{6}$$

Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἐμμέσου αὐτῆς μεθόδου διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐλαστικότητος ὑπόκειται εἰς ὡρισμένους περιορισμούς. Ἐν τῇ ὑποθέσει ὅτι τὸ διαφορικὸν κόστος ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορικὴν πρόσοδον δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ ἐπίδρασις τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἀσκήσουν αἱ παροῦσαι τιμαὶ ἐπὶ τῆς μελλούσης ζητήσεως. Ἐάν, ὡς ἀποτέλεσμα τοῦ ἀνωτέρω, ἡ διαφορικὴ πρόσοδος εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ διαφορικοῦ κόστους, χρησιμοποιοῦμεν τὴν (4) διὰ τὴν εὕρεσιν ἑνὸς ἀνωτέρου ὁρίου τῆς ἐλαστικότητος τῆς ἀποτελεσματικῆς ζητήσεως. Δηλαδή, αἱ τιμαὶ τῆς ἐλαστικότητος αἱ εὑρισκόμεναι διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς (2), εἶναι μικρότεραι τῶν εὑρισκομένων ἐκ τῆς (4). Ἀλλὰ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐμμέσου αὐτῆς μεθόδου δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν πραγματικὴν ζήτησιν διὰ τὸ προϊὸν δοθείσης τινὸς ἐπιχειρήσεως, μὲ ὅλους τοὺς ὑποκειμενικοὺς παράγοντας οἱ ὁποῖοι ἐπηρεάζουσιν αὐτήν.

VIII.— 10. Εἰκονικὴ ὑποτίμησις [1]. Τὸ πρόβλημα Robinson

Ὑποτεθείσθω ὅτι αἱ ἐξωτερικαὶ συναλλαγαὶ χώρας τινὸς διεξάγονται ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἐμπορίου καὶ ὅτι δὲν ὑφίσταται ἔλεγχος συναλλάγματος, οὔτε εἰς τὴν ἐν λόγῳ χώραν οὔτε εἰς τὰς ὑπολοίπους χώρας μετὰ τῶν ὁποίων αὕτη διε-

1) Readings in the Theory of International Trade. Princenton University Press. Reprint from Essays on Employment.

ξάγει τὰς ἐξωτερικὰς συναλλαγάς της. Ὡς γνωστόν, ὑπὸ τοιαύτας συνθήκας ἡ τιμὴ τοῦ συναλλάγματος τῆς χώρας ταύτης ρυθμίζεται εἰς τὴν διεθνῆ ἀγορὰν ἀπὸ τὴν ζήτησιν καὶ προσφορὰν διὰ τὸ συνάλλαγμα αὐτῆς. Ἂς ὑποθέσωμεν ἀκόμη, ὅτι ἐπί τινα ὡρισμένην χρονικὴν περίοδον ἡ τιμὴ τοῦ συναλλάγματος τῆς χώρας παραμένει σταθερὰ καὶ ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ εἰσαγωγικοῦ - ἐξαγωγικοῦ ἐμπορίου τῆς χώρας ἀποφασίζουν νὰ αὐξήσουν τὰς ἐξαγωγάς. Ἐὰν εἰς τὴν κρατοῦσαν τιμὴν τοῦ συναλλάγματος ἡ ζήτησις διὰ τὰς ξένας κυκλοφορίας ὑπερβαίνῃ τὴν προσφοράν, ἡ τιμὴ τοῦ συναλλάγματος αὐτομάτως ἐλαττοῦται. Κατὰ συνέπειαν, τὰ δι' ἐξαγωγὴν παρασκευαζόμενα εἰς τὴν χώραν ἀγαθὰ θὰ κοστίζουν ὀλιγώτερον εἰς τοὺς ξένους ἀγοραστάς, ὁπότε θὰ αὐξηθῇ καὶ ὁ ὄγκος τῶν ἐξαγωγῶν. Ὡς γνωστόν, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αὐξάνουσιν αἱ ἐξαγωγαί, αἱ τιμαὶ τῶν ἐξαγομένων ἀγαθῶν εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἀγορὰν δὲν δύνανται νὰ ἐλαττωθοῦν. Ἐπομένως, ἡ ἀξία τῶν ἐξαγωγῶν ἐκτιμωμένη εἰς τὴν κυκλοφορίαν τῆς χώρας πρέπει νὰ αὐξηθῇ. Τὰ εἰσαγόμενα ἀγαθὰ θὰ καταστῶσι τώρα ἀκριβώτερα εἰς τὴν ἐσωτερικὴν ἀγοράν. Τοιουτοτρόπως, ἐνῷ ὁ ὄγκος τῶν εἰσαγομένων ἀγαθῶν, ὁ ὁποῖος προηγουμένως ἠγοράζετο διὰ τοῦ α εἰσοδήματος τώρα ἐλαττοῦται, ἡ συνολικὴ δαπάνη διὰ τὰ εἰσαγόμενα ἀγαθὰ δύναται νὰ αὐξηθῇ. Ἐπομένως, δὲν εἶναι βέβαιον ἐὰν ἡ ἐλάττωσις τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος τῆς χώρας θὰ ὁδηγήσῃ εἰς αὔξησιν τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου. Προφανῶς, ἐὰν ἡ ἀξία τῶν εἰσαγωγῶν, ἐκτιμωμένη εἰς τὴν κυκλοφορίαν τῆς χώρας, αὐξηθῇ περισσότερον ἀπὸ τὴν ἀξίαν τῶν ἐξαγωγῶν, ἡ μείωσις τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος θὰ ὁδηγήσῃ καὶ εἰς τὴν ἐλάττωσιν τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου. Ἐπομένως, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μειώσεως τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος τῆς χώρας ἐπὶ τῶν εἰσαγωγῶν αὐτῆς δὲν εἶναι ἁπλοῦν καὶ αὐτομάτως φανερόν. Ἕνεκα τούτου, καὶ πρὸς ἀναλυτικωτέραν ἐπεξεργασίαν τοῦ ὅλου προβλήματος τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς μειώσεως τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος τῆς χώρας ἐπὶ τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου, ἡ J. Robinson χρησιμοποιεῖ εὐρέως τὴν ἔννοιαν τῆς ἐλαστικότητος.

Ἡ ἀλλαγὴ ἥτις ἐπέρχεται εἰς τὰς εἰσαγωγὰς καὶ ἐξαγωγὰς χώρας τινὸς ὡς συνέπεια μεταβολῆς εἰς τὴν τιμὴν τοῦ συναλλάγματος αὐτῆς, ἐξαρτᾶται ἀπό :

α) Τὴν ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγάς, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ.***

β) Τὴν ἐλαστικότητα τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγὰς (ἥτις ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὴν ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰ ἐξαγωγήσιμα ἀγαθά).

γ) Τὴν ἐλαστικότητα τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγάς.

δ) Τὴν ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγὰς (ἡ ὁποία ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὴν ἐλαστικότητα τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰ ἀγαθὰ τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὡς ὑποκατάστατα).

Εἶναι γεγονός, ὅτι ἡ ἀλλαγὴ ἡ ὁποία θὰ ἐπέλθῃ εἰς τὸν ὄγκον τῶν εἰσαγωγῶν καὶ ἐξαγωγῶν καὶ ἑπομένως εἰς τὸ ἐμπορικὸν ἰσοζύγιον τῆς χώρας ὡς ἀποτέλεσμα τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος, θὰ ἐξαρτηθῇ ἐν μέρει καὶ ἀπὸ τὴν ζήτησιν διὰ τὰς εἰσαγωγὰς καὶ τὴν προσφορὰν διὰ τὰς ἐξαγωγάς. Ἐνδεχομένη αὔξησις τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν αὔξησιν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος τῆς χώρας, ἥτις εἶναι φυσικὸν νὰ ἔχῃ ὡς ἀποτέλεσμα αὐτῆς τὴν αὔξησιν τῶν δαπανῶν διὰ τὰς εἰσαγωγάς. Ἀντιθέτως, ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου τῶν ἐξαγωγῶν τῆς χώρας, θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν μείωσιν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, ἥτις εἶναι φυσικὸν νὰ φέρῃ ὡς ἐπακόλουθον τὴν μείωσιν τῶν δαπανῶν διὰ τὰς εἰσαγωγὰς καὶ ἑπομένως τὴν μείωσιν τοῦ βιοτικοῦ ἐπιπέδου τῆς χώρας. Αὔξησις εἰς τὰς ἐξαγωγὰς ἢ εἰς τὴν ἐγχώριον παραγωγὴν ἀγαθῶν δυναμένων νὰ χρησιμοποιηθῶσιν ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν ὡς ὑποκαταστάτων τῶν εἰσαγομένων, δύναται νὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν αὔξησιν εἰς τὰς εἰσαγωγὰς πρώτων ὑλῶν κ.λ.π. Ὁπωσδήποτε, ὅλαι αἱ ἀλλαγαὶ αἱ ὁποῖαι δημιουργοῦνται ὡς συνέπειαι τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος ἐπὶ τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως διὰ τὰς εἰσαγωγὰς καὶ ἐπὶ τῆς καμπύλης τῆς προσφορᾶς διὰ τὰς ἐξαγωγάς, ἐπηρεάζουν τὸ μέγεθος καὶ ὄχι τὴν κατεύθυνσιν τῆς ἀλλαγῆς τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου.

Ἐὰν πρὸς στιγμὴν παραλείψωμεν τὸν δευτερεύοντα λόγον τοῦ εἰσοδήματος, δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν τὰς ἀλλαγὰς εἰς τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου τῆς χώρας χρησιμοποιοῦντες τὰς 4 ἐλαστικότητας.

Ἂς παραστήσωμεν μὲ E τὴν ποσότητα τῶν ἐξαγωγῶν, μὲ I τὴν ποσότητα τῶν εἰσαγωγῶν, μὲ p τὴν τιμὴν τῶν εἰσαγωγῶν εἰς τὴν κυκλοφορίαν τῆς χώρας καὶ μὲ q τὴν τιμὴν τῶν ἐξαγωγῶν εἰς τὴν κυκλοφορίαν τῆς χώρας. Ἔστωσαν η_1 καὶ η_2 αἱ ἀντίστοιχοι ἐλαστικότητες τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ζητήσεως καὶ ε_1, ε_2 αἱ ἀντίστοιχοι ἐλαστικότητες τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς προσφορᾶς. Ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι αἱ ποσότηται E καὶ I ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν δεδομένην τιμὴν τοῦ συναλλάγματος σ, ἂς ζητήσωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς ἀναλογικῆς μειώσεως ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος, ἔστω $\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \mu$ ἐπὶ τῶν ποσοτήτων E καὶ I. Ἡ τιμὴ q τῶν ἐξαγωγῶν θὰ αὐξηθῇ κατὰ τὴν ποσότητα Δq. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ΔE τὴν ἀντιστοιχοῦσαν μεταβολὴν εἰς τὴν ποσότητα τῶν ἐξαγωγῶν, ἡ ἐλαστικότης τῆς προσφορᾶς τῶν ἐξαγωγῶν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta E}{E} \Big/ \frac{\Delta q}{q}.$$

Ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγὰς εὑρίσκεται ὡς ἀκολούθως :

Ἡ ἐλάττωσις τῆς τιμῆς τῶν ἐξαγωγῶν, εἰς τὴν διεθνῆ ἀγορὰν εἶναι :

$$q - (q + \Delta q) + \mu (q + \Delta q) = \mu q - \Delta q + \mu \Delta q = \mu q - \Delta q \qquad (1)$$

ἐπειδὴ μ εἶναι πολὺ μικρὸς ἀριθμός.

Ἑπομένως, ἡ ἀντιστοιχοῦσα ἀναλογικὴ ἐλάττωσις εἰς τὴν τιμὴν τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγὰς εἶναι :

$$\frac{\mu q - \Delta q}{q} = \mu - \frac{\Delta q}{q}$$

καὶ ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγὰς εἶναι :

$$\eta_2 = \frac{\Delta E}{E} \Big/ \mu - \frac{\Delta q}{q}$$

(δέον νὰ τονισθῇ ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ζήτησις διὰ τὰς ἐξαγωγὰς ὑπολογίζεται εἰς ξένην κυκλοφορίαν).

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐλαστικότης τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγάς :

$$\varepsilon_2 = -\frac{\Delta I}{I} \Big/ \mu - \frac{\Delta p}{p}$$

καὶ ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγὰς εἶναι :

$$\eta_1 = -\frac{\Delta I}{I} \Big/ \frac{\Delta p}{p}.$$

Παραλείπομεν τὴν ἔρευναν τῶν ἐλαστικοτήτων ἀπὸ τῆς ἀλγεβρικῆς αὐτῶν πλευρᾶς, διότι εἰς τὴν περαιτέρω ἀνάλυσιν θὰ χρησιμοποιήσωμεν μόνον τὸ ἀριθμητικὸν μέγεθος τῶν ἐλαστικοτήτων [1].

Ἡ μεταβολὴ τῆς τιμῆς τῶν ἐξαγωγῶν εἶναι :

$$(E + \Delta E)(q + \Delta q) - Eq = E\Delta q + q\Delta E + \Delta q \Delta E.$$

Ὁ τελευταῖος ὅρος δύναται νὰ παραλειφθῇ, δεδομένου ὅτι παριστᾷ σχετικῶς μικρὰν ποσότητα καὶ ἑπομένως ἡ αὔξησις εἶναι $E\Delta q + q\Delta E$.

Λαμβάνοντες τὰς τιμὰς τῶν ΔE καὶ Δq συναρτήσει τῶν ἐλαστικοτήτων ε_1 καὶ η_2 εὑρίσκομεν :

$$\Delta q = \frac{\eta_2 \mu q}{\eta_2 + \varepsilon_1} \quad \text{καὶ} \quad \Delta E = \frac{\varepsilon_1 \eta_2 \mu E}{\eta_2 + \varepsilon_1} \tag{2}$$

δι᾽ ἀντικαταστάσεως δ᾽ εἰς τὴν $E\Delta q + q\Delta E$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μεταβολὴ τῶν εἰσαγωγῶν εἶναι :

$$\mu Eq \, \frac{\eta_2 (1 + \varepsilon_1)}{\eta_2 + \varepsilon_1} \tag{3}$$

Ὁμοίως, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μεταβολὴ τῶν εἰσαγωγῶν εἶναι :

$$\mu IP \, \frac{\varepsilon_2 (1 - \eta_1)}{\varepsilon_2 + \eta_1} \tag{4}$$

ἄρα, ἡ μεταβολὴ εἰς τὸ ἐμπορικὸν ἰσοζύγιον εἶναι :

$$\mu \left[Eq \, \frac{\eta_2 (1 + \varepsilon_1)}{\eta_2 + \varepsilon_1} - Ip \, \frac{\varepsilon_2 (1 - \eta_1)}{\eta_1 + \varepsilon_2} \right] \tag{5}$$

Ἐκ τῆς (3) καταφαίνεται ὅτι διά τινα δοθεῖσαν ἐλαστικότητα τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγάς, ὁ βαθμὸς τῆς αὐξήσεως τῶν ἐξαγωγῶν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγάς. Ἡ αὔξησις τῆς ἀνταλλακτικῆς ἀξίας τῶν ἐξαγωγῶν (ἐκτιμωμένης εἰς ξένην κυκλοφορίαν) θὰ εἶναι τοσούτῳ μικροτέρα, ὅσῳ μικροτέρα εἶναι καὶ ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ· καὶ τἀνάπαλιν. Ἐὰν ἡ ἐξωτερικὴ ζήτησις εἶναι ἀπολύτως ἀνελαστική, δηλαδὴ η_2 νὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ 0, δὲν θὰ ἐπέλθῃ αὔξησις εἰς τὸν ὄγκον τῶν ἐξαγωγῶν καὶ συνεπῶς εἰς τὴν ἀνταλλακτικὴν αὐτῶν ἀξίαν, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς (2) καὶ (3). Ἐὰν ἡ προσφορὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξα-

1. Εἰς τὴν πραγματείαν της ἡ J. Robinson λαμβάνει τὰς ἐλαστικότητας τῶν δύο προσφορῶν ὡς θετικὰς καὶ τὰς ἐλαστικότητας τῶν δύο ζητήσεων ὡς ἀρνητικάς.

γωγὰς εἶναι ἀπολύτως ἀνελαστική, δηλαδὴ ε_1 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς 0, τότε ὁ ὄγκος τῶν ἐξαγωγῶν δὲν ἀλλάζει, ἡ ἀνταλλακτικὴ ἀξία τῶν ἐξαγωγῶν ἐκτιμωμένη εἰς κυκλοφορίαν τοῦ ἐξωτερικοῦ παραμένει ἡ ἰδία ἡ δ' ἀξία τῶν ἐξαγωγῶν αὐξάνει ἀναλόγως τῆς πτώσεως τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς (2) καὶ (3). Ἐὰν ἡ προσφορὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγὰς εἶναι ἀπολύτως ἐλαστική, τότε ε_1 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄπειρος· ἡ τιμὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγὰς παραμένει σταθερὰ καὶ ἡ τιμὴ τῶν ξένων ἀγοραστῶν ἐλαττοῦται ἀναλόγως πρὸς τὴν ἐλάττωσιν τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος (ὡς φαίνεται ἐκ τῆς (1) καὶ (2)). Ἐὰν ἡ ἐλαστικότης τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐσωτερικοῦ εἶναι μεταξὺ μηδενὸς καὶ ἀπείρου, τότε ἡ τιμὴ τῶν ἐξαγωγῶν αὐξάνεται ὅταν αὐξάνεται ὁ ὄγκος αὐτῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου τύπου τῆς ἐλαστικότητος· ἡ τιμὴ τῶν ξένων ἀγοραστῶν ἐλαττοῦται ὀλιγώτερον ἀπὸ τὴν ἀνάλογον ἐλάττωσιν τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος.

Ἐὰν ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ εἶναι μοναδιαία καὶ ἑπομένως ἡ δαπάνη τῶν ξένων ἀγοραστῶν διὰ τὰς ἐξαγωγὰς παραμένει ἡ αὐτή, ἡ ἀξία τῶν ἐξαγωγῶν δὲν ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὴν ἐλαστικότητα τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγάς, ἀλλὰ αὐξάνει ἀναλόγως τῆς ἐλαττώσεως τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος ὡς φαίνεται ἐκ τῆς (3).

Ἐὰν ἡ ζήτησις τοῦς ἐξωτερικοῦ διὰ τὰ ἐξαγωγὰς ἔχῃ ἐλαστικότητα μικροτέραν τῆς μονάδος (δηλαδὴ εἶναι ἀνελαστική), ἡ αὔξησις εἰς τὴν ἀνταλλακτικὴν ἀξίαν τῶν ἐξαγωγῶν θὰ εἶναι τοσούτῳ μεγαλυτέρα ὅσῳ μικροτέρα εἶναι ἡ αὔξησις τοῦ ὄγκου των, δηλαδὴ ὅσῳ μικροτέρα εἶναι ἡ ἐλαστικότης τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγάς, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς (2) καὶ (3).

Ὅταν ἡ ζήτησις τοῦ ἐξωτερικοῦ εἶναι ἀνελαστική, ἡ μεγίστη δυνατὴ αὔξησις εἰς τὴν ἀξίαν τῶν ἐξαγωγῶν πραγματοποιεῖται ὅταν ἡ ἐλαστικότης τῆς προσφορᾶς διὰ τὰς ἐξαγωγὰς εἶναι μηδέν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀξία τῶν ἐξαγωγῶν αὐξάνει ἀναλόγως τῆς ἐλαττώσεως τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος.

Ὅταν ἡ ζήτησις τοῦ ἐξωτερικοῦ εἶναι ἀνελαστική, ἐνδεχομένη αὔξησις εἰς τὸν ὄγκον τῶν ἐξαγωγῶν συνεπάγεται αὔξησιν τῆς ἀξίας αὐτῶν μικροτέραν τῆς ἀναλόγου ἐλαττώσεως τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος. Ὅταν ἡ ζήτησις τοῦ ἐξωτερικοῦ εἶναι ἐλαστικὴ ἡ αὔξησις εἰς τὸν ὄγκον τῶν ἐξαγωγῶν συνεπάγεται αὔξησιν τῆς ἀξίας αὐτῶν, μεγαλυτέραν τῆς ἐλαττώσεως τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος. Ὅθεν, ἡ ἀξία τῶν ἐξαγωγῶν ἀποβαίνει τοσούτῳ μεγαλυτέρα ὅσῳ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἐλαστικότης τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγάς. Ὥστε, ὅταν ἡ προσφορὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ εἶναι ἐλαστική, αὕτη ἐπηρεάζει θετικῶς τὴν αὔξησιν τῆς ἀξίας τῶν ἐξαγωγῶν καὶ συμφώνως μὲ τὴν ἐλαστικότητα ἢ ἀνελαστικότητα τῆς ζητήσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ. Ἐπὶ ἐλαττώσεως τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος εἰς τὴν ἀξίαν τῶν ἐξαγωγῶν, τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν ἀποτέλεσμα πραγματοποιεῖται ὅταν ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ εἶναι μηδέν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ ἀξία τῶν ἐξαγωγῶν δὲν αὐξάνεται. Ἐπὶ ἐλαττώσεως τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος εἰς τὴν ἀξίαν τῶν ἐξαγωγῶν, τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν ἀποτέλεσμαπραγματοποιεῖται ὅταν ἡ ζήτησις τοῦ ἐξωτερικοῦ εἶναι ἀπολύτως ἐλαστική, ἡ δὲ προσφορὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ ἐπίσης ἀπολύτως ἐλαστική. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀξία τῶν ἐξαγωγῶν εἶναι ἀπείρως μεγάλη.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς (4) δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν τὴν πλευρὰν τῶν εἰσαγωγῶν τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου. Ἐὰν ἡ ἐλαστικότης τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγὰς ε_2 εἶναι ἀπολύτως ἐλαστική, καὶ ἑπομένως ἡ ἀνταλλακτικὴ ἀξία τῶν ἐξαγωγῶν, ἐκτιμωμένη εἰς ξένας κυκλοφορίας παραμένει σταθερά, τότε ἡ τιμὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ θὰ αὐξηθῇ ἀναλόγως τῆς ἐλαττώσεως τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος. Ἐὰν ἡ ἐλαστικότης τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγὰς εἶναι μικροτέρα τῆς ἀπολύτου, ἡ μείωσις τῆς παραγωγῆς θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν ἐλάττωσιν τῆς τιμῆς τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγάς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ τιμὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγὰς αὐξάνεται ὀλιγώτερον ἀπὸ τὴν ἐλάττωσιν τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος. Κατὰ συνέπειαν, ὅταν ἡ ζήτησις τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγὰς εἶναι ἀνελαστική, ἡ ἀξία τῶν εἰσαγωγῶν θὰ αὐξηθῇ περισσότερον. Ὅταν ἡ ζήτησις τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγὰς εἶναι ἀνελαστική, θὰ ἐλαττωθῇ τοσούτῳ περισσότερον ὅσῳ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἐλαστικότης τῆς προσφορᾶς τοῦ ἐξωτερικοῦ.

Ἡ μεγίστη δυνατὴ αὔξησις εἰς τὴν ἀξίαν τῶν εἰσαγωγῶν δι᾽ ἐλαττώσεως εἰς τὴν τιμὴν τοῦ συναλλάγματος, πραγματοποιεῖται ὅταν ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως διὰ τὰς εἰσαγωγὰς εἶναι ἀπολύτως ἀνελαστική. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὁ ὄγκος τῶν εἰσαγωγῶν παραμένει σταθερός, ἡ τιμή των εἰς τὸ ἐξωτερικὸν παραμένει ἡ ἰδία καὶ ἡ τιμή των εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐξάνει ἀναλόγως τῆς ἐλαττώσεως τῆς τιμῆς τοῦ συναλλάγματος.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως ἡ J. Robinson καταλήγει εἰς τὰ ἀκόλουθα γενικὰ συμπεράσματα, ἐν σχέσει μὲ τὸ ἐμπορικὸν ἰσοζύγιον δοθείσης τινὸς χώρας. Ὅταν ἡ ζήτησις τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγὰς εἶναι ἐλαστικὴ (ὅταν ἔχῃ ἐλαστικότητα μεγαλυτέραν τῆς μονάδος), ἡ ἐλάττωσις εἰς τὴν τιμὴν τοῦ συναλλάγματος θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν αὔξησιν τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου, ἐπειδὴ ἡ ἀξία τῶν εἰσαγωγῶν ἐλαττοῦται ἐνῷ ἡ ἀξία τῶν ἐξαγωγῶν καὶ εἰς τὴν χειροτέραν ἔτι περίπτωσιν παραμένει σταθερά. Ἐὰν ἡ ζήτησις τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγὰς εἶναι ἀνελαστική, τὸ ἐμπορικὸν ἰσοζύγιον ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ αὐξηθῇ ἐὰν ἔχῃ πραγματοποιηθῇ ἐπαρκὴς αὔξησις εἰς τὰς ἐξαγωγάς. Ἐὰν ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰς ἐξαγωγὰς δὲν εἶναι ἐπαρκὴς διὰ νὰ ἀντισταθμίσῃ τὴν ἐπίδρασιν τῆς χαμηλῆς ἐλαστικότητος ἢ ἀνελαστικότητος τῆς ζητήσεως διὰ τὰς εἰσαγωγάς, τότε μία ἐλάττωσις εἰς τὴν τιμὴν τοῦ συναλλάγματος θὰ ἔχῃ ὡς ἀποτέλεσμα καὶ τὴν ἐλάττωσιν τοῦ ἰσοζυγίου τῶν πληρωμῶν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν χώρας μὲ ὑποανεπτυγμένην οἰκονομίαν, ὅπου ἡ ζήτησις τοῦ ἐσωτερικοῦ διὰ τὰς εἰσαγωγὰς εἶναι ἀνελαστικὴ ἡ δὲ ζήτησις τοῦ ἐξωτερικοῦ διὰ τὰ προϊόντα αὐτῆς εἶναι ἐλαστική, ἡ ὑποτίμησις εἰς τὴν κυκλοφορίαν της πιθανώτατα θὰ ἔχῃ ἀρνητικὰ ἀποτελέσματα εἰς τὸ ἐμπορικὸν αὐτῆς ἰσοζύγιον.

Προβλήματα

Πρόβλημα 1ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαστικότης τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

$$e^x, \quad e^{-x}, \quad 5x+3, \quad 3x^2+5x+10,$$

$$xe^x, \quad xe^{-x}, \quad x^\alpha e^{-(x+\beta)}, \quad x^\mu e^{\nu x}.$$

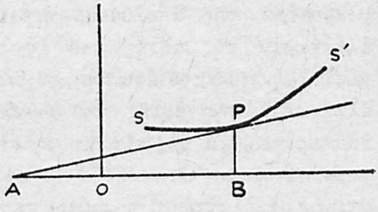
Πρόβλημα 2ον) Ἐὰν ἡ ἐλαστικότης τῆς συναρτήσεως $f(x)$ εἶναι ε, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐλαστικότης τῆς $x f(x)$ καὶ $\frac{f(x)}{x}$ εἶναι $\varepsilon + 1$ καὶ $\varepsilon - 1$ ἀντιστοίχως.

Πρόβλημα 3ον) Νὰ γίνῃ ἐπαλήθευσις τοῦ προβλήματος 2 ὅταν $f(x) = 5x^2$.

Πρόβλημα 4ον) Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῆς ἐλαστικότητος η ὅταν $x = \alpha p + \beta$ καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{d\eta}{dp} > 0$.

Πῶς μεταβάλλεται ἡ ἐλαστικότης;

Πρόβλημα 5ον) Ἐὰν ss' εἶναι ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς, δείξατε ὅτι ἡ ἐλαστικότης εἰς τὸ σημεῖον Μ εἶναι $\frac{AB}{OA}$ (Σχ. 69).



Σχ. 69

Πρόβλημα 6ον) Δείξατε ὅτι ἡ ἐλαστικότης τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καὶ παριστωσῶν καμπύλας προσφορᾶς εἶναι 1.

Πρόβλημα 7ον) Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι παριστῶσι καμπύλας ζητήσεως νὰ εὑρεθῇ ποία εἶναι περισσότερον ἐλαστικὴ διὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα x καὶ ποία εἶναι περισσότερον ἐλαστικὴ διὰ τὴν τιμὴν p.

Πρόβλημα 8ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαστικότης τῶν συναρτήσεων τῆς σελίδος 31 (Κεφ. ΙΙ) ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x καὶ νὰ μελετηθῇ δι' ἑκάστην αὐτῶν ἡ ἐλαστικότης τῆς συναρτήσεως ὡς συνάρτησις τοῦ x. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ x δι' ἑκάστην τῶν συναρτήσεων, ὅταν ἡ ἐλαστικότης εἶναι μοναδιαία.

Πρόβλημα 9ον) Ἐὰν $x = \frac{25}{p+2}$ εἶναι ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαστικότης η ὅταν $p = 3$. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ζητήσεως καὶ νὰ ἀποδειχθοῦν δι' ἀκριβοῦς μετρήσεως αἱ γεωμετρικαὶ ἐκφράσεις τῆς ἐλαστικότητος (VIII. 1).

Πρόβλημα 10ον) Ἐάν, δοθείσης συναρτήσεώς τινος τῆς ζητήσεως, παραστήσωμεν ἀντιστοίχως μὲ R_Δ καὶ R_M τὴν διαφορικὴν καὶ μέσην πρόσοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι $\eta = \frac{R_M}{R_M - R_\Delta}$ δι' οἱανδήποτε τιμὴν τῆς παραγωγῆς. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ἰσότης αὐτὴ ὅταν ἡ ζήτησις εἶναι γραμμική.

Πρόβλημα 11ον) Ἐὰν ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως εἶναι $x = \alpha e^{-\beta p}$, νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ἐλαστικότης, ἡ ὁλικὴ πρόσοδος καὶ ἡ διαφορικὴ πρόσοδος ὡς συνάρτησις τοῦ x. Νὰ μελετηθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς ἐλαστικότητος καὶ νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x ἡ ὁλικὴ πρόσοδος εἶναι μεγίστη.

Πρόβλημα 12ον) Α'. Αἱ καμπύλαι τῆς ζητήσεως μὲ σταθερὰν ἐλαστικότητα εἶναι τῆς μορφῆς $xp^n = \alpha$ ὅπου α εἶναι σταθερὸς θετικὸς ἀριθμός. Ἐὰν γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ λογαριθμικὴν μορφὴν

$$\text{λογ}\, x + \eta\, \text{λογ}\, p = \text{λογ}\, \alpha$$

ἥτις παριστᾷ εὐθεῖαν ὅταν χρησιμοποιοῦμεν λογαριθμικὰς κλίμακας. Ἡ ἐλαστικότης ὡς γνωστὸν (VIII. 3) εἶναι ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν λογ p. Σχηματίσατε ἕνα πίνακα τιμῶν διὰ μίαν καμπύλην μὲ ἐλαστικότητα 1. Χαράξατε τὴν καμπύλην εἰς λογαριθμικὰς κλίμακας καὶ ἐπαληθεύσατε διὰ μετρήσεως ὅτι ἡ ἐλαστικότης εἶναι 1.

Β΄. Τὸ αὐτὸ ὅταν ἡ ἐλαστικότης εἶναι $\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα 13ον) Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα ἑνὸς μονοπωλίου, ἐὰν $x = \lambda e^{-\xi p}$ εἶναι ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως καὶ $F(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους τοῦ μονοπωλίου.

Πρόβλημα 14ον) Ἐὰν τὸ μονοπώλιον τοῦ προβλήματος 13 παράγῃ συσκευὰς τηλεοράσεως καὶ ἡ συνάρτησις $x = \lambda e^{-\xi p}$ παριστᾷ τὴν μηνιαίαν ζήτησιν ὅταν $\lambda = 1$ καὶ $\xi = {}^4/_{18}$ τὸ δὲ κόστος $F(x) = \left(\frac{1}{15} x^2 + 5x + 120\right)$ ἑκατ. δραχμῶν, νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ διαφορικοῦ κόστους καὶ τῆς διαφορικῆς προσόδου εἰς τὸ αὐτὸ διάγραμμα καὶ νὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν ὁ ἀριθμὸς τῶν συσκευῶν, ὅστις ἀποδίδει τὴν μεγίστην πρόσοδον εἰς τὸ μονοπώλιον.

Πρόβλημα 15ον) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσότης $\frac{dR}{dx} = p\,(1 - 1/\eta)$ εἰς ἣν περίπτωσιν ἡ ζήτησις εἶναι γενικὴ καμπύλη. Ὑποδείξατε τρόπον κατασκευῆς τῆς καμπύλης τῆς διαφορικῆς προσόδου.

Πρόβλημα 16ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαστικότης τῶν συναρτήσεων τοῦ κόστους (3) ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x καὶ νὰ μελετηθῇ δι' ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἡ ἐλαστικότης ὡς συνάρτησις τοῦ x. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ x δι' ἑκάστην τῶν συναρτήσεων ὅταν ἡ ἐλαστικότης εἶναι μοναδιαία.

Πρόβλημα 17ον) Ἐὰν $x = f(p)$ εἶναι ἡ συνάρτησις τῆς προσφορᾶς, ὁρίσατε τὴν ἐλαστικότητα τῆς συναρτήσεως αὐτῆς καὶ μελετήσατε τὴν μεταβολὴν τῆς ἐλαστικότητος τῆς προσφορᾶς ὅταν $x = \sqrt{p - \alpha}$ $(p > \alpha)$.

Πρόβλημα 18ον) Ἐὰν ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους ἐπιχειρήσεώς τινος εἶναι $\Pi(x) = \alpha x^2 + \beta x$ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαστικότης καὶ νὰ μελετηθῇ πῶς αὕτη μεταβάλλεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΑΣΙΣ

IX. 1. Ὁμαλὴ περίπτωσις τῆς παραγωγῆς

Διὰ τὴν παραγωγὴν ὡρισμένης ποσότητος x ἀγαθοῦ τινος ἀπαιτεῖται ἡ χρησιμοποίησις ὡρισμένης ποσότητος συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, δηλαδὴ κεφαλαίου, ἐργατικῆς δυνάμεως καὶ ἐδάφους. Ἐὰν α, β, γ, εἶναι αἱ ἀπαιτούμεναι ποσότητες τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ποσότητος x τοῦ ἀγαθοῦ, τότε αἱ ποσότητες αὐταὶ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν παραγωγὴν x, δηλαδή:

$$\alpha = \alpha(x), \qquad \beta = \beta(x), \qquad \gamma = \gamma(x).$$

Ἐπομένως, ἡ παραγωγὴ x ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ τοὺς τρεῖς συντελεστάς, ὡς ἐπίσης καὶ ἐκ τοῦ τρόπου κατὰ τὸν ὁποῖον μεταβάλλονται αἱ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες αὐτῶν. Οὕτω δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν :

$$f(x, \alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad ἢ \quad x = f(\alpha, \beta, \gamma)$$

ὡς συνάρτησιν τῆς παραγωγῆς.

Ἡ πρώτη συνάρτησις εἶναι πεπλεγμένη συνάρτησις, ἡ δὲ δευτέρα εἶναι λελυμένη συνάρτησις ὡς πρὸς τὴν παραγωγήν. Διὰ τὴν κατωτέρω ἀνάλυσιν θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν λελυμένην μορφὴν τὴν συναρτήσεως, ὑποθέτοντες ὅτι μόνον δύο ἐκ τῶν βασικῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς μεταβάλλονται. Ἤτοι, $x = f(\alpha, \beta)$. Τὴν συνάρτησιν αὐτὴν θεωροῦμεν συνεχῆ ὡς πρὸς τὰς δύο μεταβλητάς, ὑποθέτοντες ὅτι δυνάμεθα νὰ ὑποδιαιρῶμεν συνεχῶς τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν. Ὁμοίως ἐκλαμβάνομεν τὴν ὅλην πορείαν τῆς παραγωγῆς ὡς συνεχῆ, τὸ δὲ τεχνικὸν ἐπίπεδον αὐτῆς ὡς σταθερόν. Κατὰ συνέπειαν ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς παρίσταται δι᾽ ἐπιφανείας εἰς ἓν σύστημα ἀξόνων Οαβx, εἰς τὸ ὁποῖοιν τὸ x εἶναι ὁ κατακόρυφος ἄξων.

Ἐὰν πρὸς στιγμὴν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ παραγωγὴ εἶναι σταθερά, τότε ἡ ἐξίσωσις :

$$f(\alpha, \beta) = \text{σταθερὰ} \tag{1}$$

δίδει ὅλα τὰ ζεύγη (α, β) τῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ χρησιμοποιηθῶσι διὰ τὴν σταθερὰν αὐτὴν ποσότητα τῆς παραγωγῆς. Ἑπομένως, ὑπάρχουσι διάφοροι τρόποι συνδυασμοῦ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, οἱ ὁποῖοι ἀποφέρουν τὴν αὐτὴν παραγωγήν. Ἐπίσης, ἐὰν ἡ χρησιμοποιουμένη ποσότης τοῦ συντελεστοῦ β, β_1 εἶναι σταθερά, τότε ἡ παραγωγὴ **x** διὰ τὴν χρονικὴν περίοδον, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶναι σταθερὰ εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς χρησιμοποιουμένης ποσότητος τοῦ συντελεστοῦ α, δηλαδή:

$$x = f(\alpha, \beta_1) = f_1(\alpha) \tag{2}$$

Ὁμοίως, διά τινα χρησιμοποιουμένην σταθερὰν ποσότητα ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α, α_1 ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς χρησιμοποιουμένης ποσότητος ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β, δηλαδή :

$$x = f(\alpha_1, \beta) = f_2(\beta) \tag{3}$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) παριστᾷ τὰς ὁριζοντίους τομὰς τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγωγῆς, αἱ δὲ ἐξισώσεις (2) καὶ (3) παριστοῦν κατακορύφους τομὰς τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγωγῆς· ἑπομένως, αἱ γραφικαὶ αὐτῶν παραστάσεις δύνανται νὰ ἐξετασθῶσιν ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τομῆς μὲ ἄξονας Οαβ, Οαx, Οβ**x**.

Μία ἁπλῆ μορφὴ τῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ἀρχίζοντες ἀπὸ δύο σταθερὰς βασικὰς ποσότητας α_1, β_1 αὐξάνομεν ἢ ἐλαττώνομεν αὐτὰς κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον λ. Δηλαδή :

$$\mathbf{x} = f(\alpha, \beta) = f(\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1) = \varphi(\lambda).$$

Ἐὰν μία καὶ ἡ αὐτὴ ἀνάλογος αὔξησις τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ἔχῃ ὡς ἀποτέλεσμα τὴν αὐτὴν ἀνάλογον αὔξησιν, τότε ἡ συνάρτησις ἡ παριστῶσα τὴν παραγωγὴν εἶναι ὁμογενὴς γραμμικὴ συνάρτησις.

Δηλαδή, ἐὰν :

$$x = f(\alpha, 6, \gamma)$$

εἶναι μία τοιαύτη συνάρτησις τῆς παραγωγῆς, ἐπαληθεύει ἡ ἰσότης

$$\lambda x = \lambda f(\alpha, \beta, \gamma) = f(\lambda\alpha, \lambda 6, \lambda\gamma)$$

δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ λ, ὅπου λ εἶναι ὁ συντελεστὴς ἀναλογίας. Π.χ. ἡ παραγωγὴ κορινθιακῆς σταφίδος διπλασιάζεται ὅταν διπλασιάζωμεν τὸ ἔδαφος καὶ τὴν ἐργατικὴν δύναμιν καὶ τριπλασιάζεται ὅταν τριπλασιάζωμεν τὸ χρησιμοποιούμενον ἔδαφος καὶ τὴν ἐργατικὴν δύναμιν κ.ο.κ. Ἐπιπροσθέτως, ἡ παραγωγὴ κορινθιακῆς σταφίδος κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ κατ' ἐργάτην ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν τῶν χρησιμοποιουμένων κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον.

Ὁμοίως, ἐξαρτᾶται καὶ ἡ ὁριακὴ παραγωγὴ σταφίδος κατ' ἐργάτην καὶ κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον.

IX. 2. Μέση καὶ διαφορικὴ παραγωγὴ

Ἔστω $x = f(\alpha, 6)$ ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς καὶ Α, Β αἱ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες ἐκ τῶν συντελεστῶν α, 6, διὰ τὴν παραγωγὴν ἀγαθοῦ τινος x.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ποσότης Β παραμένει σταθερὰ ἐν ᾧ ἡ ποσότης Α τοῦ συντελεστοῦ α μεταβάλλεται, τότε καὶ ἡ ποσότης τῆς παραγωγῆς x μεταβάλλεται ἐν σχέσει πρὸς τὴν ποσότητα Α, ὁπότε ὁ λόγος $\frac{x}{\alpha}$ παριστᾷ τὴν μέσην παραγωγὴν ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν τῆς παραγωγῆς α (ποσότης παραγωγῆς κατὰ μονάδα τοῦ συντελεστοῦ α). Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅταν ἡ ποσότης Α εἶναι σταθερά, ὁ λόγος $\frac{x}{6}$ παριστᾷ τὴν μέσην παραγωγὴν ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν τῆς παραγωγῆς 6.

Ὅταν ἡ ποσότης Β τοῦ συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς β εἶναι σναθερά, ἡ μερικὴ παράγωγος $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ παριστᾷ τὴν διαφορικὴν παραγωγὴν ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν α, δηλαδὴ δίδει τὸ μέτρον τῆς μεταβολῆς τῆς παραγωγῆς, ὅταν ἡ ποσότης Β παραμένῃ σταθερὰ ἐνῷ ἡ ποσότης Α αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἡ μερικὴ παράγωγος $\frac{\partial x}{\partial 6}$ παριστᾷ τὴν διαφορικὴν παραγωγὴν ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν 6. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μέση καὶ διαφορικὴ παραγωγὴ ὡς πρὸς ἕνα ἐκ τῶν δύο συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ἐξαρτῶνται καὶ ἀπὸ τοὺς δύο συντελεστὰς α καὶ 6.

Δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν τὸν τρόπον μεταβολῆς τῆς μέσης καὶ διαφορικῆς παραγωγῆς ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3). Οὕτως, ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει τὴν παραγωγὴν ὡς συνάρτησιν τοῦ α, ὅταν ἡ χρησιμοποιουμένη ποσότης ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β εἶναι 6_1. Ἡ μέση παραγωγὴ ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν α εἰς ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης τῆς παριστωμένης ὑπὸ τῆς (2) ἔστω $m(\alpha, x)$ ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς εὐθείας Om, ἡ δὲ διαφορικὴ παραγωγὴ ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἐκ τῆς (2) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν συνάρτησιν τῆς μέσης παραγωγῆς, καθὼς καὶ τῆς διαφορικῆς παραγωγῆς, ὡς ἐπίσης καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας καμπύλας αὐτῶν. Ἡ σχετικὴ θέσις τῶν τριῶν αὐτῶν καμπυλῶν, καθὼς καὶ τὸ σχετικὸν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον αὐτῶν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν σταθερὰν ποσότητα β_1 τοῦ συντελεστοῦ β.

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς $x = \sqrt{\alpha\beta}$ ἔχομεν :

$$\frac{x}{\alpha} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\frac{x}{\beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Ἐπομένως, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅταν β_1 εἶναι ἡ σταθερὰ ποσότης ἡ χρησιμοποιουμένη ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β ἡ μέση καὶ διαφορικὴ παραγωγὴ ὡς πρὸς α ἐλαττοῦται, ὅταν αὐξάνεται ἡ χρησιμοποιουμένη ποσότης τοῦ συντελεστοῦ α.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι :

$$x = 2\,\Gamma\alpha\beta - Z\alpha^2 - H\beta^2 \quad (\Gamma^2 > ZH)$$

ὅπου Γ, Ζ, Η εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, τότε :

$$\frac{x}{\alpha} = 2\,\Gamma\beta - Z\alpha - H\,\frac{\beta^2}{\alpha}$$

καὶ

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 2\,(\Gamma\beta - Z\alpha)\,.$$

Δεδομένου ὅτι :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = H\,\frac{\beta^2}{\alpha^2} - Z \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = -\,2\,H\,\frac{\beta^2}{\alpha^3} < 0$$

ἐὰν β_1 εἶναι ἡ χρησιμοποιουμένη σταθερὰ ποσότης τοῦ συντελεστοῦ β, τότε ἡ μέση παραγωγὴ ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν α εἶναι μεγίστη ὅταν $\alpha = \sqrt{\frac{H}{Z}}\,\beta_1$ καὶ διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν ἡ μέση καὶ διαφορικὴ παραγωγὴ εἶναι ἴσαι πρὸς $2\,(\Gamma - \sqrt{HZ})\,\beta_1$.

Δηλαδή, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ μεγίστη δυνατὴ χρησιμοποίησις τοῦ συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς α διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς μεγίστης μέσης παραγωγῆς ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν α, αὐξάνεται ἀναλόγως πρὸς τὴν χρησιμοποιουμένην σταθερὰν ποσότητα τοῦ συντελεστοῦ β.

IX. 3. Γενικὴ παρατήρησις

Αἱ συναρτήσεις τῆς παραγωγῆς εἶναι ἔννοιαι περιγραφικαὶ τοῦ συνδυασμοῦ καὶ τοῦ τρόπου ὀργανώσεως τῶν συντελεστῶν εἰς τὴν πορείαν τῆς παραγωγῆς. Αἱ συναρτήσεις αὐταὶ προέρχονται ἀπὸ τεχνικὰς ἐπιστήμας συγγενεῖς πρὸς τὰ οἰκονομικά. π.χ. ἀπὸ τοὺς διαφόρους κλάδους τῆς μηχανικῆς, ἀπὸ τὴν βιομηχανικὴν χημείαν, ἀπὸ τὴν βιοχημείαν κ.λ.π. Εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν αἱ συναρτήσεις τῆς παραγωγῆς ἀποτελοῦν δεδομένα διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν τῆς πορείας τῆς παραγωγῆς.

Ὡς φαίνεται ἐκ τῶν δύο προηγουμένων παραγράφων, αἱ συναρτήσεις τῆς παραγωγῆς βασίζονται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῆς διαιρετότητος τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη, εἰς πολλὰς περιπτώσεις δὲν ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν ἀντικειμενικῶς ὑπάρχουσαν πραγματικότητα· τοῦτο δὲ διότι δὲν εἶναι ἐν γένει δυνατὸν οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς νὰ αὐξάνουν ἢ νὰ ἐλαττῶνται κατὰ ἀπειροστικὰς ποσότητας. Εἷς συντελεστὴς τῆς παραγωγῆς, π.χ. τὸ ἔδαφος, εἰς πολλὰς περιπτώσεις εἶναι ἀδιαίρετος ἐν σχέσει πρὸς τοὺς δύο ὑπολοίπους· ἑπομένως εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπερχρησιμοποιῆται ἢ νὰ ὑποχρησιμοποιῆται.

Ἡ ὁμογενὴς γραμμικὴ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν τῶν «σταθερῶν ἀποδοχῶν τῆς παραγωγῆς ἐπὶ τῇ βάσει ὡρισμένης κλίμακος» [1], (Constant Returns to Scale) ἀποτελεῖ καὶ αὐτὴ μίαν προσέγγισιν τῆς πραγματικότητος εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις, οὐχὶ ρεαλιστικήν. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς αὐξάνουν κατά τινα ὡρισμένην ἀναλογίαν δὲν σημαίνει ὅτι ἀπαραιτήτως αὐξάνει καὶ ἡ παραγωγὴ κατὰ τὴν ἰδίαν ἀναλογίαν. Τοῦτο γίνεται φανερὸν εἰς τὰς μεταφορικὰς ὑπηρεσίας. Π.χ. ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ «Ἀτμοπλοϊκὴ Ἑταιρεία τῆς Ἑλλάδος» διαθέτει μίαν κορβέτταν ἑβδομαδιαίως διὰ τὴν γραμμὴν Πειραιῶς - Πατρῶν, ὅτι διὰ τῆς κορβέττας αὐτῆς δύνανται νὰ ἐξυπηρετηθοῦν πλήρως 500 ἐπιβάται καὶ εἰς τὰς τρεῖς θέσεις καὶ ὅτι διὰ δοθὲν χρονικὸν διάστημα τὸ πλοῖον ταξιδεύει μὲ πλήρεις τὰς θέσεις. Τώρα, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ζήτησις διὰ τὰ εἰσιτήρια αὐξηθῇ εἰς 800 ἑβδομαδιαίως εἰς τὴν αὐτὴν γραμμήν, δημιουργεῖται πρόβλημα διὰ τὸ ὁποῖον ἡ ἑταιρία δύναται νὰ δώσῃ δύο μόνον ἐκ τῶν κατωτέρω λύσεων, ἤτοι :

α) Νὰ αὐξήσῃ τὸν χῶρον διὰ τοὺς ἐπιβάτας καὶ τὸ πλήρωμα τοῦ ἐπιβατηγοῦ καταλλήλως εἴτε διὰ μετασκευῆς τῆς ἰδίας κορβέττας εἴτε δι᾽ ἀντικαταστάσεως ταύτης μὲ ἄλλο ἐπιβατηγὸν μεγαλυτέρας χωρητικότητος.

β) Νὰ δρομολογήσῃ εἰς τὴν ἑβδομαδιαίαν γραμμὴν καὶ δευτέραν κορβέτταν τῆς ἰδίας περίπου χωρητικότητος.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ μέλλον ἡ ζήτησις διὰ τὰ εἰσιτήρια εἶναι πιθανὸν νὰ αὐξηθῇ περαιτέρω καὶ ἑπομένως νὰ χρειασθῇ καὶ νέα μετασκευή, ἡ ἀντικατάστασις τοῦ πλοίου θέλει ἀποβῇ πολυδάπανος· ἄρα, ἡ ἑταιρία θὰ προτιμήσῃ τὴν δευτέραν λύσιν. Ἀλλ᾽ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἰς τὴν ὁποίαν τὸ κεφάλαιον καὶ ἡ ἐργατικὴ δύναμις αὐξάνονται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, αἱ ἀποδοχαὶ τῆς «Ἀτμοπλοϊκῆς Ἑταιρίας τῆς Ἑλλάδος» δὲν θὰ εἶναι σταθεραὶ δεδομένου ὅτι καὶ αἱ δύο κορβέτται θὰ μεταφέρουν 800 ἐπιβάτας ἑβδομαδιαίως καὶ οὐχὶ 1000.

Οὕτως, ἡ ὁμογενὴς γραμμικὴ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν τῶν σταθερῶν ἀποδοχῶν τῆς παραγωγῆς ἐπὶ τῇ βάσει ὡρισμένης κλίμακος, ἀποτελεῖ προσέγγισιν τῆς πραγματικότητος βασιζομένην ἐπὶ τῶν δεδομένων τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως. Αὐτὸ ἀληθεύει καὶ διὰ

1. Διὰ τοῦ ὅρου σταθεραὶ ἀποδοχαὶ τῆς παραγωγῆς ἐπὶ τῇ βάσει ὡρισμένης κλίμακος, ἐννοοῦμεν ὅτι ἐὰν αἱ ποσότητες Α καὶ Β ἐκ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ἀποφέρουν Ρ τότε αἱ ποσότητες 2Α καὶ 2Β θὰ ἀποφέρουν 2Ρ.

κάθε ἄλλην συνάρτησιν τῆς παραγωγῆς. Τὰ δεδομένα τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας ἐπὶ τοῦ τομέως τῆς παραγωγῆς δὲν ἀνταποκρίνονται πάντοτε εἰς τὴν πραγματικότητα.

IX. 4. Αἱ καμπύλαι τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς

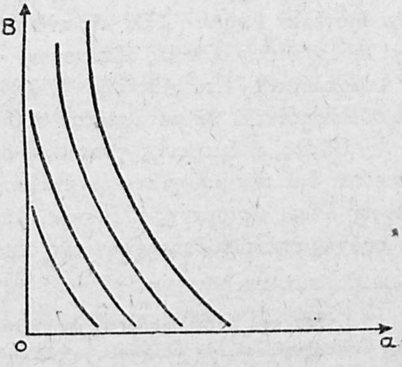
Ἔστω ὅτι ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εἶναι Α. Τότε, ἡ ἐξίσωσις $f(\alpha, \beta) = A$ παριστᾷ μίαν καμπύλην εἰς τὸ ἐπίπεδον $o\alpha\beta$, ἥτις εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ὁριζοντίου τομῆς τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγωγῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $x = A$. Κάθε σημεῖον ἐπὶ τῆς καμπύλης παριστᾷ ἓν ζεῦγος τιμῶν τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς α καὶ β, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιούμενον δίδει τὴν σταθερὰν παραγωγὴν Α. Τὴν καμπύλην αὐτὴν ὀνομάζομεν ***καμπύλην τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς***.

Αἱ καμπύλαι τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς ἀποτελοῦσι σύστημα καμπυλῶν εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον μὴ τεμνομένων μεταξύ των· ἑπομένως, δι᾽ ἑκάστου σημείου τοῦ ἐπιπέδου διέρχεται μία τοιαύτη καμπύλη. Δοθέντος, ὅθεν, ἑνὸς ζεύγους τιμῶν (α, β) τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστοιχον παραγωγήν, ἥτις ἐπίσης δύναται νὰ παραχθῇ δι᾽ οἱονδήποτε ἄλλο ζεῦγος τιμῶν κείμενον ἐπὶ τῆς καμπύλης τῆς παραγωγῆς τῆς διερχομένης διὰ τοῦ (α, β).

Αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (3) (IX. I) παριστῶσι καθέτους τομὰς τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγωγῆς, ὅταν $\beta = \beta_1$ καὶ $\alpha = \alpha_1$. Αἱ καμπύλαι αἱ παριστώμεναι ὑπὸ τῶν (2) καὶ (3) εἰς τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ παριστοῦν τὴν μεταβολὴν τῆς παραγωγῆς, ὅταν εἷς ἐκ τῶν δύο συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς εἶναι σταθερός.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, δυνάμεθα νὰ περιορίσωμεν ἔτι περισσότερον τὴν συνάρτησιν τῆς ὁμαλῆς παραγωγῆς. Οὕτω δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι, ὅταν χρησιμοποιοῦμεν μικροτέραν ποσότητα ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β τότε θὰ χρειασθῇ νὰ χρησιμοποιήσωμεν μεγαλυτέραν ποσότητα ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὴν αὐτὴν παραγωγήν. Ἐπιπλέον, ἐὰν ἡ ἀντικατάστασις τοῦ συντελεστοῦ β ὑπὸ τοῦ συντελεστοῦ α προχωρῇ συνεχῶς, θὰ χρειασθοῦν ἐξακολουθητικῶς μεγαλύτεραι ποσότητες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α διὰ τὰς δεδομένας ἐλαττώσεις τοῦ συντελεστοῦ β. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, αἱ καμπύλαι τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς κλίνουν πρὸς τὰ κάτω καὶ στρέφουν τὰ κυρτά των πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων οαβ καθ᾽ ὅλον τὸ μῆκος των εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον.

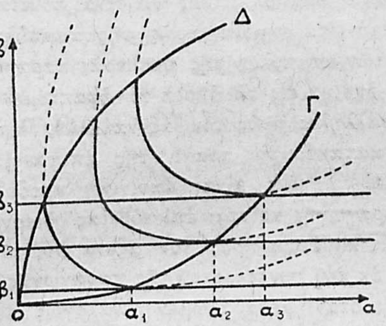
Ἐὰν αἱ καμπύλαι τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς δὲν εἶναι τῆς ἀνωτέρω μορφῆς εἰς ὁλόκληρον τὸ πρῶτον τεταρτημόριον, τότε εὑρισκόμεθα πρὸ μιᾶς γενικωτέρας περιπτώσεως. Δηλαδή, εἶναι ἐνδεχόμενον αἱ καμπύλαι νὰ πληροῦν τὰς ἀνωτέρω ὑποθέσεις μόνον ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς α καὶ β μεταβάλλωνται ἕκαστος εἰς ἓν διάστημα τιμῶν. Εἶναι ἐνδεχόμενον ἔξωθι τοῦ διαστήματος αὐτοῦ νὰ ἀπαιτῆται αὔξησις καὶ τῶν δύο συντελε-



Σχ. 69

στῶν τῆς παραγωγῆς διὰ νὰ διατηρηθῇ σταθερὰ ἡ παραγωγή.

Ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν περιοχὴν εἰς τὸ ἐπίπεδον $o\alpha\beta$, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι πληροῦνται, εὑρίσκομεν δι' ἑκάστην τιμὴν β_1 τοῦ β τὴν τιμὴν τοῦ α, α_1 ἥτις καθιστᾷ μεγίστην τὴν παραγωγὴν ἐκ τῆς (2). Διὰ τοῦ σημείου (α_1, β_1) εἰς τὸ ἐπίπεδον $o\alpha\beta$ διέρχεται μία καμπύλη σταθερᾶς παραγωγῆς. Ἐὰν τοποθετήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $o\alpha\beta$ ὅλα τὰ δυνατὰ ζεύγη τιμῶν τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς τῆς μορφῆς $(\alpha_1\ \beta_1)$, τὰ σημεῖα αὐτὰ προσδιορίζουν μίαν καμπύλην, ἥτις τέμνει τὰς καμπύλας τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς εἰς σημεῖα τῆς μορφῆς $(\alpha_1\ \beta_1)$.



Σχ. 70

Ἑπομένως ἡ καμπύλη αὕτη προσδιορίζει τὸ διάστημα τῶν τιμῶν τοῦ συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς α δι' ἑκάστην σταθερὰν καμπύλην τῆς παραγωγῆς.

Ὁμοίως, χρησιμοποιοῦντες τὴν ἐξίσωσιν (3) κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς τὴν (2) εὑρίσκομεν μίαν καμπύλην ἥτις προσδιορίζει τὸ διάστημα τιμῶν τοῦ συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς β δι' ἑκάστην σταθερὰν καμπύλην τῆς παραγωγῆς. Τὰς καμπύλας ΟΓ καὶ ΟΔ καλοῦμεν ***συνοριακάς***.

Μία συνάρτησις ἥτις πληροῖ τὰς συνθήκας τῆς ὁμαλῆς παραγωγῆς εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν εἶναι ἡ :

$$x = 2\Gamma\alpha\beta - Z\alpha^2 - H\beta^2$$

ὅπου Z, H καὶ Γ εἶναι σταθεροὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\Gamma^2 > ZH$. Αἱ καμπύλαι τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων :

$$A = 2\Gamma\alpha\beta - Z\alpha^2 - H\beta^2$$

καὶ παριστῶσιν εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον καμπύλας τοῦ ἀνωτέρω τύπου.

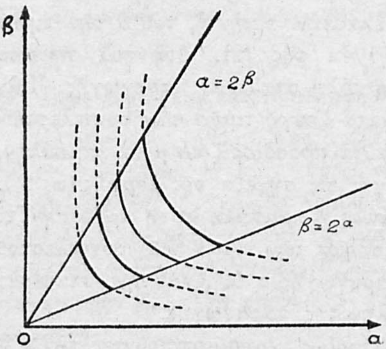
Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, αἱ συνοριακαὶ καμπύλαι εἶναι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, αἱ δὲ καμπύλαι τῶν καθέτων τομῶν (2) καὶ (3) δίδονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων :

$$x = -Z\alpha^2 + 2\Gamma\alpha\beta_1 - H\beta_1^2, \qquad x = -Z\alpha_1^2 + 2\Gamma\alpha_1\beta - H\gamma\beta^2,$$

αἵτινες παριστοῦν παραβολὰς μὲ καθέτους ἄξονας.

Παράδειγμα : Ἔστω, $x = 4\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2$ ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς. Αἱ ἐξισώσεις τῶν καμπυλῶν τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς εἶναι $A = 4\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2$. Ἐὰν $\beta = \beta_1$ εἶναι ἡ δοθεῖσα τιμὴ τοῦ β ἡ παραγωγὴ $x = 4\alpha\beta_1 - \alpha^2 - \beta_1^2$ γίνεται μεγίστη ὅταν $\alpha = 2\beta_1$ δηλαδὴ ὅταν τὸ ζεῦγος (α_1, β_1) ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν $\alpha = 2\beta$ ἥτις δίδει τὴν συνοριακὴν καμπύλην. Ὁμοίως, ὅταν $\alpha = \alpha_1$ εὑρίσκομεν $\beta = 2\alpha$. Αἱ δύο αὗται καμπύλαι ὁρίζουν τὴν περιοχὴν τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὴν ὁποίαν αἱ καμπύλαι τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς πληροῦν τὰς συνθήκας ὁμαλότητος.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι γραμμικὴ καὶ ὁμογενής, τότε ἡ ἀντίστοιχος ἐπιφάνεια εἶναι εὐθειογενὴς καὶ παράγεται ὑπὸ εὐθειῶν διερχομένων διὰ τῆς ἀρχῆς. Αἱ καμπύλαι τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς εἶναι ὁμοιόθετοι ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν, ἑκάστη δὲ τούτων εἶναι ἀκτινικὴ προβολὴ τῆς ἄλλης. Ἡ ἀπόστασίς των ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς ἥτις ὁρίζει αὐτάς.



Σχ. 71

Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν καμπυλῶν μετὰ μιᾶς ἀκτῖνος διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς εἶναι παράλληλοι καὶ ἑπομένως αἱ συνοριακαὶ καμπύλαι ΟΓ, ΟΔ εἶναι εὐθεῖαι. (Ὡς γνωστόν, τὰ σημεῖα τομῆς τῆς καμπύλης ΟΓ μετὰ τῶν καμπυλῶν τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἐφαπτόμεναι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ΟΑ). Ἐπίσης, αἱ κατακόρυφοι τομαὶ τῆς ἐπιφανείας εἶναι ὁμοιόθετοι ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν καὶ ἡ μία εἶναι ἀκτινικὴ προβολὴ τῆς ἄλλης, ἐν ᾧ τὰ σημεῖα τῆς μεγίστης παραγωγῆς κεῖνται ἐπὶ εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς. Π.χ., ἐὰν ἔχωμεν τομὰς καθέτους πρὸς τὸν ἄξονα Οϐ, τότε ἐὰν $ϐ_1$ εἶναι ἡ ποσότης ἡ χρησιμοποιουμένη ἐκ τοῦ συντελεστοῦ τῆς παραγωγῆς ϐ, λαμϐάνομεν τὴν μεγίστην δυνατὴν παραγωγὴν ὅταν μεταϐάλωμεν ἀναλόγως τὴν ποσότητα $α_1$ ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α. Ἐπιπλέον, ὑπάρχει μία εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς ο, ἥτις ἐφάπτεται ὅλων τῶν τομῶν καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ τιμὴ διὰ τὴν ὁποίαν ἡ μέση παραγωγὴ ὡς πρὸς α καθίσταται μεγίστη εἶναι ἡ αὐτή, ἀνεξαρτήτως τῆς σταθερᾶς ποσότητος τῆς χρησιμοποιουμένης ἐκ τοῦ ϐ.

IX. — 5. Ὑποκατάστασις συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς

Ἐπιχείρησίς τις προσπαθεῖ νὰ χρησιμοποιήσῃ ἐκεῖνον τὸν συνδυασμὸν τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, ὅστις ἔχει τὸ ὀλιγώτερον κόστος διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς σταθερᾶς ποσότητος ὡρισμένου τινὸς ἀγαθοῦ. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἡ ἐπιχείρησις ὑποκαθιστᾷ τὸν ἕνα συντελεστὴν διὰ τοῦ ἄλλου.

Ἔστω $\mathbf{f}$ (α, ϐ) = σταθερὰ ἡ ἐξίσωσις μιᾶς καμπύλης τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι ὁμαλὴ (ϐλ. ἀνωτέρω). Τότε :

$$f_\alpha da + f_\beta\, dB = 0$$

κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου (α, ϐ). Ἑπομένως, ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἶναι :

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{f_\alpha}{f_\beta}\,.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὁμαλῆς παραγωγῆς, ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ διευ-

1) Ἴδε Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν Ν. Σακελλαρίου.

θύνσεως τῆς ἐφαπτομένης εἶναι ἀρνητική. Ὁ λόγος $\frac{d\beta}{d\alpha}$ ἀριθμητικῶς παριστᾷ τὴν ὁριακὴν μεταβολὴν τοῦ συντελεστοῦ β ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν α, τὴν ὁποίαν καὶ παριστῶμεν διὰ τοῦ ρ. Ἤτοι :

$$\rho = -\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}.$$

Ἡ τιμὴ τοῦ ρ εἶναι συνάρτησις τῶν α καὶ β, παριστᾷ δὲ τὴν ἐπιπρόσθετον ποσότητα τοῦ συντελεστοῦ β, τὴν ὁποίαν θὰ πρέπει νὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὴν παραγωγὴν σταθεράν, ὅταν ἐλαττώνωμεν κατὰ μικράν τινα μονάδα τὴν χρησιμοποιουμένην ποσότητα ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α. Ἐκ τῆς φύσεως τῶν καμπυλῶν τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ρ αὐξάνει ὅταν τὸ β αὐξάνει (ἐν ᾧ τὸ α ἐλαττοῦται). Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν αὐξάνει τὸ ρ, θὰ πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἐλαστικότητα τῆς ὑποκαταστάσεως. Τὸ διαφορικὸν $d\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ παριστᾷ τὴν αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν χρησιμοποιήσεως τοῦ β ὡς πρὸς τὸ α. Τὸ διαφορικὸν $d\rho = d\left(\frac{f\alpha}{f\rho}\right)$ παριστᾷ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν αὔξησιν (ἢ ἐλάττωσιν) εἰς τὴν ὁριακὴν μεταβολὴν τῆς ὑποκαταστάσεως. Ἐὰν λάβωμεν τὸν λόγον τῶν ἀναλογικῶν μεταβολῶν, ὁ λόγος αὐτὸς εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὰς μονάδας μετρήσεως καὶ δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ἐλαστικότης τῆς ὑποκαταστάσεως μεταξὺ α καὶ β κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου (α, β) εἶναι :

$$\sigma = \frac{\frac{\alpha}{\beta}\, d\,(\beta/\alpha)}{\frac{d\rho}{\rho}}.$$

Ἡ τιμὴ τοῦ σ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς συνάρτησις τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς, δηλαδὴ τῶν διαφορικῶν παραγωγῶν ὡς πρὸς α καὶ β κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον :

$$d\,(B/\alpha) = \frac{\alpha dB - B d\alpha}{\alpha^2} \quad \text{καὶ} \quad d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\, d\alpha + \frac{\partial\rho}{\partial B}\, dB \cdot$$

ἀλλὰ
$$dB = -\frac{f\alpha}{fB} = -\rho d\alpha$$

$$d\,(\beta/\alpha) = -\frac{\alpha\rho + \beta}{\alpha^2}\, d\alpha \cdot \quad \text{καὶ} \quad d\rho = -\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial\beta} - \frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\, d\alpha\right.$$

Ἑπομένως :

$$\sigma = \frac{\rho}{\alpha\beta}\; \frac{\alpha\rho + \beta}{\rho\frac{\partial\rho}{\partial\beta} - \frac{\partial\partial}{\partial\alpha}}$$

Λαμβάνοντες τὰς μερικὰς παραγώγους τοῦ ρ ὡς πρὸς α, β εὑρίσκομεν :

12. 52

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{f\alpha}{f6}\right) \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial \rho}{\partial 6} = \frac{\partial}{\partial 6}\left(\frac{f\alpha}{f6}\right)$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως :

$$\sigma = \frac{f_\alpha \, f_\beta \, (\alpha f_\alpha + 6 f_\beta)}{\alpha 6 \; T}$$

ὅπου,

$$T = -\,(f_{\alpha\alpha} \, f^2_\beta - 2 f_{\alpha\beta} \, f_\alpha \, f_\beta + f_{\beta\beta} \, f^2_\alpha)\,.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐκφράσεως τῆς ἐλαστικότητος, ἥτις εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τοὺς δύο συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς, φαίνεται ὅτι εὑρίσκομεν τὴν αὐτὴν ἔκφρασιν ἔστω καὶ ἐὰν ἀρχίσωμεν τὴν ὑποκατάστασιν τοῦ α ὑπὸ τοῦ 6. Ἐὰν ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι ὁμογενὴς γραμμικὴ συνάρτησις (τῶν σταθερῶν ἀποδοχῶν τῆς παραγωγῆς ἐπὶ τῇ βάσει ὡρισμένης κλίμακος) τότε ἡ ἔκφρασις τῆς ἐλαστικότητος τῆς ὑποκαταστάσεως εἶναι ἁπλουστέρα διότι :

$$f_{\alpha\alpha} = -\frac{6}{\alpha} f_{\alpha\beta} \quad f_{\beta\beta} = -\frac{\alpha}{\beta} f_{\alpha\beta} \qquad (\text{Κεφ. VII. 8.})$$

καὶ $$T = \frac{f_\alpha 6}{\alpha 6}\,(\alpha^2 f^2_\alpha + 2\alpha 6 \, f_\alpha \, f_\beta + 6^2 f^2_\beta) = \frac{f_\alpha 6}{\alpha 6}\,(\alpha f_\alpha + 6 f_\beta)^2$$

καὶ ἑπομένως

$$\sigma = \frac{f_\alpha \, f_\beta}{(\alpha f_\alpha + 6 f_\beta)\, f_{\alpha\beta}} = \frac{f_\alpha \, f_\beta}{x f_{\alpha\beta}} \qquad (\text{Euler Theorem})$$

ἢ

$$\sigma = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} \, \dfrac{\partial x}{\partial 6}}{x \, \dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha \, \partial 6}}\,.$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τῶν $x = K\sqrt{\alpha 6}$

$$\rho = K\,\frac{6}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \sigma = 1\,.$$

Διὰ νὰ μελετήσωμεν τὴν μεταβολὴν τῆς ἐλαστικότητος τῆς ὑποκαταστάσεως κατὰ μῆκος μιᾶς καμπύλης σταθερᾶς παραγωγῆς παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\frac{d^2 6}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d6}{d6}\right) = -\frac{d}{d\alpha}(\rho) = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial 6}\,\frac{\partial 6}{\partial \alpha}\right) =$$

$$\rho\,\frac{\partial \rho}{\partial 6} - \frac{\partial \rho}{\partial \alpha}$$

ἄρα ἡ ἐλαστικότης τῆς ὑποκαταστάσεως εἶναι πάντοτε θετικὴ καὶ μεταβάλλεται ἀντιστρόφως πρὸς τὴν καμπυλότητα τῆς καμπύλης. Ἤτοι, ὅσῳ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ σ τόσῳ περισσότερον ἀμβλύνεται ἡ καμπύλη τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς, ὁ δὲ λόγος τῆς ὑποκαταστάσεως τοῦ 6 ὑπὸ τοῦ α αὐξάνει βαθμιαίως.

Ὅταν ἡ σταθερὰ καμπύλη τῆς παραγωγῆς εἶναι εὐθεῖα, τότε ἡ καμπυλότης εἶναι 0, συνεπῶς δὲ ἡ ἐλαστικότης τῆς ὑποκαταστάσεως εἶναι ἄπειρος. Ἡ ἐλαστικότης τῆς ὑποκαταστάσεως εἶναι 0 εἰς ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης, ὅταν ἡ καμπυλότης εἶναι ἄπειρος· δηλαδή, ὅταν ἡ καμπύλη ἔχῃ μίαν ὀρθὴν γωνίαν εἰς τὸ σημεῖον αὐτό. Ὅσῳ τὸ σ αὐξάνῃ ἀπὸ τὸ 0 εἰς τὸ ἄπειρον, τόσῳ ἡ ὑποκατάστασις τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς καθίσταται ἁπλουστέρα. Ἡ ἐλαστικότης τῆς ὑποκαταστάσεως κατὰ μῆκος καμπύλης τινὸς σταθερᾶς παραγωγῆς εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τῶν μονάδων τῶν συντελεστῶν, καθὼς καὶ ἀπὸ αὐτῆς τῆς παραγωγῆς. Εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τοὺς συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς, θετικὴ εἰς ὅλας τὰς ὁμαλὰς περιπτώσεις καὶ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 εἰς ἄπειρον συμφώνως μὲ τὴν εὐκολίαν μὲ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ὑποκαταστήσωμεν τὸν ἕνα συντελεστὴν διὰ τοῦ ἄλλου.

IX.— 6. Οἰκονομικαὶ συναρτήσεις μὲ περισσοτέρας μεταβλητὰς

Διὰ τὴν ἀρτιωτέραν μελέτην τῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων χρειαζόμεθα περισσοτέρας τῆς μιᾶς μεταβλητάς. Αἱ μέχρι τοῦδε χρησιμοποιηθεῖσαι οἰκονομικαὶ συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς βασίζονται ἐπὶ σειρᾶς ὑποθέσεων, αἱ ὁποῖαι ἀφ' ἑνὸς μὲν διευκολύνουν τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν τῶν προβλημάτων, ἀφ' ἑτέρου ὅμως περιορίζουσι τὴν μελέτην τῶν προβλημάτων αὐτῶν καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν. Ἡ χρησιμοποίησις τῶν συναρτήσεων μὲ περισσοτέρας μεταβλητὰς ὑποβοηθεῖ εἰς τὴν ἐπεξεργασίαν οἰκονομικῶν φαινομένων καὶ προβλημάτων εἰς γενικωτέραν κλίμακα. Τοῦτο βεβαίως δὲν ἐννοεῖ ὅτι διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν συναρτήσεων μὲ περισσοτέρας μεταβλητὰς δυνάμεθα νὰ λύσωμεν πλήρως τὰ οἰκονομικὰ προβλήματα, ἀλλ' ὅτι ἔχομεν μεγαλυτέραν προσέγγισιν πρὸς τὴν πραγματικότητα.

Κατὰ ταῦτα, ὑποτιθεμένου ὅτι ἔχομεν ἐπιχείρησιν ἥτις παράγει διάφορα ἀγαθά, ἢ διαφόρους ποσότητας ἐξ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀγαθοῦ. Ἐὰν τὸ τεχνικὸν ἐπίπεδον τῆς παραγωγῆς κ.τ.λ. (βλ. II 5) εἶναι γνωστά, τότε ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους τῆς ἐπιχειρήσεως ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ποσότητας τῶν διαφόρων ἀγαθῶν τὰς ὁποίας παράγει. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπιχείρησις παράγει τὸ ἀγαθὸν X_1 καὶ X_2 τότε ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους $\Pi = F(x_1, x_2)$ ὅπου x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ποσότητες τῶν δύο ἀγαθῶν. Αἱ συνήθεις μορφαὶ διὰ τὰς ἐφαρμογὰς εἶναι συναρτήσεις δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x_1 καὶ x_2.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν συνδετικὴν συνάρτησιν τῆς παραγωγῆς διὰ περισσοτέρας τῶν δύο μεταβλητῶν. Οὕτως, ἐὰν ἐπιχείρησίς τις παράγῃ τρία ἀγαθὰ X_1, X_2, X_3 ἔχομεν

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 .$$

Ἡ μορφὴ τῆς συναρτήσεως αὐτῆς εἶναι ὁμοία μὲ τὴν συνδετικὴν συνάρτησιν τῆς παραγωγῆς (Κεφ. II).

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ γενικεύσωμεν καὶ τὴν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως. Ὑποτιθεμένου ὅτι εἰς τινα ἀγορὰν καταναλωτικῶν ἀγαθῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκλέξωμεν δύο ἀγαθὰ μὲ τιμὰς μεταβλητὰς καὶ ὅτι ἐπὶ ὡρισμένην χρονικὴν περίοδον αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων ἀγαθῶν παραμένουσι σταθεραί. Ἔστω X_1 καὶ X_2 τὰ δύο ἀγαθὰ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ αὐτῶν p_1 καὶ p_2. Τότε, ἡ πωλουμένη ποσότης x_1 ἐκ τοῦ X_1, καθὼς καὶ ἡ ποσότης x_2 τοῦ X_2 ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰς τιμὰς p_1 καὶ p_2 ἀντιστοίχως. Ὥστε, ἡ ζήτησις διὰ τὸ ἀγαθὸν X_1 δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $x_1 = f_1(p_1, p_2)$. Ἐπίσης ἡ ζήτησις διὰ τὸ ἀγαθὸν X_2 δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $x_2 = f_2(p_1, p_2)$. Αἱ συναρτήσεις αὗται ἐπεκτείνονται κατὰ ὅμοιον τρόπον εἰς συναρτήσεις ν μεταβλητῶν. Δηλαδή, ὅταν ἔχωμεν $X_1, X_2, X_3, X_4 \ldots\ldots X_\nu$ ἀγαθὰ μὲ ἀντιστοίχους ποσότητας $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots x_\nu$ καὶ τιμὰς $p_1, p_2, p_3, p_4 \ldots\ldots p_\nu$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δύο μεταβλητῶν αἱ συναρτήσεις παριστῶσιν ἐπιφανείας εἰς καταλλήλως ἐκλελεγμένους ὀρθογωνίους ἄξονας.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως τῆς ζητήσεως $x_1 = f_1(p_1, p_2)$, αἱ μερικαὶ παράγωγοι δεικνύουν τὴν μεταβολὴν τῆς ποσότητος x_1 ὅταν μία τῶν τιμῶν παραμένῃ σταθερά. Οὕτως, ἡ παράγωγος $\frac{\partial x_1}{\partial p_1}$ ἥτις εἰς ὁμαλὴν περίπτωσιν εἶναι ἀρνητική, δεικνύει τὸν λόγον κατὰ τὸν ὁποῖον ἐλαττώνεται ἡ ζήτησις διὰ τὸ ἀγαθὸν X_1 ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ p_1 αὐξάνῃ. Ἐὰν λάβωμεν τὸν λόγον τῶν ἀναλογικῶν μεταβολῶν τῆς ποσότητος x_1 ὡς πρὸς τὴν τιμὴν p_1, ὁ λόγος αὐτὸς παριστᾷ τὴν μερικὴν ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ X_1 ὡς πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ p_1. Οὕτως, ἐὰν καλέσωμεν η_1 τὴν μερικὴν ἐλαστικότητα ὡς πρὸς p_1, τότε :

$$\eta_1 = -\frac{\partial(\lambda\gamma x_1)}{\partial(\lambda\gamma p_1)} = -\frac{p_1}{x_1}\frac{\partial x_1}{\varrho p_1}.$$

Ἡ μερικὴ ἐλαστικότης ἀποτελεῖ ἐπέκτασιν τῆς ἐννοίας τῆς ἐλαστικότητος εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς εἶναι δὲ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀνεξάρτητος τῶν μονάδων. Τότε ὅμως εἶναι συνάρτησις καὶ τῶν δύο μεταβλητῶν p_1 καὶ p_2 ἡ δὲ τιμή της μεταβάλλεται ὅταν μεταβληθῇ μία ἐκ τῶν δύο τιμῶν.

Ἡ μερικὴ παράγωγος $\frac{\partial x^1}{\partial p_2}$ δεικνύει τὸν λόγον μεταβολῆς τῆς ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ X_1 ὅταν αὐξάνεται ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ X_2. Ἑπομένως, εἶναι λογικὸν νὰ συγκρίνωμεν τὴν παράγωγον αὐτὴν μὲ τὴν παράγωγον $\frac{\partial x_2}{\partial p_1}$, ἥτις δεικνύει τὸν λόγον μεταβολῆς τῆς ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ X_2, ὅταν ἡ τιμὴ p_1 τοῦ ἀγαθοῦ X_1 αὐξάνῃ. Ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι θετικαί, τότε αἱ ζητήσεις καὶ τῶν δύο ἀγαθῶν αὐξάνονται ὅταν αὐξάνεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν. Ἕπεται, ὅθεν, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ δύο ἀγαθὰ εἶναι ἀνταγωνιστικῆς φύσεως.

Ἐὰν καὶ αἱ δύο παράγωγοι εἶναι ἀρνητικαί, τότε ἡ ζήτησις διὰ τὸ ἓν ἀγαθὸν αὐξάνει ἀντιθέτως πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ ἄλλου ἀγαθοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ δύο ἀγαθὰ εἶναι συμπληρωματικῆς φύσεως.

Τὰς παραγώγους αὐτὰς συνήθως γράφομεν ὑπὸ μορφὴν ἐλαστικοτήτων, ἑκάστη τῶν ὁποίων παριστᾷ μερικὴν ἐλαστικότητα τῆς ζητήσεως τῆς μιᾶς ὡς πρὸς τὴν τιμὴν τῆς ἄλλης. Ἤτοι :

$$\eta_{12} = -\frac{\partial(\lambda\gamma x_1)}{\partial(\lambda\gamma p_2)} = -\frac{p_2}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_2}$$

$$\eta_{21} = -\frac{\partial(\lambda\gamma x_2)}{\partial(\lambda\gamma p_1)} = -\frac{P_1}{x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p_1}.$$

Ἡ μερικὴ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως n_2 τοῦ ἀγαθοῦ x_2 ὡς πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ p_2 εἶναι :

$$\eta_2 = -\frac{\partial(\lambda\gamma x_2)}{\partial(\lambda\gamma p^2)} = -\frac{p_2}{x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p_2}$$

Παράδειγμα : Ἐὰν $x_1 = 4 - \frac{5}{2}p_1 + {}^7/_3\, p_2$ καὶ $x_2 = 3 + {}^5/_3\, p_1 - {}^6/_5\, p_2$ νὰ εὑρεθοῦν αἱ μερικαὶ ἐλαστικότητες ὡς πρὸς τὰς τιμὰς p_1 καὶ p_2.

$$\eta_1 = -\frac{p_1}{x_0}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{5}{2}\frac{p^1}{x_1} \qquad \eta_2 = -\frac{p_2}{x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p_2} = {}^6/_5\frac{p_2}{x_2}$$

$$\eta_{12} = -\frac{p_2}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = -\frac{7}{3}\frac{p_2}{x_1} \qquad \eta_{21} = -\frac{p_1}{x_2}\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = -\frac{5}{3}\frac{p_1}{x_2}.$$

Ἔστω $x = f(\alpha, \beta)$ ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς τοῦ ἀγαθοῦ X ὅταν A καὶ B εἶναι αἱ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες ἐκ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς α καὶ β.

Ἐὰν p_1 καὶ p^2 εἶναι αἱ κατὰ μονάδα τιμαὶ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, τότε ἡ ζήτησις διὰ τοὺς συντελεστὰς α καὶ β ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ τὰς δύο τιμάς. Ἑπομένως, ἡ ζήτησις διὰ μίαν χρησιμοποιουμένην ποσότητα A ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α εἶναι συνάρτησις τῶν δύο τιμῶν ἡ δὲ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως τῶν δύο συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς τιμὰς αὐτάς. Οὕτως, αἱ ἐλαστικότητες ὡς πρὸς τὴν τιμὴν p_1 εἶναι :

$$\frac{E\alpha}{Ep_1} = \frac{p_1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}, \qquad \frac{E\beta}{Ep_1} = \frac{p_1}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial p_1}$$

αἱ δ' ἐλαστικότητες ὡς πρὸς p_2 εἶναι :

$$\frac{E\alpha}{Ep_2} = \frac{p_2}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}, \qquad \frac{E\beta}{Ep_2} = \frac{p_2}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial p_2}.$$

Ἐὰν ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι τῆς μορφῆς

$$x = f(\alpha, \beta) = f(\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1) = 9(\lambda)$$

(βλ. IX. 1) τότε δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἐλαστικότητα τῆς παραγωγικότητος ὡς τὴν ἐλαστικότητα τῆς συναρτήσεως αὐτῆς ὡς πρὸς λ.

Ἤτοι, ἐλαστικότης τῆς παραγωγικότητος

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{x}\frac{dx}{d\lambda} = \frac{d\,(\text{λογ. } x)}{d\,(\text{λογ. } \lambda)}$$

Ἐὰν ἡ ἐλαστικότης τῆς παραγωγικότητος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, τοῦτο δεικνύει ὅτι ἡ βιομηχανία ἢ ἐπιχείρησις διὰ μιᾶς μικρᾶς ἀναλογικῆς αὐξήσεως εἰς τοὺς ὑπ' αὐτῆς χρησιμοποιουμένους συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς θὰ ἔχῃ αὔξησιν παραγωγῆς μεγαλυτέραν τῆς ἀναλογικῆς (αὐξανόμεναι ἀποδοχαί).

Ἐὰν ἡ ἐλαστικότης τῆς παραγωγικότητος εἶναι μοναδιαία, τότε ἡ ἐπιχείρησις ἢ βιομηχανία διὰ μιᾶς μικρᾶς ἀναλογικῆς αὐξήσεως εἰς τοὺς ὑπ' αὐτῆς χρησιμοποιουμένους συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς θὰ ἔχῃ ἀνάλογον αὔξησιν τῆς παραγωγῆς (σταθεραὶ ἀποδοχαί).

Ἐὰν ἡ ἐλαστικότης τῆς παραγωγικότητος εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος, τοῦτο δεικνύει ὅτι συμβαίνει τὸ ἀντίθετον τῆς πρώτης περιπτώσεως (φθίνουσαι ἀποδοχαί).

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δύο μεταβλητῶν, ἑκάστη συνάρτησις δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ μιᾶς ἐπιφανείας εἰς τὸ πρῶτον ὀγδοημόριον καταλλήλως ἐκλελεγμένων ἀξόνων.

Αἱ περισσότεραι τῶν ἀνωτέρω ἐννοιῶν εἶναι ἐφαρμόσιμοι εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν μόνον ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ [1].

IX. 7. Ἡ ζήτησις τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς

Ἐὰν $x = f(\alpha, \beta)$ εἶναι ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς ἑνὸς ἀγαθοῦ X καὶ p_1, p_2 εἶναι αἱ τιμαὶ κατὰ μονάδα τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς τότε τὸ κόστος διὰ τὴν ἀντίστοιχον παραγωγὴν x εἶναι $\Pi = \alpha p_1 + \beta p_2$. Δεδομένου ὅτι εἶναι ἀπαραίτητος προϋπόθεσις διὰ μίαν ἐπιχείρησιν ἢ βιομηχανίαν λειτουργοῦσαν ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ νὰ παράγῃ εἰς τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν κόστος, αἱ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες ἐκ τῶν συντελεστῶν α καὶ β διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν x μονάδων τοῦ ἀγαθοῦ X πρέπει νὰ ἐκλεγοῦν καταλλήλως ὥστε, ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν νὰ ἐπαληθεύουν τὴν συνάρτησιν τῆς παραγωγῆς ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ νὰ καθιστοῦν τὴν συνάρτησιν τοῦ κόστους ἐλαχίστην.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ α ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, τότε :

$$\frac{dB}{d\alpha} = -\frac{f\alpha}{f\beta}$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{d\Pi}{d\alpha} = p_1 + p_2\frac{dB}{d\alpha} = p_1 - \frac{f\alpha}{f\beta}p_2 = 0$$

ἥτις εἶναι ἡ ἀναγκαία συνθήκη διὰ τὸ ἐλάχιστον καὶ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν :

$$\frac{p_1}{f\alpha} = \frac{p_2}{f\beta}.$$

Ἡ ἰσότης δεικνύει ὅτι αἱ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες τῶν συντελεστῶν πρέπει νὰ εἶναι τοιαῦται, ὥστε αἱ ἀντίστοιχοι διαφορικαὶ παραγωγαί, νὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς δοθείσας τιμάς. Ἐπιπροσθέτως :

$$\frac{d^2\Pi}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\Pi}{d\alpha}\right) = \frac{d}{d\alpha}\left(p_1 + p_2\frac{dB}{d\alpha}\right) = p_2\frac{d^2B}{d\alpha^2}.$$

Ὅθεν, ἐὰν $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} > 0$ τότε ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους εἶναι ἐλαχίστη ἡ δὲ καμπύλη τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς ἡ διερχομένη διὰ τοῦ ἀντιστοίχου σημείου

1. Διὰ τὰς περιπτώσεις τοῦ μονοπωλίου καὶ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ ἴδε : J. Robinson : Economics of Imperfect Competition, ch. 26.

στρέφει τὰ κυρτά της πρὸς τὴν ἀρχήν. Ἄρα, ἡ θέσις «ἰσορροπίας» εἶναι σταθερὰ διὰ κάθε σημεῖον μιᾶς καμπύλης σταθερᾶς παραγωγῆς ὅταν ἡ καμπύλη στρέφῃ τὰ κυρτά της πρὸς τὴν ἀρχήν.

Αἱ δύο ἀνωτέρω συνθῆκαι, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ ἐλαχίστου κόστους, προσδιορίζουσι τὰς χρησιμοποιουμένας ποσότητας ἐκ τῶν α καὶ β κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὴν ζήτησιν αὐτῶν, ὅταν δίδωνται αἱ τιμαὶ καὶ αἱ ποσότητες τῆς παραγωγῆς.

Ὅταν ἡ δοθεῖσα ποσότης παραγωγῆς μεταβάλλεται, ἐν ᾧ αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς παραμένουν σταθεραί, ἡ ζήτησις διὰ τοὺς συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς μεταβάλλεται συμφώνως μὲ τὴν συνήθη συνάρτησιν τοῦ κόστους.

Ἐὰν ἡ συνάστησις τῆς παραγωγῆς εἶναι γραμμικὴ καὶ ὁμογενὴς (σταθεραὶ ἀποδοχαὶ ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς ὡρισμένης κλίμακος) τότε τὸ θεώρημα Euler μᾶς δίδει :

$$\alpha f_\alpha + \beta f_\beta = x$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{\Pi}{x} = \frac{\alpha p_1 + \beta p_2}{x} = \lambda \frac{\alpha f_\alpha + \beta f_\beta}{x} = \lambda$$

ὅπου τὸ λ παριστᾷ τὸν λόγον $\frac{p'}{f\alpha}$.

Ὁμοίως :

$$\frac{d\Pi}{dx} = p_1 \frac{d\alpha}{dx} + p_2 \frac{d\beta}{dx} = \lambda \left(f_\alpha \frac{d\alpha}{dx} + f_\beta \frac{d\beta}{dx} \right) = \lambda$$

ἐπειδὴ

$$f_\alpha \frac{d\alpha}{dx} + f_\beta \frac{d\beta}{dx} = 1 \quad \text{ἐκ τῆς } f(\alpha, \beta) = x\,.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων προκύπτει ὅτι τὸ μέσον καὶ διαφορικὸν κόστος εἶναι ἴσα δι' οἱανδήποτε παραγωγὴν x, ὅταν αἱ τιμαὶ p_1 καὶ p_2 εἶναι σταθεραί. Ἑπομένως, εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν, τὸ μέσον κόστος εἶναι σταθερὸν δι' οἱανδήποτε παραγωγήν.

Ἐὰν τὸ ὑπὸ ἀνωτέρω συνθήκας παραγόμενον ἀγαθὸν X πωλῆται εἴς τινα ἀγορὰν λειτουργοῦσαν ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ εἰς τὴν τιμὴν p, ἡ ὁποία θὰ πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ μέσον κόστος του, τότε :

$$\frac{p_1}{f\alpha} = \frac{p_2}{f\beta} = \frac{\Pi}{x} = p\,.$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως διὰ τὸ ἀγαθὸν X εἰς τὴν ἀγορὰν $x = f(p)$ τότε δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ ποσὰ A καὶ B, ἐκ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς α καὶ β, καθὼς καὶ τὴν τιμὴν πωλήσεως ἐκ τῶν δεδομένων τιμῶν p_1 καὶ p_2 τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς κατὰ μονάδα. Τοῦτο δὲ διότι διὰ τὸ σημεῖον ἰσορροπίας ἰσχύουν αἱ ἰσότητες :

$$f(\alpha, \beta) = f(p)\,, \qquad p_1 = f_\alpha\, p\,, \qquad p_2 = f_\beta\, p \tag{1}$$

ἐκ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν παραγωγὴν $x = f(\alpha, \beta) = f(p)$ καὶ τὸ ὁλικὸν κόστος $\Pi = px = \alpha p_1 + \beta p_2$.

Διὰ νὰ μελετήσωμεν πῶς μεταβάλλεται ἡ ζήτησις τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, ὑποθέτομεν κατ' ἀρχὴν ὅτι ἐν ᾧ ἡ τιμὴ p_1 μεταβάλλεται ἡ τιμὴ p_2 παραμένει σταθερά. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς γραμμικῆς ὁμογενοῦς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς ἔχομεν :

$$f_{\alpha\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} f_{\alpha\beta}, \qquad f_{\beta\beta} = -\frac{\alpha}{\beta} f_{\alpha\beta}, \qquad \sigma = \frac{f_\alpha f_\beta}{x f_{\alpha\beta}} \qquad \text{(Κεφ. 7. 8)}$$

Ἄρα

$$f_{\alpha\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{f_\alpha f_\beta}{x\sigma}, \qquad f_{\beta\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{f_\alpha f_\beta}{x\sigma}, \qquad f_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha f_\beta}{x\sigma} \qquad (2)$$

Ἐὰν λάβωμεν τὰς μερικὰς παραγώγους ὡς πρὸ p_1 τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομεν :

$$f_\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial p_1} + f_\beta \frac{\partial\beta}{\partial p_1} = \varphi'(p)\frac{\partial p}{\partial p_1} = -\eta\frac{x}{p}\frac{\partial p}{\partial p_1}$$

$$1 = f_\alpha \frac{\partial p}{\partial p_1} + p\left(f_{\alpha\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial p_1} + f_{\alpha\beta}\frac{\partial\beta}{\partial p_1}\right) \qquad (3)$$

$$0 = f_\beta \frac{\partial p}{\partial p_1} + p\left(f_{\alpha\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial p_1} + f_{\beta\beta}\frac{\partial\beta}{\partial p_1}\right.$$

ὅπου η εἶναι ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ X εἰς τὴν ἀγοράν.

Χρησιμοποιοῦντες τὰς ἐξισώσεις (2) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς ἐξισώσεις (3) ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$x\eta \frac{\partial p}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial\alpha}{\partial p_1} + p^2 \frac{\partial\beta}{\partial p_1} = 0$$

$$x\sigma \frac{\partial p}{\partial p_1} - \frac{\beta}{\alpha} p_2 \frac{\partial\alpha}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial\alpha}{\partial p} = \frac{xp}{p_1}\sigma \qquad (4)$$

$$x\sigma \frac{\partial p}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial\alpha}{\partial p_1} - \frac{\alpha}{\beta} p_1 \frac{\partial\beta}{\partial p_1} = 0.$$

Αἱ ἐξισώσεις (4) συνιστοῦν ἓν ἀλγεβρικὸν γραμμικὸν σύστημα ὡς πρὸς τὰς μερικὰς παραγώγους $\frac{\partial p}{\partial p_1}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial p}$, $\frac{\partial\beta}{\partial p_1}$.

Λύοντες τὸ σύστημα αὐτὸ εὑρίσκομεν :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial p_1} = -\frac{\alpha}{p_1}\left(\frac{\alpha p_1}{xp}\eta + \frac{\beta p_2}{xp}\sigma\right)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial p_1} = -\frac{\alpha\beta}{xp}(\eta - \sigma)$$

αἵτινες δύνανται νὰ γραφῶσιν ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\frac{E\alpha}{Ep_1} = -(K_\beta\, \sigma + K_\alpha\, \eta)$$

$$\frac{E\beta}{Ep_1} = K_\alpha\, (\sigma - \eta) \qquad (5)$$

ὅπου

$$K_\alpha = \frac{\alpha p_1}{xp} \quad \text{καὶ} \quad K_\beta = \frac{\beta p_2}{xp}$$

εἶναι τὰ ποσὰ ἐκ τῶν ὁλικῶν ἐξόδων τὰ ὁποῖα ἀναλογοῦν δι' ἕνα ἕκαστον τῶν συντελεστῶν α καὶ β.

Ἐκ τῆς (5) συνάγονται ὡρισμένα ἐνδιαφέροντα συμπεράσματα. Ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ α αὐξηθῇ, τότε ἐπηρεάζονται αἱ ζητήσεις καὶ διὰ τοὺς δύο συντελεστὰς α καὶ β. Πρῶτον, τὸ κόστος αὐξάνεται καὶ τὸ προϊὸν γίνεται ἀκριβώτερον (ἐὰν ἰσχύῃ διὰ τὸ προϊὸν τοῦτο ὁ νόμος τῆς ζητήσεως καὶ ἡ ζήτησίς του εἶναι ἐλαστική). Ὡς ἐκ τούτου πωλεῖται εἰς τὴν ἀγορὰν μικροτέρα ποσότης ἐκ τοῦ παραγομένου προϊόντος. Ὡσαύτως ἐπέρχεται ἀναλογικὴ ἐλάττωσις εἰς τὴν ζήτησιν καὶ τῶν δύο συντελεστῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ πρώτου τῶν τύπων (5).

Δεύτερον, ὁ συντελεστὴς τῆς παραγωγῆς β εἶναι εὐθηνότερος τώρα, ἐν σχέσει μὲ τὸν συντελεστὴν α καὶ ἑπομένως ἡ ὑποκατάστασις τοῦ συντελεστοῦ α διὰ τοῦ συντελεστοῦ β εἶναι συμφέρουσα εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Τοιουτοτρόπως, ἡ ζήτησις διὰ τὸν συντελεστὴν β αὐξάνει ἐν ᾧ ἡ ζήτησις διὰ τὸν συντελεστὴν α ἐλαττοῦται, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου τῶν τύπων (5).

IX. 8. Ἓν πρόβλημα τοῦ μονοπωλίου

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μονοπώλιόν τι παράγει δύο ἀγαθά : τὸ X_1 καὶ X_2. Τότε, ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους τοῦ μονοπωλίου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς παραγομένας ἀντιστοίχους ποσότητας τῶν δύο ἀγαθῶν x_1 καὶ x_2. Ἐὰν τὰ ἀγαθὰ X_1 καὶ X_2 εἶναι τοιαύτης συγγενοῦς φύσεως ὥστε ἡ κατανάλωσις τοῦ ἑνὸς νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν κατανάλωσιν τοῦ ἄλλου, τότε ἡ ζήτησις ἑκάστου ἀγαθοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς τιμὰς καὶ τῶν δύο ἀγαθῶν εἰς τὴν ἀγοράν. Οὕτως ἔχομεν :

$$\Pi = F\,(x_1, x_2)\,, \quad x_1 = f_1\,(p_1, p_2) \quad \text{καὶ} \quad x_2 = f_2\,(p_1, p_2)$$

ὅπου p_1 καὶ p_2 εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν δύο ἀγαθῶν εἰς τὴν ἀγοράν.

Ἡ ὁλικὴ πρόσοδος τοῦ μονοπωλίου δίδεται ὑπὸ τῆς

$$R = x_1\, p_1 + x_2\, p_2 - \Pi\,.$$

Δεδομένου ὅτι x_1 καὶ x_2 εἶναι συναρτήσεις τῶν p_1 καὶ p_2 ἡ ὁλικὴ πρόσοδος εἶναι μία συνάρτησις καὶ τῶν δύο τιμῶν.

Ὡς γνωστόν, τὸ μονοπώλιον ἐπιδιώκει τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ πληροῦται ἡ ἀναγκαία συνθήκη

$$\frac{\partial R}{\partial p_1} = \frac{\partial R}{\partial p_2} = 0$$

ἢ
$$x_1 + \left(p_2 - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \left(p_2 - \frac{\partial \Pi}{\partial x_2}\right)\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0$$

$$x_2 + \left(p_1 - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial p_2} + \left(p_2 - \frac{\partial \Pi}{\partial x_2}\right)\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial p_2} = 0$$

Διὰ τῶν δύο αὐτῶν συνθηκῶν προσδιορίζομεν τὰς τιμὰς p_1 καὶ p_2 διὰ τὰς ὁποίας ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Τὸ ἀκόλουθον ἀριθμητικὸν παράδειγμα δεικνύει τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἀνωτέρω γενικῆς λύσεως τοῦ προβλήματος.

Ἔστω $\Pi = 2x_1 + 3x_2$ ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους καὶ $x_1 = 7\,{}^1/_4 - \frac{3}{2}p_1 - \frac{1}{4}p_2$, $x_2 = 9\,{}^1/_3 - \frac{1}{4}p_1 - \frac{5}{3}p_2$ αἱ συναρτήσεις τῶν ζητήσεων τῶν ἀγαθῶν X_1 καὶ X_2. Ἡ ὁλικὴ πρόσοδος τῆς ἐπιχειρήσεως ὅταν πωλῇ x_1 καὶ x_2 μονάδας ἀντιστοίχως εἰς τὰς τιμὰς p_1 καὶ p_2 εἶναι :

$$R(p_1, p_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - 2x_1 - 3x_2 = x_1(p_1 - 2) + x_2(p_2 - 3).$$

Αἱ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι διὰ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως εἶναι :

$$\frac{\partial R}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial p_2} = 0$$

Ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν :

$$\frac{\partial R}{\partial p_1} = (p_1 - 2)\frac{\partial x_1}{\partial p_2} + x_2 + (p_2 - 3)\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0$$

ἤ,
$$12p_1 + 2p_2 = 44.$$

Ὁμοίως, ἐκ τῆς δευτέρας :

$$\frac{\partial R}{\partial p_2} = (p_1 - 2)\frac{\partial x_1}{\partial p_2} + x_2 + (p_2 - 3)\frac{\partial x_2}{\partial p_2}$$

ἤ,
$$3p_1 + 20p_2 = 89$$

Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $p_1 = 3$ καὶ $p_2 = 4$.

Ἀλλά,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p_1^2} = -3, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial p_1\,\partial p_2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial p_2^2} = -\frac{10}{3}$$

καὶ ἡ συνθήκη $\left(\frac{\partial^2 R}{\partial p_1\,\partial p_2}\right)^2 < \frac{\partial^2 R}{\partial p_1^2} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial p_2^2}$ πληροῦται. Ἐπομένως, ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον καὶ ἡ ἐπιχείρησις ἔχει τὴν μεγίστην αὐτῆς πρόσοδον ὅταν πωλῇ τὰ προϊόντα της εἰς τὰς τιμὰς αὐτάς.

Προβλήματα

Πρόβλημα 1ον) Ἐὰν ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς $x = f(\alpha, 6)$ εἶναι ὁμογενὴς καὶ γραμμική, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μέση διαφορικὴ παραγωγὴ ὡς πρὸς α καὶ 6 ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν λόγον τῶν χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς καὶ ὄχι ἀπὸ τὰς ποσότητας αὐτὰς καθ' ἑαυτάς.

Πρόβλημα 2ον) Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ τοῦ προβλήματος (1) ὅταν :

$$x - \sqrt{\alpha\beta}\,, \quad x = \frac{2H\alpha\beta - A\alpha^2 - B6^2}{\Gamma\alpha + \Delta 6}\,, \quad x = \sqrt{2H\alpha 6 - A\alpha^2 - B6^2}$$

Πρόβλημα 3ον) Νὰ μελετηθοῦν αἱ καμπύλαι τῆς σταθερᾶς παραγωγῆς τῶν συναρτήσεων τοῦ προβλήματος (2).

Πρόβλημα 4ον) Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ θεωρήματος τοῦ Euler νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ὁλικὴ παραγωγὴ διά τινα ὁμογενῆ γραμμικὴν συνάρτησιν τῆς παραγωγῆς $x = f(\alpha, \beta)$ ἰσοῦται μὲ α ἐπὶ τὴν διαφορικὴν παραγωγὴν ὡς πρὸς α σὺν 6 ἐπὶ τὴν διαφορικὴν παραγωγὴν ὡς πρὸς 6 ὅπου α καὶ 6 εἶναι αἱ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες ἐκ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς.

Πρόβλημα 5ον) Ἐὰν $x = A\alpha^{\lambda}\, 6^{\mu}$ εἶναι ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς, νὰ διερευνηθῇ πῶς μεταβάλλεται ἡ παραγωγή, ὅταν αἱ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες ἐκ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς μεταβάλλωνται κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον

α) Ὅταν $\lambda + \mu = 1$, 6) $\lambda + \mu > 1$ καὶ γ) $\lambda + \mu < 1$.

Πρόβλημα 6ον) Εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων τοῦ προβλήματος (5) νὰ ἐξαχθοῦν συμπεράσματα ἀνάλογα πρὸς τὰ τοῦ προβλήματος (4) καὶ νὰ ἐξηγηθοῦν τὰ συμπερέσματα αὐτὰ οἰκονομικῶς.

Πρόβλημα 7ον) Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος Euler ὅταν

$$x = \frac{2H\alpha 6 - A\alpha^2 - B\beta^2}{\Gamma\alpha + \Delta 6}$$

καὶ νὰ διατυπωθῇ τὸ ἀποτέλεσμα οἰκονομικῶς.

Προσλημα 8ον) Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς

$$x = \sqrt{2H\alpha 6 - A\alpha^2 - B6^2}$$

νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μεγίστη μέση παραγωγὴ ὡς πρὸς α ἢ ὡς πρὸς 6 εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς χρησιμοποιουμένης σταθερᾶς ποσότητος ἐκ τοῦ 6 ἢ α.

Πρόβλημα 9ον) Ἐὰν $x = 4\,(15\alpha 6 - 4\alpha^2 - 96^2)$ παριστᾷ τὴν παραγωγὴν σίτου εἰς κιλὰ ὅταν χρησιμοποιοῦνται 100α-ἐργατικαὶ ὧραι καὶ 6 στρέμματα γῆς νὰ εὑρεθῇ :

α) Ἡ διαφορικὴ παραγωγὴ ὡς πρὸς α καὶ 6.

6) Ἐὰν $6 = 20$ στρ. νὰ μελετηθῇ ἡ παραγωγὴ ὅταν τὸ α μεταβάλλεται καὶ νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις.

γ) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὅταν χρησιμοποιήσωμεν 3750 ἐργατικὰς ὥρας διὰ τὴν αὐτὴν ἔκτασιν, ἔχομεν τὴν μεγίστην παραγωγήν.

Πρόβλημα 10ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαστικότης τῆς ὑποκαταστάσεως σ διὰ τὰς καμπύλας τοῦ προβλήματος (2).

Πρόβλημα 11ον) Ἐὰν $x = \sqrt{\alpha\beta}$ εἶναι ἡ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς, νὰ εὑρεθῇ ἡ χρησιμοποιουμένη ποσότης ἐξ ἑκάστου τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς διὰ τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν κόστος παραγωγῆς x μονάδων ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν εἶναι p_1 καὶ p_2. Ἐὰν ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως τοῦ παραγομένου ἀγαθοῦ X εἴς τινα ἀγορὰν ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ εἶναι $x = \delta - \varepsilon x$ τότε. ἡ ζήτησις διὰ τοὺς συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς εἶναι :

$$\alpha = \frac{\delta}{A}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} - \frac{2\varepsilon p_2}{A^2}, \qquad \beta = \frac{\delta}{A}\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} - \frac{2\varepsilon p_1}{A_2}$$

Πρόβλημα 12ον) Ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους ἐπιχειρήσεώς τινος εἶναι $\Pi = \alpha x_1 + \beta x_2$ ὅπου α, β παριστοῦν ἀντιστοίχως τὸ μέσον κόστος τῶν ἀγαθῶν X_1 καὶ X_2. Αἱ συναρτήσεις τῆς ζητήσεως τῶν ἀγαθῶν X_1 καὶ X_2 εἶναι :

$$x_1 - \alpha_1 - \alpha_{11} p_1 - \alpha_{12} p_2, \qquad x_2 = \alpha_2 - \alpha_{12} p_1 - \alpha_{22} p_2$$

ὅπου α_{11} καὶ α_{22} εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ πληροῦντες τὴν συνθήκην $\alpha_{12}^2 < \alpha_{11}\alpha_{22}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐπιχείρησις ἔχει τὴν μεγίστην πρόσοδον ὅταν

$$p_1 = \alpha + \frac{\alpha_{22} x_{10} - \alpha_{12} x_{20}}{2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} \qquad p_2 = + \beta \frac{\alpha_{11} x_{20} - \alpha_{12} x_{10}}{2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}$$

ὅπου x_{10} καὶ x_{20} εἶναι αἱ ζητήσεις τῶν ἀγαθῶν X_1 καὶ X_2 εἰς τιμὰς ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ.

Πρόβλημα 13ον) Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἐὰν τὰ ἀγαθὰ X_1 καὶ X^2 παράγωνται ὑπὸ δύο μονοπωλίων μὲ συναρτήσεις κόστους $\Pi_1 = \alpha x_1$ καὶ $\Pi_2 = \alpha x_2$ ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ ἓν μονοπώλιον διατηρεῖ σταθερὰν τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος αὐτοῦ ὅταν τὸ ἄλλο ἐπιδιώκῃ τὴν μεγίστην δυνατὴν πρόσοδον. (Βλέπε Allen σελ. 360 - 361).

Πρόβλημα 14ον) Ἐὰν αἱ συναρτήσεις τῶν ζητήσεων δύο ἀγαθῶν εἶναι :

$$x_1 = \frac{1}{2} p_1^{-2} p_2^{2}, \qquad x_2 = \frac{2}{5} p_1 p_2^{-3}$$

νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ μερικαὶ ἐλαστικότητες ὡς πρὸς τὰς τιμὰς εἶναι σταθεραί.

Πρόβλημα 15ον) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μερικαὶ ἐλαστικότητες ὅταν :

$$x_1 = p_1^{-2} e^{2p_2+3}, \qquad x_2 = p_2^{-3} e^{p_1+1}$$

Πρόβλημα 16ον) Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα ὅταν :

$$x_1 = \frac{5}{p_1+3} + 3p_2, \qquad x_2 = \frac{4}{p_2+2} + 2p_1.$$