ΜΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ (ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ) ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΑΝΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΕΝΟΣ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ, ΟΤΑΝ ΟΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΣΦΑΛΜΑ

Τοῦ κ. ΑΛΕΞΗ ΛΑΖΑΡΙΔΗ, Ph.D.

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Εἶναι γνωστὴ ἡ εὐρεία διάδοση τῆς οἰκονομετρίας καὶ ἡ χρησιμότητα τῶν οἰκονομετρικῶν μοντέλων γιὰ τὴ διερεύνηση διαφόρων φαινομένων.

Ἔχοντας ὁρισμένες παρατηρήσεις ποὺ ἀφοροῦν στὸ ὑπὸ διερεύνηση φαινόμενο (ἐξαρτημένη μεταβλητή), ἡ προσπάθεια ἔγκειται στὸ νὰ καθοριστεῖ ἐπακριβῶς ἡ (συνήθως γραμμικὴ) σχέση ποὺ διασυνδέει τὴν παραπάνω μεταβλητὴ μὲ μιὰ ὁμάδα ἄλλων παραγόντων — ἀνεξάρτητες μεταβλητὲς — γιὰ τὶς ὁποῖες ὑπάρχουν διαθέσιμες ἀντίστοιχες παρατηρήσεις.

Φυσικά, ἀπὸ τὴν θεωρία ποὺ ἀναφέρεται στὸ ὑπὸ διερεύνηση φαινόμενο, γίνεται ἐκ τῶν προτέρων ἡ ὑπόθεση ὅτι ἡ ἐξαρτημένη μεταβλητὴ ἐπηρεάζεται ἄμεσα ἀπὸ τὴν ἐπιλεγεῖσα ὁμάδα τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Ἕνα πρόβλημα ποὺ ἀντιμετωπίζεται στὴν οἰκονομετρία εἶναι, ὅταν οἱ διαθέσιμες παρατηρήσεις δὲν εἶναι οἱ πραγματικὲς ἀλλὰ ἐμπεριέχουν κάποιο σφάλμα.

Ἡ ἐπαναληπτικὴ μέθοδος ποὺ προτείνεται στὴν παροῦσα ἐργασία, παρέχει τὶς δυνατότητες ἐπανεκτιμήσεως τῶν συντελεστῶν ἑνὸς (γραμμικοῦ) οἰκονομετρικοῦ μοντέλου, ἔχοντας διαθέσιμο μόνο τὸ μέσο ὅρο τοῦ σφάλματος, ποὺ ἀναφέρεται στὶς διαθέσιμες παρατηρήσεις γιὰ κάθε μεταβλητή.

Ὑποτίθεται ὅτι ἔχουν ὑπολογισθεῖ οἱ συντελεστὲς $\hat{U}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, στὴ σχέση $\hat{z} = \hat{U}_1 f_1 + \ldots + \hat{U}_k f_k$ μὲ τὶς γνωστὲς οἰκονομετρικὲς μεθόδους (συνήθως O.L.S.). Ἡ ἐκτίμηση ἔχει γίνει ἔχοντας στὴ διάθεσή μας παρατηρήσεις ποὺ ἀφοροῦν τὴν ἐξαρτημένη μεταβλητὴ (διάνυσμα $\underline{z}$) καὶ τὶς ἀνεξάρτητες μεταβλητὲς (μήτρα f). Ὑποτίθεται, στὴ συνέχεια, ὅτι οἱ παρατηρήσεις αὐτὲς (δηλ. τὰ στοιχεῖα τῶν $\underline{z}$ καὶ f) δὲν εἶναι τὰ πραγματικά, ἀλλὰ ἐμπεριέχουν σφάλμα. Τὰ διανύσματα τῶν (στοχαστικῶν) αὐτῶν σφαλμάτων ὁρίζονται ὡς

$$n = f - d \quad (1) \qquad \text{καὶ } \underline{t} = \underline{z} - \underline{y} \quad (2)$$

ὅπου τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας d καὶ τοῦ διανύσματος $\underline{y}$ παριστοῦν τὶς πραγματικὲς τιμὲς τῶν ἀντιστοίχων μεταβλητῶν, τὶς ὁποῖες ὅμως δὲν μποροῦμε νὰ παρατηρήσουμε καὶ ἀντὶ αὐτῶν ἔχουμε στὴ διάθεσή μας τὰ f καὶ $\underline{z}$ ἀντίστοιχα.

Γίνεται ἡ ὑπόθεση ὅτι τὰ στοχαστικὰ αὐτὰ σφάλματα δὲν συσχετίζονται μεταξύ τους (serially uncorrelated) καὶ ἔχουν πεπερασμένη διακύμανση. Ἐπίσης ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἀναμενόμενη τιμή τους εἶναι ἐκ τῶν προτέρων γνωστή.

Ὁ ἀλγόριθμος ποὺ προτείνεται στὴν παροῦσα ἐργασία ἀποβλέπει στὸ νὰ διορθωθοῦν οἱ ἐκτιμήσεις τῶν συντελεστῶν ($\hat{\underline{U}}$) λαμβάνοντας ὑπόψη καὶ τὸ σφάλμα τῶν παρατηρήσεων.

Δεδομένου ὅτι ἡ ἐκτίμηση τῶν θεωρητικῶν συντελεστῶν ($\underline{U}$) παρίσταται μὲ $\hat{\underline{U}}$, εἶναι δυνατὸ νὰ ὁριστεῖ τὸ διάνυσμα $\underline{\varepsilon}_i$, κατὰ τὴν ἐπανάληψη i, σὰ σφάλμα τῆς ἐκτιμήσεως, ἤτοι :

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{z} - (f, \hat{\underline{U}}_{i-1} \qquad (3)$$

ὅπου $\hat{\underline{U}}_0$ εἶναι ἡ ἐκτίμηση ποὺ ἤδη ἔχει γίνει, ὅπως ἀναφέρθηκε στὴν ἀρχή.

Στὴ σχέση (3) τὰ f καὶ $\underline{z}$ εἶναι οἱ διαθέσιμες παρατηρήσεις ἀντὶ τῶν πραγματικῶν $\underline{y}$ καὶ d.

Ὁρίζουμε μιὰ διευρυμένη μήτρα x ποὺ περιλαμβάνει σὰν πρώτη στήλη τὸ διάνυσμα $\underline{y}$ καὶ οἱ ὑπόλοιπες στῆλες της καλύπτονται ἀπὸ τὶς στῆλες τῆς μήτρας d ἤτοι :

$$x \stackrel{\Delta}{=} \left[\, \underline{y}, d \,\right] \qquad (4)$$

Ὑποτίθεται, στὴ συνέχεια, ὅτι τὸ $\tilde{\underline{U}}$ παριστᾶ τὴν κατὰ συνθήκη ἀναμενόμενη τιμὴ τοῦ $\underline{\hat{U}}$ δεδομένης τῆς μήτρας x (conditional expectation of $\underline{\hat{U}}$ for a given x), ἤτοι

$$\underline{\tilde{U}} = E\left[\underline{\hat{U}} / x\right] \stackrel{\Delta}{=} E_x\left[\underline{\hat{U}}\right] \tag{5}$$

ὅπου E παριστᾶ τὴ μαθηματικὴ προσδοκία καὶ $\stackrel{\Delta}{=}$ σημαίνει τὸ ἐξ ὁρισμοῦ ἴσον.

Ἡ σχέση (5) μᾶς λέει ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $\underline{\tilde{U}}$ εἶναι ἡ ἀναμενόμενη τιμὴ ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ $\underline{\hat{U}}$, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐκτιμηθεῖ ἀπὸ τὶς διαθέσιμες παρατηρήσεις (f, $\underline{z}$), ὅπου ἡ μήτρα x εἶναι ἑνιαία.

Μὲ ὅμοιο τρόπο ὁρίζονται οἱ μῆτρες P καὶ w μὲ τὶς ἑξῆς κατὰ συνθήκη ἀναμενόμενες τιμὲς

$$E_x\left[P\right] \stackrel{\Delta}{=} E_x\left[f'f - d'd\right] \tag{6}$$

$$E_x\left[w\right] \stackrel{\Delta}{=} E_x\left[n\right] \tag{7}$$

[Ὁ τόνος ὑποδηλώνει ἐναλλαγὴ (transposition)]

Θὰ πρέπει νὰ σημειωθεῖ ὅτι ὅλα τὰ στοιχεῖα μιᾶς ὁποιασδήποτε στήλης τῆς μήτρας w εἶναι πανομοιότυπα καὶ ἰσοῦνται μὲ τὸν μέσο ὅρο τῆς ἀντίστοιχης στήλης τῆς μήτρας n. Σημειώνεται ἐπίσης πὼς ἔχει γίνει ἡ ὑπόθεση ὅτι ἡ ἀναμενόμενη τιμὴ τοὺ σφάλματος κάθε μεταβλητῆς εἶναι ἐκ τῶν προτέρων γνωστή.

Μὲ τὶς παραπάνω ὁρισθεῖσες ποσότητες, ὁ προτεινόμενος ἀλγόριθμος γιὰ ἐπανεκτίμηση τῶν συντελεστῶν ἔχει ὡς ἑξῆς :

$$\underline{\hat{U}}_i = \underline{\hat{U}}_{i-1} + \frac{I}{D^2}\left[f'\underline{e}_i + P\,\underline{\tilde{U}}_{i-1} - w'\left(\underline{z} - \underline{m}_1\right) - \underline{m}_1 f'\right] \tag{8}$$

ὅπου $2D^2 > ||\, f\, ||^2$ καὶ θὰ πρέπει ἐπίσης νὰ εἶναι $2D^2 > ||\, d\, ||^2$

(Τὸ $||\cdot||$ παριστᾶ τὸ Εὐκλείδιο μέτρο — Euclidean norm)

καὶ $\underline{m}_1$ εἶναι ἡ ἀναμενόμενη τιμὴ τοῦ $\underline{t}$, ἤτοι $\underline{m}_1 = E\left[\,\underline{t}\,\right]$

(Σημειώνεται ἐπίσης ὅτι ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $\underline{m}_1$ εἶναι πανομοιότυπα καὶ ἀντιστοιχοῦν στὴν ἀναμενόμενη τιμὴ τοῦ σφάλματος ποὺ ἀναφέρεται στὴν ἐξαρτημένη μεταβλητή).

Ὁ ἐπαναληπτικὸς ἀλγόριθμος (8), ὑποδηλώνει ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $\hat{\underline{U}}$ ἐπανεκτιμῶνται ὕστερα ἀπὸ κάθε ἐπανάληψη. Θὰ ἀποδείξουμε στὴ συνέχεια ὅτι ὅσο μεγαλώνει ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπαναλήψεων, τὸ $\hat{\underline{U}}$ τείνει πρὸς θεωρητικὸ $\underline{U}$.

Μαθηματικὴ ἀπόδειξη ὅτι ὁ ἀλγόριθμος συγκλίνει

Ἔχουμε τὴ σχέση (3), δηλ.

$$\underline{e}_i = \underline{z} - (f, \hat{\underline{U}}_{i-1})$$

Πολλαπλασιάζοντας (ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ) καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ f′ ἔχουμε :

$$\begin{aligned} f'\underline{e}_i &= f'\underline{z} - f'(f, \hat{\underline{U}}_{i-1}) \\ &= f'\Big[\underbrace{(d, \underline{U})}_{y} + \underline{t}\Big] - f'\Big[(d+n), \hat{\underline{U}}_{i-1}\Big] \\ &= f'\Big[d, (\underline{U} - \hat{\underline{U}}_{i-1})\Big] + f'\underline{t} - f'(n, \hat{\underline{U}}_{i-1}) \\ &= (n+d)'\Big[d, (\underline{U} - \hat{\underline{U}}_{i-1})\Big] + f'\underline{t} - f'(n, \hat{\underline{U}}_{i-1}) \qquad (19) \end{aligned}$$

Ὁρίζουμε τὸ διάνυσμα σφαλμάτων $\underline{q}$ ὡς ἑξῆς :

$$\underline{q}_i = \underline{U} - \hat{\underline{U}}_i \qquad (20)$$

(ὅπου $\underline{U}$, ὅπως προαναφέρθηκε, εἶναι τὸ διάνυσμα τῶν θεωρητικῶν συντελεστῶν)

καὶ $\hat{\underline{U}}_i = \underline{U} - \underline{q}_i$ (20α)

Ὅσον ἀφορᾶ τὶς διαστάσεις τῶν διαφόρων διανυσμάτων, αὐτὲς καθορίζονται στὸν Εὐκλείδιο χῶρο ὡς ἑξῆς :

$\underline{z}, \underline{y}, \underline{t}, \underline{e} \in E^N$ (ὅπου N ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων)

$\underline{U}, \underline{q} \in E^k$ $\quad N > k$

f, d, n καθορίζονται στὸ $E^N \times E^k$ δηλαδὴ εἶναι διαστάσεων $N x k$)

x καθορίζεται στὸ $E^N \times E^{(k+1)}$

(Τὸ E στὶς παραστάσεις αὐτὲς παριστᾶ τὸν Εὐκλείδιο χῶρο).

Ἀντικαθιστώντας τὴ σχέση (20) στὴν (19) γιὰ τὸ $(\underline{U} - \hat{\underline{U}}_{i-1})$ ἔχουμε :

$$f' \underline{e}_i = \underbrace{(d'd)}_{kxk} \underbrace{\underline{q}_{i-1}}_{kx1} + n' \underbrace{(d, \underline{q}_{i-1})}_{Nx1} + f' \underline{t} - f' \overbrace{(n, \underline{U}_{i-1})}^{}_{Nx1} \tag{21}$$

Ἀντικαθιστώντας τὴ σχέση (21) στὴν (8) γιὰ τὸ $f' \underline{e}_i$ ἔχουμε :

$$\hat{\underline{U}}_i = \hat{\underline{U}}_{i-1} + \frac{I}{D^2} \Big[(d' d) \underline{q}_{i-1} + n' (d, \underline{q}_{i-1}) + f' \underline{t} - f' (n, \hat{\underline{U}}_{i-1}) +$$

$$+ P \widetilde{\underline{U}}_{i-1} - w' (\underline{z} - \underline{m}_1) - \underline{m}_1 ' f \Big] \tag{22}$$

Ἀντικαθιστώντας τὴ σχέση (20α) στὴν (22) γιὰ τὸ διάνυσμα $\hat{\underline{U}}_i$ ἔχουμε :

$$\underline{U} - \underline{q}_i = \hat{\underline{U}}_{i-1} + \frac{I}{D^2} \Big[\ldots\ldots\ldots\ldots \Big]$$

$$\underline{q}_i = \underline{U} - \hat{\underline{U}}_{i-1} + \frac{I}{D^2} (-1) \Big[\ldots\ldots\ldots\ldots \Big] \tag{23}$$

$$\underline{q}_i = \underline{q}_{i-1} - \frac{(d'd)\, \underline{q}_{i-1}}{D^2} + \frac{I}{D^2} \Big[f' \Big\{ (n, \hat{\underline{U}}_{i-1}) - \underline{t} \Big\} - n' (d, \underline{q}_{i-1}) \Big]$$

$$- \frac{I}{D^2} \Big[P \widetilde{\underline{U}}_{i-1} - w' (\underline{z} - \underline{m}_1) - \underline{m}_1 ' f \Big] \tag{24}$$

ὅπου ὅπως προαναφέρθηκε $\underline{m}_1 = E [\, \underline{t} \,]$

(Σημειώνεται ὅτι στὴ σχέση (23), τὸ $(\underline{U} - \hat{\underline{U}}_{i-1})$ ἀντικαθίσταται μὲ τὸ $\underline{q}_{i-1}$ ἀπὸ τὴ σχέση (20) γιὰ νὰ προκύψει ἡ σχέση (24)).

Λαμβάνοντας τὴν κατὰ συνθήκη ἀναμενόμενη τιμὴ τῆς παραστάσεως (24), δεδομένης τῆς μήτρας x ἔχουμε :

$$E_x \Big[\underline{q}_i \Big] = \widetilde{\underline{q}}_i = (I - \frac{d'd}{D^2})\, \widetilde{q}_{i-1} + \frac{I}{D^2} E_x \Big[f' (n, \hat{\underline{U}}_{i-1}) - f' \underline{t} -$$

$$- n'(d, \underline{q}_{i-1}) \Big] - \frac{I}{D^2} E_x \Big[P \hat{\underline{U}}_{i-1} - w'(\underline{z} - \underline{m}_1) - f' \underline{m}_1 \Big] \qquad (25)$$

Εἶναι γνωστό, ἀπὸ τὴ σχέση (20), ὅτι $\underline{q}_{i-1} = \underline{U} - \hat{\underline{U}}_{i-1}$, ἀπὸ ὅπου συνεπάγεται ὅτι

$$(d, \underline{q}_{i-1}) = (d, \underline{U}) - (d, \hat{\underline{U}}_{i-1})$$

καὶ

$$(d, \underline{q}_{i-1}) = \underline{y} - (d, \hat{\underline{U}}_{i-1}) \qquad (26)$$

Ἡ παραπάνω σχέση (26) ἀντικαθίσταται στὴν (25) γιὰ τὸ $(d, \underline{q}_{i-1})$ καὶ δίνει:

$$E_x \Big[\underline{q}_i \Big] = \tilde{\underline{q}}_i = (I - \frac{d'd}{D^2}) \tilde{\underline{q}}_{i-1} + \frac{1}{D^2} E_x \Big\{ f'(n, \underline{U}_{i-1}) - f' \underline{t} - n'$$

$$\Big[\underline{y} - (d, \hat{\underline{U}}_{i-1}) \Big] \Big\} - \frac{1}{D^2} E_x \Big[P\hat{\underline{U}}_{i-1} - w'(\underline{z} - \underline{m}) - f' \underline{m}_1 \Big] \qquad (27)$$

Θὰ ἀποδείξουμε στὴ συνέχεια, ὅτι οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι στὸ δεξιὸ τμῆμα τῆς παραστάσεως (27) εἶναι ἴσοι.

Θεωροῦμε τὸ δεύτερο ὅρο στὸ δεξιὸ τμῆμα τῆς σχ. (27), ποὺ μετὰ τὴν ἐκτέλεση τῶν πράξεων κ.λ.π., ὁ ὅρος αὐτὸς παίρνει τὴ μορφή:

$$\frac{I}{D^2} E_x \Big[f' n \hat{\underline{U}}_{i-1} - n'\underline{y} + n'd\hat{\underline{U}}_{i-1} - f' \underline{t} \Big]$$

$$= \frac{I}{D^2} E_x \Big[(f'n + n'd) \hat{\underline{U}}_{i-1} - n' \underline{y} - f' \underline{t} \Big] \qquad (28)$$

Γνωρίζοντας ὅτι $n = f - d$ (σχέση (1)), τότε ὁ ὅρος $f'n + n'd$ γράφεται :

$$f'(f - d) + (f - d)'d = f'f - f'd + f'd - d'd = f'f - d'd.$$

Συνεπῶς ἡ παράσταση (28) παίρνει τὴ μορφή :

$$\frac{I}{D^2} E_x \Big[(f'f - d'd) \hat{\underline{U}}_{i-1} - n' \underline{y} - f' \underline{t} \Big] \qquad (29)$$

Γνωρίζοντας ὅτι $\underline{y} = \underline{z} - \underline{t}$ (σχέση (2)) καὶ μὲ τὴν ὑπόθεση ὅτι τὰ στοιχεῖα τῶν διανυσμάτων $\underline{t}$ καὶ $\hat{\underline{U}}_{i-1}$ εἶναι στατιστικῶς ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας n, ἡ παράσταση (29) μπορεῖ νὰ γραφεῖ

$$\frac{1}{D^2}\left\{ E_x \left[(f'f - d'd)\, \hat{\underline{U}}_{i-1} \right] - E_x \left[n'(\underline{z} - \underline{t}) \right] - \underline{m}'_1 E_x [f] \right\} =$$

$$\frac{1}{D^2}\left\{ E_x \left[f'f - d'd)\, \hat{\underline{U}}_{i-1} \right] - E_x [n'] E_x [\underline{z}] - \underline{m}'_1 E_x [n'] - \underline{m}'_1 E_x [f] \right\} \tag{30}$$

Ἔχοντας ὑπόψη τὶς σχέσεις (6) καὶ (7), ἡ παράσταση (30) παίρνει τὴ μορφὴ

$$\frac{1}{D^2}\left\{ E_x \left[P\, \hat{\underline{U}}_{i-1} \right] - E_x [w'] E_x [\underline{z}] - \underline{m}'_1 E_x [w] - \underline{m}_1 E_x [f'] \right] =$$

$$\frac{1}{D^2} E_x \left[P\, \hat{\underline{U}}_{i-1} - w'(\underline{z} - \underline{m}_1) - \underline{m}_1 f' \right] \tag{31}$$

(Σημειώνεται ὅτι γιὰ νὰ προκύψει ἡ παράσταση (30) καὶ (31), ἔγινε χρήση τῶν ταυτοτήτων $f'\underline{m}_1 = \underline{m}'_1 f$ καὶ $\underline{m}'_1 w = \underline{w}' m_1$).

Ἡ παράσταση (31) συνεπῶς, εἶναι πανομοιότυπη μὲ τὸν τελευταῖο ὅρο τῆς σχέσεως (27). Ἔτσι ἡ σχ. (27) παίρνει τὴν τελικὴ μορφὴ

$$\tilde{\underline{q}}_i = \left(I - \frac{d'd}{D^2} \right) \tilde{\underline{q}}_{i-1} \tag{32}$$

Ἡ σχέση (32) γράφεται :

$$\tilde{\underline{q}}_i = \left(I - \frac{d'd}{D^2} \right) \tilde{\underline{q}}_{i-1} = (\ .\ )^2\, \tilde{\underline{q}}_{i-2} = \ldots\ldots = (\ .\ )^i\, \tilde{\underline{q}}_0 \tag{33}$$

Ὑπενθυμίζεται ὅτι τὸ $\underline{q}_i$ (καὶ $E_x [\underline{q}_i] \overset{\Delta}{=} \tilde{\underline{q}}_i$) καθορίστηκε ἐξ ὁρισμοῦ σὰν $\underline{q}_i = \underline{U} - \hat{\underline{U}}_i$, δηλαδὴ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν θεωρητικῶν συντελεστῶν καὶ αὐτῶν ποὺ ἐκτιμῶνται σὲ κάθε ἐπανάληψη.

Ἡ διαφορὰ αὐτὴ (δηλ. τὸ διάνυσμα $\underline{q}_i$) θὰ τείνει στὸ 0 ὅσο τὸ $i \to \infty$, μόνο ὅταν ἡ παράσταση $\left[I - \frac{d'd}{D^2} \right]^i \to 0.$

Θὰ ἀποδείξουμε στὴ συνέχεια ὅτι $\lim\limits_{i \to \infty} \left[I - \frac{d'd}{D^2} \right]^i \to 0$

Σύμφωνα μὲ τὸν Kenkel [(1974) σελίδες 299 - 300],
$\lim_{i \to \infty} (A)^i \to 0$, ἄν καὶ μόνο ἄν οἱ λανθάνουσες ρίζες (eigenvalues) τῆς τετραγωνικῆς μήτρας (A), ἔχουν ἀπόλυτη τιμὴ μικρότερη τῆς μονάδας.

Ἡ σύνθετη μήτρα $\left[I = \frac{d'd}{D^2} \right]$ ἔχει λανθάνουσες ρίζες (eigenralues) τῶν ὁποίων ἡ ἀπόλυτη τιμὴ εἶναι ὄντως μικρότερη τῆς μονάδας γιὰ τὸν ἑξῆς λόγο.

Ὁ ἀριθμὸς D^2 ἔχει καθοριστεῖ σὰν $2D^2 > || d ||^2$. Παριστάνοντας τὸ $|| d ||^2 \triangleq \overline{D}^2$, ἔχουμε $|| d ||^2 = tr\ (dd') = tr\ (d'd)$, ὅπου tr (A) παριστᾶ τὸ ἴχνος - trace - τῆς τετραγωνικῆς μήτρας A, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῆς κυρίας διαγωνίου τῆς μήτρας αὐτῆς.

Εἶναι αὐτονόητο συνεπῶς, ὅτι $tr\ (\frac{d'd}{\overline{D}^2}) = 1$

Ἐπὶ πλέον ἔχοντας ὑπόψη (Yamane (1968), σελίδες 533 - 534) ὅτι :

$$tr\ (A) = \sum_i \lambda_i$$

(ὅπου λ_i ($i = 1, \ldots\ldots, p$) εἶναι οἱ λανθάνουσες ρίζες (eigenvalues) τῆς τετραγωνικῆς μήτρας A ποὺ ἔχει διαστάσεις $p \times p$),
συμπεραίνεται πὼς ἡ τετραγωνικὴ μήτρα $(\frac{d'd}{\overline{D}^2})$, ποὺ ἔχει διαστάσεις $K \times K$,

ἔχει $tr\ (\frac{d'd}{\overline{D}^2}) = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$

Ἔχοντας ὑπόψη ὅτι ὅλες οἱ λανθάνουσες ρίζες τῆς μήτρας (d'd) εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ * δεδομένου ὅτι ἡ μήτρα (d'd) εἶναι θετικῶς ὁρισμένη (positive definite) — τὸ ἴδιο φυσικὰ ἰσχύει καὶ γιὰ τὴ μήτρα $(\frac{d'd}{\overline{D}^2})$ — συνάγεται ὅτι κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς λανθάνουσες ρίζες (eigenvalues) τῆς τελευταίας αὐτῆς μήτρας ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ μικρότερη τῆς μονάδας.

Θεωρώντας τὴ σύνθετη μήτρα $\left[I - \frac{d'd}{\overline{D}^2} \right]$ ἔχουμε :

$$eig \left[I - \frac{d'd}{\overline{D}^2} \right] = eig\ (I) - eig\ (\frac{d'd}{\overline{D}^2}) \tag{34}$$

ὅπου eig εἶναι ἡ συντετμημένη μορφὴ τοῦ ὅρου eigenvalues.

---

* Eveleigh, V. W., Adaptive Control and Optimization Techniques, Mc Graw - Hill Book Company, New York, 1967, σελίδες 16 - 17.

Ἐπειδὴ eig (I) = I, ἡ σχέση (34) γράφεται :

$$\mathrm{eig}\left[I - \frac{d'd}{\bar{D}^2} \right] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{vmatrix}$$

Δεδομένου ὅτι ὅλα τὰ λ_i ($i = 1, \ldots, k$) εἶναι πραγματικοὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ μικρότεροι τῆς μονάδας, ἕπεται ὅτι ὅλες οἱ λανθάνουσες ρίζες (eigenvalues) τῆς μήτρας $\left[I - \frac{d'd}{\bar{D}^2} \right]$ εἶναι μικρότερες τῆς μονάδας.

Σημειώνεται ὅτι τὸ D^2 στὴ σχέση (8) ἔχει ἐπιλεγεῖ νὰ εἶναι κατά τι μεγαλύτερο τοῦ $\frac{1}{2}\bar{D}^2$. Αὐτὸ σημαίνει πὼς κατὰ μείζονα λόγο οἱ λανθάνουσες ρίζες (eigenvalues) τῆς μήτρας $\left[I - \frac{d'd}{D^2} \right]$ ἔχουν, ἡ κάθε μιά, ἀπόλυτη τιμὴ μικρότερη τῆς μονάδας, ποὺ συνεπάγεται ὅτι $\lim\limits_{i \to 8} \left[I - \frac{d'd}{D^2} \right]^i \to 0$

Στὸ ἴδιο συμπέρασμα ὁδηγούμεθα καὶ ἂν θεωρήσουμε τὸ spectral norm — ἀντὶ τοῦ Euclidean norm — τῆς παραστάσεως (33), ποὺ γιὰ νὰ συγκλίνει θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει ἡ σχέση

$$\left\| \underline{\tilde{q}}_i \right\| = \left\| \left(I - \frac{d'd}{D^2} \right)^i \tilde{q}_0 \right\| \leqslant \left\| (\, . \,)^i \right\| \; \left\| \underline{\tilde{q}}_0 \right\|$$

Ἡ παραπάνω σχέση ἐπαληθεύεται μόνον ὅταν

$$\left\| \left(I - \frac{d'd}{D^2} \right)^i \right\| < 1 \tag{35}$$

Ἡ σχέση (35) ἰσχύει ἂν καὶ μόνον ἂν

$$\max \left| \lambda_j \left(I - \frac{d'd}{D^2} \right) \right| < 1 \qquad j = 1, \ldots, k \tag{36}$$

ὅπου λ_j (A) παριστᾶ τὴν j^{th} λανθάνουσα ρίζα * (eigenvalue) τῆς μήτρας A.

---

* Συνήθως ἀναφέρεται καὶ σὰν χαρακτηριστικὴ ρίζα.

Ἀπὸ τὴν παραπάνω συζήτηση διαπιστώνεται ὅτι ἡ σχέση (36) ἰσχύει καὶ συνεπῶς συνάγεται ὅτι $\lim_{i \to \infty} \left[I - \frac{d'd}{D^2} \right]^i \to 0$

Πῶς θὰ καθοριστεῖ ἡ μήτρα P καὶ τὸ διάνυσμα $\underline{\tilde{U}}$ στὴ σχέση (8)

Σύμφωνα μὲ τὴ σχέση (6) ἔχουμε

$$E_x \; [P] = E_x \; [f'f - d'd]$$

Δυστυχῶς ὁ ἀκριβὴς ὑπολογισμὸς τῆς μήτρας P δὲν εἶναι δυνατὸς γιατὶ προϋποθέτει τὴ γνώση τῆς μήτρας d. Εἶναι δυνατὴ ὅμως ἡ κατὰ προσέγγιση ἐκτίμησή της ἀπὸ τὴ σχέση

$$E_x[P] \simeq E_x \; [f'f - (f - w)' \; (f - w)] = E_x \; [f'w + fw' - w'w]$$

Ὅσον ἀφορᾶ τὸ διάνυσμα $\underline{\tilde{U}}$ αὐτὸ μπορεῖ νὰ ἐκτιμηθεῖ, πάλι κατὰ προσέγγιση, ἀπὸ τὴ σχέση

$$\tilde{U}_{j-1} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} \underline{\hat{U}}_{i-1}$$

κατὰ τὴν ἐπανάληψη j. Τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $\underline{\hat{U}}_0$ εἶναι οἱ ἀρχικὰ ἐκτιμηθέντες συντελεστές. Ἐνδεχομένως θὰ πρέπει νὰ διευκρινιστεῖ ὅτι $\underline{\hat{U}}_j$ παριστᾶ τὸ διάνυσμα $\underline{\hat{U}}$ ποὺ ἔχει ἐκτιμηθεῖ στὴν ἐπανάληψη j, ἐνῶ $\hat{U}_1 \, (i = 1, \ldots, k)$ εἶναι τὸ ἀντίστοιχο στοιχεῖο i τοῦ διανύσματος $\underline{\hat{U}}$.

Παρατηρήσεις

Σχετικὸ Πρόγραμμα ποὺ ἔχουμε καταρτίσει — σὲ γλῶσσα Fortran IV — θὰ εἶναι διαθέσιμο στὴ βιβλιοθήκη τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης περὶ τὰ τέλη Νοεμβρίου 1978, ὁπότε καὶ θὰ εἶναι δυνατὴ ἡ παροχὴ λεπτομερῶν ὁδηγιῶν γιὰ τὴ χρησιμοποίηση τοῦ Προγράμματος αὐτοῦ.

Θὰ πρέπει, τέλος, νὰ σημειωθεῖ ὅτι ἄν μετὰ ἀπὸ ἕνα ἱκανὸ ἀριθμὸ ἐπαναλείψεων διαπιστωθεῖ πὼς ὁ ἀλγόριθμος δὲν συγκλίνει, τότε ἡ τιμὴ τοῦ D^2 θὰ πρέπει νὰ αὐξηθεῖ κατά τι.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Dhrymes, P. J., (1970), Econometrics : Statistical Foundations and Applications, Happer and Row Publishers, New York.

Eveleigh, V. W. (1967), Adaptive Control and Optimization Techniques, McGraw - Hill Book Company, New York.

Hsia, T. C. and Bailey, A. L. (1968), I.E.E.E. System Science and Cybernetics, Conference Record, p. 228.

Kenkel, J. L. (1974), Dynamic Linear Economic Models, Gordon and Breach Science Publishers, New York.

Mehra, R. K. (1974), Topics in Stochastic Control Theory. Identification in Control and Econometrics; Similarities and Differences, Annals of Economic and Social Measurement, 3, p. 21.

Wong, K. Y. and Polak, E. (1967), I.E.E.E. trans. Automatic Control, 12, p. 707.

Wonnacott, R. J. and Wonnacott, T. H. (1970), Econometrics, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Yamane, T. (1968), Mathematics for Economists, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, New York.