ΙΣΗ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΤΑΧΕΙΡΙΣΗ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ ΣΕ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΤΟΙΜΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΟΥ (Ν, Κ, 1)

τοῦ
κ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Θ. ΤΖΩΡΤΖΟΠΟΥΛΟΥ,
Καθηγητοῦ Στατιστικῆς στὴν Α.Σ.Ο.Ε.Ε.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συχνὰ ὁρισμένες γραπτὲς ἐξετάσεις μαθητῶν, φοιτητῶν κλπ., δὲν γίνονται μὲ τὸ γνωστὸ κλασσικὸ τρόπο, ἀλλὰ μὲ ἐπιλογὴ ἀπὸ ἕτοιμες ἀπαντήσεις, ποὺ συνοδεύουν τὸ κείμενο κάθε θέματος τῶν ἐξετάσεων. Οἱ ἐξετάσεις τῆς μορφῆς αὐτῆς γίνονται συνήθως μὲ ἕνα σχέδιο γιὰ τὸ ὁποῖο μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸν ἀκόλουθο συμβολισμό:

$$(\mathrm{N},\ \mathrm{K},\ \Lambda)$$

ὅπου:

Ν= ἀριθμὸς θεμάτων, τὰ ὁποῖα ὁ ἐξεταζόμενος πρέπει νὰ ἐπεξεργασθεῖ ὀρθὰ γιὰ νὰ σημειώσει ἄριστη ἐπίδοση.

Κ= ἀριθμὸς ἕτοιμων ἀπαντήσεων, ποὺ συνοδεύουν κάθε θέμα. Οἱ ἀπαντήσεις αὐτὲς εἶναι ἰσάριθμες σὲ ὅλα τὰ θέματα, ἀνάμεσά τους δὲ μόνο ὁρισμένες εἶναι ὀρθὲς κατὰ θέμα.

Λ= ἀριθμὸς ἕτοιμων ἀπαντήσεων, ἀπὸ τὶς Κ κάθε θέματος, ποὺ εἶναι ὀρθὲς καὶ πρέπει νὰ ἐπισημανθοῦν ἀπὸ τὸν ἐξεταζόμενο (οἱ ὑπόλοιπες Κ-Λ ἀπαντήσεις εἶναι ἐσφαλμένες).

Τὸ πιὸ ἁπλὸ σχέδιο ἐξετάσεων μὲ ἐπιλογὴ ἕτοιμων ἀπαντήσεων εἶναι τῆς μορφῆς (Ν, Κ, 1). Στὸ σχέδιο αὐτὸ ἔχουμε Λ=1 καὶ συνεπῶς ὁ ἐξεταζόμενος ὀφείλει νὰ ἐπισημάνει τὴ μοναδικὴ ὀρθὴ ἀπάντηση ἀπὸ τὶς Κ κάθε θέματος.

Ὁ τρόπος γραπτῶν ἐξετάσεων μὲ ἐπιλογὴ ἀπὸ ἕτοιμες ἀπαντήσεις παρουσιάζει πολλὰ πλεονεκτήματα καὶ μειονεκτήματα σὲ σύγκριση μὲ τὸν κλασσικὸ τρόπο. Ἕνα ἀπὸ τὰ πιὸ σημαντικὰ μειονεκτήματά του εἶναι ὅτι, κάτω ἀπὸ ὁρισμένες συνθῆκες, γεννᾶ στὸν ἐξεταζόμενο τὴν ἐλπίδα πὼς μπορεῖ νὰ ἀπαντήσει ὀρθὰ σὲ πολλὰ θέματα, ὥστε ὄχι μόνο νὰ ἐπιτύχει στὶς ἐξετάσεις, ἀλλὰ ἀκόμη καὶ νὰ βαθμολογηθεῖ μὲ ἄριστα, χωρὶς νὰ ἔχει καμμιὰ ἀπολύτως προετοιμασία καὶ γνώση στὸ ἀντικείμενο ποὺ καλύπτουν οἱ ἐξετάσεις.

Σὲ ἄλλη ἐργασία μας[1] ἀσχοληθήκαμε εἰδικὰ μὲ τὴ συμπεριφορὰ τῶν ἐπιδόσεων τοῦ ἐξεταζόμενου, ὁ ὁποῖος ἂν καὶ ἐντελῶς ἀπροετοίμαστος, παίρνει μέρος — γιὰ διάφορους λόγους — σὲ ἐξετάσεις τύπου (N, K, 1). Ἀναλύσαμε στὴν ἐργασία ἐκείνη τὸ θέμα ἀπὸ τὴ στατιστική του πλευρά, μετρήσαμε τὶς πιὸ ἐνδιαφέρουσες πιθανότητες καὶ γιὰ τὴν ἀντιμετώπιση τῶν ἀπροετοίμαστων προτείναμε τρόπους ποὺ ἡ ἐφαρμογή τους μπορεῖ νὰ ἀπαλλάξει τὸ ἐξεταστικὸ αὐτὸ σύστημα ἀπὸ ἀντιεκπαιδευτικὲς ἀδυναμίες, οἱ ὁποῖες τὸ καθιστοῦν ὕποπτο καὶ ὁρισμένες φορὲς ἐπικίνδυνο.

Μιὰ ἀκόμη πλευρὰ τοῦ ἴδιου προβλήματος ἐξετάζουμε στὴ νέα μας αὐτὴ ἐργασία. Τούτη τὴ φορά, ὅμως, δὲν περιοριζόμαστε ἀποκλειστικὰ στοὺς ἀπροετοίμαστους ἐξεταζόμενους, ἀλλὰ ἐπεκτείνουμε τὴν ἀνάλυσή μας σὲ ὅλους ὅσοι παίρνουν μέρος στὶς ἐξετάσεις. Σκοπός μας εἶναι νὰ δείξουμε ἐὰν ὁ τρόπος ἐξετάσεων (N, K, 1) εὐνοεῖ συστηματικὰ — καὶ σὲ ποιό βαθμὸ — τοὺς ἀπροετοίμαστους καὶ προετοιμασμένους καὶ πῶς πρέπει νὰ ἐνεργήσουμε ὥστε νὰ ἐξαλειφθεῖ ἡ συστηματικὴ αὐτὴ εὔνοια —ὅπου ὑπάρχει— ἰδίως μάλιστα ἐὰν διαφοροποιεῖται μεταξὺ προετοιμασμένων καὶ ἀπροετοίμαστων.

2. Ο ΑΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΤΟΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΣ

Δεχόμαστε ὅτι ὁ ἀπροετοίμαστος ἐξεταζόμενος εἶναι ἐντελῶς ἀκατάρτιστος στὰ ἐξεταζόμενα θέματα καὶ συνεπῶς ἀδυνατεῖ πλήρως νὰ διακρίνει ποιὰ ἀπὸ τὶς K ἕτοιμες ἀπαντήσεις κάθε θέματος εἶναι ὀρθὴ ἢ λανθασμένη. Ἐπίσης, ὑποθέτουμε ὅτι κατὰ τὴ διάρκεια τῶν ἐξετάσεων δὲν συνεργάζεται μὲ τοὺς ὑπόλοιπους ἐξεταζόμενους οὔτε εἶναι δυνατὸ νὰ βοηθηθεῖ μὲ ὁποιοδήποτε τρόπο (ἀντιγραφὴ κ.λπ.), γιὰ νὰ ἐπισημάνει τὶς ζητούμενες ὀρθὲς ἀπαντήσεις. Ἔτσι, ἡ ἀντιμετώπιση ἑνὸς θέματος ἀπὸ τὸν ἐξεταζόμενο αὐτὸ ἀποτελεῖ τυπικὸ πείραμα τύχης μὲ K ἐκβάσεις ἀπὸ τὶς ὁποῖες μία μόνο εἶναι εὐνοϊκὴ — αὐτὴ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἐπιλογὴ τῆς μοναδικῆς ὀρθῆς ἀπαντήσεως. Θεωρώντας τὶς K ἐκβάσεις ἰσοπίθανες, μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε, στὸ δειγματικὸ χῶρο ἐξετάσεως ἑνὸς ὁρισμένου θέματος, τὴν τυχαία μεταβλητὴ X, ποὺ ἐκφράζει ἐπιλογὴ μὴ ὀρθῆς καὶ ὀρθῆς ἀπαντήσεως μὲ τὶς ἀντίστοιχες τιμές της 0 καὶ 1 καὶ πιθανότητες (K-1)/K καὶ 1/K:

Ἀποτέλεσμα ἐξετάσεως θέματος i (i=1, 2, . . . , N)	Τιμὲς τυχαίας μεταβλητῆς X	Ἀριθμὸς δειγματικῶν σημείων	Πιθανότητα
Ἐπιλογὴ λανθασμένης ἀπαντήσεως	0	K−1	(K−1)/K
Ἐπιλογὴ ὀρθῆς ἀπαντήσεως	1	1	1/K

1. «Ἐξετάσεις μὲ ἐπιλογὴ ἕτοιμων ἀπαντήσεων. Στατιστικὴ ἀνάλυση τυχαίας ἐπιδόσεως ἐξεταζομένων μέ τό σχέδιο (N, K, 1)». Ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νὰ συμβουλευθεῖ τὴν ἐργασία αὐτή, ἰδίως σὲ ὅ,τι ἀφορᾶ τὶς βαθμολογικὲς κλίμακες Z, Q, U καὶ W, τὶς ὁποῖες χρησιμοποιοῦμε καὶ στὴν παροῦσα μελέτη μας.

Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ διακριτὴ τυχαία μεταβλητὴ X ἀκολουθεῖ τὴν κατανομὴ Bernoulli καὶ ἔχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τῆς ἑξῆς μορφῆς:

$$
\begin{aligned}
f_x\,(X;\,K) &= \left(\frac{1}{K}\right)^x \cdot \left(1-\frac{1}{K}\right)^{1-x} \\
&= \left(\frac{1}{K}\right)^x \cdot \left(\frac{K-1}{K}\right)^{1-x} \qquad X=0,1 \qquad (1) \\
&= 0 \text{ γιὰ ἄλλες τιμὲς τῆς } X
\end{aligned}
$$

Ὁ ἀπροετοίμαστος ἐξεταζόμενος μπορεῖ νὰ ἐπιχειρήσει νὰ ἐπισημάνει τὴν ὀρθὴ ἀπάντηση καὶ στὰ N θέματα τῶν ἐξετάσεων. Τότε, τὸ πείραμα τύχης γίνεται πιὸ σύνθετο. Σ' αὐτὸ εἶναι δυνατὸ νὰ ὁρίσουμε τὴ διακριτὴ τυχαία μεταβλητὴ X, ποὺ μὲ τὶς τιμές της 0, 1, 2, . . . , N ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸ θεμάτων γιὰ τὰ ὁποῖα ὁ ἐξεταζόμενος θὰ ἐπιλέξει στὴν τύχη τὴν ὀρθή τους ἀπάντηση. Ἡ τυχαία μεταβλητὴ X, στὴν περίπτωση αὐτή, ἀκολουθεῖ τὴ διωνυμικὴ κατανομὴ καὶ συνεπῶς ἔχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τῆς ἑξῆς μορφῆς:

$$
\begin{aligned}
P_x &= f_x\,(X;\,N,\,K) \\
&= \binom{N}{x} \cdot \left(\frac{1}{K}\right)^x \cdot \left(\frac{K-1}{K}\right)^{N-x} \qquad \text{γιὰ } X=0,\,1,\ldots,\,N \qquad (2) \\
&= 0 \text{ γιὰ ἄλλες τιμὲς τῆς } X
\end{aligned}
$$

Γενικά, οἱ μεταβλητὲς N καὶ K μποροῦν νὰ πάρουν ὁποιαδήποτε θετικὴ ἀκέραια τιμὴ ἴση ἢ μεγαλύτερη τοῦ 1 ἡ πρώτη ($N \geqq 1$) καὶ ἴση ἢ μεγαλύτερη τοῦ 2 ἡ δεύτερη ($K \geqq 2$).

Ἡ σχέση (2) προϋποθέτει ὅτι ἡ βασικὴ πιθανότητα 1/K (γιὰ ἐπιλογὴ τῆς ὀρθῆς ἀπαντήσεως ὁρισμένου θέματος) παραμένει στὴν οὐσία της σταθερή, δηλαδὴ δὲν μεταβάλλεται ἀπὸ ἐξεταζόμενο σὲ ἐξεταζόμενο πρόσωπο ἢ θέμα. Ὅπως ἀναφέρουμε στὴν πρώτη ἐργασία μας περὶ τῶν ἐξετάσεων (N, K, 1), ἀπαιτεῖται ἰδιαίτερη φροντίδα γιὰ ἐξασφάλιση σταθερότητας τῆς πιθανότητας αὐτῆς. Ἐδῶ ὑποθέτουμε ὅτι ἡ σταθερότητα τῆς βασικῆς πιθανότητας 1/K εἶναι ἐξασφαλισμένη καὶ ἔτσι δεχόμαστε τὴ σχέση (2) σὰν γενικὰ ἐφαρμόσιμη σὲ κάθε ἐξέταση τύπου (N, K, 1).

Ἡ ἐπίδοση τοῦ ἀπροετοίμαστου σὲ ὁρισμένη διεξαγωγὴ ἐξετάσεων τύπου (N, K, 1) εἶναι ἀποκλειστικὰ ὑπόθεση τύχης. Ὁ ἴδιος ὁ ἐξεταζόμενος (ἢ ὁποιοσδήποτε ἄλλος) ἀδυνατεῖ νὰ προβλέψει μὲ βεβαιότητα τὴν ἐπίδοσή του. Γνωρίζει, φυσικά, ὅτι ἐνδέχεται νὰ ἀπαντήσει ὀρθὰ σὲ λίγα ἢ πολλὰ ἢ ὅλα τὰ θέματα, ἀλλὰ γιὰ καμμιὰ ἐπίδοση δὲν εἶναι βέβαιος. Καὶ κάτι ποὺ πραγματικὰ ἐντυπωσιάζει εἶναι ὅτι ὁ ἐξεταζόμενος αὐτός, ἐνῶ ἀγνοεῖ ἐντελῶς τὸ ἀντικείμενο τῶν ἐξετάσεων, δὲν εἶναι διόλου βέβαιος ὅτι ἡ ἐπίδοσή του θὰ εἶναι μηδενική.

Ὁ μέσος ὅρος θεμάτων, ποὺ σὲ ἐξετάσεις τύπου (N, K, 1) θὰ ἀπαντηθοῦν ὀρθὰ ἀπὸ τὸν ἀπροετοίμαστο ἐξεταζόμενο — δηλαδή, ἡ μαθηματικὴ ἐλπίδα τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X — ἰσοῦται μὲ N/K:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{x=N} x \cdot P_x = \frac{N}{K} \qquad (3)$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ἐνῶ ἡ ἐπίδοση τοῦ ἀπροετοίμαστου ἐξεταζόμενου μπορεῖ σὲ ὁρισμένη ἐξέταση νὰ πάρει ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς τιμὲς $X=0, 1, 2, \ldots, N$ μὲ πιθανότητα P_x, σὲ μιὰ ἀπεριόριστα μεγάλη σειρὰ ἐπαναλήψεων τῶν ἴδιων ἐξετάσεων ἡ μέση ἐπίδοση τοῦ ἴδιου ἐξεταζόμενου σταθεροποιεῖται στὸ μέγεθος N/K. Συνεπῶς, μολονότι ἀδυνατοῦμε νὰ προβλέψουμε μὲ βεβαιότητα τὴν ἐπίδοση ὁρισμένου προσώπου ποὺ ἐξετάζεται ἐντελῶς ἀπροετοίμαστο, γνωρίζουμε ὅτι πάρα πολλὰ τέτοια πρόσωπα – τὰ ὁποῖα ἐξετάζονται ταυτόχρονα ἢ διαδοχικά, ἀνεξάρτητα καὶ μὲ τὸν ἴδιο τρόπο – θὰ σημειώσουν κατὰ μέσον ὅρο ἐπίδοση N/K.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἐλπίδα τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X εἶναι μέγεθος ἀνάλογο τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ θεμάτων N καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογο τοῦ ἀριθμοῦ ἕτοιμων ἀπαντήσεων K.

3. Ο ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΜΕΝΟΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΣ

Χωρὶς ἀμφιβολία, ὁ ἀπροετοίμαστος ἐξεταζόμενος ἀποτελεῖ ἐξαίρεση, ἔστω ὄχι καὶ πολὺ σπάνια. Τοῦτο, διότι κατὰ κανόνα ὁ ἐξεταζόμενος μελετᾶ τὸ ἐξεταστέο ἀντικείμενο καὶ προσέρχεται στὶς ἐξετάσεις λιγότερο ἢ περισσότερο προετοιμασμένος γιὰ νὰ ἐπιτύχει σ' αὐτές. Ἔτσι, μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι, ἀνάλογα μὲ τὴν προετοιμασία καὶ ἱκανότητά του, ὁ ἐξεταζόμενος εἶναι σὲ θέση νὰ ἐπιλέξει τὴν ὀρθὴ ἀπάντηση L θεμάτων ἀπὸ τὰ N τῶν ἐξετάσεων, χωρὶς διόλου νὰ προσφύγει γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ στὴν τύχη.

Ἡ ἐπιλογὴ τῆς ὀρθῆς ἀπαντήσεως τῶν L θεμάτων ἀντανακλᾶ τὴν οὐσιαστικὴ γνώση τοῦ ἐξεταζόμενου. Συνεπῶς, στὶς ἐξετάσεις τύπου $(N, K, 1)$, ἡ L μπορεῖ νὰ πάρει ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς τιμὲς $0, 1, 2, \ldots, N$. Ἐὰν $L=0$, ὁ ἐξεταζόμενος εἶναι ἐντελῶς ἀπροετοίμαστος. Ἐὰν $L=N$, ὁ ἐξεταζόμενος εἶναι ἄριστα προετοιμασμένος.[2] Οἱ πιὸ συνηθισμένες περιπτώσεις, φυσικά, ἀναφέρονται σὲ ἐξεταζόμενους γιὰ τοὺς ὁποίους ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $0<L<N$.

Ὁ ἐξεταζόμενος, ποὺ προσέρχεται στὶς ἐξετάσεις μὲ προετοιμασία καὶ γνώση ἱκανὴ γιὰ νὰ ἐπιλέξει χωρὶς ἐνδοιασμὸ τὴν ὀρθὴ ἀπάντηση L θεμάτων $(L<N)$, δὲν θὰ περιορισθεῖ ὑποχρεωτικὰ στὰ θέματα αὐτά. Τοῦτο, διότι ἀφοῦ ἐπεξεργασθεῖ τὰ θέματα ποὺ γνωρίζει εἶναι πολὺ πιθανὸ ὅτι θὰ ἐπιχειρήσει νὰ ἐπιλέξει στὴν τύχη τὶς ὀρθὲς ἀπαντήσεις τῶν ὑπόλοιπων ἄγνωστων γι' αὐτὸν θεμάτων. Ἔτσι, ἡ συνολικὴ ἐπίδοσή του, τὴν ὁποία συμβολίζουμε μὲ B, θὰ εἶναι:

---

2. Ὑποθέτουμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς N εἶναι ἀρκετὰ μεγάλος καὶ τὰ θέματα δὲν περιορίζονται σὲ ἕνα τμῆμα τῆς ἐξεταστέας ὕλης, ἀλλὰ καλύπτουν τὴν ὕλη αὐτὴ στὸ σύνολο τῶν κύριων (τουλάχιστο) σημείων της.

$$B=L+C \tag{4}$$

Ἡ C, ποὺ ἐκφράζει ἀριθμὸ θεμάτων γιὰ τὰ ὁποῖα γίνεται στὴν τύχη ἐπιλογὴ ὀρθῆς ἀπαντήσεως, εἶναι διωνυμικὴ τυχαία μεταβλητὴ μὲ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τῆς μορφῆς:

$$\begin{aligned} f_c\,(C;\ N,\ L,\ K) &= \binom{N-L}{C}\cdot\left(\frac{1}{K}\right)^{C}\cdot\left(\frac{K-1}{K}\right)^{N-L-C} \quad \text{γιὰ } C=0,\ 1, \ldots, (N-L) \\ &= 0 \text{ γιὰ ἄλλες τιμὲς τῆς } C \end{aligned} \tag{5}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ μεταβλητὴ C συνδέεται πάντοτε μὲ ὁρισμένη τιμὴ τῆς μεταβλητῆς L καὶ οἱ τιμὲς τῆς τελευταίας συνδέονται ἐπίσης μὲ ὁρισμένη τιμὴ τῆς N. Στὸ ἑξῆς κάθε τιμὴ τῆς C καὶ τῆς L θὰ νοεῖται σύμφωνα μὲ τὴν ἀνωτέρω συνάρτηση (ἀποφεύγουμε τοὺς γνωστοὺς συμβολισμοὺς C/L καὶ L/N γιὰ λόγους ἁπλουστεύσεως).

Ἡ μαθηματικὴ ἐλπίδα τῆς συνολικῆς ἐπιδόσεως B ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} E\,(B) &= E\,(L+C) \\ &= L + E(C) \\ &= L + \frac{N-L}{K} \\ &= \frac{N}{K} + \left(\frac{K-1}{K}\right) L \end{aligned} \tag{6}$$

Οἱ σχέσεις (5) καὶ (6) προϋποθέτουν ὅτι κάθε ἐξεταζόμενος, ἀφοῦ ἀπαντήσει στὰ L θέματα ποὺ γνωρίζει, θὰ ἀναζητήσει στὴν τύχη τὴν ὀρθὴ ἀπάντηση ὅλων τῶν ἄλλων N–L θεμάτων. Εἶναι, ὅμως, δυνατὸ πολλοὶ ἐξεταζόμενοι νὰ ἀρκεσθοῦν στὴν ἐπεξεργασία μόνο τῶν θεμάτων ποὺ γνωρίζουν. Ἐπίσης, δὲν ἀποκλείεται ὁρισμένοι ἐξεταζόμενοι, ἀντὶ νὰ ἀναζητήσουν στὴν τύχη τὴν ὀρθὴ ἀπάντηση ὅλων τῶν ἄγνωστων θεμάτων, νὰ τὸ κάνουν μόνο γιὰ ἕνα μέρος ἀπὸ αὐτά. Ἔτσι, πιὸ γενικά, ἡ μαθηματικὴ ἐλπίδα τῆς B θὰ ἱκανοποιεῖ τὴν ἀνισότητα:

$$L \leqq E(B) \leqq L + \frac{N-L}{K} \tag{7}$$

Πρέπει, ἐπὶ πλέον, νὰ διευκρινίσουμε ὅτι ἡ L ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸ θεμάτων, ποὺ ὁ ἐξεταζόμενος μὲ βάση τὴν κατάρτισή του κατορθώνει νὰ ἐπεξεργασθεῖ ὀρθά. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν καθορίζεται μόνο ἀπὸ τὴν ἱκανότητα καὶ μελέτη τοῦ ἐξεταζόμενου, διότι ὁ παράγοντας τῆς τύχης μπορεῖ νὰ διαμορφώσει τὴν L σὲ ὑψηλότερο ἢ χαμηλότερο ἐπίπεδο ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ προσδιορίζει ἡ οὐσιαστικὴ κατάρτιση τοῦ ἐξεταζόμενου.

Γιὰ λόγους ἁπλουστεύσεως τῆς ὅλης ἐργασίας, θὰ ὑποθέσουμε ὅτι ἀντὶ τῆς (7) ἰσχύει πάντοτε[3] ἡ σχέση (6) καὶ ἀκόμη ὅτι ἡ τύχη δὲν ἀπομακρύνει σοβαρὰ τὴν L ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο ποὺ δικαιολογεῖ ἡ προετοιμασία τοῦ ἐξεταζόμενου.

4. Η ΕΥΝΟΙΑ ΤΗΣ ΤΥΧΗΣ

Μετὰ ἀπὸ ὅσα ἐκθέσαμε πιὸ πάνω μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε σὰν εὔνοια τῆς τύχης πρὸς τὸν ἐξεταζόμενο τὸ μέγεθος:

$$\begin{aligned} E(C) &= E(B) - L \\ &= \frac{N-L}{K} \\ &= \frac{N}{K} - \left(\frac{1}{K}\right) \cdot L \end{aligned} \tag{8}$$

Δηλαδή, ἡ εὔνοια τῆς τύχης — ὅπως τὴν ὁρίζουμε ἐδῶ — ταυτίζεται μὲ τὴν μαθηματικὴ ἐλπίδα τῆς τυχαίας μεταβλητῆς C καὶ ἐκφράζει τὴν μέση αὔξηση τῆς ἐπιδόσεως (σὲ ἀριθμὸ θεμάτων) πάνω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο ποὺ δικαιολογεῖ ἡ προετοιμασία τοῦ ἐξεταζόμενου, ὁ ὁποῖος καταφεύγει στὴν τύχη γιὰ τὴν ἐπισήμανση τῆς ὀρθῆς ἀπαντήσεως ὅλων τῶν θεμάτων ποὺ τοῦ εἶναι ἄγνωστα.

Στὸ Διάγραμμα 1 ἀπεικονίζεται γραφικὰ ἡ ἐξίσωση (8) σὰν συνάρτηση τῆς L. Διαπιστώνουμε ὅτι ἡ εὔνοια τῆς τύχης εἶναι μέγεθος μὴ ἀρνητικό. Ἡ μεγαλύτερη τιμή της, ποὺ ἰσοῦται μὲ N/K, ἀντιστοιχεῖ σὲ L=0, δηλαδὴ ἀναφέρεται στὸν ἐντελῶς ἀπροετοίμαστο ἐξεταζόμενο. Ἡ ἐλάχιστη τιμὴ τῆς εὔνοιας τῆς τύχης, ἰσοῦται μὲ μηδέν, ἀντιστοιχεῖ δὲ σὲ L=N καὶ ἀναφέρεται στὸν ἄριστα προετοιμασμένο ἐξεταζόμενο.

Ἡ εὔνοια τῆς τύχης εἶναι φθίνουσα γραμμικὴ συνάρτηση τῆς L μὲ «τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴ» τὴν εὔνοια πρὸς τὸν ἐντελῶς ἀπροετοίμαστο καὶ συντελεστὴ κατευθύνσεως ἴσο μὲ τὴν πιθανότητα ἐπιλογῆς τῆς ὀρθῆς ἀπαντήσεως ὁρισμένου θέματος (1/K). Ἔτσι, ἐὰν μὲ πρόσθετη προετοιμασία αὐξηθεῖ ἡ L κατὰ ἕνα θέμα, ἡ εὔνοια τῆς τύχης μειώνεται κατὰ τὴν πιθανότητα ὀρθῆς ἐπεξεργασίας τοῦ θέματος αὐτοῦ στὴν τύχη.

Παρατηροῦμε ὅτι ὅταν αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν θεμάτων N —μὲ σταθερὴ τὴν τιμὴ τῆς K— ἡ εὐθεία E(C) μετατοπίζεται ἀναλογικὰ καὶ παράλληλα πρὸς τὰ ἐπάνω. Τὸ ἀντίθετο συμβαίνει ὅταν μειώνεται ὁ ἀριθμὸς τῶν θεμάτων N. Ἐπίσης, ὅταν αὐξάνει ἡ K, ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ συντελεστὴ κατευθύνσεως τῆς εὐθείας αὐτῆς μειώνεται. Τὸ ἀντίθετο συμβαίνει ὅταν μειώνεται ἡ τιμὴ τῆς K.

Γενικὰ μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι, ὅταν ceteris paribus αὐξάνει ἡ προετοιμασία τοῦ

3. Μὲ βάση τὴν ὑπόθεση αὐτή, θὰ θεωροῦμε σὰν θέματα μὲ λανθασμένη ἀπάντηση ὅσα ἀπὸ τὰ N ὁ ἐξεταζόμενος ἐγκαταλείπει χωρὶς νὰ τὰ ἐπεξεργασθεῖ. Μποροῦμε, φυσικὰ ἀντὶ τῆς ἁπλουστευτικῆς αὐτῆς παραδοχῆς (ποὺ δὲν ἔχει καμμιὰ θεωρητικὴ θεμελίωση) νὰ δηλώσουμε ὅτι ἡ ἔρευνά μας ἀναφέρεται ἀποκλειστικὰ στοὺς ἐξεταζόμενους ποὺ ἐπεξεργάζονται τὸ σύνολο τῶν N θεμάτων.

ἐξεταζόμενου, ἡ εὔνοια τῆς τύχης μειώνεται τόσο σὰν ἀριθμὸς θεμάτων ὅσο καὶ σὰν ποσοστὸ στὴ μέση συνολικὴ ἐπίδοση τοῦ ἐξεταζόμενου.

Στὸ Διάγραμμα 2 ἀπεικονίζεται ἡ μέση συνολικὴ ἐπίδοση Ε(Β) καὶ ἡ εὔνοια τῆς τύχης σὰν συνάρτηση τῆς προετοιμασίας L τοῦ ἐξεταζόμενου. Ὅπως προκύπτει τόσο ἀπὸ τὸ διάγραμμα αὐτὸ ὅσο καὶ ἀπὸ τὴν ἐξίσωση (6), ἡ μέση συνολικὴ ἐπίδοση εἶναι αὔξουσα γραμμικὴ συνάρτηση τῆς L μὲ «τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴ» τὴν εὔνοια τῆς τύχης πρὸς τὸν ἐντελῶς ἀπροετοίμαστο καὶ συντελεστὴ κατευθύνσεως ἴσο πρὸς τὴν πιθανότητα ἐπιλογῆς λανθασμένης ἀπαντήσεως ἑνὸς ὁρισμένου θέματος. Ἔτσι, ἡ πρόσθετη προετοιμασία, ποὺ ἔχει σὰν ἀποτέλεσμα τὴν αὔξηση τῆς L κατὰ ἕνα θέμα, συνεπάγεται αὔξηση τῆς μέσης συνολικῆς ἐπιδόσεως ἴση μὲ τὴν πιθανότητα λανθασμένης ἀπαντήσεως στὸ θέμα αὐτὸ — ὅταν ἡ ἀπάντηση δίνεται στὴν τύχη.

5. ΕΞΟΥΔΕΤΕΡΩΣΗ ΤΗΣ ΕΥΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΤΥΧΗΣ

Εἶναι φανερὸ ὅτι οἱ ἐξεταζόμενοι ποὺ προσφεύγουν στὴν τύχη γιὰ τὴν ἐπεξεργασία τῶν ἄγνωστων θεμάτων, ἀποκομίζουν κατὰ μέσον ὅρο κάποια βελτίωση στὴν ἐπίδοσή τους — βελτίωση ποὺ εἶναι τόσο πιὸ μεγάλη ὅσο λιγότερη εἶναι ἡ προετοιμασία τους. Ἐπειδὴ ἡ βελτίωση αὐτὴ ὀφείλεται ἀποκλειστικὰ στὸν ρόλο τῆς τύχης καὶ εἶναι φθίνουσα συνάρτηση τοῦ βαθμοῦ προετοιμασίας, ἀλλοιώνει τὴν οὐσιαστικὴ ἐπίδοση τῶν ἐξεταζομένων καὶ μάλιστα κατὰ τρόπον ἄνισο μεταξὺ λιγότερο καὶ περισσότερο μελετηρῶν καὶ προετοιμασμένων. Ἐπιβάλλεται, συνεπῶς, μὲ κατάλληλη διορθωτικὴ ἐνέργεια, εἴτε νὰ ἐκμηδενισθεῖ ἡ συστηματικὴ βελτίωση τῆς ἐπιδόσεως ποὺ ὀφείλεται στὴν τύχη, εἴτε νὰ περιορισθεῖ σὲ τόσο χαμηλὰ ἐπίπεδα ὥστε νὰ καταντᾶ ἀμελητέα.

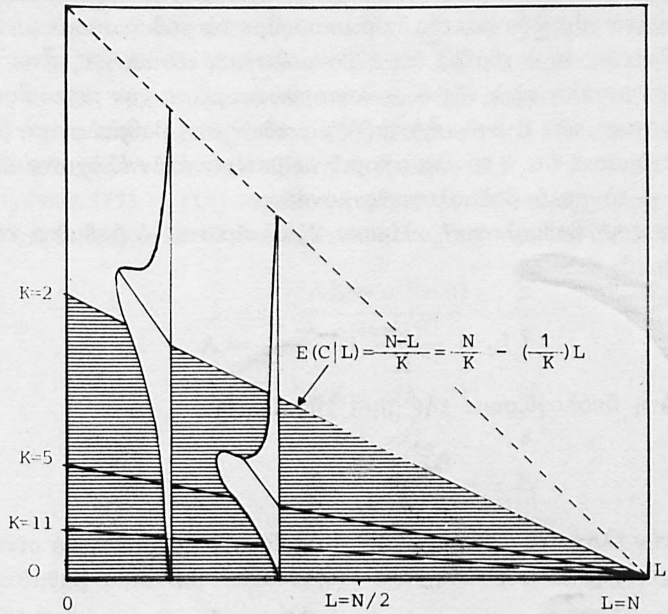
Ὁρισμένους ἀπὸ τοὺς τρόπους, ποὺ μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε γιὰ τὴν περιστολὴ ἢ πλήρη ἐξουδετέρωση τῆς εὔνοιας τῆς τύχης, παρουσιάζουμε ἀμέσως πιὸ κάτω.

(i) Κατάλληλος καθορισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ Κ

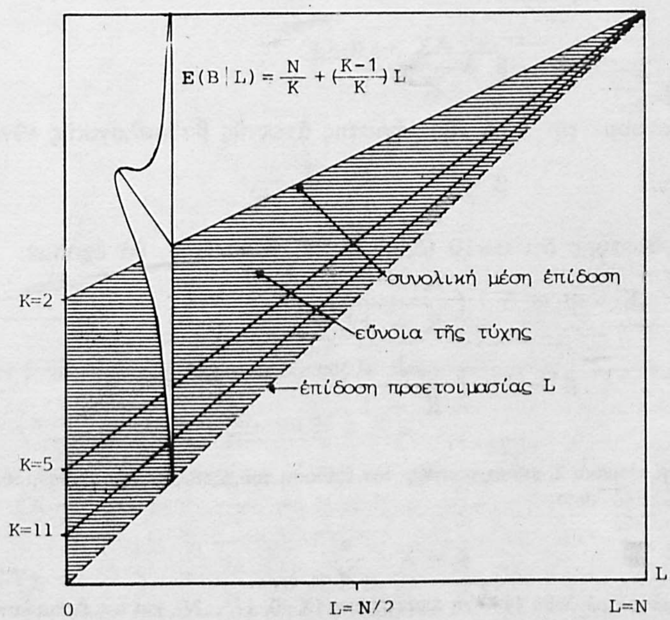
Ὁ πιὸ ἁπλὸς τρόπος περιορισμοῦ τῆς εὔνοιας τῆς τύχης εἶναι ἐκεῖνος ποὺ βασίζεται στὸν κατάλληλο καθορισμὸ τοῦ ἀριθμοῦ ἕτοιμων ἀπαντήσεων κατὰ θέμα, δηλαδὴ τῆς Κ, ὥστε ἡ εὐθεία Ε(C) στὸ Διάγραμμα 1 νὰ μετατεθεῖ πρὸς τὰ κάτω μὲ ὅριο τὴ θέση τοῦ ἄξονα τῶν L ἢ ἡ εὐθεία Ε(Β) στὸ Διάγραμμα 2 νὰ μετατεθεῖ ἐπίσης πρὸς τὰ κάτω μὲ ὅριο τὴ διαγώνια θέση. Τοῦτο ἀπαιτεῖ νὰ αὐξήσουμε τὴν τιμὴ τῆς Κ στὸν ἀναγκαῖο βαθμό. Βέβαια, ὁλοκληρωτικὴ ἐξάλειψη τῆς εὔνοιας τῆς τύχης μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ εἶναι ἀδύνατη, διότι, γιὰ τὴν ἐπίτευξη τῶν ἀνωτέρω ὁριακῶν θέσεων τῶν εὐθειῶν Ε(C) ἢ Ε(Β), ἡ Κ πρέπει νὰ πάρει τιμὴ ἀπεριόριστα μεγάλη. Στὴν πράξη, ὅμως, μὲ ἐφικτὰ μεγάλες τιμὲς τῆς Κ μποροῦμε νὰ περιορίσουμε τὴν εὔνοια τῆς τύχης σὲ τόσο χαμηλὰ ἐπίπεδα ὥστε νὰ μὴ δημιουργεῖ πρόβλημα ἡ ὕπαρξή της.

Ἡ εὔνοια τῆς τύχης, ὅπως τὴν ἔχουμε ὁρίσει, ἐκφράζει ἀριθμὸ θεμάτων μὲ ὀρθὴ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1. Μαθηματική έλπίδα τῆς μεταβλητῆς C



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2. Μαθηματική έλπίδα τῆς μεταβλητῆς B



ἐπιλογὴ ἀπαντήσεων. Μὲ τὸ βαθμολογικὸ σύστημα ποὺ ἐφαρμόζουμε ἡ εὔνοια αὐτὴ γίνεται βαθμολογική. Ἡ βαθμολογικὴ εὔνοια χάνει τὴ σημασία της ἐὰν περιορισθεῖ σὲ ὁρισμένο, ἐπιθυμητὰ χαμηλό, ἐπίπεδο ποὺ μποροῦμε νὰ καθορίσουμε μόνοι μας.

Εἶναι δυνατό, λοιπόν, νὰ δεχθοῦμε ὅτι ἡ βαθμολογικὴ εὔνοια μᾶς εἶναι ἀδιάφορη ἐὰν — μὲ ἀρκετὰ μεγάλη τιμὴ τῆς K — κατορθώσουμε νὰ τὴν περιορίσουμε σὲ ἐπίπεδο ἴσο ἢ μικρότερο τῶν β βαθμολογικῶν μονάδων στὴ βαθμολογικὴ βάση A. Μὲ ἄλλα λόγια, δεχόμαστε ὅτι ἡ εὔνοια μπορεῖ νὰ μετέχει στὸν ἐλάχιστο προβιβάσιμο βαθμὸ A μὲ β τὸ πολὺ βαθμολογικὲς μονάδες.

Χρησιμοποιώντας τὴ βαθμολογικὴ κλίμακα Z, μὲ ἄριστα τὸ βαθμὸ α καὶ βάση τὸ βαθμὸ A, ἔχουμε:[4]

$$\left(L_z + \frac{N-L_z}{K}\right) \cdot \frac{\alpha}{N} = A \tag{9}$$

Ἀπὸ τὴ σχέση αὐτὴ ὑπολογίζουμε τὴν τιμὴ τῆς L_z :

$$L_z = \frac{AK - \alpha}{\alpha(K-1)} \cdot N \tag{10}$$

Ἡ L_z συμβολίζει τὴν ἐλάχιστη προετοιμασία, ἡ ὁποία στὸ βαθμολογικὸ σύστημα Z μὲ τὴν εὔνοια τῆς τύχης διαμορφώνει τὸν ἐλάχιστο προβιβάσιμο βαθμὸ A.

Εἰσάγοντας τὴν τελευταία σχέση στὴν L_z (α/N), ὑπολογίζουμε τὸ βαθμὸ προετοιμασίας τῆς L_z ὁ ὁποῖος, μετὰ τὴν προσαύξησή του κατὰ τὴν εὔνοια τῆς τύχης, φτάνει τὸ ἐλάχιστο προβιβάσιμο ἐπίπεδο A:

$$A - \beta = \frac{AK - \alpha}{K - 1} \tag{11}$$

Ἀπὸ τὴν (11) παίρνουμε τὴν τιμὴ τῆς μέγιστης ἀνεκτῆς βαθμολογικῆς εὔνοιας β:

$$\beta = \frac{\alpha - A}{K - 1} \tag{12}$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι α=10 (ἄριστα) καὶ A=α/2=5, θὰ ἔχουμε:

$$A - \beta = 5 \cdot \left(\frac{K-2}{K-1}\right) \tag{13}$$

$$\beta = 5 \cdot \left(\frac{1}{K-1}\right) \tag{14}$$

4. Ἡ βαθμολογικὴ κλίμακα Z μετασχηματίζει τὴν ἐπίδοση τοῦ ἐξεταζόμενου σὲ βαθμοὺς σύμφωνα μὲ τὸν ἑξῆς μαθηματικὸ τύπο:

$$Z = X \cdot \frac{\alpha}{N}$$

ὅπου: X= ἀριθμὸς θεμάτων μὲ ὀρθὴ ἐπιλογὴ ἀπαντήσεως (X=0, 1,.., N), καὶ α= βαθμολογικὸ μέγιστο (ἄριστα).

Χρησιμοποιώντας μιὰ ἀπὸ τὶς πιὸ πάνω δύο τελευταῖες σχέσεις μποροῦμε νὰ καθορίσουμε τὴν ἀναζητούμενη κατάλληλη τιμὴ τῆς K. Ἔτσι, ἐὰν δεχθοῦμε ὅτι $A-\beta = 4,5$ (ἢ $\beta=0,5$), θὰ εἶναι καὶ $K=11$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ K πρέπει νὰ πάρει τὴν τιμὴ $K=11$, στὴν περίπτωση ποὺ θεωροῦμε ἀσήμαντη τὴν εὔνοια τῆς τύχης ἡ ὁποία κάνει προβιβάσιμους ὅλους τοὺς βαθμοὺς ποὺ εἶναι ἴσοι ἢ μεγαλύτεροι τῶν 4,5 βαθμολογικῶν μονάδων (βάση ὁ βαθμός 5).

Οἱ σχέσεις (11) – (14) ἰσχύουν καὶ γιὰ τὰ βαθμολογικὰ συστήματα[5] Q, U καὶ W. Ἡ σχέση (10), γιὰ τὰ συστήματα αὐτά, παίρνει τὶς ἀκόλουθες τιμές:

$$L_Q = \frac{3AK + \alpha(K-4)}{\alpha(K-1)} \cdot \frac{N}{4} \tag{15}$$

$$L_U = \frac{2AK + \alpha(K-3)}{\alpha(K-1)} \cdot \frac{N}{3} \tag{16}$$

$$L_W = \frac{AK + \alpha(K-2)}{\alpha(K-1)} \cdot \frac{N}{2} \tag{17}$$

Εὔκολα μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι, γιὰ $K \geqq 2$ καὶ $A=\alpha/2=5$, ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες σχέσεις:

$$L_z < L_Q < L_U < L_W \tag{18}$$

$$\lim_{K \to +\infty} L_z = \frac{1}{2} \tag{19}$$

$$\lim_{K \to +\infty} L_Q = \frac{5}{8} \tag{20}$$

---

5. Οἱ βαθμολογικὲς κλίμακες Q, U καὶ W ὁρίζονται ἀπὸ τὶς ἑξῆς μαθηματικὲς σχέσεις:

$$Q = \left(X - \frac{N-X}{3}\right) \cdot \frac{\alpha}{N} \text{ γιὰ } N \geqq X \geqq \frac{N}{4}$$

$$U = \left(X - \frac{N-X}{2}\right) \cdot \frac{\alpha}{N} \text{ γιὰ } N \geqq X \geqq \frac{N}{3}$$

$$W = \left(X - \frac{N}{2}\right) \cdot \frac{2\alpha}{N} \text{ γιὰ } N \geqq X \geqq \frac{N}{2}$$

γιὰ ἄλλες τιμὲς τῆς X: $Q=0$, $U=0$, $W=0$

ὅπου: X = ἀριθμὸς θεμάτων μὲ ὀρθὴ ἐπιλογὴ ἀπαντήσεως ($X=0, 1, 2, \ldots, N$) καὶ α = βαθμολογικὸ μέγιστο (ἄριστα).

$$\lim_{K \to +\infty} L_U = \frac{2}{3} \tag{21}$$

$$\lim_{K \to +\infty} L_W = \frac{3}{4} \tag{22}$$

Προκειμένου νὰ καθορίσουμε τὴν ἀναζητούμενη ἐπιθυμητὴ τιμὴ τῆς K, μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸν Πίνακα 1, στὸν ὁποῖο —μεταξὺ ἄλλων— ἀναγράφονται ἐπιλεγμένες τιμὲς τῆς K καὶ οἱ ἀντίστοιχες τῶν β καὶ A−β, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς σχέσεις (13) καὶ (14). Ἔτσι, ἀπὸ τὸν πίνακα αὐτὸ προκύπτει ὅτι, ὅταν ἀποφασίσουμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν τιμὴ K=20, ἀποφασίζουμε ταυτόχρονα πὼς ὁ ἐλάχι-

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Μέγιστη ἀνεκτὴ βαθμολογικὴ εὔνοια β καὶ ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν K, A−β καὶ L/N

K	β	A−β	L_Z/N	L_Q/N	L_U/N	L_W/N
2	5	0	0	0,250	0,333	0,500
3	2,5	2,5	0,250	0,438	0,500	0,625
4	1,67	3,33	0,333	0,500	0,556	0,667
5	1,25	3,75	0,375	0,531	0,583	0,688
6	1,00	4,00	0,400	0,550	0,600	0,700
7	0,83	4,17	0,417	0,562	0,611	0,708
8	0,71	4,29	0,429	0,571	0,619	0,714
9	0,62	4,38	0,438	0,578	0,625	0,719
10	0,56	4,44	0,444	0,583	0,630	0,722
11	0,50	4,50	0,450	0,588	0,633	0,725
12	0,45	4,55	0,455	0,591	0,636	0,727
13	0,42	4,58	0,458	0,594	0,639	0,729
14	0,38	4,62	0,462	0,596	0,641	0,731
15	0,36	4,64	0,464	0,598	0,643	0,732
16	0,33	4,67	0,467	0,600	0,644	0,733
17	0,31	4,69	0,469	0,602	0,646	0,734
18	0,29	4,71	0,471	0,603	0,647	0,735
19	0,28	4,72	0,472	0,604	0,648	0,736
20	0,26	4,74	0,474	0,605	0,649	0,737
50	0,10	4,90	0,490	0,617	0,660	0,745
100	0,05	4,95	0,495	0,621	0,663	0,747
∞	0	5	0,500	0,625	0,667	0,750

στος βαθμὸς προετοιμασίας, ποὺ μὲ τὴν εὔνοια τῆς τύχης γίνεται προβιβάσιμος, εἶναι A–β = 4, 74 καὶ ἡ εὔνοια τῆς τύχης ποὺ κάνει προβιβάσιμο τὸ βαθμὸ αὐτὸ εἶναι β=0, 26. Διαπιστώνουμε ἐπίσης ὅτι ὁ ἀριθμὸς θεμάτων L_Z, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ βαθμὸ προετοιμασίας A–β, ἀποτελεῖ ποσοστὸ 47,4% τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ θεμάτων N, ἐὰν χρησιμοποιοῦμε τὸ βαθμολογικὸ σύστημα Z (L_Z /N = 0,474). Τὸ ποσοστὸ αὐτὸ αὐξάνει σὲ 60,5%, 64,9% καὶ 73,7% ἐὰν χρησιμοποιοῦμε ἀντίστοιχα τὰ βαθμολογικὰ συστήματα Q, U καὶ W.

Ἀπὸ τὸν ἴδιο πίνακα διαπιστώνουμε πὼς πρέπει νὰ χρησιμοποιήσουμε K=18 στὴν περίπτωση ποὺ ἀποφασίσουμε ὅτι ἡ πιὸ μεγάλη βαθμολογικὴ εὔνοια, τὴν ὁποία μποροῦμε νὰ ἀνεχθοῦμε, εἶναι β=0, 3 βαθμολογικὲς μονάδες (ἢ ὅτι ὁ πιὸ μικρὸς βαθμὸς προετοιμασίας, ὁ ὁποῖος δεχόμαστε νὰ γίνει προβιβάσιμος μὲ τὴν εὔνοια τῆς τύχης, εἶναι A–β = 4, 7 βαθμολογικὲς μονάδες).

Πρέπει νὰ διευκρινίσουμε ὅτι εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νὰ χρησιμοποιοῦμε τὶς τιμὲς K τοῦ Πίνακα 1, ἐὰν ἐνδιαφερόμαστε γιὰ τὴν ὁρισμένη ἀντίστοιχη βαθμολογικὴ εὔνοια β. Ἐὰν ὅμως δὲν ἐνδιαφερόμαστε γιὰ ὁρισμένη τιμὴ τῆς εὔνοιας αὐτῆς, ἀλλὰ φροντίζουμε μόνο νὰ μὴ ξεπεράσει τὴν τιμὴ β, μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τῆς K ἢ ὁποιαδήποτε μεγαλύτερή της. Ἔτσι, στὴν περίπτωση ποὺ ἐπιθυμοῦμε ἡ εὔνοια β νὰ μὴ ὑπερβαίνει τὶς β=2,5 βαθμολογικὲς μονάδες, μποροῦμε νὰ χρησιμοποιοῦμε $K \geqq 3$.

Στὸ Διάγραμμα 3 ἀπεικονίζουμε τὴν περίπτωση ἐξετάσεων μὲ N=20, K=2 καὶ K=6. Εἶναι φανερὸ ὅτι στὴν τιμὴ K=6 ἡ εὔνοια β, σὲ ὅλα τὰ βαθμολογικὰ συστήματα, ἰσοῦται μὲ μία βαθμολογικὴ μονάδα καὶ ὅτι τοῦτο συμβαίνει σὲ αὐξανόμενη τιμὴ τῆς L καθώς, ἀπὸ τὸ σύστημα Z, μεταβαίνουμε στὰ συστήματα Q, U καὶ W, σύμφωνα μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ Πίνακα 1. Παρατηροῦμε, ἐπίσης, ὅτι στὴν τιμὴ K=2 ἡ εὔνοια β ἰσοῦται μὲ πέντε βαθμολογικὲς μονάδες σὲ ὅλα τὰ βαθμολογικὰ συστήματα.

(ii) Μείωση τῆς ἐπιδόσεως στὶς ἐξετάσεις κατὰ ἕνα σταθερὸ μέγεθος: βαθμολογικὴ ἀφετηρία

Ἀφαίρεση τῆς μαθηματικῆς ἐλπίδας E(C)

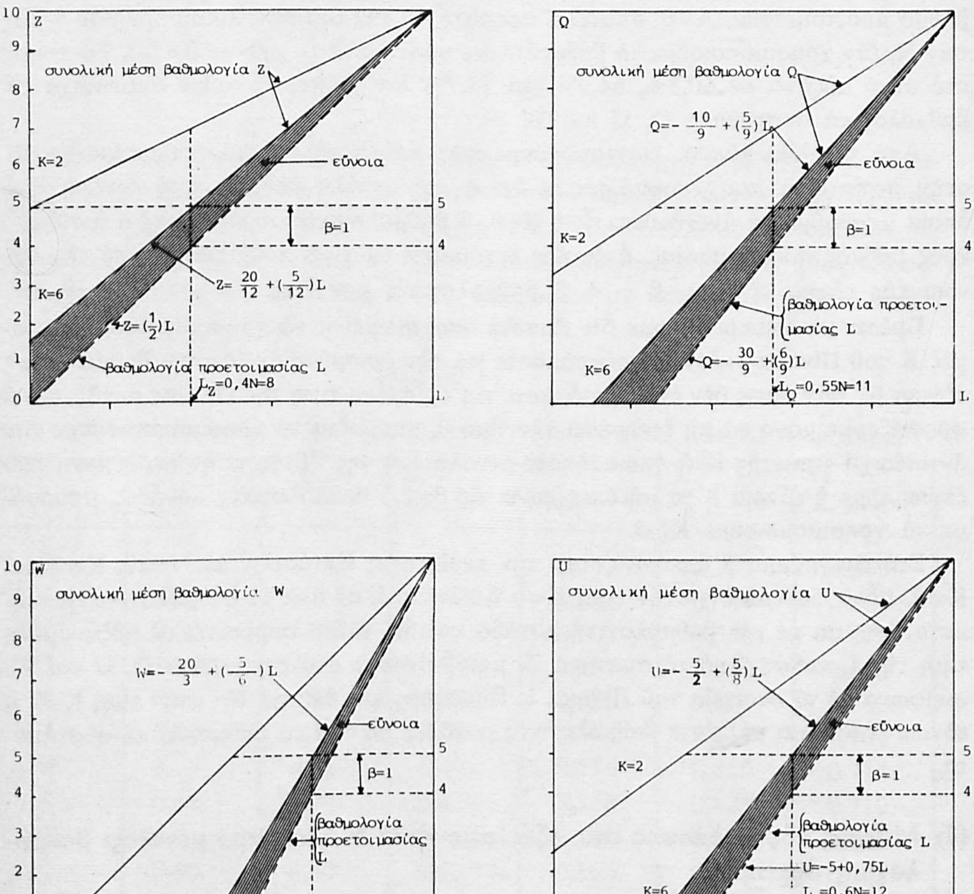
Τὴν πλήρη ἐκμηδένιση τῆς εὔνοιας τῆς τύχης μποροῦμε, φυσικά, νὰ ἐπιτύχουμε ἀφαιρώντας ἀπὸ τὴν ἐπίδοση κάθε ἐξεταζόμενου τὴν μαθηματικὴ ἐλπίδα τῆς C γιὰ τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τῆς L:

$$Y_1 = B - E(C) = L + C - \frac{N-L}{K} \tag{23}$$

Πραγματικά, ἡ μαθηματικὴ ἐλπίδα τῆς Y_1 ἰσοῦται μὲ L:

$$E\,(Y_1) = L + \frac{N-L}{K} - \frac{N-L}{K} = L \tag{24}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3. Βαθμολογία προετοιμασίας L καί βαθμολογική εὔνοια σέ ἐξετάσεις τύπου (20,2,1) καί (20,6,1) μέ βαθμολογικά συστήματα Z,Q,U καί W.



Ἡ Y_1, ὅμως, ἐκφράζει ἀριθμὸ θεμάτων. Ἡ βαθμολόγηση τῆς Y_1 γίνεται μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο (ἄριστα: ὁ βαθμὸς 10):

$$Y_2 = \left(L + C - \frac{N-L}{K}\right) \cdot \frac{10}{N - \frac{N-L}{K}} \tag{25}$$

Ἡ μαθηματικὴ ἐλπίδα τῆς Y_2 εἶναι ὀρθογώνια ὑπερβολή:

$$Y_3 = E(Y_2) = \frac{10\,KL}{L + (K-1)N} \tag{26}$$

$$(L + N(K-1)) \cdot (Y_3 - 10K) = -10K(K-1)N \tag{27}$$

Τὸ σχῆμα τῆς συναρτήσεως (26) φαίνεται στὸ Διάγραμμα 4.

Στὶς περιπτώσεις τῶν ἐντελῶς ἀπροετοίμαστων ($L=0$) καὶ τῶν ἄριστα προετοιμασμένων ($L=N$) ἔχουμε $Y_3 = 10L/N$. Στὶς λοιπὲς ἐνδιάμεσες τιμὲς τῆς L ($L = 1, 2, \ldots, N-1$) ἔχουμε πάντοτε $Y_3 > 10L/N$. Ἐάν, λοιπόν, δεχθοῦμε ὅτι ὁ βαθμὸς προετοιμασίας L πρέπει νὰ εἶναι $10L/N$ (δηλαδή, ἀνάλογος τοῦ ὕψους τῆς L), εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ Y_1, ὅπως βαθμολογεῖται μὲ τὴν Y_2, ἀφήνει περιθώρια στὴν τύχη νὰ εὐνοήσει βαθμολογικὰ ὅλες τὶς τιμὲς τῆς L (ἐκτὸς ἀπὸ τὶς ἀκραῖες $L=0$ καὶ $L=N$). Μάλιστα, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ Διάγραμμα 4, ἡ τύχη εὐνοεῖ τὶς μικρὲς καὶ μεγάλες τιμὲς τῆς L λιγότερο ἀπὸ ὅσο τὶς ἐνδιάμεσες.

Ἡ Y_1 εἶναι δυνατὸ νὰ βαθμολογηθεῖ καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

$$Y_4 = \left(L + C - \frac{N-L}{K}\right) \cdot \frac{10}{N} \tag{28}$$

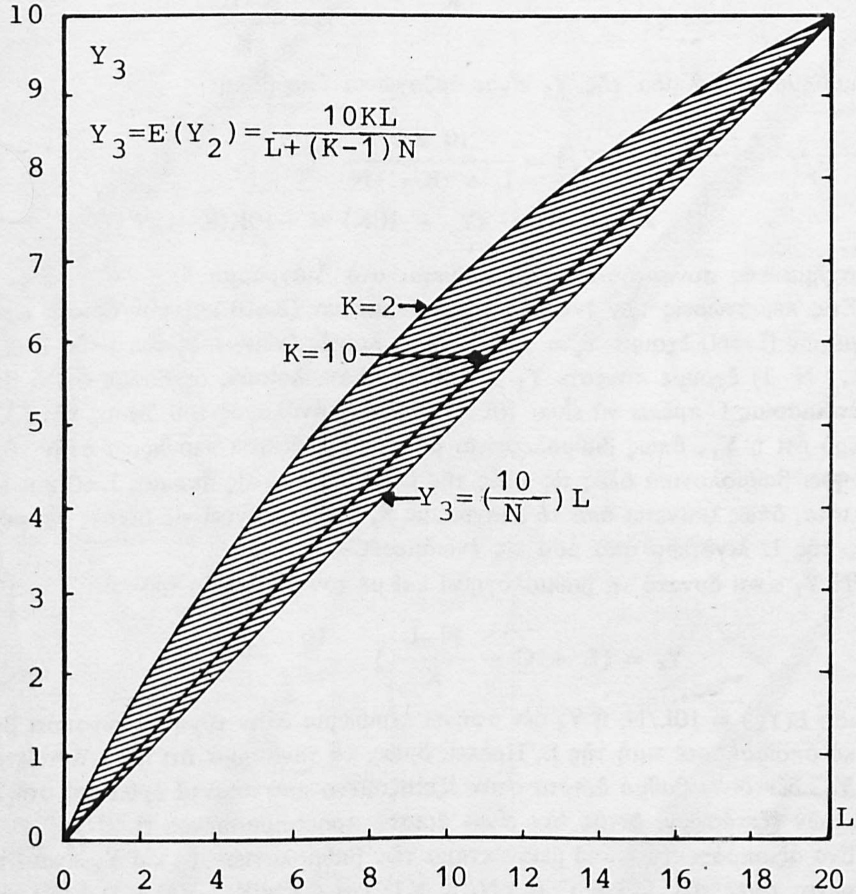
Ἐπειδὴ $E(Y_4) = 10L/N$, ἡ Y_4 δὲν ἀφήνει περιθώρια στὴν τύχη νὰ εὐνοήσει βαθμολογικὰ ὁποιαδήποτε τιμὴ τῆς L. Πρέπει, ὅμως, νὰ τονίσουμε ὅτι ἡ Y_4, ἀντίθετα ἀπὸ τὴν Y_2, δὲν δίνει βαθμὸ ἄριστα στὸν ἐξεταζόμενο ποὺ ἀπαντᾶ ὀρθὰ καὶ στὰ N θέματα τῶν ἐξετάσεων, ἐκτὸς ἐὰν εἶναι ἄριστα προετοιμασμένος ($L=N$).

Ἕνα ἀξιοπρόσεκτο κοινὸ μειονέκτημα τῶν βαθμολογιῶν Y_2 καὶ Y_4 εἶναι ὅτι, γιὰ ὁρισμένες τιμὲς τῶν L καὶ C ($L<N/(K+1)$ καὶ $C<N/K - (K+1)\,L/K$), δίνουν στὸν ἐξεταζόμενο ἀρνητικοὺς βαθμούς. Καὶ ἐπειδὴ ἀρνητικοὶ βαθμοὶ δὲν συνηθίζεται νὰ δίνονται στοὺς ἐξεταζόμενους, στὴν πράξη γίνεται ἀντικατάσταση τῶν ἀρνητικῶν βαθμῶν μὲ τὸ βαθμὸ μηδέν. Τοῦτο, ὅμως, ἔχει σὰν συνέπεια τὴν αὔξηση τῆς μαθηματικῆς ἐλπίδας τῶν βαθμολογιῶν Y_2 καὶ Y_4, μετὰ τὴν ἀντικατάσταση τῶν ἀρνητικῶν τιμῶν τους (γιὰ $L<N/(K+1)$).

Ἕνα ἀκόμη μειονέκτημα τῶν βαθμολογιῶν Y_2 καὶ Y_4 εἶναι ὅτι θεωροῦν γνωστὴ τὴν τιμὴ τῆς L γιὰ κάθε ἐξεταζόμενο. Οἱ τιμές, ὅμως, αὐτὲς εἶναι κατὰ κανόνα ἄγνωστες καὶ μόνο ἐκτιμήσεις τους μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθοῦν. Τέτοιες ἐκτιμήσεις εἶναι οἱ βαθμοὶ τῶν προφορικῶν ἐξετάσεων στὰ σχολεῖα ποὺ γίνονται κατὰ τὴ διάρκεια τοῦ σχολικοῦ ἔτους, οἱ βαθμοὶ προηγουμένων ἐξετάσεων καθὼς καὶ οἱ βαθμοὶ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4. Μαθηματική ἐλπίδα τῆς μεταβλητῆς

Y_2 γιά N=20, K=2 καί K=10



τῶν φροντιστηριακῶν ἀσκήσεων ἢ ἀσκήσεων προόδου τῶν Πανεπιστημιακῶν Σχολῶν.

Ἀφαίρεση τοῦ μεγέθους N/K

Προκειμένου νὰ ξεπεράσουμε τὶς δυσχέρειες, ποὺ συνήθως συναντοῦμε στὴν πράξη σχετικὰ μὲ τὴν ἄγνωστη τιμὴ τῆς L, μποροῦμε ἀπὸ τὴν ἐπίδοση L+C κάθε ἐξεταζόμενου νὰ ἀφαιροῦμε τὸ γνωστὸ μέγεθος N/K. Ἡ νέα βαθμολογία, τὴν ὁποία συμβολίζουμε μὲ Y_5, γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$Y_5 = \left(L + C - \frac{N}{K}\right) \cdot \frac{10}{N - \frac{N}{K}} \qquad (29)$$

Ἡ μαθηματικὴ ἐλπίδα τῆς Y_5 ἰσοῦται μὲ 10L/N. Ἔτσι, ἡ Y_5 δὲν ἀφήνει περιθώρια στὴν τύχη γιὰ νὰ εὐνοήσει βαθμολογικὰ ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς τιμὲς τῆς L. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι καὶ πάλι ὁρισμένες τιμὲς τῆς Y_5 εἶναι ἀρνητικὲς (γιὰ $L<N/K$ καὶ $C<N/K - L$).

(iii) Μείωση τῆς ἐπιδόσεως στὶς ἐξετάσεις κατὰ μία σταθερὴ ἀναλογία τοῦ ἀριθμοῦ θεμάτων μὲ λανθασμένη ἐπιλογὴ ἀπαντήσεως: βαθμολογικὴ ποινὴ

Τὴν εὔνοια τῆς τύχης μποροῦμε νὰ ἐξαλείψουμε βαθμολογικὰ θεωρώντας ὅτι m θέματα μὲ ἐσφαλμένη ἐπιλογὴ ἀπαντήσεως ἐξουδετερώνουν βαθμολογικὰ ἕνα θέμα μὲ ὀρθὴ ἐπιλογὴ ἀπαντήσεως. Ἡ βαθμολόγηση τῆς ἐπιδόσεως γίνεται σύμφωνα μὲ τὴν ἑξῆς σχέση (ἄριστα: ὁ βαθμὸς 10):

$$Y_6 = \left(L + C - \frac{N-L-C}{m}\right) \cdot \frac{10}{N} \qquad (30)$$

Ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἐλπίδα τῆς Y_6 ἰσοῦται μὲ 10L/N γιὰ $m=K-1$. Στὴν τιμὴ αὐτὴ τῆς m ἡ Y_6 δὲν ἐπιτρέπει βαθμολογικὴ εὔνοια καμμιᾶς τιμῆς τῆς L. Παρατηροῦμε ὅτι καὶ πάλι ὁρισμένες τιμὲς τῆς Y_6 εἶναι ἀρνητικὲς (γιὰ $L<N/K$ καὶ $C<N/(K-1) - KL/(K-1)$.

(iv) Ποσοστιαία μείωση τῆς ἐπιδόσεως στὶς ἐξετάσεις

Τὸ ἀποτέλεσμα L+ C μποροῦμε νὰ βαθμολογήσουμε σύμφωνα μὲ τὴν ἀκόλουθη σχέση (ἄριστα: ὁ βαθμὸς 10):

$$Y_7 = (L + C) \cdot \lambda \cdot \frac{10}{N} = z \cdot \lambda \qquad (31)$$
$$\text{ὅπου } 0 \leqq \lambda \leqq 1$$

Οἱ τιμὲς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς Y_7 σὲ κάθε περίπτωση εἶναι μὴ ἀρνητικές. Ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι $E(Y_7) = 10L/N$, ἐὰν

$$\lambda = \frac{KL}{(K-1)\ L + N} = \frac{K\ (L/N)}{(K-1) \cdot (L/N) + 1} \qquad (32)$$

Συνεπῶς, μὲ τὸν περιορισμὸ (32), ἡ Y_7 δὲν εὐνοεῖ βαθμολογικὰ καμμιὰ τιμὴ τῆς L.

Τὸ ποσοστὸ λ εἶναι συνάρτηση τῆς L μορφῆς ὀρθογώνιας ὑπερβολῆς. Σὰν παράδειγμα, παρουσιάζουμε στὸν Πίνακα 2 τὶς τιμὲς τοῦ ποσοστοῦ αὐτοῦ γιὰ μιὰ σειρὰ τιμῶν τῆς K. Γενικά, παρατηροῦμε ὅτι γιὰ L=0 ἔχουμε λ=0 καὶ γιὰ L=N ἔχου-

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

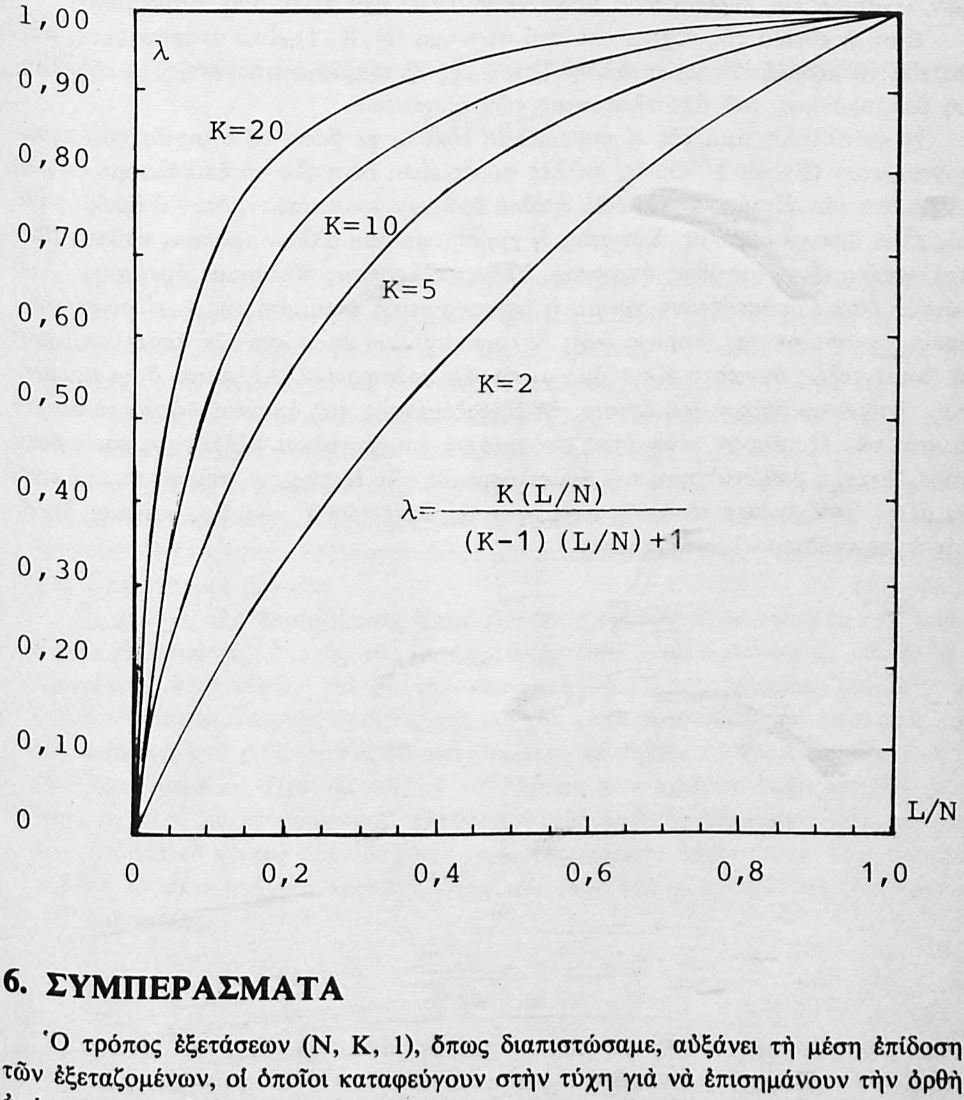
Τιμὲς τοῦ ποσοστοῦ λ γιὰ ἐπιλεγμένες τιμὲς τῆς K

L/N	K=2	K=3	K=4	K=5	K=10
0	0	0	0	0	0
0,05	0,095	0,136	0,174	0,208	0,345
0,10	0,182	0,250	0,308	0,357	0,526
0,15	0,261	0,346	0,414	0,469	0,638
0,20	0,333	0,429	0,500	0,556	0,714
0,25	0,400	0,500	0,571	0,625	0,769
0,30	0,462	0,562	0,632	0,682	0,811
0,35	0,519	0,618	0,683	0,729	0,843
0,40	0,571	0,667	0,727	0,769	0,870
0,45	0,621	0,711	0,766	0,804	0,891
0,50	0,667	0,750	0,800	0,833	0,909
0,55	0,710	0,786	0,830	0,859	0,924
0,60	0,750	0,818	0,857	0,882	0,938
0,65	0,788	0,848	0,881	0,903	0,949
0,70	0,824	0,875	0,903	0,921	0,959
0,75	0,857	0,900	0,923	0,938	0,968
0,80	0,889	0,923	0,941	0,952	0,976
0,85	0,919	0,944	0,958	0,966	0,983
0,90	0,947	0,964	0,978	0,978	0,989
0,95	0,974	0,983	0,987	0,990	0,995
1	1	1	1	1	1

με λ=1. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ ἐντελῶς ἀπροετοίμαστος ἐξεταζόμενος βαθμολογεῖται μὲ μηδὲν ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα ποὺ παρουσιάζει στὶς ἐξετάσεις. Οἱ καλύτερα προετοιμασμένοι παίρνουν ἕνα αὐξανόμενο ποσοστὸ τῆς ἀντίστοιχης βαθμολογίας Z καὶ μόνο οἱ ἄριστα προετοιμσμένοι παίρνουν ὁλόκληρο τὸν ἀντίστοιχο βαθμὸ Z (ἄριστα). Στὸ Διάγραμμα 5 φαίνεται καθαρὰ ὅτι, ceteris paribus, αὐξάνουν ὅλες οἱ τιμὲς τοῦ ποσοστοῦ λ καὶ τείνουν πρὸς τὴ μονάδα καθὼς αὐξάνει ἡ τιμὴ τῆς K.

Ἀξιπρόσεκτοι περιορισμοὶ τοῦ τρόπου βαθμολογήσεως μὲ τὴν Y_7 εἶναι ὅτι ἀπαιτεῖται νὰ γνωρίζουμε τὸ βαθμὸ προετοιμασίας (L ἢ L/N) γιὰ κάθε ἐξεταζόμενο πρόσωπο καὶ ἀκόμη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸ νὰ δώσουμε βαθμὸ ἄριστα στὸν ἐξεταζόμενο ποὺ ἀπαντᾶ ὀρθὰ σὲ ὅλα τὰ θέματα τῶν ἐξετάσεων (ἐκτὸς ἐὰν εἶναι ἄριστα προετοιμασμένος).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 5. Τιμές τοῦ ποσοστοῦ λ γιά K=2,5,10,20.



6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ὁ τρόπος ἐξετάσεων (N, K, 1), ὅπως διαπιστώσαμε, αὐξάνει τὴ μέση ἐπίδοση τῶν ἐξεταζομένων, οἱ ὁποῖοι καταφεύγουν στὴν τύχη γιὰ νὰ ἐπισημάνουν τὴν ὀρθὴ ἀπάντηση τῶν θεμάτων ποὺ ἀγνοοῦν. Ἡ αὔξηση τῆς μέσης ἐπιδόσεως λογίζεται ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο τῆς οὐσιαστικῆς προετοιμασίας, εἶναι δὲ τόσο πιὸ μεγάλη ὅσο λιγότερο προετοιμασμένος εἶναι ὁ ἐξεταζόμενος. Τοῦτο μπορεῖ νὰ δώσει στό ρόλο τῶν ἐξετάσεων (N, K, 1) μιὰ διάσταση σοβαρὰ ἀντιεκπαιδευτικὴ στὴν περίπτωση ποὺ ἡ εὔνοια τῆς τύχης εἶναι τόσο σπουδαία ὥστε μὲ τὴ συστηματικότητά της νὰ μὴν ἐνθαρρύνει τοὺς σχετικὰ ἀπροετοίμαστους νὰ βελτιώσουν τὴν κατάρτισή τους. Ἐπὶ πλέον, ἀπὸ τὴν ἴδια αἰτία, οἱ ἐξετάσεις αὐτὲς μπορεῖ νὰ γίνουν συστηματικὰ ἄδικες καὶ παραπλανητικές, διότι —ὅπως ἀναφέραμε— αὐξάνουν ἄνισα τὴ μέση ἐπίδοση τῶν λιγότερο καὶ περισσότερο προετοιμασμένων στὸ ἐξεταστέο ἀντικείμενο.

Ἔτσι, ἡ εὔνοια τῆς τύχης, ποὺ στὸ σύστημα (N, K, 1) εἶναι ἀναπόφευκτη, πρέπει εἴτε νὰ περιορισθεῖ μὲ κατάλληλη τιμὴ τῆς K, εἴτε νὰ ἐκμηδενισθεῖ μὲ κατάλληλη βαθμολόγηση τοῦ ἀποτελέσματος τῶν ἐξετάσεων.

Ἡ κατάλληλη τιμὴ τῆς K καθορίζεται εὔκολα μὲ βάση τὰ στοιχεῖα ποὺ περιέχονται στὸν Πίνακα 1. Ὅμως, πολλὲς φορὲς εἶναι δύσκολο νὰ ἐπιβάλουμε σὲ ὅλα τὰ θέματα τῶν ἐξετάσεων τὸν ἴδιο ἀριθμὸ ἕτοιμων ἀπαντήσεων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ἀρκετὰ μεγάλος. Συνεπῶς, ἡ χρησιμοποίηση ἄλλων τρόπων, καθαρὰ βαθμολογικῶν, εἶναι συνήθως ἀναγκαία. Τέτοιους τρόπους ἐξετάσαμε ἀρκετούς. Ἀπὸ αὐτοὺς ὅσοι προϋποθέτουν γνώση ἢ ἱκανοποιητικὴ ἐκτίμηση τῆς L εἶναι περιορισμένης χρησιμότητας, κυρίως διότι δὲν μποροῦν νὰ ἐφαρμοσθοῦν ἀποτελεσματικὰ σὲ ἕνα ἐντελῶς ἄγνωστο ἐξεταζόμενο σύνολο πρόσωπων.[6] Ἄλλωστε, ὅσοι προβλέπουν βαθμὸ μικρότερο τοῦ ἄριστα γιὰ ἐξεταζόμενους ποὺ ἀπαντοῦν ὀρθὰ σὲ ὅλα τὰ θέματα τῶν ἐξετάσεων, εἶναι ἴσως σκόπιμο νὰ ἀποφεύγονται γιὰ λόγους παιδαγωγικούς. Ἔτσι, ἡ βαθμολόγηση τοῦ ἀποτελέσματος τῶν ἐξετάσεων, ποὺ γίνεται σύμφωνα μὲ τὰ ὑποδείγματα τὰ ὁποῖα παράγουν τὶς τιμὲς τῶν Y_5 καὶ Y_6, φαίνεται ὅτι εἶναι ἡ περισσότερο ἱκανοποιητική.

6. Ἀκόμη καὶ στὴν περίπτωση αὐτή, θὰ ἦταν δυνατὸ νὰ συνδυασθοῦν ταυτόχρονα δύο τύποι ἐξετάσεων:
α) ἐξετάσεις γραπτὲς ποὺ γίνονται μὲ τὸ γνωστὸ κλασσικὸ τρόπο σὲ ὀλιγάριθμα θέματα ἀπὸ ὅλη τὴν ἐξεταστέα ὕλη μὲ σκοπὸ νὰ ἐκτιμηθεῖ ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμά τους ἡ τιμὴ τῆς L γιὰ κάθε ἐξεταζόμενο πρόσωπο.
β) ἐκτεταμένες ἐξετάσεις τύπου (N, K, 1).