ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Τοῦ κ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΓΕΩΡΓΙΑΔΗ

Εἰσαγωγὴ

Τὰ πρῶτα προβλήματα τοῦ «Λογισμοῦ τῶν Μεταβολῶν» * (Calculus of Variations) συναντῶνται στὰ κείμενα τῶν Ἑλλήνων Μαθηματικῶν τῆς ἀρχαιότητος. Ἕνα ἀπ' αὐτὰ εἶναι καὶ τὸ πρόβλημα τῶν ἰσοπεριμέτρων. Μὲ τὸ πρόβλημα αὐτό ζητεῖται νὰ εὑρεθεῖ μία κλειστὴ καμπύλη τοῦ ἐπιπέδου μὲ δοθὲν μῆκος ποὺ περικλείει τὸ μεγαλύτερο ἐμβαδό.

Ὁ Λογισμὸς τῶν Μεταβολῶν σὰν νέος κλάδος τῶν μαθηματικῶν ἄρχισε νὰ ἀναπτύσσεται συστηματικὰ ἀπὸ τὸ 1696 ὅταν οἱ John καὶ James Bernoulli ἔλυσαν τὸ πρόβλημα τοῦ βραχυστοχρόνου (brachistochrone problem). Πρόκειται βασικὰ γιὰ μιὰ θεωρία προσδιορισμοῦ μεγίστων ἢ ἐλαχίστων συναρτησιοειδῶν, ποὺ διαφέρει ριζικὰ ἀπὸ τὶς κλασσικὲς μεθόδους εὑρέσεως μεγίστων ἢ ἐλαχίστων τιμῶν συναρτήσεως.

Ἐκτὸς τοῦ Bernoulli καὶ πολλοὶ ἄλλοι μαθηματικοί, ὅπως οἱ Lagrange, Euler, Legendre, Jacobi, Weierstrass, Hilbert, Καραθεοδωρῆς, συνετέλεσαν στὴν ἀνάπτυξη τοῦ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν.

Ἡ σύγχρονη θεωρία τοῦ Λογισμοῦ τῶν Μεταβολῶν συνδέθηκε μὲ τὴν θεωρία τοῦ Ἀρίστου Ἐλέγχου (Optimal Control) χάρις στὶς ἐργασίες τοῦ Pontryagin καὶ μὲ τὴν θεωρία τῶν διαφορικῶν παιγνίων.

Ἡ παρουσίαση τοῦ προβλήματος τοῦ βραχυστοχρόνου ποὺ ἀκολουθεῖ ἔχει σκοπὸ νὰ κάνει ἀντιληπτὴ τὴν οὐσιαστικὴ διαφορὰ τῆς θεωρίας τοῦ Λογισμοῦ τῶν Μεταβολῶν ἀπὸ τὸν Διαφορικὸ Λογισμό.

1. Πρόβλημα τοῦ βραχυστοχρόνου

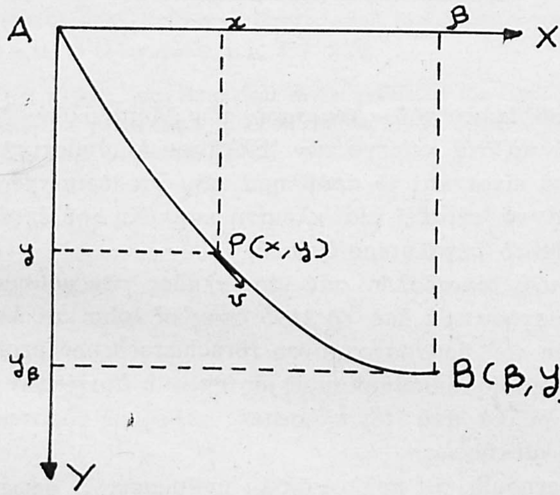
Ἂν δοθοῦν δύο σημεῖα Α, Β τοῦ ἐπιπέδου νὰ εὑρεθεῖ ἡ καμπύλη ποὺ περνάει ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ εἶναι τέτοια ὥστε, βαρὺ ὑλικὸ σημεῖο ποὺ

* Ἡ ὀνομασία αὐτὴ υἱοθετήθηκε σὰν ἀποτέλεσμα συμβολισμῶν τοῦ Lagrange τὸ 1760.

ξεκινάει ἀπὸ τὸ Α χωρὶς ἀρχικὴ ταχύτητα καὶ κινεῖται ἐπάνω στὴν καμπύλη μὲ τήν ἐπίδραση τῆς βαρύτητος νὰ φθάσει στὸ Β στὸν ἐλάχιστο χρόνο.

Ἐὰν t εἶναι ὁ χρόνος ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ φθάσει τὸ ὑλικὸ σημεῖο ἀπὸ τὸ Α στὸ Β κινούμενο ἐπάνω στὴν καμπύλη, ἡ λύση τοῦ προβλήματος συνίσταται στὸ νά εὑρεθεῖ μία καμπύλη, μεταξὺ τῶν ἀπείρων ποὺ περνάνε ἀπὸ τὸ Α καὶ Β, ὥστε ὁ χρόνος t νὰ γίνεται ἐλάχιστος.

Ἔστω ἕνα σύστημα ἀξόνων μὲ ἀρχὴ τὸ Α (σχ. 1). Ἡ ταχύτητα v στὸ τυχαῖο σημεῖο P τὴς καμπύλης εἶναι $v = \frac{ds}{dt}$ (1) ὅπου, S τὸ μῆκος τοῦ τόξου AP. Ἀλλὰ ὅπως εἶναι γνωστὸ ἀπὸ τὴν Φυσικὴ εἶναι $v = \sqrt{2gy}$ (2) ὅπου



Σχ. 1

g ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητος καὶ y ἡ τεταγμένη τοῦ P. Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) προκύπτει $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$ $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$. Ἀλλὰ ἀπὸ τὲν θεωρία τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ εἶναι $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$.

Ἄρα $dt = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx$ καὶ ὁλοκληρώνοντας προκύπτει

$$t = \int_0^\beta \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy}} \cdot dx \quad \text{ἤ} \quad t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\beta \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{y}}\, dx \qquad (3)$$

Τὸ πρόβλημα λύνεται ἂν εὑρεθεῖ μία συνάρτηση $y = y(x)$ ποὺ ἐλαχιστοποιεῖ τὸ συναρτησιοειδὲς (3). Γιὰ τὴν $y(x)$ πρέπει νὰ ἰσχύουν $y(o) = 0$, $y(\beta) = y_\beta$, ἡ $y(x)$ συνεχὴς καὶ ἡ $y'(x)$ συνεχὴς ἢ κατὰ τμήματα συνεχὴς (τότε ὑπάρχει τὸ ὁλοκλήρωμα).

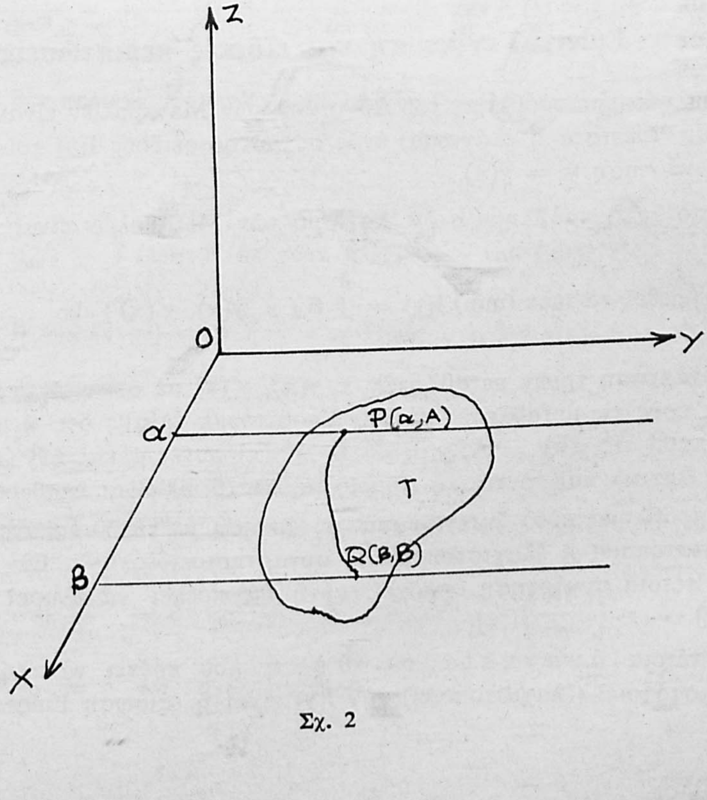
Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ πιὸ πάνω παράδειγμα τὸ συναρτησιοειδὲς παίζει στὸν Λογισμὸ τῶν Μεταβολῶν τὴν θέση τῆς συναρτήσεως στὸν Διαφορικὸ Λογισμό.

Σὰν συναρτησιοειδὲς ὁρίζουμε μία συνάρτηση $F: S \rightarrow R$ μὲ S ἕνα σύνολο συναρτήσεων καὶ R τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δηλ. τὸ συναρτησιοειδὲς ἀντιστοιχεῖ σὲ κάθε συνάρτηση $f \in S$ ἕνα πραγματικὸ ἀριθμό.

Ἡ προσπάθεια νὰ εὑρεθοῦν γενικὲς μέθοδοι ποὺ μὲ τὴν ἐφαρμογή τους νὰ λύνονται προβλήματα ποὺ ζητεῖται μία συνάρτηση, ἀπὸ ἕνα σύνολο συναρτήσεων, ποὺ νὰ μεγιστοποιεῖ ἢ ἐλαχιστοποιεῖ μιὰ παράσταση (συνήθως ἕνα ὁλοκλήρωμα) συνετέλεσε στὴ διαμόρφωση τοῦ Λογισμοῦ τῶν Μεταβολῶν.

2. Ὁρισμὸς τοῦ συναρτησιοειδοῦς I(y)

Ἄς εἶναι S τὸ σύνολο τῶν συναρτήσεων $y = y(x)$ ποὺ ὁρίζονται στὸ



Σχ. 2

$[\alpha,\beta]$, εἶναι συνεχεῖς στὸ $[\alpha,\beta,]$, ἔχουν παραγώγους πρώτης τάξεως συνεχεῖς στὸ $[\alpha,\beta]$ καὶ εἶναι $y(\alpha) = A$ καὶ $y(\beta) = B$, T ἀνοικτὸς τόπος στὸ ἐπίπεδο oxy σχ. 2 ποὺ περιέχει τὰ σημεῖα $P(\alpha,A)$ καὶ $Q(\beta,B)$ καί Σ τὸ ὑποσύνολο τοῦ S ποὺ περιέχει τὶς συναρτήσεις y(x) ποὺ τὰ διαγράμματά τους (γραφικὲς παραστάσεις) εὑρίσκονται μέσα στὸν T. Ἔστω ὅτι $\forall\, y \in \Sigma$ οἱ τιμὲς τῆς y' εἰκονίζονται στὸν ἄξονα oz καὶ εἶναι V τὸ σύνολο : $V = \{(x, y, z) : (x, y) \in T, z \in R\} \subseteq R^3$ ὅπου R^3 ὁ Εὐκλείδειος χῶρος τῶν τριῶν διαστάσεων.

Ἔστω F μία πραγματικὴ συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ V συνεχὴς σὲ κάθε σημεῖο τοῦ V. Ἐὰν $y \in \Sigma$ εἶναι φανερὸ ὅτι $(x, y(x), y'x)) \in V\ \forall x \in [\alpha,\beta]$ ἄρα μπορεῖ νὰ ὁρισθεῖ ἡ σύνθετη συνάρτηση $\overline{F} = F \circ y^*$ ποὺ εἶναι μιὰ πραγματικὴ συνάρτηση πραγματικῆς μεταβλητῆς ποὺ ὁρίζεται στὸ $[\alpha, \beta]$ μὲ τὴ σχέση $\overline{F}(x) = F(x, y(x), y'(x))\ \forall x \in [\alpha,\beta]$. Καὶ ἐπειδὴ οἱ $y(x)$, $y'(x)$ εἶναι συνεχεῖς στό $[\alpha, \beta]$ καὶ ἡ F εἶναι συνεχὴς στὸ V καὶ ἡ $\overline{F}$ θὰ εἶναι συνεχὴς στὸ $[\alpha, \beta]$. Θὰ εἶναι ὅμως καὶ φραγμένη στὸ $[\alpha, \beta]$. Ἄρα τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta F(x, y(x), y'(x))\, dx$ ὑπάρχει $\forall\, y \in \Sigma$. Ἑπομένως ὁρίζεται ἕνα συναρτησιοειδὲς $I(y) = \int_\alpha^\beta F(x, y(x), y'(x))\, dx$.

3. Ἐξίσωση Euler. Γενίκευση καὶ εἰδικὲς περιπτώσεις αὐτῆς

Τὸ ἁπλούστερο πρόβλημα τοῦ Λογισμοῦ τῶν Μεταβολῶν εἶναι νὰ βροῦμε τὰ ἀκρότατα (μέγιστα ἢ ἐλάχιστα) ἑνὸς συναρτησιοειδοῦς I(y) ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ μιὰ συνάρτηση $y = y(x)$.

Τὸ πιὸ ἁπλὸ πρόβλημα στὸν Λογισμὸ τῶν Μεταβολῶν εἶναι :

$$\text{Νὰ εὑρεθεῖ τὸ max (min) } I(y) = \int_\alpha^\beta F(x, y(x), y'(x))\, dx$$

ὅπου F συνάρτηση τριῶν μεταβλητῶν x, $y(x)$, $y'(x)$ μὲ συνεχεῖς μερικὲς παραγώγους ὡς πρὸς τὶς μεταβλητὲς αὐτές. Ὑποθέτουμε ἐπίσης ὅτι ἡ συνάρτηση y(x) ἱκανοποιεῖ τὶς $y(\alpha) = A$, $y(\beta) = B$, ἡ y(x) συνεχὴς καὶ ἡ y'(x) συνεχὴς καὶ ὅτι τὸ ἀρχικὸ καὶ τὸ τελικὸ σημεῖο (α, A), (β, B) εἶναι σταθερά :

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται μιὰ συνάρτηση μὲ τὶς παραπάνω ἰδιότητες ποὺ νὰ μεγιστοποιεῖ ἢ ἐλαχιστοποιεῖ τὸ συναρτησιοειδὲς I(y). Ἐὰν ὑποθέσουμε ὅτι μιὰ τέτοια συνάρτηση ὑπάρχει, αὐτὴ θὰ πρέπει νὰ πληροῖ ὡρισμένες συνθῆκες.

Μιὰ τέτοια ἀναγκαία συνθήκη ποὺ πρέπει νὰ πληροῖ ἡ y(x) γιὰ νὰ μεγιστοποιεῖ (ἐλαχιστοποιεῖ) τὴν I(y) εἶναι ἡ ἐξίσωση Euler :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y''$

ἡ (1) γράφεται $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0 \quad (2)$

Ἀπὸ τὴν (2) φαίνεται ὅτι ἐὰν $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$ ἡ ἐξίσωση τοῦ Fuler εἶναι μία συνήθης διαφορικὴ ἐξίσωση 2ας τάξεως ὡς πρὸς τὴν y(x).

Θὰ ἐξετασθοῦν τώρα ὡρισμένες εἰδικὲς περιπτώσεις ποὺ παρουσιάζονται σὲ ἐφαρμογὲς καὶ πού ἡ ἐξίσωση τοῦ Euler παίρνει ἁπλούστερες μορφές.

Περίπτωση 1

$F \equiv F(\,x.\ y(x)\,)$ δηλ. ἡ F δὲν περιέχει τὴν $y'(x)$

Εἶναι τότε $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = 0$ καὶ ἡ (1) γίνεται $\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (3)$

Ἡ (3) δὲν περιέχει τὴν $y'(x)$ καὶ λύνεται χωρὶς ὁλοκλήρωση.

Παράδειγμα :

Ἐὰν $I(y) = \int_\alpha^\beta (x-y)^2\,dx$ τότε ἡ ἐξίσωση τοῦ Euler εἶναι :

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ἢ $-2\,(x-y) = 0$ ἢ $y = x$. Πράγματι ἐὰν $y(x) = x$ τὸ $I(y) = 0$ δηλ. γίνεται ἐλάχιστο.

Περίπτωση 2

$F \equiv F(x, y')$ δηλ. ἡ F δὲν περιέχει τὴν y(x).

Εἶναι τότε $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ καὶ ἡ (1) γίνεται $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ ἢ μὲ ὁλοκλήρωση $\frac{\partial F}{\partial y'} = c \quad (4) \quad c =$ σταθερά.

Παράδειγμα :

Εάν $I(y) = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$ καὶ $y(1) = 0$, $y(2) = 1$ τότε ἡ ἐξίσωση τοῦ Euler εἶναι :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c, \text{ ἢ } \frac{2y'}{2x\sqrt{1+y'^2}} = c, \text{ ἢ } \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = cx, \text{ ἢ}$$

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = c^2x^2, \text{ ἢ } y' = \frac{cx}{\sqrt{1-c^2x^2}}, \text{ ἢ } dy = \frac{cx}{\sqrt{1-c^2x^2}} dx, \text{ ἢ}$$

$$y = \int \frac{cx}{\sqrt{1-c^2x^2}} dx, \text{ ἢ } y = -\frac{1}{2c} \int (1-c^2x^2)^{\frac{1}{2}} d(1-c^2x^2)$$

$$y = -\frac{1}{c}\sqrt{1-c^2x^2} + c_1 \text{ ἢ τελικὰ } (y-c_1)^2 + x^2 = \frac{1}{c^2} \qquad \text{(II)}$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση εἶναι μιὰ διπαραμετρικὴ οἰκογένεια κύκλων μὲ κέντρο πάνω στὸν ἄξονα τῶν y.

Ἐπειδὴ $y(1) = 0$ καὶ $y(2) = 1$ ἀπὸ τὴν (II) εὑρίσκεται $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $c_1 = 2$

Ἄρα τὸ συναρτησιοειδὲς I(y) παίρνει ἀκρὰ τιμὴ γιὰ τὴν συνάρτηση y(x) ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση $(y-2)^2 + x^2 = 5$.

Περίπτωση 3

Ἐὰν $F \equiv F(y(x), y'(x))$ δηλ. ἡ F δὲν περιέχει τὸ x.

Εἶναι τότε $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = 0$ καὶ ἡ (2) γίνεται :

$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0$. Αὐτὴ μὲ τὴν ἀντικατάσταση $y' = P$ γίνεται $F - P\frac{\partial F}{\partial P} = c$ ἢ $F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c$ (5) c = σταθερά.

Ἡ (5) εἶναι γενικὰ μία συνήθης διαφορικὴ ἐξίσωση 1ης τάξεως.

Παράδειγμα :

Ἐὰν $I(y) = \int_\alpha^\beta y[1 + y'^2]^{1/2}\, dx$ τότε ἡ ἐξίσωση Euler εἶναι :

$$F - y\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \text{ ἢ } y[1 + y'^2]^{1/2} - \frac{y\,y'}{[1+y'^2]^{1/2}} = c,$$

$$\text{ἢ } y = c\,[1 + y'^2]^{1/2}, \text{ ἢ } y^2 = c^2\,(1 + y'^2)$$

$$\text{ἢ } y'^2 = \frac{y^2}{c^2} - 1, \text{ ἢ } y' = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{c},$$

$$\text{ἢ } \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{1}{c}\,dx, \text{ ἢ } \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \int \frac{1}{c}\,dx + c_1, \text{ ἢ}$$

$$\ln(y + \sqrt{y^2 - c^2} = \frac{x}{c} + c_1 \text{ ἢ } y + \sqrt{y^2 - c^2} - c_1^*\, e^{\frac{x}{c}} = 0 \quad \text{(III)}$$

Ἡ συνάρτηση $y(x)$ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση (III) θὰ εἶναι ἐκείνη ποὺ θὰ μεγιστοποιεῖ ἢ ἐλαχιστοποιεῖ τὸ $I(y)$.

Ἡ ἐξίσωση τοῦ Eulei μπορεῖ νὰ γενικευθεῖ μὲ ἀλλαγὲς τῆς $F(x, y(x), y'(x))$ στὸ $I(y) = \int_\alpha^\beta F(x, y(x), y'(x))\, dx$. Διακρίνουμε τὶς περιπτώσεις :

α) ἡ F νὰ περιέχει δύο ἢ περισσότερες συναρτήσεις $y_1(x)$, $y_2(x)$. Τὸ συναρτησιοειδὲς εἶναι τότε :

$$I(y_1, y_2) = \int_\alpha^\beta F(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2)\, dx$$

Ἐὰν οἱ $y_1(x)$, $y_2(x)$ μεγιστοποιοῦν (ἐλαχιστοποιοῦν) τὸ $I(y_1, y_2)$ τότε ἡ ἀναγκαία συνθήκη) εἶναι τὸ ζευγάρι τῶν ἐξισώσεων Euler :

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right) = 0$$

(β) ἡ F νὰ περιέχει παραγώγους τάξεως $\geqslant 2$. Τὸ συναρτησιοειδὲς εἶναι τότε τῆς μορφῆς:

$$I(y) = \int_{\alpha}^{\beta} F\,(x, y(x), y'(x), y''(x)\,dx$$

μὲ y(x) συνάρτηση μὲ τὶς ἰδιότητες:

$y(x)$, $y'(x)$ συνεχεῖς

$y''(x)$ κατὰ τμήματα συνεχεῖς

$$y(\alpha) = A_1 \qquad y(\beta) = B_1$$

$$y'(\alpha) = A_2 \qquad y'(\beta) = B_2$$

Ἡ ἐξίσωση τοῦ Euler στὴν περίπτωση αὐτὴ εἶναι:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''}\right) = 0$$

4. Προβλήματα μὲ περιορισμοὺς (Πολλαπλασιαστὴς Lagrange)

Ἡ γνωστὴ μέθοδος πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ μπορεῖ νὰ γενικευθεῖ γιὰ προβλήματα τοῦ Λογισμοῦ τῶν Μεταβολῶν.

Ἔτσι ὅταν οἱ περιορισμοὶ εἶναι διαφορικὲς ἐξισώσεις τὸ πρόβλημα εἶναι ἕνα πρόβλημα Lagrange.

Ὅταν οἱ περιορισμοὶ εἶναι ὁλοκληρώματα τὸ πρόβλημα εἶναι γενικὰ ἕνα «πρόβλημα ἰσοπεριμέτρων». Μὲ τὸν ὅρο αὐτὸ ἐκφράζεται ἡ γενικὴ μορφὴ μιᾶς κατηγορίας προβλημάτων τοῦ Λογισμοῦ τῶν Μεταβολῶν, τῶν ὁποίων ἡ λύση ἀνάγεται στὴν εὕρεση ἀκροτάτων συναρτήσεων ποὺ τὸ ἀντίστοιχο διάγραμμά τους ἔχει σταθερὸ μῆκος (περίμετρο).

Ὅταν στὸ πρόβλημα ὑπάρχουν n συναρτήσεις καὶ m περιορισμοὶ ($m < n$) ποὺ εἶναι διαφορικὲς ἐξισώσεις ἢ ἁπλὲς ἐξισώσεις τὸ πρόβλημα λέγεται πρόβλημα Mayer.

α) Θὰ ἐξετασθεῖ πρῶτα τὸ πρόβλημα Lagrange:

$$\max\,(\min)\; I(y) = \int_{\alpha}^{\beta} F\,(x, y, y')\,dx \quad \text{μὲ τὸν περιορισμὸ} \quad \varphi(x, y, y') = 0.$$

Αὐτὸ εἶναι τὸ ἁπλούστερο πρόβλημα Lagrange μὲ μία ζητούμενη συνάρτηση y(x) καὶ ἕνα περιορισμό. Σὲ πολλὲς περιπτώσεις τὸ πρόβλημα μπορεῖ νᾶ λυθεῖ χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσουμε πολλαπλασιαστὴ Lagrange ἀλλὰ μὲ ἁπλῆ ἀντικατάσταση τῆς φ στὴν F ὁπότε τὸ πρόβλημα καταλήγει σὲ πρόβλημα χωρὶς περιορισμό.

Γιὰ νὰ λύσουμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴ μέθοδο τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange, ὁρίζουμε μιὰ νέα συνάρτηση $F^* = F + \lambda(x) \cdot \varphi$, ὅπου λ(x) μιὰ ἄγνωστη συνάρτηση τοῦ x, ὁ πολλαπλασιαστὴς Lagrange.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται στὸ νὰ βροῦμε τὶς συναρτήσεις y(x) καὶ λ(x) ποὺ νὰ μεγιστοποιοῦν ἢ ἐλαχιστοποιοῦν τὸ $\int_\alpha^\beta F^* dx$.

Ἡ ἐξίσωση τοῦ Euler εἶναι :

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right) = 0$$

ἢ
$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\lambda(x) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\lambda(x)\right] = 0 \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση (2) καὶ ὁ περιορισμὸς $\varphi(x, y, y') = 0$ ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ ἀγνώστους τὶς δύο συναρτήσεις y(x) καὶ λ(x). Ἡ λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ δίνει τὴν λύση ἀρχικοῦ προβλήματος.

β) Γιὰ τὸ πρόβλημα Lagrange μὲ δύο συναρτήσὲις καὶ ἕνα περιορισμό, δηλ. τὸ πρόβλημα :

$$\max (\min)\ I(y_1, y_2) = \int_\alpha^\beta F(x, y_1, y_2, y'_1, y_2')\, dx \qquad (1)$$

$$\text{μὲ τὸν περιορισμὸ}\quad \varphi(x, y_1, y_2, y_1', y_2',) = 0 \qquad (2)$$

Εἶναι $F^* = F + \lambda(x)\,\varphi$ καὶ οἱ ἐξισώσεις Fuler εἶναι :

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'_1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F^*}{\partial y_2'}\Big) = 0$$

ἢ
$$\frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\lambda(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\lambda(x)\right) = 0 \qquad (3)$$

καὶ $\quad \frac{\partial F}{\partial y_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \lambda(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \lambda(x) \right) = 0 \qquad (4)$

Οἱ ἐξισώσεις (2), (3) καὶ (4) ἀποτελοῦν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ ἀγνώστους τὶς συναρτήσεις $y_1(x)$, $y_2(x)$ καὶ $\lambda(x)$ καὶ ἡ λύση του μᾶς δίνει τὴν λύση τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος.

γ) Στὸ πρόβλημα τῶν ἰσοπεριμέτρων ζητεῖται νὰ εὑρεθεῖ ἡ $y = y(x)$ γιὰ τὴν ὁποία τὰ συναρτησιοειδὲς $I(y) = \int_\alpha^\beta F(x, y, y')\, dx$ (1) ἔχει ἄκρα τιμή. Ἡ $y(x)$ πρέπει νὰ ἱκανοποιεῖ τὶς $y(\alpha) = A$, $y(\beta) = B$ (2) ἐπὶ πλέον τὸν περιορισμὸ $k(y) = \int_\alpha^\beta G(x,y,y')\, dx = l$ (3) (l = σταθερά).

Γιὰ τὴν λύση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ οἱ συναρτήσεις F καὶ G τῶν συναρτησιοειδῶν πρέπει νὰ ἔχουν συνεχεῖς πρῶτες καὶ δεύτερες παραγώγους στὸ $[\alpha, \beta]$ γιὰ τυχαῖες τιμὲς τῶν y καὶ y'. Γιὰ τὴν περίπτωση αὐτὴ ἰσχύει τὸ θεώρημα:

Ἐὰν δοθεῖ τὸ συναρτησιοειδὲς (1) καὶ ἡ συνάρτηση $y(x)$ τέτοια ὥστε νὰ ὑπάρχει τὸ (1), μὲ $y(\alpha) = A$ καὶ $y(\beta) = B$ καὶ ἂν τὸ $I(y)$ ἔχει ἀκρότατο γιὰ $y = y(x)$, τότε ἐὰν ἡ $y = y(x)$ δὲν εἶναι ἀκρότατο τῆς $k(y)$, ὑπάρχει μιὰ σταθερὰ λ τέτοια ὥστε ἡ $y = y(x)$ νὰ εἶναι ἀκρότατο τοῦ συναρτησιοειδοῦς:

$\bar{k} = \int_\alpha^\beta (F + \lambda G)\, dx$ (4) καὶ ἡ $y = y(x)$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἐξίσωση τοῦ Euler:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \lambda \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right) \right] = 0.$$

5. Ἐφαρμογὲς

Τὰ παραδείγματα ἐφαρμογῶν ποὺ ἀκολουθοῦν, σκοπὸ ἔχουν νὰ δείξουν πῶς ἐφαρμόζεται ὁ Λογισμὸς τῶν μεταβολῶν σὲ προβλήματα γεωμετρικὰ καὶ οἰκονομικά.

1. «Μεταξὺ τῶν καμπυλῶν τοῦ ἐπιπέδου ποῦ περνᾶνε ἀπὸ δύο σημεῖα $A(x_0,y_0)$ καὶ $B(x_1,y_1)$, νὰ εὑρεθεῖ ἐκείνη ποὺ περιστρεφόμενη περὶ τὸν ἄξονα x γεννᾶ τὴν ἐπιφάνεια μὲ τὸ μικρότερο ἐμβαδόν».

Λ ύ σ η: Εἶναι γνωστὸ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας ποὺ γεννᾶται μὲ περιστροφὴ τῆς καμπύλης μὲ ἐξίσωση $y = y(x)$ περὶ τῶν ἄξονα τῶν x εἶναι :

$$E = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Ἐπειδὴ ἀπὸ τὸ συναρτησιοειδὲς λείπει τὸ x ἡ ἐξίσωση τοῦ Euler ἔχει τὴν μορφή : $F - y' \dfrac{\partial F}{\partial y'} = c$ (1) περίπτωση 3 § 2). Καὶ ἐπειδὴ $F(y,y') = y\sqrt{1 + y'^2}$ ἡ (1) γίνεται :

$$y\sqrt{1+y'^2} - y' \frac{y'y}{\sqrt{1+y'^2}} = c \text{ ἢ } y\sqrt{1+y'^2} - y \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

$$\text{ἢ } y\,(1 + y'^2) - y\,y'^2 = c\sqrt{1+y'^2}, \text{ ἢ } y = c\sqrt{1+y'^2},$$

$$\text{ἢ } y^2 = c^2\,(1 + y'^2), \text{ ἢ τελικὰ } y' = \frac{\sqrt{y^2-c^2}}{c}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} = \frac{dx}{c} \text{ καὶ ὁλοκληρώνοντας}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} = \int \frac{dx}{c} + c_1 \quad \text{ἢ} \quad \ln\,(y + \sqrt{y^2-c^2}) = \frac{x}{c} + c_1$$

καὶ λύνοντας ὡς πρὸς y προκύπτει $y = \cosh\left(\dfrac{x}{c} + c_1\right)$ (2) ποὺ εἶναι μιὰ διπαραμετρικὴ οἰκογένεια καμπυλῶν.

Οἱ σταθερὲς c καὶ c_1 ὑπολογίζονται μὲ τὴν βοήθεια τῶν συν/νων τῶν Α καὶ Β καὶ τότε εὑρίσκεται μιὰ καμπύλη.

II. Μιὰ παραλλαγὴ τοῦ ὑποδείγματος πολλαπλασιαστὴς - ἐπιταχυντὴς τοῦ Phillips σύμφωνα μὲ τοὺς συμβολισμοὺς τοῦ Allen εἶναι τὸ ὑπόδειγμα ποὺ ἀκολουθεῖ. Πρόκειται γιὰ ὑπόδειγμα ποὺ ζητεῖται ἡ ἀριστοποίηση μιᾶς συναρτήσεως κοινωνικῆς εὐημερίας. Οἱ περιορισμοὶ τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως εἶναι οἱ σχέσεις ἀπὸ ἕνα μακροδυναμικὸ ὑπόδειγμα. Ζητοῦνται ἄριστες διαχρονικὲς ἐξελίξεις γιὰ τὸ ἀκαθάριστο ἐθνικὸ προϊὸν (GNP), τὴν κατανάλωση, τὶς ἐπενδύσεις καὶ τὶς κρατικὲς δαπάνες.

Τὸ ὑπόδειγμα εἶναι [3,375]:

$$Z = C+I+G \tag{1}$$

$$Y = \left[\frac{b}{(D+b)}\right] Z \tag{2}$$

$$C = (1-s)\,Y \tag{3}$$

$$I = v\,\dot{Y} + A \tag{4}$$

ὅπου

C = κατανάλωση

I = συνολικὴ ἐπένδυση

G = κρατικὲς δαπάνες

A = αὐτόνομη ἐπένδυση

Z = συνολικὴ ζήτηση

Y = συνολικὴ προσφορὰ (GNP)

s = συντελεστὴς ἀποταμιεύσεως $\left(\frac{s}{Y}\right)$

b = ταχύτητα προσαρμογῆς τῆς προσφορᾶς στὴ ζήτηση

v = ἐπιταχυντὴς

D = γραμμικὸς τελεστὴς παραγωγίσεως $\left(\frac{d}{dt}\right)$

$$DY = \dot{Y}$$

Ἡ (1) λόγω τῶν (3) καὶ (4) γίνεται

$$Z = (1-s)\,Y + v\,\dot{Y} + A + G \tag{5}$$

Ἡ (3) λόγω τῆς (5) δίνει

$$Y = \left[\frac{b}{(D+b)}\right]\Big[\,(1-s)\,Y + v\,\dot{Y} + A + G$$

$$(D+b)\,Y = (b - bs)\,Y + vb\,\dot{Y} + bA + bG \quad ἢ$$

$$\dot{Y} + b\,Y = bY - bsY + vb\,\dot{Y} + bA + bG, \quad ἢ$$

$$(1 - vb)\,\dot{Y} + bs\,Y - bA - bG = 0$$

Ὁ στόχος εἶναι νὰ ἐλαχιστοποιηθεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν δύο μεταβλητῶν ἀπὸ τὰ ἐπιθυμητὰ ἐπίπεδα στὴ χρονικὴ περίοδο ἀπὸ τ ὡς T. Ἂν ὑποτεθεῖ ὅτι τὸ ἐπιθυμητὸ ἐπίπεδο τῆς GNP εἶναι Y^* καὶ τὸ ἐπιθυμητὸ ἐπίπεδο τῶν κρατικῶν δαπανῶν εἶναι G^* καὶ ὅτι βάζουμε βάρη στοὺς δύο αὐτοὺς παράγοντες γιὰ νὰ δείξουμε ὅτι κάθε ἀπόκλιση ἀπὸ Y σὲ Y^* εἶναι k φορὲς πιὸ δαπανηρὴ γιὰ ἴδια ἀπόκλιση ἀπὸ G σὲ G^* τὸ πρόβλημα ἀνάγεται :

$$\min I\,(Y,G) = \int_{\tau}^{T} [\alpha_1\,(Y - Y^*)^2 + \alpha_2\,(G - G^*)^2]\,dt$$

μὲ τοὺς περιορισμοὺς (1), (2), (3). (4), τοῦ ὑποδείγματος. $\alpha_1 = k\alpha_2$ καὶ v, b, s γνωστὲς σταθερές.

Τὸ πρόβλημα τελικὰ εἶναι :

$$\min I\,(Y,G) = \int_{\tau}^{T} [\alpha_1\,(Y - Y^*) + \alpha_2\,(G - G^*)^2]\,dt$$

μὲ τὸν περιορισμὸ $(1 - bv)\,\dot{Y} + bsY - bG - bA = 0$

Τὸ πρόβλημα λύνεται μὲ ἐφαρμογὴ τῆς τεχνικῆς ποὺ ἀναφέρθηκε στὴν 4.(β) γιὰ δυὸ συναρτήσεις καὶ ἕνα περιορισμό.

III. Μιὰ οἰκονομία παράγει δύο ἀγαθά, ἕνα κεφαλαιουχικὸ (k) καὶ ἕνα καταναλωτικὸ (C). Ἐὰν ἡ στιγμιαία συνάρτηση παραγωγῆς γιὰ τὸ κεφαλαιουχικὸ εἶναι : [4,345]

$\dot{K}(t) = g\,[k(t), C(t)\,;\, \dot{C}(t) + c(t)] - k(t)$ ὅπου $\dot{c}$, $\dot{k}$ οἱ παράγωγοι ὡς πρὸς τὸν χρόνο καὶ c(t) καὶ k(t) ἡ κατανάλωση τοῦ καταναλωτικοῦ καὶ κεφαλαιουχικοῦ ἀγαθοῦ στὸ χρονικὴ στιγμὴ t. Εἶναι τότε $\dot{K}(t)$ ἡ ἐπένδυση στὴ χρονικὴ στιγμὴ t. Ἂν δοθεῖ μιὰ ἀρχικὴ χρονικὴ στιγμὴ t_0 καὶ μιὰ τελικὴ t_1 ὁ στόχος τῆς οἰκονομίας εἶναι νὰ μεγιστοποιήσει τὸ ἀπόθεμα τοῦ κεφαλαιουχικοῦ στην χρονικὴ στιγμὴ t_1. Ζητεῖται λοιπὸν νὰ μεγιστοποιηθεῖ :

$$\max \quad K(t_1) - K(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{K} dt$$

μὲ τὸν περιορισμὸ $\dot{k}(t) = g\,[K(t), C(t)\,!\,\dot{C}(t) + c(t)] - k(t)$.

Ὑποτίθεται ὅτι οἱ συναρτήσεις c(t) καὶ k(t) εἶναι γνωστές. Τὸ πρόβλημα εἶναι πρόβλημα τοῦ Λογισμοῦ Μεταβολῶν μὲ δύο ἄγνωστες συναρτήσεις K(t) καὶ C(t) καὶ ἕνα περιορισμὸ ποὺ διαφορικὴ ἐξίσωση ἡ

$$G = g\,[K(t), C(t)\,;\,\dot{C}(t) + c(t)] - \dot{K}(t) - k(t) = 0$$

ποὺ λύνεται σύμφωνα μὲ τὰ ἐκτεθέντα στὴν 4.(β).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Bllis, G.: Lectures on the Calculus of Variations, Phoenix 1968.

[2] Hadley, G. & Kemp, M.: Variational Methods in Economics, North Holland/American.

[3] Pfaffenberger, R. & Wulker, D.: Mathematical Programming for Economics and Business, the Iowa State University Press 1976.

[4] Roberts, B. & Schulze, D.: Modern Mathematics & Economic Analysis, Norton, 1973.