Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΥΠΟ ΤΩΝ κ. κ. Κ. ΠΛΗΘΕΙΔΗ - Β. ΜΕΤΑΞΑ

7. (Συνέχεια ἐκ τοῦ τεύχους 6)

VI. 4. Ἁπλοῦν μονοπώλιον

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἁπλοῦ μονοπωλίου ἔχομεν μίαν ἐπιχείρησιν εἰς τὴν ἀγοράν, ἡ ὁποία παράγει ἓν μόνον ἀγαθόν, τὸ ἀγαθὸν Χ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνολικὴ παραγωγὴ εἶναι x, τότε ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους διὰ τὸ μονοπώλιον εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς μεταβλητῆς x ἔστω $\Pi=F(x)$. Ἐπίσης ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι συνάρτησις τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς $p=f(x)$ ἢ $x=y(p)$. Ἑπομένως, ἡ πρόσοδος τοῦ μονοπωλείου εἶναι $R=py(p)=xf(x)$.

Δεδομένου ὅτι οἱ ἰδιοκτῆται ἑνὸς μονοπωλίου, ὡς τοῦτο συμβαίνει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ, τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ, τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου καὶ τοῦ δυοπωλίου, προσπαθοῦν νὰ πραγματοποιήσουν τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος καὶ δεδομένου ὅτι τὸ μονοπώλιον ἐξασκεῖ ἀποκλειστικὸν ἔλεγχον εἰς τὴν παραγωγήν, βασικῶς τὸ πρόβλημα τοῦ μονοπωλίου εἶναι πρόβλημα εὑρέσεως τῶν συνθηκῶν τοῦ μεγίστου τῆς συναρτήσεως $R-\Pi$.

Δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦ μονοπωλίου μὲ δύο μεθόδους:

α) Ἓν μονοπώλιον δύναται νὰ κρατήσῃ τὴν παραγωγὴν αὐτοῦ σταθερὰν καὶ νὰ ρυθμίζῃ τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος αὐτοῦ ἀναλόγως τῆς ζητήσεως, ἢ

β) Νὰ κρατήσῃ τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος αὐτοῦ σταθερὰν καὶ νὰ ἀφήσῃ τὴν παραγωγήν του νὰ ρυθμίζεται ἀναλόγως τῆς ὑπαρχούσης ζητήσεως.

Μέθοδος Α΄) Ἐὰν οἱ ἰδιοκτῆται τῆς μονοπωλιακῆς ἐπιχειρήσεως κρατοῦν τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος σταθερὰν καὶ ρυθμίζουν τὴν τιμήν του ἀπὸ τὴν ὑπάρχουσαν ζήτησιν $p=f(x)$ τότε ἡ συνολικὴ πρόσοδος ἀπὸ τὴν παραγωγὴν x (οἱανδήποτε ποσότητα καὶ ἐὰν αὕτη ἐκπροσωπῇ) εἶναι $R=xf(x)$, τὸ συνολικὸν κόστος τῆς παραγωγῆς $\Pi=F(x)$ καὶ ἡ καθαρὰ πρόσοδος (κέρδος) $R-\Pi$. Ἡ καθαρὰ πρόσοδος εἶναι μία συνάρτησις τοῦ x.

Ἡ παραγωγὴ x, ἡ ὁποία δίδει τὴν μεγίστην τιμὴν διὰ τὴν καθαρὰν πρόσοδον (κέρδος) πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ τὰς δύο συνθήκας:

$$\text{I.} \quad \frac{d}{dx}(R-\Pi)=0 \quad \text{καὶ}$$

$$\text{II.} \quad \frac{d^2}{dx^2}(R-\Pi)<0 \qquad \text{(βλ. Κεφ. V. 8Γ)}$$

Ἡ πρώτη συνθήκη δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{dR}{dx}=\dfrac{d\Pi}{dx}$

Ἑπομένως ἡ παραγωγὴ ἡ ὁποία δίδει εἰς τὸ μονοπώλιον τὴν μεγαλυτέραν καθαρὰν πρόσοδον εἶναι ἐκείνη διὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαφορικὴ πρόσοδος ἰσοῦται μὲ τὸ διαφορικὸν κόστος. Ἐπίσης, ἡ συνθήκη αὐτὴ δεικνύει ὅτι ἐὰν ἔχωμεν τὴν καμπύλην τοῦ κόστους καὶ τὴν καμπύλην τῆς προσόδου χαραγμένας εἰς τὸ αὐτὸ διάγραμμα μὲ τὰς αὐτὰς μονάδας καὶ κλίμακας, τότε αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τομῆς τῶν καμπυλῶν καὶ τῆς καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα τῆς παραγωγῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς μεγίστης καθαρᾶς προσόδου εἶναι παράλληλοι. (Βλ. VI. 5).

Ἡ δευτέρα συνθήκη γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{d^2R}{d^2x} < \frac{d^2\Pi}{dx^2}$ ἢ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{dx}\right) < \frac{d}{dx}\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(R_\Delta) < \frac{d}{dx}(\Pi_\Delta)$$

ἥτις δεικνύει ὅτι ἡ καμπύλη τῆς ὁριακῆς προσόδου κλίνει πρὸς τὰ κάτω περισσότερον ἀποτόμως τῆς καμπύλης τοῦ διαφορικοῦ κόστους, ὅταν αἱ καμπύλαι εἶναι χαραγμέναι, εἰς τὸ αὐτὸ διάγραμμα.

Ἐκ τῆς πρώτης συνθήκης εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν ἡ συνάρτησις R—Π ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. Ἡ δευτέρα συνθήκη μᾶς ἐξασφαλίζει τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως καὶ ἑπομένως τὴν σταθερότητα τοῦ μονοπωλίου [1]. Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις εἰς τὰς ὁποίας ἡ καμπύλη τῆς διαφορικῆς προσόδου κλίνει τὰ κοῖλα πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἡ καμπύλη τοῦ διαφορικοῦ κόστους στρέφει τὰ κυρτά της πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x, ἔχομεν σταθερότητα τοῦ μονοπωλίου. Ἐὰν μία ἐκ τῶν δύο συνθηκῶν δὲν πληροῦται, τότε εἶναι ἐνδεχόμενον ἡ μονοπωλιακὴ ἐπιχείρησις νὰ εἶναι ἀσταθής. Εἶναι δυνατὸν ἡ κλίσις μιᾶς καμπύλης διαφορικῆς προσόδου νὰ αὐξάνῃ πρὸς τὰ ἄνω καίτοι ἡ περίπτωσις αὐτὴ δὲν εἶναι μεγάλης σπουδαιότητος, ἐπειδὴ ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως ἀπὸ τὴν ὁποίαν προκύπτει ἡ καμπύλη τῆς διαφορικῆς προσόδου αὐξάνει σχεδὸν πάντοτε πρὸς τὰ κάτω [2].

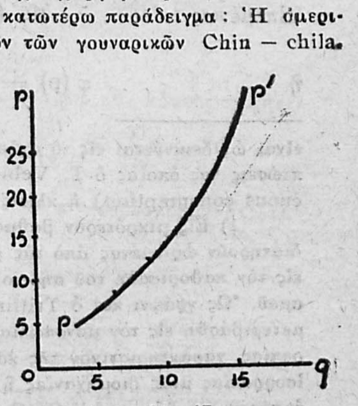
---

1) Ἡ ἐλαστικὴ ζήτησις ἀποτελεῖ ἀπαραίτητον προϋπόθεσιν διὰ τὴν σταθερότητα τοῦ μονοπωλίου. Δεδομένου ὅτι ἡ πρώτη συνθήκη δύναται νὰ γραφῇ :

$$\frac{dR}{dx} = f(x)\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

ὅπου η εἶναι ἡ ἐλαστικότης τῆς ζητήσεως, ἡ συνθήκη αὕτη πληροῦται.

2) Δὲν εἶναι ὅμως γεγονὸς ὅτι ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως αὐξάνει πάντοτε πρὸς τὰ κάτω (Βλ. II 10). Τοῦτο φαίνεται καὶ ἀπὸ τὸ κατωτέρω παράδειγμα : Ἡ ἀμερικανικὴ ἑταιρία Penn Fifth Avenue ἀποτελεῖ μονοπώλιον τῶν γουναρικῶν Chin — chila. Τὸ 1948 πέντε σύζυγοι κατόχων μέσων παραγωγῆς, ἑλληνικῆς καταγωγῆς ἠγόρασαν 5 γούνινα ἐπανωφόρια Chin—chila, πρὸς 10 000 δολλ. ἕκαστον ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω κατάστημα. Τὸ 1949 τὸ μονοπώλιον Penn Fifth Avenue ἀνετίμησε τὰ παλτὰ Chin—chila εἰς 15 000 δολλάρια ἕκαστον. Κατὰ τὸ ἔτος αὐτό, δέκα Ἑλληνίδες τοῦ ἐφοπλιστικοῦ κύκλου Νέας Ὑόρκης, ἠγόρασαν δέκα ἐπανωφόρια Chin-chila. Ἑπομένως, καίτοι ηὐξήθη ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος ηὐξήθη καὶ ἡ ζήτησις αὐτοῦ. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι αἱ δέκα κυρίαι ἐπεθύμουν νὰ ἀποκτήσουν τὸ ἴδιον γούνινο ἐπανωφόριον μετὰ τῶν ἄλλων 5, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν περίοδον 1946—1953, ἦτο καὶ τὸ ἀκριβώτερον εἰς τὴν Ἀμερικανικὴν ἀγοράν. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ σύζυγοι τῶν ἐφοπλιστῶν εἶναι αἱ μόναι πελάτιδες τοῦ μονοπωλίου, τότε ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως αὐτοῦ θὰ



Σχ. 47

Περισσότερον ὅμως ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ κλίσις τῆς διαφορικῆς καμπύλης τοῦ κόστους αὐξάνει πρὸς τὰ κάτω, ὁπότε ἡ σταθερότης τοῦ μονοπωλίου εἶναι δυνατὴ ἐφ' ὅσον ἡ κλίσις αὐτὴ εἶναι μικροτέρα τῆς κλίσεως τῆς διαφορικῆς προσόδου. Ἐπίσης ἡ σταθερότης τοῦ μονοπωλίου ἐξασφαλίζεται ὅταν ἡ συνολικὴ πρόσοδος εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ὁλικοῦ κόστους κατὰ ποσὸν ἱκανὸν νὰ διατηρῇ τὸ μονοπώλιον εἰς τὴν ἀγοράν.

Ὅταν τὸ μονοπώλιον εἶναι σταθερόν, δηλαδὴ ὅταν αἱ δύο ἀναφερόμεναι συνθῆκαι πληροῦνται, τότε τὸ μονοπώλιον εὑρίσκεται εἰς θέσιν ἰσορροπίας. Προφανῶς, ἡ θέσις τῆς ἰσορροπίας τοῦ μονοπωλίου, ὡς ὡρίσθη ἀνωτέρω, εἶναι εὐσταθὴς καὶ ἀνταποκρίνεται περισσότερον πρὸς τὴν πραγματικότητα ἀπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς ἰσορροπίας ὡς αὕτη καθορίζεται ἀπὸ τὰς σχολὰς τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ (1).

Μέθοδος Β') Ὅταν τὸ μονοπώλιον διατηρῇ σταθερὰν τιμήν, ἡ δὲ παραγωγή του ρυθμίζεται ἀπὸ τὴν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως $x = \varphi(p)$ τότε ἡ πρόσοδος

$$R = xp = p\varphi(p) \qquad \text{καὶ} \qquad \Pi = F(x) = F[\varphi(p)]$$

Ἡ καθαρὰ πρόσοδος καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι $R - \Pi$, ὅπου αἱ συναρτήσεις R καὶ Π εἶναι τώρα συναρτήσεις τῆς μεταβολῆς p. Ἑπομένως, διὰ τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς προσόδου αἱ συνθῆκαι εἶναι :

$$\frac{d}{dp}(R-\Pi) = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{d^2}{dp^2}(R-\Pi) < 0 .$$

Ἐκ τῆς πρώτης συνθήκης $\dfrac{dR}{dp} = \dfrac{d\Pi}{dp}$. Ἡ συνάρτησις $\Pi(x)$ εἶναι συνάρτησις μιᾶς συναρτήσεως $x = \varphi(p)$ καὶ ἑπομένως :

$$\frac{d\Pi}{dp} = \frac{d\Pi}{dx}\,\frac{dx}{dp} = \frac{d\Pi}{dx}\,\varphi'(p).$$

Ἐπίσης
$$\frac{dR}{dp} = \frac{d}{dp}\,[\,p\varphi(p)\,] = p\varphi'(p) + \varphi(p)$$

Ἑπομένως
$$p\varphi'(p) + \varphi(p) = \frac{d\Pi}{dx}\,\varphi'(p).$$

ἢ
$$\varphi(p) + p\varphi'(p) - \frac{d\Pi}{dx}\,\varphi'(p) = 0$$

εἶναι ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα. Εἶναι λογικὸν νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις τὰς ὁποίας ὁ T. Veblen καλεῖ Ἐπιδεικτικὴν Κατανάλωσιν (conspicuous consumption) ἡ κλίσις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως αὐξάνει πρὸς τὰ ἄνω.

1) Εἰς μικρότερον βαθμὸν ἀπὸ τοὺς Pareto—Walras οἱ Robinson Chamberlin, διατηροῦν ὡρισμένας ἀπὸ τὰς βασικὰς ὑποθέσεις τῆς σχολῆς τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ εἰς τὸν καθορισμὸν τοῦ σημείου τῆς ἰσορροπίας ὑπὸ συνθήκας μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ. Ὡς γράφει καὶ ὁ Triffin : «Ἡ ἰδιαιτέρα μεθοδολογία τοῦ σημείου τῆς ἰσορροπίας μετεβιβάσθη εἰς τὸν μονοπωλιακὸν ἀνταγωνισμόν ... Τοιουτοτρόπως, τὸ πρόβλημα τῆς ἰσορροπίας, χαρακτηριστικὸν τῆς καθαρᾶς οἰκονομολογίας, περιωρίσθη εἰς τὸν καθορισμὸν τῆς ἰσορροπίας μιᾶς βιομηχανίας ἢ ἑνὸς συνόλου ἐπιχειρήσεων αἱ ὁποῖαι παράγουν τὸ ἴδιον ἐμπόρευμα. «Monomolistic Competition and General Equilibrium Theory». Ἡ θέσις λοιπὸν τῆς ἰσορροπίας μονοπωλίου τινὸς συγκριτικῶς εἶναι πολὺ πλέον εὐσταθής, ρεαλιστικὴ καὶ συγκεκριμένη ἔννοια.

Ἡ δευτέρα συνθήκη δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{d}{dp}\left[\frac{d}{dp}(R-\Pi)\right]<0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{d}{dp}\left[\varphi(p)+\left(p-\frac{d\Pi}{dx}\right)\varphi'(p)\right]<0,$$

$$\text{ἢ} \qquad \left[2-\varphi'(p)\frac{d^2\Pi}{dx^2}\right]\varphi'(p)+\left(p-\frac{d\Pi}{dx}\right)\varphi''(p)<0\,.$$

Ἐκ τῆς πρώτης συνθήκης, ὡς καὶ προηγουμένως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν διὰ τὴν θέσιν ἰσορροπίας, ἐνῷ ἡ δευτέρα συνθήκη ἐξασφαλίζει τὴν μεγίστην καθαρὰν πρόσοδον διὰ τὸ μονοπώλιον. Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν (p) ἰσορροπίας ἐκ τῆς συναρτήσεως $x=\varphi(p)$ εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστοιχον παραγωγήν.

Εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ δευτέρα μέθοδος ἀναλύσεως τοῦ μονοπωλίου δίδει τὴν ἰδίαν τιμὴν ἰσορροπίας καὶ παραγωγῆς. Π.χ. Ἐκ τῆς συνθήκης (α) τῆς δευτέρας μεθόδου ἔχωμεν :

$$\frac{d\Pi}{dx}=\frac{\varphi(p)+p\varphi'(p)}{\varphi'(p)}=\frac{\dfrac{dR}{dp}}{\dfrac{dx}{dp}}=\frac{\dfrac{dR}{dx}\,\dfrac{dx}{dp}}{\dfrac{dx}{dp}}=\frac{dp}{dx}$$

δηλαδή, ἡ πρώτη συνθήκη τῆς δευτέρας μεθόδου εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν πρώτην συνθήκην τῆς πρώτης μεθόδου.

Διὰ τὴν καλυτέραν παρακολούθησιν τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ ἁπλοῦ μονοπωλίου παραθέτομεν τὸ ἀκόλουθον ἀριθμητικὸν παράδειγμα, τοῦ ὁποίου ἡ γραφικὴ παράστασις δίδει καὶ τὴν εἰκόνα τῆς γενικῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ μονοπωλίου.

α) Ἔστω $\Pi(x)=(1/30\,x^2+10x+600)$ χιλ. δραχ., ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους διὰ τὴν ἑβδομαδιαίαν παραγωγὴν x τόννων, ἐπιχειρήσεώς τινος ἥτις κρατεῖ τὸ μονοπώλιον ἅλατος εἰς ὡρισμένην ἀγοράν. Ἐὰν $p=15-1/2\,x$ εἶναι ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως, ὅπου p εἶναι ἡ τιμὴ ἑνὸς τόννου ἅλατος εἰς χιλ. δραχ., νὰ εὑρεθῇ ἡ παραγωγὴ ὅταν τὸ μονοπώλιον εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του.

Λύσις

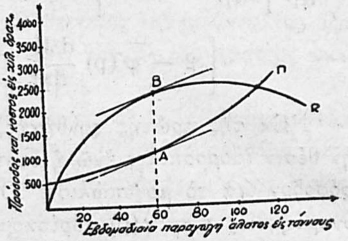
Εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας τοῦ μονοπωλίου, τὸ διαφορικὸν κόστος πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορικὴν πρόσοδον. Ἔχομεν $\frac{d\Pi}{dx}=\frac{x}{15}+10$ καὶ $\frac{dR}{dx}=75-x$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{x}{15}+10=75-x$ · εὑρίσκομεν ὅτι τὸ x πρέπει νὰ εἶναι περίπου 61 τόννοι ἑβδομαδιαίως.

Ἡ δευτέρα συνθήκη πληροῦται διότι

$$\frac{d^2R}{dx^2}=-1 \quad \text{καὶ} \quad \frac{d^2\Pi}{dx^2}=1/15, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{d^2R}{dx^2}<\frac{d^2\Pi}{dx^2}\,.$$

Ἡ συνθήκη αὐτὴ ἐξασφαλίζει τὸ μέγιστον· ἑπομένως ὅταν ἡ ἑβδομαδιαία παραγωγὴ εἶναι περίπου 61 τόννοι τὸ μονοπώλιον εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας καὶ σταθερότητος αὐτοῦ.

Ἐπὶ τοῦ καθέτου ἄξονος λαμβάνομεν τὴν ὁλικὴν πρόσοδον καὶ τὸ κόστος εἰς χιλιάδας δραχμῶν καὶ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου λαμβάνομεν τὴν ἑβδομαδιαίαν παραγωγὴν τοῦ ἅλατος κατὰ τόννους. Ἀφοῦ σχεδιάσωμεν τὰς καμπύλας τοῦ ὁλικοῦ κόστους καὶ τῆς ὁλικῆς προσόδου, φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὸν κάθετον ἄξονα ἐκ τοῦ σημείου Μ τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ περίπου εἰς τοὺς 61 τόννους.

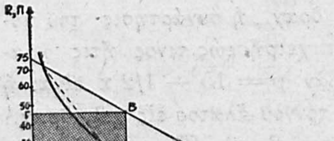


Σχ. 48

Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τομῆς τῆς παραλλήλου ἐκ τοῦ σημείου Μ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν Π καὶ τῶν καμπυλῶν εἶναι παράλληλοι, ἡ δὲ θέσις τῆς ἰσορροπίας καὶ τῆς σταθερότητος τοῦ μονοπωλίου εἶναι μοναδική. Ὅταν τὸ μονοπώλιον εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας ἡ τιμὴ πωλήσεως p συμπίπτει ἀριθμητικῶς μὲ τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς εὐθείας ΟΒ, διότι ἐκ τῆς $R = px$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $p = \dfrac{R}{x}$.

Γενικώτερον ἐὰν $\Pi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους μονοπωλίου τινος καὶ $\rho = \lambda - \mu x$ εἶναι ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως, τότε τὸ μονοπώλιον ἔχει μοναδικὴν θέσιν ἰσορροπίας καὶ σταθερότητος ὅταν $x = \dfrac{\lambda - \beta}{2(\alpha + \mu)}$, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι α, β, γ, λ, μ, εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ $\lambda > \beta$.

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν καμπυλῶν τῆς μέσης καὶ διαφορικῆς προσόδου καὶ τοῦ μέσου καὶ διαφορικοῦ κόστους.



Σχ. 49

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὡς θὰ ἴδωμεν, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὸ κέρδος διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Ἐκ τῶν δοθεισῶν συναρτήσεων τοῦ κόστους καὶ τῆς ζητήσεως εὑρίσκομεν τὰς συναρτήσεις:

$$\Pi_M = \frac{1}{30}x + \frac{600}{x} + 10,$$

$$\Pi_\Delta = \frac{1}{15}x + 10$$

$$R_M = p = 15 - \frac{1}{2}x, \qquad R_\Delta = 15 - x.$$

Ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ διαγράμματος καὶ ἐκ τῆς λύσεως ἐπὶ τῇ βάσει τῆς πρώτης μεθόδου, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τ τῆς καμπύλης τῆς διαφορικῆς προσόδου καὶ τῆς καμπύλης τοῦ διαφορικοῦ κόστους μᾶς δίδει τὴν τιμὴν τῆς παραγωγῆς x διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν τὴν μεγίστην πρόσοδον. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν εὐθεῖαν ΤΜ καὶ εὕρωμεν τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς ἐπὶ τοῦ μέσου κόστους καὶ τῆς μέσης προσόδου, τότε ΑΒ εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς μέσης προσόδου καὶ τοῦ μέσου κόστους, ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὴν ποσότητα ΟΜ δίδει τὴν ἀντίστοιχον καθαρὰν πρόσοδον. Ἑπομένως, ἡ καθαρὰ πρόσοδος παρίσταται διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου, ΑΒΓΔ.

ΤΟ ΔΥΟΠΩΛΙΟΝ

VI. 5. Εἰσαγωγὴ

Ἡ ὕπαρξις δυοπωλίου εἴς τινα ἀγοράν, καίτοι μὴ ἀποκλειομένη, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δυσεύρετος. Παρὰ τὸ γεγονὸς τοῦτο, ἡ μαθηματικὴ ἀνάλυσις τοῦ δυοπωλίου παρέχει τὴν δυνατότητα νὰ κατανοήσωμεν οἰκονομικὰ φαινόμενα, ἅτινα ἐξελίσσονται εἰς ὀλιγοπωλιακὰς ἀγοράς. Ἡ ἀνάλυσις τῶν προβλημάτων τοῦ δυοπωλίου ἀπαιτεῖ τὴν χρησιμοποίησιν ὀλιγωτέρων συναρτήσεων καὶ ὀλιγωτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἀφ᾽ ὅ,τι ἀπαιτεῖ ἡ ἀνάλυσις τοῦ ὀλιγοπωλίου καὶ τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ, κατ᾽ ἀκολουθίαν εἶναι ἁπλουστέρα.

Ἔστω ὅτι μία δυοπωλιακὴ ἀγορὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν Α καὶ τὴν ἐπιχείρησιν Β, αἱ ὁποῖαι παράγουν καὶ πωλοῦν τὸ ἀγαθὸν Χ. Τὸ γεγονὸς ὅτι ὑπάρχουν δύο ἐπιχειρήσεις εἰς τὴν ἰδίαν ἀγορὰν δὲν συνεπάγεται τὴν ὕπαρξιν δύο συναρτήσεων τῆς ζητήσεως. Ἡ παραγωγὴ τοῦ ἀγαθοῦ Χ ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν Α δὲν διακρίνεται ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν ἀπὸ τὴν παραγωγὴν τῆς ἐπιχειρήσεως Β, διότι τὸ προϊὸν Χ εἶναι ἀπολύτως ὁμοιογενές. Δι᾽ αὐτὸν τὸν λόγον ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία συνάρτησις τῆς ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ Χ εἰς τὴν ἀγοράν.

Ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους τῆς ἐπιχειρήσεως Α ἐξαρτᾶται, ὡς γνωστόν, ἀπὸ τοὺς παράγοντας οἵτινες καθορίζουν αὐτὴν (ὅλ. ΙΙ 5) καὶ οἱ ὁποῖοι συνήθως διαφέρουν ποσοτικῶς καὶ ποιοτικῶς ἀπὸ τοὺς αὐτοὺς παράγοντας οἵτινες καθορίζουν τὴν συνάρτησιν τοῦ κόστους τῆς ἐπιχειρήσεως Β. Ἑπομένως αἱ συναρτήσεις τοῦ κόστους τῆς ἐπιχειρήσεως Α καὶ τῆς ἐπιχειρήσεως Β εἶναι συνήθως διαφορετικαί.

Ἐὰν πρὸς στιγμὴν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δύο ἐπιχειρήσεις εἶναι ἐκ ταυτότητος αἱ αὐταὶ τότε προφανῶς εὑρισκόμεθα πρὸ τῆς περιπτώσεως ἑνὸς μονοπωλίου. Ἀλλὰ τὸ κυρίαρχον πρόβλημα τοῦ δυοπωλίου προκύπτει ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἀπόλυτος ὁμοιογένεια τοῦ προϊόντος Χ, ἡ ὁποία συνεπάγεται τὴν ὕπαρξιν μιᾶς συναρτήσεως τῆς ζητήσεως εἰς τὴν ἀγορὰν προξενεῖ στενὴν ἀλληλοεξάρτησιν τῆς ἐπιχειρήσεως Α ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν Β καὶ τἀνάπαλιν. Δεδομένου ὅτι ἑκάστη τῶν δύο ἐπιχειρήσεων ἔχει ὡς σκοπὸν τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους, ὁ σκοπὸς αὐτὸς τῶν ἐπιχειρήσεων συντελεῖ ἐπίσης εἰς τὴν ἀλληλοεξάρτησίν των.

Ἑκάστη τῶν ἐπιχειρήσεων ἐπιδιώκουσα τὸν ἀνωτέρω σκοπὸν χαράσσει μίαν ὡρισμένην στρατηγικὴν ἀπέναντι τῆς ἄλλης, τὴν ὁποίαν βεβαίως δύναται καὶ νὰ ἀλλάξῃ εἰς ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα. Ἐὰν οὐδεμία τῶν ἐπιχειρήσεων λαμβάνῃ ὑπ᾽ ὄψει τὴν ἄλλην, τὴν στρατηγικὴν αὐτὴν καλοῦμεν ***αὐτόνομον***. Δύναται ὅμως νὰ συμβῇ καὶ τὸ ἀντίθετον, δηλαδὴ μία ἐκ τῶν δύο ἐπιχειρήσεων, λ.χ. ἡ Α, νὰ ἐλαττώσῃ τὴν παραγωγήν της καὶ ἑπομένως νὰ ἀναμένῃ ὅτι ἡ ἐπιχείρησις Β θὰ μεταβάλῃ καὶ αὐτὴ τὴν παραγωγήν της συμφώνως μὲ μίαν ὡρισμένην στρατηγικήν. Ὥστε ἡ παραγωγὴ τῆς ἐπιχειρήσεως Β τώρα θεωρεῖται ὑπὸ τῶν διευθυντῶν αὐτῆς ὡς ἐξηρτημένη ἀπὸ τὴν παραγωγὴν τῆς ἐπιχειρήσεως Α. Ἀλλ᾽ ἐπίσης καὶ οἱ διευθύνοντες τὴν ἐπιχείρησιν Α δύνανται νὰ θεωρήσουν τὴν παραγωγήν των ὡς ἐξηρτημένην ἀπὸ ἐκείνην τῆς ἐπιχειρήσεως Β. Ὅταν αἱ ἐπιχειρήσεις Α καὶ Β, εἰς τὸν καθορισμὸν τῆς συνολικῆς παραγωγῆς των, ὑπολογίζουν ἡ μία τὰς ἀλλαγὰς εἰς τὴν παραγωγὴν τῆς ἄλλης, τότε τὴν στρατηγικὴν αὐτὴν τῶν ἐπιχειρήσεων ὀνομάζομεν ***ἐξηρτημένην στρατηγικήν***. Δύο ἐπιχειρήσεις χρησιμοποιοῦσαι ἐξηρτημένην στρατηγικὴν ἀποτελοῦν τὴν γενικὴν περίπτωσιν τοῦ δυοπωλίου. Εἶναι ὅμως ἐνδεχόμενον νὰ ὑπάρχῃ δυοπώλιον συνδυασμοῦ αὐτονόμου καὶ ἐξηρτημένης στρατηγικῆς.

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ἐπιχείρησις Β ἐφαρμόζῃ ἐξηρτημένην στρατηγικὴν ἔναντι τῆς ἐπιχειρήσως Α, τὴν στρατηγικὴν αὐτὴν ἐκφράζομεν μαθηματικῶς ὡς μίαν συνάρτησιν τῆς παραγωγῆς τῆς ἐπιχειρήσεως Β μὲ ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὴν παραγωγὴν τῆς ἐπιχειρήσεως Α. Ὁμοίως καὶ εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ἐπιχείρησις Α ἐφαρμόζῃ ἐξηρτημένην στρατηγικὴν ἔναντι τῆς ἐπιχειρήσεως Β.

Δεδομένου ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ δυοπωλίου εἶναι οὐσιαστικῶς πρόβλημα πραγματοποιήσεως τοῦ μεγίστου κέρδους ἑκάστης τῶν ἐπιχειρήσεων, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ βασίζεται εἰς τὴν ὑπὸ τῶν ἐπιχειρήσεων ἀκολουθητέαν στρατηγικήν, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐὰν αὕτη εἶναι αὐτόνομος ἢ ἐξηρτημένη. Ἀφ' ἧς στιγμῆς αἱ ἐπιχειρήσεις Α καὶ Β ἔχουν καθορίσει τὰς καμπύλας τῆς στρατηγικῆς των, δὲν τοὺς ἀπομένει παρὰ νὰ παρακολουθοῦν τὰς ἐνδεχομένας βραχυχρονίους μεταβολάς, τὰς ὁποίας ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη δύναται νὰ ἐπιφέρῃ εἰς τὴν παραγωγήν της. Τὰς ἐνδεχομένας αὐτὰς βραχυχρονίους ἀλλαγάς, τὰς ὁποίας ἡ μία ἐπιχείρησις προβλέπει διὰ τὴν ἄλλην, καλοῦμεν **εἰκαστικὰς μεταβολάς** (1), Εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς αὐτονόμου στρατηγικῆς αἱ εἰκαστικαὶ διαφορικαὶ μεταβολαὶ εἶναι 0.

Αἱ ἀπαραίτητοι συνθῆκαι διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους, τόσον εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς αὐτονόμου ὅσον καὶ τῆς ἐξηρτημένης στρατηγικῆς, ὀνομάζονται **συνθῆκαι ἀντιδράσεως** αἱ δὲ μαθηματικαί των ἐκφράσεις ὀνομάζονται **συναρτήσεις τῆς ἀντιδράσεως**.

VI. 6. Μαθηματικὴ ἀνάλυσις τοῦ δυοπωλίου

Ἂς παραστήσωμεν τὴν ζήτησιν εἰς τὴν ἀγορὰν διὰ τὸ ἀγαθὸν Χ διὰ τῆς συναρτήσεως $p = f(x)$. Ἡ μεταβλητὴ x εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς παραγωγῆς τῆς ἐπιχειρήσεως Α καὶ τῆς ἐπιχειρήσεως Β. Ἐπομένως, ἂν παραστήσωμεν μὲ x_1 τὴν παραγωγὴν τῆς ἐπιχειρήσεως Α καὶ x_2 τὴν παραγωγὴν τῆς ἐπιχειρήσεως Β $x = x_1 + x_2$. Ὀνομάζομεν τὰς ἀντιστοιχούσας συναρτήσεις τοῦ κόστους διὰ τὴν ἐπιχείρησιν Α καὶ τὴν ἐπιχείρησιν Β, $\Pi_1(x_1)$ καὶ $\Pi_2(x_2)$.

Ἐπομένως αἱ ἀντιστοιχοῦσαι καθαραὶ πρόσοδοι διὰ τὰς ἐπιχειρήσεις Α καὶ Β θὰ εἶναι :

$$R_1 = x_1 p - \Pi_1(x_1), \qquad R_2 = x_2 p - \Pi_2(x_2).$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπιχείρησις Α θεωρῇ τὴν παραγωγὴν x_2 τῆς ἐπιχειρήσεως Β σταθεράν, ἡ πρόσοδός της εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς παραγωγῆς x_1. Ὥστε, διὰ νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην πρόσοδον ἡ ἐπιχείρησις Α θὰ πρέπει νὰ ἐκλέξῃ τὴν παραγωγήν της εἰς τρόπον ὥστε νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη

$$\frac{dR_1}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}\,[\,x_1 p - \Pi_1(x_1)\,] = 0 \quad ἢ \quad \frac{d}{dx_1}\,(x_1 p) = \frac{d\Pi_1(x_1)}{dx_1}$$

δηλαδή, ἡ διαφορικὴ πρόσοδος τῆς ἐπιχειρήσεως Α ἰσοῦται μὲ τὸ διαφορικὸν κόστος αὐτῆς.

---

1) Διὰ γενικώτερον ὁρισμὸν τῶν εἰκαστικῶν διαφορικῶν μεταβολῶν ἴδε R. Frish Monopole Polypole National Konomisk Tidsskrift, 1933.

Ἀντικαθιστῶντες τὴν συνάρτησιν p μὲ f(x) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ x_2 εἶναι σταθερόν, ἔχομεν

$$\frac{d}{dx_1}(x_1 p) = \frac{d}{dx_1} x_1 f(x) = f(x) + x_1 \frac{d}{dx_1} f(x) \frac{d}{dx_1}(x_1 + x_2) =$$

$$= f(x) + x_1 f'(x) \qquad \text{ἢ} \qquad f(x) + x_1 f'(x) = \frac{d\Pi_1(x_1)}{dx_1}.$$

Δεδομένου ὅτι καὶ ἡ ἐπιχείρησις Β ἔχει ὡς σκοπὸν τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον φθάνομεν εἰς τὴν συνθήκην :

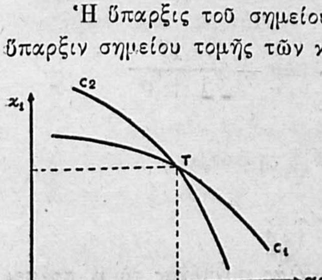
$$f(x) + x_2 f'(x) = \frac{d\Pi_2(x_2)}{dx_2}.$$

Αἱ δύο αὐταὶ συνθῆκαι, αἵτινες προσδιορίζουν τὰς τιμὰς x_1 διὰ τὴν ἐπιχείρησιν Α καὶ x_2 διὰ τὴν ἐπιχείρησιν Β διὰ τὰς ὁποίας καὶ αἱ δύο ἐπιχειρήσεις ἔχουν τὴν μεγίστην πρόσοδον, συνιστοῦν ἀλγεβρικὸν σύστημα ἐξισώσεων ὡς πρὸς x_1 καὶ x_2 τοῦ ὁποίου ἡ λύσις ἐν γένει καθορίζει τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας τοῦ δυοπωλίου. Ἄρα, ἡ ὕπαρξις σημείου ἰσορροπίας τοῦ δυοπωλίου συνεπάγεται τὴν ὕπαρξιν παραδεκτῆς λύσεως τοῦ ὡς ἄνω συστήματος· καὶ ἀντιστρόφως ἡ ὕπαρξις παραδεκτῆς λύσεως τοῦ συστήματος καθορίζει τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας. Αἱ δύο αὐταὶ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ἐν γένει ἀρκοῦν νὰ προσδιορίσουν τὴν παραγωγὴν ἑκάστης τῶν δύο ἐπιχειρήσεων Α καὶ Β, καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὴν συνολικὴν παραγωγὴν τοῦ δυοπωλίου καὶ τὴν τιμὴν εἰς τὴν ὁποίαν ἡ παραγομένη ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ Χ πωλεῖται εἰς τὴν δυοπωλιακὴν ἀγοράν.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν πρώτην συνθήκην ὡς μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν, τότε ἡ συνάρτησις αὐτὴ ὁρίζει τὴν παραγωγὴν τῆς ἐπιχειρήσεως Α ὡς μίαν συνάρτησιν τῆς παραγωγῆς τῆς ἐπιχειρήσεως Β. Ὁμοίως ἡ δευτέρα συνθήκη εἶναι μία πεπλεγμένη συνάρτησις, ἥτις ὁρίζει τὴν παραγωγὴν τῆς ἐπιχειρήσεως Β ὡς συνάρτησιν τῆς παραγωγῆς τῆς ἐπιχειρήσεως Α. Τὰς δύο αὐτὰς συναρτήσεις ὀνομάζομεν ***συναρτήσεις τῆς ἀντιδράσεως*** τὰς δὲ γραφικὰς αὐτῶν παραστάσεις ὀνομάζομεν ***καμπύλας τῆς ἀντιδράσεως***.

VI. 7. Αἱ ὁμαλαὶ συνθῆκαι

Ἡ ὕπαρξις τοῦ σημείου ἰσορροπίας εἰς ἕνα δυοπώλιον συνεπάγεται τὴν ὕπαρξιν σημείου τομῆς τῶν καμπυλῶν τῆς ἀντιδράσεως, εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον διαγράμματος μὲ ἄξονας Ox_1x_2. Θὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦ σημείου τῆς ἰσορροπίας καὶ τῆς σταθερότητος αὐτοῦ ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας, τὰς ὁποίας μετὰ τοῦ Allen [1] ὀνομάζομεν ὁμαλὰς συνθήκας.



Σχ. 50

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως τῆς δυοπωλιακῆς ἀγορᾶς εἶναι φθίνουσα συνάρτησις καὶ ὅτι τὸ διαφορικὸν κόστος λ.χ. τῆς ἐπιχειρήσεως Α εἶναι αὔξουσα συνάρτησις. Ἐπίσης, ὑποθέσωμεν ὅτι μία αὔξησις τῆς παραγωγῆς x_2 τῆς ἐπιχειρήσεως Β ἔχει

1) Allen : Mathematical Analyis for Economists 345—347.

ώς ἀποτέλεσμα τὴν ἐλάττωσιν τῆς παραγωγῆς x_1 τῆς ἐπιχειρήσεως Α κατά τινα μικροτέραν ποσότητα.

Δηλαδή, ἔχομεν μίαν περίπτωσιν ἐξηρτημένης στρατηγικῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ αὔξησις τῆς παραγωγῆς τῆς ἐπιχειρήσεως Β ἀντιμετωπίζεται, διὰ τὴν βραχυχρόνιον περίοδον, μὲ ἐλάττωσιν τῆς παραγωγῆς τῆς ἐπιχειρήσεως Α, ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα ποσοτικῶς τῆς αὐξήσεως τῆς ἐπιχειρήσεως Β.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰς ἀνωτέρω μεταβολὰς διὰ Δx_2 καὶ Δx_1 τότε $\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$ εἶναι ἀρνητικὸν ἀλλὰ ἀριθμητικῶς μικρότερον τῆς μονάδος. Δεδομένου ὅτι x_1 εἶναι συνάρτησις τοῦ x_2 ἐὰν c_1 εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως αὐτῆς, ἕπεται ὅτι ὁ συντελεστὴς τῆς διευθύνσεως τῆς καμπύλης $\frac{dx_1}{dx_2}$, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὑπὸ ὁμαλὰς συνθήκας εἶναι ἀρνητικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος. Ὑπὸ τὰς αὐτὰς ὑποθέσεις ἡ δευτέρα συνθήκη ὁρίζει τὴν καμπύλην c_2 τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Ox_1 δηλαδὴ $\frac{dx_2}{dx_1}$ εἶναι ἀρνητικὸς καὶ ἀριθμητικῶς μικρότερος τῆς μονάδος.

Αἱ δύο παράγωγοι τῶν συναρτήσεων τῆς ἀντιδράσεως παριστοῦν τὰς βραχυχρονίους μεταβολὰς κατὰ μῆκος τῶν καμπυλῶν τῆς ἀντιδράσεως καὶ ἀποτελοῦν τὴν μαθηματικὴν ἔκφρασιν τῶν εἰκαστικῶν διαφορικῶν μεταβολῶν ὡς αὗται ἔχουν γενικῶς ἐρευνηθῆ ἀπὸ τὸν καθηγητὴν Frish. Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον (VI. 6) εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις τῶν καμπυλῶν τῆς ἀντιδράσεως ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ x_2 εἶναι σταθερὸν ὡς πρὸς x_1 καὶ ἑπομένως ἡ παράγωγος εἶναι Ο διὰ τὴν καμπύλην c_1. Ὁμοίως $\frac{dx_2}{dx_1}\ \frac{dx_1}{dx_2} = 0$ εἶναι 0 διὰ τὴν καμπύλην c_2. Δηλαδή, εὑρισκόμεθα πρὸ τῆς περιπτώσεως ὅπου αἱ εἰκαστικαὶ διαφορικαὶ μεταβολαὶ εἶναι 0. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης τῆς ἀντιδράσεως c_1 δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως :

$$\varphi(x_1, x_2) = f(x) + x_1 f'(x) - \frac{d\Pi_1}{dx_1} = 0$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{f'(x) + x_1 f''(x)}{2f'(x) + x_1 f''(x) - \frac{d_1{}^2\Pi_1}{dx_1{}^2}} = -\frac{1}{1+p}$$

ὅπου $$p = -\frac{\frac{d_1{}^2\Pi_1}{dx_1{}^2} - f'(x)}{f(x) + \pi_1 f''(x)}.$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ νὰ πληροῖ ἡ καμπύλη τὰς ὁμαλὰς συνθήκας τὸ p πρέπει νὰ εἶναι θετικόν.

Δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις p εἶναι φθίνουσα καὶ ἡ συνάρτησις $\frac{d\Pi_1}{d\,x_1}$ εἶναι αὔξουσα, ὁ ἀριθμητὴς τοῦ p εἶναι θετικὸς καὶ ἑπομένως ὁ παρανομαστὴς πρέπει νὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἤτοι $f'(x) + x_1 f''(x) < 0$. Ἡ συνθήκη αὐτὴ ἐπαληθεύεται ἢ ὅταν τὸ f'' εἶναι ἀρνητικὸν ἢ ὅταν τὸ f'' εἶναι θετικὸν ἀλλὰ μικρότερον $\frac{1}{x_1}$ $[-f'(x)[$.. Αἱ δύο αὐταὶ συνθῆκαι, ὡς εἴδομεν, ἔχουν σχέσιν μὲ τὴν διεύθυνσιν τῶν κοίλων τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως καὶ πληροῦνται εἰς ἀρκετὰς περιπτώσεις καμπυλῶν τῆς ζητήσεως π.χ. ὅταν ἡ ζήτησις εἶναι συνάρτησις γραμμική.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι διὰ τὴν καμπύλην c_2 εὑρίσκομεν τὰς αὐτὰς συνθήκας. Ὅταν αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι πληροῦνται, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο καμπυλῶν τῆς ἀντιδράσεως κεῖται εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον. Ὅταν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο καμπυλῶν τῆς ἀντιδράσεως κεῖται εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον, τότε αἱ ἐπιχειρήσεις A καὶ B πραγματοποιοῦν τὴν μεγίστην δυνατὴν πρόσοδον. Ὅτας αἱ ἐπιχειρήσεις A καὶ B πραγματοποιοῦν τὴν μεγίστην δυνατὴν πρόσοδον, αὐτὸ σημαίνει ὅτι δύνανται νὰ παραμείνουν εἰς τὴν ἀγορὰν καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὴν σταθερότητα καὶ θέσιν ἰσορροπίας τοῦ δυοπωλίου.

Ἑπομένως, αἱ δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεις ἀποτελοῦν καὶ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἑνὸς δυοπωλίου ὅταν αἱ εἰκαστικαὶ διαφορικαὶ μεταβολαὶ εἶναι 0.

VI. 8. Τὸ γενικὸν πρόβλημα τοῦ δυοπωλίου καὶ ἄλλαι περιπτώσεις

Εἰς τὸ γενικὸν πρόβλημα τοῦ δυοπωλίου, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἐπιχείρησις A ἀκολουθεῖ ἐξηρτημένην στρατηγικήν. Δηλαδή, ὅταν ἡ ἐπιχείρησις A μεταβάλλῃ τὴν παραγωγὴν τῆς x_1 προβλέπει ὅτι καὶ ἡ δυοπωλιακὴ ἐπιχείρησις B θὰ μεταβάλλῃ τὴν παραγωγὴν x_2 κατά τινα ὡρισμένον νόμον, τὸν ὁποῖον ἐκφράζομεν διὰ τῆς συναρτήσεως $x_2 = \alpha(x_1)$. Διὰ τὴν μεγίστην δυνατὴν πρόσοδον τὸ ὁριακὸν κόστος τῆς ἐπιχειρήσεως A πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ

$$\frac{d}{dx_1}(x_1 p) = f(x) + x_1 \frac{d}{dx_1} f(x) \frac{d}{dx_1}(x_1 + x_2) = f(x) + x_1 f'\left(1 + \frac{dx_2}{dx_1}\right)$$

ὅπου $\frac{dx_2}{dx_1} = \alpha'(x_1)$ ἥτις εἶναι ἡ διαφορικὴ πρόσοδος τῆς ἐπιχειρήσεως A. Τοιουτοτρόπως ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης τῆς ἀντιδράσεως c_1 εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δίδεται ὑπὸ τῆς

$$f(x) + x_1 f'(x)\left(1 + \frac{dx_2}{dx_1}\right) = \frac{d\Pi_1}{dx_1}.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἐὰν ἡ ἐπιχείρησις B, ἀκολουθῇ ἐξηρτημένην στρατηγικὴν ἐκφραζομένην διὰ τῆς συναρτήσεως $x_1 = \beta(x_2)$ τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης c_2 εἶναι:

$$f(x) + x_2 f'(x)\left(1 + \frac{dx_1}{dx_2}\right) = \frac{d\Pi_2}{dx_2}.$$

Αἱ δύο καμπύλαι τῆς ἀντιδράσεως εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν καθορίζουν τὴν κατανομὴν τῆς παραγωγῆς τοῦ δυοπωλίου μεταξὺ τῶν ἐπιχειρήσεων A καὶ B. Ἑπομένως, ἡ παραγωγὴ τοῦ δυοπωλίου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν εἰκαστικῶν διαφορικῶν μεταβολῶν τῶν δύο ἐπιχειρήσεων.

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις συμπίπτουν μὲ τὰς ἐξισώσεις τῆς παραγράφου VI. 7, ὅπου αἱ εἰκαστικαὶ διαφορικαὶ μεταβολαὶ εἶναι 0. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐὰν αἱ ἐπιχειρήσεις A καὶ B ἔχουν τὴν αὐτὴν συνάρτησιν τοῦ κόστους $\Pi(x)$ αἱ ἐξισώσεις αἵτινες μᾶς δίδουν τὴν παραγωγήν των εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

$$f(x) + x_1 f'(x) = \Pi'(x_1) \qquad \text{καὶ} \qquad f(x) + x_2 f(x) = \Pi'(x_2)$$

Ἐκ τῆς συμμετρίας τῶν καμπυλῶν τῆς ἀντιδράσεως συνάγομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν $x_1 = x_2$ καὶ ἑπομένως $x_1 - x_2 = \frac{1}{2}\, x$. Ὅθεν ἡ τιμὴ τοῦ x δίδεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος :

$$f(x) + \frac{1}{2}\, xf'(x) = \Pi'\left(\frac{1}{2}\, x\right)$$

Ἐὰν καὶ αἱ δύο ἐπιχειρήσεις παράγουν μὲ σταθερὸν κόστος, ἡ συνολικὴ παραγωγὴ τοῦ δυοπωλίου κατανεμημένη ἐξ ἴσου μεταξὺ τῶν ἐπιχειρήσεων A καὶ B μᾶς δίδεται ὑπό :

$$f(x) + \frac{1}{2}\, xf'(x) = 0 \qquad \text{ἢ} \qquad f(x) + [f(x) + xf'(x)] = 0$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ὁλικὴ παραγωγὴ εἶναι τοιαύτη ὥστε τὸ ἄθροισμα τῆς μέσης καὶ διαφορικῆς προσόδου νὰ εἶναι 0.

VI. 9. Τὸ διμερὲς μονοπώλιον

Δεδομένου ὅτι τόσον ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ πωλητοῦ ὅσον καὶ ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ ἀγοραστοῦ εἶναι πιθανὸν νὰ ὑπάρχουν περισσότεραι τῆς μιᾶς ἐπιχειρήσεως, δυνάμεθα νὰ διευρύνωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου λέγοντες ὅτι διμερὲς μονοπώλιον ὑπάρχει καὶ ὅταν μία ὁμὰς ἐπιχειρήσεων, ἐνεργουσῶν ὡς μία καὶ μόνη ἐπιχείρησις, πωλοῦν εἰς ἄλλην ὁμάδα ἐπιχειρήσεων ἐνεργουσῶν ὁμοίως ὡς μία καὶ μόνη ἐπιχείρησις. Δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ εἴπωμεν ὅτι ὑφίσταται διμερὲς μονοπώλιον καὶ ὅταν μία ὁμὰς ἐπιχειρήσεων ἐνεργοῦσα ὡς μία καὶ μόνη ἐπιχείρησις πωλῇ εἰς ἄλλην ἐπιχείρησιν ἢ ὅταν μία ὁμὰς ἐπιχειρήσεων ἐνεργοῦσα ὡς μία καὶ μόνη ἐπιχείρησις ἀγοράζῃ ἀπὸ ἄλλην ἐπιχείρησιν.

Ἐπὶ τῶν θεωρητικῶν προβλημάτων τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου ἔχουν ἀσχοληθῆ πολλοὶ μαθηματικοὶ οἰκονομολόγοι. Ἡ ἐργασία τοῦ καθηγητοῦ Bowley, κατὰ τὴν κρίσιν μας, εἶναι ἡ πλέον συγκεκριμμένη καὶ ἀνταποκρινομένη εἰς τὴν ἀντικειμενικὴν πραγματικότητα, διὸ καὶ ἀκολουθοῦμεν εὐρέως τὴν μεθοδολογίαν του.

Ὁ πρῶτος ὁ ὁποῖος ἠργάσθη ἐπὶ τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου ἦτο ὁ Cournot. Τὰς ἰδέας αὐτοῦ ἐπεξεργάσθησαν καὶ ἀνέπτυξαν περαιτέρω οἱ Dr. Schneider καὶ Dr. Zeuthen.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου ἔχομεν τὸ μονοπώλιον A, τὸ ὁποῖον, ὡς συμβαίνει συνήθως, προσφέρει ἀκατέργαστόν τινα ὕλην, καὶ τὸ μονοπώλιον B, συνήθως ἓν βιομηχανικὸν μονοπώλιον (π.χ. χάλυβος, ἀλουμινίου κ.λ.π.), τὸ ὁποῖον ἐκ τῆς πρώτης ὕλης παράγει ὡρισμένόν τι εἶδος (π.χ. τὸ μονοπώλιον A δύναται νὰ προσφέρῃ σιδηρομετάλλευμα, τὸ δὲ μονοπώλιον B νὰ εἶναι ἡ μοναδικὴ ἐπιχείρησις ἡ παράγουσα χάλυβα. Ἤ, τὸ μονοπώλιον A δύναται νὰ προσφέρῃ πορσελάνην εἰς τὸ μονοπώλιον Ε, τὸ ὁποῖον παράγει λουτῆρες).

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι γνωρίζομεν τὴν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως εἰς τὴν ἀγορὰν τοῦ προϊόντος X τοῦ μονοπωλίου Β, $p = f(x)$. Ὡσαύτως ὑποθέτομεν ὅτι δίδεται ἡ συνάρτησις τοῦ μέσου κόστους τοῦ μονοπωλίου Α, $\Pi_M = \varphi(x)$. Εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου χρησιμοποιοῦμεν τὴν συνάρτησιν τοῦ μέσου κόστους, διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς αὐτὰς διαστάσεις εἰς τὰς χρησιμοποιουμένας ἐξισώσεις, δεδομένου ὅτι ἔχομεν δύο διαφορετικὰ προϊόντα. Ἐπιπλέον, διὰ τὴν ἀριθμητικὴν ὁμοιογένειαν τῶν δύο ἀνωτέρω συναρτήσεων, ὑποθέτομεν ὅτι μία μονὰς πρώτης ὕλης τοῦ μονοπωλίου Α ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν μόνον μονάδα τοῦ προϊόντος τοῦ μονοπωλίου Β.

Ἐὰν ἡ τιμὴ πωλήσεως κατὰ μονάδα τοῦ μονοπωλίου Α εἶναι Π τότε ἡ πρόσοδος τούτου δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $R_1 = [\Pi - \varphi(x)]x$. Ἡ τιμὴ πωλήσεως μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος τοῦ μονοπωλίου Α εἶναι καὶ τὸ μέσον κόστος τῆς παραγωγῆς τοῦ μονοπωλίου Β. Ἐὰν πρὸς στιγμὴν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ μονοπώλιον Β δὲν ἔχει ἄλλα ἔξοδα παραγωγῆς εἰμὴ μόνον τὴν ἀγορὰν τῆς πρώτης ὕλης ἀπὸ τὸ μονοπώλιον Α, ἡ βασικὴ αὐτὴ ὑπόθεσις διὰ τὴν ἐπεξεργασίαν τοῦ προβλήματος τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου, ὑποβοηθεῖ ἵνα προσεγγίσωμεν τὴν ἀντικειμενικὴν πραγματικότητα. Ἄνευ αὐτῆς, τὸ πρόβλημα τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου παραμένει ἀκαθόριστον. Ὅθεν, ἡ πρόσοδος τοῦ μονοπωλίου Β δίδεται ὑπὸ τῆς $R_2=[f(x)-\Pi]x$. Ὥστε, ἡ ἄγνωστος συνάρτησις Π πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ ὑπάρχῃ κοινὴ τιμὴ τοῦ x, ἥτις καθιστᾷ τὰς προσόδους R_1, R_2 τῶν μονοπωλίων Α καὶ Β μεγίστας. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ συνάρτησις Π ἀποτελεῖ τὸν συνθετικὸν κρίκον τῶν δύο μονοπωλίων. Ἡ συνάρτησις Π ἐνδιαφέρει τὸ μονοπώλιον Α, διότι ἀποτελεῖ τὴν τιμὴν πωλήσεως μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος του, ὅπως ἐνδιαφέρει καὶ τὸ μονοπώλιον Β, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ μέσον κόστος. Ἤ, ἐνδιαφέρει ἀμφότερα τὰ μονοπώλια ὅταν ὑπάρχῃ συμφωνία μεταξύ των. Ὁ καθορισμὸς τῆς συναρτήσεως ἐξαρτᾶται ἀποκλειστικῶς ἀπὸ τὴν στρατηγικὴν τὴν ὁποίαν τὰ μονοπώλια Α καὶ Β θὰ ἀκολουθήσουν διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους.

Οὕτω διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις :

Περίπτωσις 1η. Ὅταν τὸ μονοπώλιον Β εὑρίσκεται εἰς θέσιν ἐπιτρέπουσαν αὐτῷ νὰ ὑπαγορεύσῃ τὴν τιμὴν πωλήσεως τῆς πρώτης ὕλης τὴν προμηθευομένην ὑπὸ τοῦ μονοπωλίου Α. Ἐὰν τὸ μονοπώλιον Α προσφέρῃ x μονάδας, ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων αὐτῶν καθιστᾷ μεγίστην τὴν πρόσοδόν του ἐὰν τὸ x ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν

$$\Pi = \varphi(x) + x\varphi'(x)$$

ἥτις εἶναι συνέπεια τῆς πρώτης συνθήκης διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ μεγίστου. Ἤτοι, διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ x τὸ κέρδος (καθαρὰ πρόσοδος)

$$R_1 = x(\Pi - \varphi(x)) = x^2\varphi'(x)$$

Ἑπομένως, τὸ μονοπώλιον Β εἶναι ὑποχρεωμένον νὰ ἐπιδιώξῃ τὸ μέγιστον τῆς καθαρᾶς προσόδου του ὑπὸ τὸν δοθέντα νόμον τῆς ζητήσεως καὶ τὸν καθορισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ Π, ἡ ὁποία καθιστᾷ τὴν συνάρτησιν

$$R_1 = (p - \Pi)x = [f(x) - \varphi(x) - x\varphi'(x)]x$$

μεγίστην. Δηλαδὴ τὸ x πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν

$$f(x) - \varphi(x) - 3x\varphi'(x) + xf'(x) - x^2\varphi''(x) = 0$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή, ἥτις περιέχει μόνον τὰς δοθείσας συναρτήσεις καὶ παραγώγους αὐτῶν δίδει τὴν τιμὴν τοῦ x. Ἡ τιμὴ τοῦ Π εὑρίσκεται τώρα δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\Pi = \varphi(x) + x\varphi'(x).$$

Ἡ καθαρὰ πρόσοδος τοῦ μονοπωλίου Β εἶναι

$$x^2[2\varphi'(x) - f'(x) + x\varphi''(x)].$$

Περίπτωσις 2α. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ μονοπώλιον Α εὑρίσκεται εἰς θέσιν νὰ ὑπαγορεύῃ τὴν τιμὴν πωλήσεως Π τῆς πρώτης ὕλης. Τὸ μονοπώλιον Β ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει προσπαθεῖ νὰ καθορίσῃ τὴν τιμὴν x δοθέντος ἑνὸς Π, ὥστε

$$R_2 = (p - \Pi)x = (f(x) - \Pi)\,x$$

νὰ εἶναι μέγιστον. Δηλαδή, τὸ x πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἰσότητα :

$$\Pi = f(x) + xf'(x)$$

καὶ ἡ καθαρὰ πρόσοδος τοῦ μονοπωλίου Β εἶναι $-x^2\varphi'(x)$.

Κατὰ συνέπειαν, τὸ μονοπώλιον Α εἶναι ὑποχρεωμένον νὰ ἐπιδιώξῃ τὸ μέγιστον τῆς καθαρᾶς προσόδου αὐτοῦ ὑπὸ τῆς δοθείσης συναρτήσεως τοῦ μέσου κόστους αὐτοῦ καὶ τὸν καθορισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ Π, ἥτις καθιστᾷ τὴν συνάρτησιν

$$R_2 = [\Pi - \varphi(x)]x = [f(x) + xf'(x) - \varphi(x)]x.$$

Ἑπομένως τὸ x πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν

$$f(x) - \varphi(x) + 3xf'(x) - x\varphi'(x) + x^2f''(x) = 0.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x καὶ δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν $\Pi = f(x) + xf'(x)$ εὑρίσκομεν τὸ Π. Ἡ καθαρὰ πρόσοδος τοῦ μονοπωλίου Α εἶναι :

$$x^2\,[-2f'(x) + \varphi'(x) - xf''(x)$$

Περίπτωσις 3η. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ δύο μονοπώλια συνασπίζονται καὶ ἐπιδιώκουν ἀπὸ κοινοῦ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους. Τὸ συνολικὸν κέρδος τῶν μονοπωλίων Α καὶ Β δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως

$$R = [\,f(x) - \varphi(x)\,]x.$$

Ἄρα, ἡ τιμὴ τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν τὰ μονοπώλια Α καὶ Β συνασπίζονται πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἰσότητα :

$$x\,[\,\varphi'(x) - f'(x)\,] = f(x) - \varphi(x).$$

Ὥστε, ἐὰν ὀνομάσωμεν x_0 τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ x θὰ πρέπει

$$f(x_0) + x_0f'(x_0) = \varphi(x_0) + x_0\varphi'(x_0)$$

τότε ἡ μεγίστη καθαρὰ πρόσοδος καὶ διὰ τὰ δύο μονοπώλια θὰ εἶναι :

$$x_0^2\,[\varphi'(x_0) - f'(x_0)].$$

Ἑπομένως, τὸ x_0 τὸ ὁποῖον καθιστᾷ ἴσας τὰς τιμὰς τοῦ Π τῶν δύο προηγουμένων περιπτώσεων, καθορίζει τὴν κοινὴν αὐτὴν τιμὴν ὡς τιμὴν τοῦ Π. Διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν ἡ καθαρὰ πρόσοδος τοῦ μονοπωλίου Β εἶναι

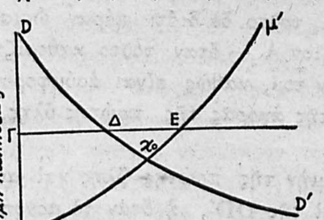
$$[f(x_0)-\Pi]x_0 = [f(x_0) - f(x_0) - x_0 f'(x_0)]x_0 = - x_0^2 f'(x_0)$$

ἡ δὲ καθαρὰ πρόσοδος τοῦ μονοπωλίου Α εἶναι $x_0^2\varphi'(x_0)$.

Ἡ ὡς ἄνω μαθηματικὴ ἀνάλυσις τῆς τρίτης περιπτώσεως τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου βασίζεται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως ὅτι καὶ τὰ δύο μονοπώλια συμβιβάζονται νὰ δεχθοῦν τὴν τιμὴν x_0, ὡς τὴν τιμὴν ἡ ὁποία θὰ τοὺς ἀποφέρῃ τὴν μεγίστην καθαρὰν πρόσοδον, ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις τῆς τρίτης περιπτώσεως. Ἡ τιμὴ x_0 ρυθμίζεται τῇ συστάσει τῶν εἰδικῶν (μαθηματικῶν, οἰκονομολόγων, στατιστικολόγων) τῶν δύο μονοπωλίων ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων συναρτήσεων. Τοῦτο ὅμως δὲν σημαίνει ὅτι τὰ δύο μονοπώλια εἰς τὴν μακροχρόνιον περίοδον θὰ ἀντιμετωπίσουν τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους ἐπὶ τῇ βάσει τῆς τρίτης περιπτώσεως. Εἶναι φυσικὸν τὸ μὲν μονοπώλιον Α νὰ προσπαθῇ νὰ αὐξάνῃ τὴν τιμὴν τοῦ x_0 τὸ δὲ μονοπώλιον Β νὰ ἐλαττώνῃ τὴν τιμὴν τοῦ x_0. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον δὲν δυνάμεθα νὰ ὁμιλήσωμεν οὔτε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν περὶ σταθερότητος καὶ ἰσορροπίας τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου. Ἡ ἀνωτέρω μαθηματικὴ ἀνάλυσις καθίσταται ἁπλουστέρα καὶ γραφικῶς εὐκατανόητος ἐὰν αἱ δοθεῖσαι σαναρτήσεις $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ εἶναι γραμμικαί. Ἐπίσης ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν καθαρῶν προσόδων τῶν δύο μονοπωλίων εἶναι μεγαλύτερον εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων περιπτώσεων. (Βλέπε πρόβλ. 20).

VI. 10. Γραφικὴ ἐπεξήγησις τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου

Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου προκύπτει ὅτι τὸ μονοπώλιον Β ἔχει ὡρισμένην καμπύλην τῆς ζητήσεως, τὴν DD′ διὰ τὴν πρώτην ὕλην προσφερομένην ἀπὸ τὸ μονοπώλιον Α. Τὴν φύσιν τῆς καμπύλης αὐτῆς θὰ ἐρευνήσωμεν οἰκονομικῶς καὶ μαθηματικῶς. Ὅταν τὸ μονοπώλιον Β εὑρίσκεται εἰς θέσιν νὰ καθυπαγορεύῃ τὴν τιμὴν πωλήσεως τῆς πρώτης ὕλης τῆς προσφερομένης ὑπὸ τοῦ μονοπωλίου Α, τότε οὐσιαστικῶς ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως DD′ δὲν ὑφίσταται. Ὅταν ὅμως τὸ μονοπώλιον Α εὑρίσκεται εἰς θέσιν νὰ καθυπαγορεύῃ τὴν τιμὴν πωλήσεως τῆς πρώτης ὕλης, τότε τὸ μονοπώλιον Β, ἐπιδιῶκον τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους, προσπαθεῖ νὰ προσαρμόσῃ τὴν ζήτησίν του διὰ τὴν πρώτην ὕλην, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς δοθείσης ζητήσεως τοῦ προϊόντος αὐτοῦ εἰς τὴν ἀγοράν. Τοιουτοτρόπως, προκύπτει λογικῶς ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως τοῦ μονοπωλίου Β ὡς πρὸς τὸ μονοπώλιον Α εἶναι



Σχ. 51

$$\Pi = j(x) + xf'(x)$$

δηλαδή, ἡ DD′ εἰς τὸ διάγραμμα εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως ταύτης. Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου προκύπτει ἐπίσης ὅτι τὸ μονοπώλιον Α ἔχει μίαν ὡρισμένην καμπύλην τῆς προσφορᾶς, τὴν μμ' διὰ τὴν ὕλην τὴν ὁποίαν προσφέρει ἀποκλειστικῶς εἰς τὸ μονοπώλιον Β. Τὴν φύσιν τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης θὰ ἐξετάσωμεν ὁμοίως ὡς καμπύλην τῆς ζητήσεως. Ὅταν τὸ μονοπώλιον Α εὑρίσκεται εἰς θέσιν νὰ καθυπαγορεύῃ τὴν τιμὴν πωλήσεως τῆς ὑπ' αὐτοῦ προσφερομένης πρώτης ὕλης, τότε οὐσιαστικῶς ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς μμ' δὲν ὑφίσταται. Ὅταν ὅμως τὸ μονοπώλιον Β δύναται νὰ καθυπαγορεύῃ τὴν τιμὴν ἀγορᾶς τῆς πρώτης ὕλης ἀπὸ τὸ μονοπώλιον Α, τότε τὸ μονοπώλιον Α, ἐπιδιῶκον τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους, προσπαθεῖ νὰ προσαρμόσῃ τὴν προσφοράν του ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ δοθέντος μέσου κόστους τῆς παραγωγῆς του. Τοιουτοτρόπως, προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς προσφορᾶς τοῦ μονοπωλίου Α πρὸς τὸ μονοπώλιον Β εἶναι $\Pi = \varphi(x) + x\varphi'(x)$ δηλαδὴ ἡ μμ' τοῦ διαγράμματος εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως αὐτῆς. Ἑπομένως, εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου ἔχομεν, γενικῶς, μίαν καμπύλην τῆς ζητήσεως τοῦ μονοπωλίου Β ὡς πρὸς τὸ μονοπώλιον Α καὶ μίαν καμπύλην τῆς προσφορᾶς τοῦ μονοπωλίου Α πρὸς τὸ Β. Ὥστε τὸ ἀνωτέρω διάγραμμα ἀποτελεῖ γραφικὴν παράστασιν τοῦ ὅλου προβλήματος τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου καὶ ἀπεικονίζει καὶ τὰς τρεῖς περιπτώσεις μαζί. Εἰς τὸ ἀνωτέρω διάγραμμα ἡ τιμὴ $\Pi = x0$ ἥτις καθορίζεται ὑπὸ τῶν εἰδικῶν τῶν δύο μονοπωλίων εἶναι εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καμπυλῶν DD' καὶ μμ'.

Ἐὰν τὸ μονοπώλιον Α προσφέρῃ τὴν πρώτην ὕλην ἀντὶ τιμῆς ΟΓ εἰς τὸ μονοπώλιον Β, τότε ἡ ποσότης τῆς προσφερομένης πρώτης ὕλης τοῦ μονοπωλίου Α πρὸς τὸ μονοπώλιον Β εἶναι ΓΕ. Καθίσταται φανερὸν ἐκ τοῦ διαγράμματος ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ τῆς πρώτης ὕλης αὐξάνῃ, αὐξάνει καὶ τὸ κέρδος τοῦ μονοπωλίου Α. Ἐπιπροσθέτως, ὅταν ἡ τιμὴ τῆς πρώτης ὕλης ἐλαττοῦται, ἐλαττοῦται καὶ τὸ μέσον κόστος παραγωγῆς τοῦ μονοπωλίου Β καὶ συνεπῶς αὐξάνει τὸ κέρδος αὐτοῦ. Ὥστε, τὰ συμφέροντα τῶν δύο μονοπωλίων εἶναι ἀντικρουόμενα. Τὰ ἀντικρουόμενα συμφέροντα εὑρίσκονται ἐντὸς τῶν ὁρίων, τοῦτο δὲ διότι πέραν ὡρισμένου τινος σημείου εἶναι ἀσύμφορον εἰς τὸ μονοπώλιον Α — ὅταν τοῦτο καθορίζῃ τὴν τιμὴν τῆς πρώτης ὕλης — νὰ ὑψώσῃ τὴν τιμήν του, καθὼς εἶναι ἀσύμφορον καὶ διὰ τὸ μονοπώλιον Β νὰ ἐλαττώνῃ τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς τῆς πρώτης ὕλης, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς θέσιν νὰ τὴν καθορίζῃ.

Ὅταν τὸ μονοπώλιον Α καθορίζῃ τὴν τιμὴν τῆς πρώτης ὕλης καὶ αὐξάνει τὴν τιμὴν αὐτῆς πέραν τοῦ ὁριακοῦ σημείου ἐπὶ τῆς DD', ἢ ὅταν τὸ μονοπώλιον Β καθορίζῃ τὴν τιμὴν τῆς πρώτης ὕλης καὶ ἐλαττώνει τὴν τιμὴν αὐτῆς πέραν τοῦ ὁριακοῦ σημείου ἐπὶ τῆς μμ', τότε οὔτε διὰ τὸ μονοπώλιον Β θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑποταχθῇ εἰς τοὺς ὅρους τοῦ μονοπωλίου Α, οὔτε καὶ τὸ ἀντίθετον δύναται νὰ συμβῇ, ἑπομένως ἐπέρχεται κατάστασις ἀπραξίας. (Βλέπε πρόβλ. 19). (Διὰ τὸν καθορισμὸν τῶν ὁριακῶν σημείων ἴδε Hicksy : Suwe of Economic Theory : Econometria 1934).

VI. 11. Ἡ ἔννοια τῆς ἰσορροπίας ὑπὸ συνθήκας μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ

Ὅταν λέγωμεν ὅτι ὡρισμένος οἰκονομικὸς τομεὺς (π.χ. μία βιομηχανία, εἰς ἐμπορικὸς κλάδος, μία ὑπηρεσία) λειτουργεῖ ὑπὸ συνθήκας μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς τὸν τομέα αὐτὸν ὑπάρχει ὁμὰς ἐπιχειρήσεων, παραγουσῶν προϊόντα (ἢ ὑπηρεσίας) δυνάμενα νὰ χρησιμοποιηθοῦν τὸ ἓν ὡς ὑποκατάστατον τοῦ ἄλλου. Δηλαδή, δὲν ὑπάρχει ἀπόλυτος ὁμοιογένεια προϊόντος, ὡς τοῦτο συμβαίνει εἰς τὸ δυοπώλιον ἢ τὸν ἐλεύθερον ἀνταγωνισμόν.

Θὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ λαμβάνοντες κατ' ἀρχὴν ὑπ' ὄψει μόνον τὸν βασικὸν νόμον ὅστις διέπει ἑκάστην τῶν ἐπιχειρήσεων εἰς τὴν ἀγοράν, δηλαδὴ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους. Ἐν συνεχείᾳ ὅμως θὰ συνδυάσωμεν τὸν ἀνωτέρω νόμον μὲ τὸ ἀνταγωνιστικὸν στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ ἀπαραίτητον προϋπόθεσιν διὰ τὴν ὕπαρξιν μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ.

Ἔστω ὅτι ἡ ἐπιχείρησις Α ἀνήκει εἰς οἰκονομικὸν τομέα ὁ ὁποῖος λειτουργεῖ ὑπὸ συνθήκας μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ. Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν συνάρτησιν τοῦ κόστους καὶ τὴν συνάρτησιν τῆς ὁλικῆς προσόδου τῆς ἐπιχειρήσεως Α ἀντιστοίχως μὲ $\Pi(x)$ καὶ $R(x)$ τότε ἡ καθαρὰ πρόσοδος τῆς ἐπιχειρήσεως Α εἶναι $\pi(x)=R(x)-\Pi(x)$. Ὅθεν τὸ x πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἰσότητα

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{d\Pi}{dx} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{dR}{dx} = \frac{d\Pi}{dx}.$$

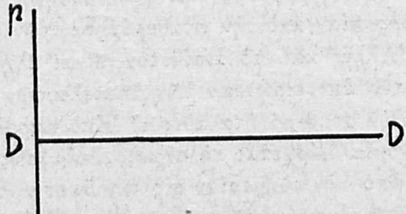
Ὡς γνωστὸν ἡ ἀνωτέρω συνθήκη εἶναι ἀναγκαία διὰ τὴν ὕπαρξιν θέσεως ἰσορροπίας καὶ σταθερότητος τῆς μονοπωλιακῆς ἐπιχειρήσεως Α εἰς τὴν ἀγορὰν (βλέπε VI. 4).

Ὑποτιθεμένου ὅτι ἐπί τινα χρονικὴν περίοδον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιχειρήσεων τῶν ἀποτελουσῶν τὸν οἰκονομικὸν αὐτὸν τομέα δὲν μεταβληθῇ καὶ ὅτι ὅλαι αἱ ἐπιχειρήσεις εὑρίσκονται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας των, τότε λέγομεν ὅτι καὶ ὁ οἰκονομικὸς τομεὺς εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας καὶ σταθερότητος αὐτοῦ. Ἡ θέσις ἰσορροπίας τοῦ οἰκονομικοῦ τομέως μεταβάλλεται ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν μετεχουσῶν εἰς τὸν τομέα ἐπιχειρήσεων μεταβληθῇ, δηλαδὴ ἐὰν νέαι ἐπιχειρήσεις εἰσέλθουν εἰς τὸν οἰκονομικὸν αὐτὸν τομέα ἢ ἐάν τινες τῶν ὑπαρχουσῶν εἰς τοῦτον ἐπιχειρήσεων ἀποχωρήσουν.

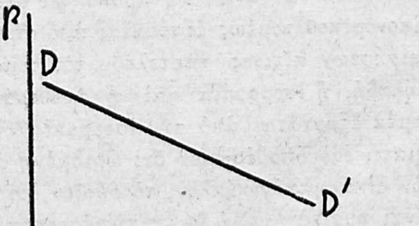
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ θέσις ἰσορροπίας καὶ σταθερότητος τοῦ οἰκονομικοῦ τομέως ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἰσορροπίαν καὶ τὴν σταθερότητα τῶν ἐπιχειρήσεων αἵτινες ἀποτελοῦν τὸν τομέα. Ἀλλὰ καὶ τὸ ἀντίθετον εἶναι ἀληθές. Δηλαδή, ἡ ἰσορροπία καὶ ἡ σταθερότης τῶν ἐπιχειρήσεων τῶν ἀποτελουσῶν τὸν τομέα ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἰσορροπίαν καὶ τὴν σταθερότητα αὐτοῦ. Ἐπὶ παραδείγματι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὡρισμένη οἰκονομία διέρχεται τὸ σημεῖον κάμψεως εἰς τὸν οἰκονομικὸν κύκλον, τὸ ὁποῖον ὁδηγεῖ ἀπὸ τὴν εὐημερίαν εἰς τὴν ὕφεσιν, τότε εἶναι φυσικὸν καὶ ἡ θέσις τῆς ἰσορροπίας τοῦ οἰκονομικοῦ τομέως νὰ μεταβληθῇ. Ἡ μεταβολὴ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας τοῦ οἰκονομικοῦ τομέως θὰ ἐπιφέρῃ τὴν μεταβολὴν τῶν θέσεων τῆς ἰσορροπίας τῶν ἐπιχειρήσεων αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸν ὑπὸ ἐξέτασιν οἰκονομικὸν τομέα. Ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ κάμψις ἀπὸ τὴν εὐημερίαν εἰς τὴν ὕφεσιν εἶναι ὀξεῖα (καὶ ἡ ζήτησις τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ οἰκονομικοῦ τομέως εἴδους ἐλαστική), τότε εἶναι ἐνδεχόμενον ὡρισμέναι ἐπιχειρήσεις ἀποτελοῦσαι τὸν τομέα νὰ ἀποχωρήσουν ἐκ τῆς ἀγορᾶς.

Ἡ ὕπαρξις τῆς θέσεως ἰσορροπίας νοεῖται ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψει μόνον ἡ μονοπωλιακὴ πλευρὰ τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ. Δεδομένου, ὅμως, ὅτι τὸ ἀνταγωνιστικὸν στοιχεῖον ἀποτελεῖ ἀπαραίτητον προϋπόθεσιν διὰ τὴν ὕπαρξιν μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ, ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις ἀπέχει τῆς πραγματικότητος. Διὰ νὰ καθορίσωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς ἰσορροπίας τῆς ἐπιχειρήσεως Α, ἥτις ἀποτελεῖ μέλος τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν οἰκονομικοῦ τομέως, ὀφείλομεν νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψει τόσον τὴν μονοπωλιακὴν ὅσον καὶ τὴν ἀνταγωνιστικὴν πλευρὰν τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ.

Ἡ ἐπιχείρησις Α ἔχει μίαν ὡρισμένην καμπύλην τῆς ζητήσεως, διὰ τῆς ὁποίας παρίσταται τόσον τὸ ἀνταγωνιστικὸν ὅσον καὶ τὸ μονοπωλιακὸν στοιχεῖον. Οἱαδήποτε αὔξησις εἰς τὴν τιμὴν τοῦ ὑπὸ τῆς ἐπιχειρήσεως Α προσφερομένου εἴδους θὰ ἔχῃ συνέπειαν τὴν ἐλάττωσιν τῆς πωλουμένης ποσότητος ἐξ αὐτοῦ, διότι πολλοὶ καταναλωταὶ θὰ προτιμήσουν νὰ ἀγοράσουν ἓν ὑποκατάστατον τοῦ εἴδους τούτου ἀπὸ ἄλλην ἐπιχείρησιν, εὑρισκομένην εἰς τὸν ἴδιον οἰκονομικὸν τομέα. Ἡ ἐπιχείρησις Α, ὅμως, δὲν θὰ ἀπέλθῃ ἐκ τῆς ἀγορᾶς, ὡς θὰ συνέβαινε τοῦτο εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ, τοῦτο δὲ διότι ὡρισμένοι πελάται αὐτῆς θὰ προτιμήσουν νὰ ἀγοράσουν τὸ εἶδος της, παρ' ὅλην τὴν ὕψωσιν τῆς τιμῆς αὐτοῦ, ἀντὶ νὰ καταφύγουν εἰς ὑποκατάστατον. Ἀντιθέτως, οἱαδήποτε ἐλάττωσις εἰς τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν τὴν αὔξησιν τῆς πωλουμένης ἐξ αὐτοῦ ποσότητος. Τοῦτο, ὅμως, δὲν σημαίνει κατ' ἀνάγκην ὅτι οἱ πελάται ὅλων τῶν ἄλλων ἐπιχειρήσεων τοῦ οἰκονομικοῦ τομέως θὰ καταφύγουν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν Α, δεδομένου ὅτι τὸ προϊὸν αὐτῆς ἀποτελεῖ ὑποκατάστατον, σχετικῶς μὲ τὰ προϊόντα ἄλλων ἐπιχειρήσεων. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν τὴν καμπύλην τῆς ζητήσεως τῆς ἐπιχειρήσεως Α μόνον ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι, ὅταν ἡ ἐπιχείρησις αὕτη μεταβάλλῃ τὴν τιμήν της, αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων ἐπιχειρήσεων παραμένουν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως ἐπιχειρήσεώς τινος λειτουργούσης ὑπὸ συνθήκας μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ διαφέρει ἀπὸ παρομοίας καμπύλας ἐπιχειρήσεων αἵτινες λειτουργοῦν ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ, ὡς τοῦτο φαίνεται καὶ εἰς τὸ κατωτέρω διάγραμμα.



Σχ. 52



Σχ. 53

Δεδομένου ὅτι ἡ ἐπιχείρησις Α δὲν ἐξασκεῖ μονοπωλιακὴν ἐπιρροὴν εἰς τὴν ἀγοράν, τόσην ὅση θὰ ἐχρειάζετο διὰ νὰ ἀναγκάσῃ τὰς ἄλλας ἐπιχειρήσεις τοῦ οἰκονομικοῦ τομέως νὰ ἀκολουθήσουν τὴν ὑπ' αὐτῆς χαρασσομένην πολιτικὴν τῆς τιμῆς, ἡ ἐπιχείρησις αὕτη εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ ρυθμίζῃ τὴν τιμήν της εἰς τὸ ἴδιον ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκονται καὶ αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων ἐπιχειρήσεων. Τοῦτο ἀποτελεῖ καὶ τὸν κανόνα τῆς πολιτικῆς τῆς τιμῆς εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ.

Ἀλλὰ ποῖον εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῆς τιμῆς τῶν ἀνταγωνιζομένων ἐπιχειρήσεων τοῦ οἰκονομικοῦ τομέως ; Δεδομένου ὅτι ὅλαι αἱ ἐπιχειρήσεις ἔχουν μίαν μικρὰν μονοπωλιακὴν ἐπιρροὴν εἰς τὴν ἀγοράν, καθοριζομένην ἀπὸ τὴν ἀνομοιογένειαν τοῦ παραγομένου εἴδους, εἶναι φυσικὸν ἑκάστη ἐξ αὐτῶν νὰ ζητῇ νὰ ρυθμίζῃ τὴν τιμήν της εἰς ἐπίπεδον ὑψηλότερον τοῦ διαφορικοῦ της κόστους. Λαμβάνοντες δ' ὑπ' ὄψει ὅτι ἐὰν μία ἐπιχείρησις ἀποφασίσῃ νὰ ἐλαττώσῃ τὴν τιμήν της εἰς ἐπίπεδον χαμηλότερον τοῦ ὁριακοῦ κόστους, πρέπει νὰ σκεφθῇ τὸ γεγονὸς ὅτι τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν ἀπαρχὴν καταστρεπτικοῦ ἀνταγωνισμοῦ, ὅστις θὰ καταλήξῃ καὶ εἰς βάρος της, δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τῆς τιμῆς τῶν ἐπιχειρήσεων θὰ εὑρίσκεται ἄνωθι τοῦ διαφορικοῦ των κόστους.

Εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις, ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος ἐπιχειρήσεώς τινος λειτουργούσης ὑπὸ συνθήκας μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ μέσον κόστος αὐτοῦ, ὅταν τοῦτο περιλαμβάνῃ καὶ τὸ «κανονικὸν μονοπωλιακὸν κέρδος». Ἐὰν αἱ ἐπιχειρήσεις οἰκονομικοῦ τινος τομέως, μὲ τὴν προοπτικὴν τῆς πραγματοποιήσεως τοῦ μεγίστου κέρδους αὐξήσουν τὴν τιμὴν τῶν προϊόντων αὐτῶν εἰς ἐπίπεδον ἀνώτερον τοῦ μέσου κόστους, τότε εἶναι φυσικὸν νὰ ἀναμένωμεν τὴν εἴσοδον νέων ἐπιχειρήσεων εἰς τὴν ἀγοράν, μὲ ἀποτέλεσμα τὴν ἐλάττωσιν τῆς ζητήσεως ἀπὸ ἑκάστην ἐπὶ μέρους ἐπιχείρησιν, ἕως ὅτου ἡ τιμὴ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῶν ἐπιχειρήσεων εἴδους ἐξισωθῇ πάλιν πρὸς τὸ μέσον κόστος τῆς παραγωγῆς του καὶ τἀνάπαλιν.

Ἡ ἔννοια τοῦ μέσου κόστους εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ, διαφέρει ριζικῶς ἀπὸ τὴν γενικῶς ἀποδεδεγμένην ἔννοιαν αὐτοῦ διότι περιλαμβάνει καὶ τὸ κανονικὸν μονοπωλιακὸν κέρδος, δηλαδὴ τὴν ἀνταμοιβὴν τοῦ κεφαλαίου ὑπὸ συνθήκας μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ. Ἡ ἔννοια τοῦ μέσου κόστους ὡς τοιαύτη ἐχρησιμοποιήθη ἀπὸ τὴν J. Robinson καὶ Chamberlin κατὰ πρῶτον, διότι ἀποτελεῖ καὶ τὸν καλύτερον τρόπον διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ σημείου τῆς ἰσορροπίας ὑπὸ συνθήκας μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ.

Κατὰ συνέπειαν ἐὰν ἡ μαθηματικὴ ἔκφρασις τῆς συναρτήσεως τοῦ μέσου κόστους τῆς ἐπιχειρήσεως Α, ἥτις ἀποτελεῖ τὴν βασικὴν συνάρτησιν τῆς μαθηματικῆς ἐπεξεργασίας τοῦ προβλήματος, δίδεται ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν, τότε τὸ ὁλικὸν κόστος διὰ τὴν παραγωγὴν x εἶναι $\Pi(x) = x\Pi m(x)$.

Ὁμοίως ἐὰν ἡ ζήτησις εἶναι $p(x)$ τότε ἡ πρόσοδος εἶναι $R(x) = xp(x)$.

Ἐκ τοῦ μονοπωλιακοῦ στοιχείου, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐπαληθεύεται ἡ ἰσότης

$$\frac{dR(x)}{dx} = \frac{d\Pi(x)}{dx}. \tag{1}$$

Ἐκ τῆς προτεθείσης ἀναλύσεως τοῦ συνδυασμοῦ τοῦ μονοπωλιακοῦ καὶ ἀνταγωνιστικοῦ στοιχείου προκύπτει ὅτι $p(x) = \Pi m(x)$ (2).

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (1) τὰς συναρτήσεις $R(x)$ καὶ $\Pi(x)$ λαμβάνομεν

$$p(x) + \frac{x dp(x)}{dx} = \Pi m(x) + x \frac{d\Pi m(x)}{dx}$$

λόγῳ τῆς (2)
$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{d\Pi m(x)}{dx} \qquad (3)$$

Αἱ συνθῆκαι (2) καὶ (3) δεικνύουν ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ζητήσεως καὶ ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ μέσου κόστους, πρέπει νὰ ἐφάπτωνται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας. Ἐκ τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως προκύπτει ὅτι ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως κλίνει τὰ κυρτὰ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἑπομένως εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου ἰσορροπίας ἡ καμπύλη τοῦ μέσου κόστους πρέπει νὰ κλίνῃ καὶ αὐτὴ τὰ κυρτά της πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x. Ὅθεν ἡ ὕπαρξις ἰσορροπίας ὑπὸ συνθήκας μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ εἶναι δυνατὴ μόνον ὅταν τὸ μέσον κόστος εἶναι φθίνουσα συνάρτησις, δηλαδὴ ὅταν τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς τῆς ἐπιχειρήσεως Α θὰ εἶναι μικρότερον τῆς παραγωγῆς ἥτις θὰ ἔδιδε τὸ ἐλάχιστον μέσον κόστος, ἤτοι τῆς παραγωγῆς τὴν ὁποίαν θὰ ἔφθανε ἡ ἐπιχείρησις Α ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ.

VI. 12. Γενικὴ παρατήρησις

Εἰς τὸ ἕκτον κεφάλαιον ἐξετάζομεν τὴν θέσιν καὶ τὸν ρόλον τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὴν ἀγοράν. Διὰ τὸν σκοπὸν αὐτὸν καὶ ἀναλόγως τῶν ἰδιαιτέρων συνθηκῶν τῶν ἐπικρατουσῶν εἰς τὴν ἀγοράν, διαιροῦμεν τὸ ἕκτον κεφάλαιον εἰς ὡρισμένας κατηγορίας, αἱ βασικώτεραι τῶν ὁποίων εἶναι αἱ κατωτέρω :

1. Ἐλεύθερος ἀνταγωνισμός.
2. Μονοπωλιακὸς ἀνταγωνισμός.
3. Μονοπώλιον καὶ μονοπωλιακαὶ ἐπιχειρήσεις.

Τὸ διμερὲς μονοπώλιον εἶναι οὐσιαστικῶς πρόβλημα δύο μονοπωλίων· ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὑπάγεται εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν μονοπωλιακῶν ἐπιχειρήσεων. Τὸ δυοπώλιον εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἁπλοῦ ὀλιγοπωλίου. Λέγομεν ὅτι ὑπάρχει ἁπλοῦν ὀλιγοπώλιον εἴς τινα ἀγορὰν ὅταν ὀλίγαι ἐπιχειρήσεις ἐλέγχουν τὴν ἀγορὰν ταύτην, ὅταν ἡ πολιτικὴ τῆς τιμῆς τῶν προϊόντων μιᾶς τῶν ἐπιχειρήσεων ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πολιτικὴν τῆς τιμῆς τὴν ὁποίαν ἀκολουθοῦν αἱ ἄλλαι ἐπιχειρήσεις, καὶ ὅταν τὸ ὑπὸ τῶν ἐπιχειρήσεων προσφερόμενον εἰς τὴν ἀγορὰν ἀγαθὸν εἶναι ὁμοιογενές. Ἁπλοῦν ὀλιγοπώλιον δύναται ἐπίσης νὰ ὑπάρξῃ ὅταν εἴς τινα ἀγορὰν ὀλίγαι ἐπιχειρήσεις (π.χ. 2 ἕως 8) προσφέρουν τὸ μεγαλύτερον ποσοστὸν ὁμοιογενοῦς προϊόντος (π.χ. 85 % ἕως 95 %) ἐνῶ πολλαὶ μικραὶ ἐπιχειρήσεις προσφέρουν τὸ ὑπόλοιπον. Προφανῶς, αἱ μικραὶ ἐπιχειρήσεις, ἐὰν ἐπιθυμοῦν νὰ παραμείνουν εἰς τὴν ἀγοράν, εἶναι ἠναγκασμέναι νὰ ἀκολουθήσουν τὴν τιμὴν τῶν μεγάλων ἐπιχειρήσεων. Ἑπομένως, ἡ παρουσία τῶν μικρῶν ἐπιχειρήσεων οὐδόλως ἐπηρεάζει τὴν μονοπωλιακὴν συγκρότησιν τῆς ἀγορᾶς.

Ἄλλη κατηγορία εἶναι ἡ τοῦ διαφοροποιημένου ὀλιγοπωλίου. Τὸ διαφοροποιημένον ὀλιγοπώλιον ἔχει τὰ αὐτὰ χαρακτηριστικὰ ὡς τὰ τοῦ ἁπλοῦ ὀλιγοπωλίου. Ἡ διαφορὰ αὐτοῦ πρὸς τὸ δεύτερον ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ἐπιχειρήσεων προσφερόμενον εἰς τὴν ἀγορὰν προϊὸν δὲν εἶναι ὁμοιογενὲς ἀλλὰ τὸ προϊὸν τῆς μιᾶς δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν ὡς ὑποκατάστατον τοῦ προϊόντος τῆς ἄλλης ἐπιχειρήσεως. Τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τοῦ διαφοροποιημένου ὀλιγοπωλίου εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἀναλύομεν εἰς τὰς σελίδας 189—191. Τοῦτο συμβαίνει διότι τὸ μονοπωλιακὸν στοιχεῖον εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ διαφοροποιημένου ὀλιγοπωλίου ἐπιβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἀνταγωνιστικοῦ.

Συνήθως τὸ ἁπλοῦν καὶ διαφοροποιημένον ὀλιγοπώλιον κατατάσσεται εἰς τὴν κατηγορίαν τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ. Νομίζομεν ὅμως, ὅτι δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις ὅπου τὸ μονοπωλιακὸν στοιχεῖον ἐπιβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἀνταγωνιστικοῦ αἱ δὲ ἐπιχειρήσεις δύνανται νὰ πραγματοποιοῦν τὸ μέγιστον κέρδος, ἡ κατηγορία εἰς ἣν πρέπει νὰ ὑπάγωνται εἶναι ἡ κατηγορία τῶν μονοπωλιακῶν ἐπιχειρήσεων.

VI. 13. Προβλήματα καὶ ἀσκήσεις

Πρόβλημα 1ον) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ δευτέρα συνθήκη τῆς δευτέρας μεθόδου λύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ μονοπωλίου εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν δευτέραν συνθήκην τῆς πρώτης μεθόδου.

Πρόβλημα 2ον) Νὰ ἐξετασθῇ τὸ πρόβλημα τοῦ μονοπωλίου ὅταν ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους εἶναι τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ἡ δὲ συνάρτησις τῆς ζητήσεως εἶναι γραμμική. Δόσατε ἓν ἀριθμητικὸν παράδειγμα τῆς τοιαύτης περιπτώσεως.

Πρόβλημα 3ον) Νὰ ἐξετασθῇ τὸ πρόβλημα τοῦ μονοπωλίου ὅταν αἱ συναρτήσεις τοῦ κόστους καὶ τῆς ζητήσεως εἶναι τυχοῦσαι καὶ ἐκ ταυτότητος ἴσαι.

Πρόβλημα 4ον) Νὰ εὑρεθοῦν ἡ παραγωγὴ x καὶ ἡ τιμὴ πωλήσεως τοῦ ἀγαθοῦ δοθέντος μονοπωλίου, ὅταν ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως εἶναι $p = \frac{x-6}{\alpha}$ καὶ ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους $\Pi(x) = Ax^2+Bx+\Gamma$.

Πρόβλημα 5ον) Εἶναι ἐνδεχόμενον ὅπως δοθέν τι κρατικὸν μονοπώλιον μὴ ἐπιδιώκῃ τὴν μεγίστην πρόσοδον, ἀλλ' ὅπως λειτουργῇ ἐπὶ τῇ βάσει ὡρισμένων ἄλλων κριτηρίων. Οὕτως, ἂς θεωρήσωμεν ὅτι τὸ μονοπώλιον τοῦ προβλήματος 4 ἐπιδιώκει ὄχι τὸ μέγιστον κέρδος ἀλλὰ τὴν παραγωγὴν ἥτις καθιστᾷ μεγίστην τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

$$q(x) = R(x) + \lambda^2 x$$

ὅπου λ εἶναι σταθερὸς θετικὸς ἀριθμός. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς εὑρίσκομεν

$$x = \frac{B + (B - \lambda^2)}{2 - 2A\alpha}, \quad p = \frac{\beta - 2A\alpha\beta - (B-\lambda^2)\,\alpha}{-2\alpha\,(1 - A\alpha)}$$

Νὰ γίνῃ σύγκρισις τῶν τιμῶν αὐτῶν μὲ τὰς τιμὰς τοῦ προβλήματος 4 καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μὲν παραγωγὴ πρέπει νὰ αὐξηθῇ κατὰ τὴν θετικὴν ποσότητα $-\frac{\lambda^2\alpha}{2-2A\alpha}$ ἡ δὲ τιμὴ νὰ ἐλαττωθῇ κατὰ τὴν θετικὴν ποσότητα $\frac{\lambda^2}{2-2A\alpha}$

Ἐπίσης, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κέρδος R(x) διὰ τὰς νέας τιμὰς τῶν x, p εἶναι μικρότερον κατὰ $\frac{\lambda^4\alpha}{4(1-A\alpha)}$ ἀπὸ τὸ κέρδος τοῦ ἰδιωτικοῦ μονοπωλίου. Τέλος δείξατε ὅτι τὸ κέρδος, τότε μόνον θὰ ἐξαφανισθῇ ὅταν

$$\lambda^4 \geqslant \frac{(6 + B\alpha)^2}{\alpha^2} - \frac{4\Gamma\,(1 - A\alpha)}{-\alpha}.$$

Πρόβλημα 6ον) Ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως μονοπωλίου τινὸς εἶναι

$x = \alpha p - \beta$. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ὁλικῆς προσόδου εἰς τὸ διάγραμμα μὲ τὴν συνάρτησιν τοῦ κόστους, (ὅταν ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους εἶναι γενική), καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ παραγωγὴ τοῦ μονοπωλίου διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ μέγιστον κέρδος. Νὰ σημειωθῇ εἰς τὸ διάγραμμα τὸ μῆκος τῆς καθαρᾶς προσόδου, ἡ παραγομένη ποσότης καὶ ἡ τιμή.

Πρόβλημα 7ον) Ἡ συνάρτησις ζητήσεως εἰς τὴν ἀγορὰν δυοπωλίου τινὸς εἶναι γραμμική. Αἱ συναρτήσεις τοῦ κόστους τῶν ἐπιχειρήσεων εἶναι τριώνυμα. Ἐὰν αἱ εἰκαστικαὶ διαφορικαὶ μεταβολαὶ εἶναι μηδενικαί, νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ καμπύλαι τῆς ἀντιδράσεως εἶναι εὐθεῖαι. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις ἰσορροπίας τοῦ δυοπωλίου καὶ ἡ παραγωγὴ ἑκάστης τῶν ἐπιχειρήσεων.

Πρόβλημα 8ον) Νὰ ἐξετασθῇ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ὅταν αἱ συναρτήσεις τοῦ κόστους τῶν ἐπιχειρήσεων συμπίπτουν.

Πρόβλημα 9ον) Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα τῆς ἰσορροπίας καὶ σταθερότητος τοῦ δυοπωλίου ὅταν ἡ εἰκαστικὴ διαφορικὴ μεταβολὴ τῆς ἐπιχειρήσεως Α εἶναι μηδενική, ἐνῶ ἡ εἰκαστικὴ διαφορικὴ μεταβολὴ τῆς ἐπιχειρήσεως Β εἶναι $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \alpha(x_1)$.

Πρόβλημα 10ον) Ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως μονοπωλίου τινὸς εἶναι $p = \dfrac{(1-\mu)x - \beta}{\alpha}$ ἡ δὲ συνάρτησις τοῦ κόστους $\Pi(x) = Ax^2 + Bx + \Gamma$.

Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ περιπτώσεις $\mu > 1$ καὶ $\mu < 1$ ἰδιαιτέρως ἑκάστη καὶ νὰ γίνῃ σύγκρισις τῶν γραφικῶν παραστάσεων τοῦ κόστους καὶ τῆς ὁλικῆς προσόδου.

Πρόβλημα 11ον) Ἐὰν τὸ μονοπώλιον τοῦ προβλήματος 4 ἔχῃ σταθερὰ ἔξοδα γ τότε ἡ μὲν συνάρτησις τοῦ κόστους εἶναι $\Pi(x) = Ax^2 + Bx + \Gamma + \gamma$ ἡ δὲ συνάρτησις τῆς ζητήσεως ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μεταβάλλεται εἰς τὴν $p = \dfrac{x - \beta - \lambda\gamma}{\alpha}$ ὅπου $\lambda > 0$. Δείξατε ὅτι ἐὰν διὰ τῶν ἐξόδων διαφημίσεως γ ἡ καθαρὰ πρόσοδος τοῦ μονοπωλίου αὐξάνεται, τότε πᾶσα νέα αὔξησις τοῦ γ συνεπάγεται περαιτέρω αὔξησιν τῆς καθαρᾶς προσόδου τοῦ μονοπωλίου.

Πρόβλημα 12ον) Ὑποθέσωμεν ὅτι μονοπώλιόν τι πωλεῖ τὸ ἐμπόρευμά του μέσῳ ἀντιπροσώπων καὶ περιοδευόντων πωλητῶν, οἵτινες κατὰ συνέπειαν προσθέτουν εἰς τὴν συνάρτησιν τοῦ κόστους τοῦ μονοπωλίου $\Pi(x) = Ax^2 + Bx + \Gamma$ τὸ ποσὸν η καὶ εἰς τὴν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως $x = \alpha p + \beta$ τὸ ποσὸν ξ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάλογον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀντιπροσώπων καὶ περιοδευόντων πωλητῶν, δηλαδὴ $\xi = \lambda\nu$ ὅπου ν εἶναι ὁ ἀριθμός των.

Δυνάμεθα νὰ προβάλωμεν διαφόρους ὑποθέσεις σχετικῶς μὲ τοὺς ν καὶ η: Π.χ. ὑποθέτομεν ὅτι τὸ ν εἶναι σταθερὸν ἢ ὅτι εἶναι ἀνάλογον τοῦ x ($\lambda\nu = \mu x$), ἢ ὅτι εἶναι μία γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ x ($\lambda\nu = \mu x + \gamma$). Ὁμοίως διὰ τὸ η ὑποθέτομεν ὅτι ἢ ἐκπροσωπεῖ κανονικοὺς μισθοὺς ($\eta = \delta\nu$) ἢ προμήθειαν ($\eta = \varepsilon x p$) ἢ ὅτι εἶναι συνδυασμὸς καὶ τῶν δύο. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ p καὶ ἡ παραγωγὴ x διὰ τὴν ὁποίαν τὸ μονοπώλιον ἔχει τὴν μεγίστην καθαρὰν πρόσοδον ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας.

Πρόβλημα 13ον) Ἐὰν τὸ μονοπώλιον τοῦ προβλήματος 4 εἶναι κρατικόν, τὸ ὁποῖον παράγει ἀρκετὰ διὰ νὰ ἱκανοποιῇ πάντοτε τὴν ὑπάρχουσαν διὰ τὸ προϊόν του ζήτησιν εἰς τὴν ἀγορὰν χωρὶς νὰ ἐπιδιώκῃ οἱονδήποτε κέρδος (ὁλικὸν κόστος = ὁλικὴ πρόσοδος), νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ πωλήσεως τοῦ προϊόντος τοῦ μονοπωλίου τούτου καὶ νὰ συγκριθῇ αὕτη μὲ ἐκείνην τοῦ μονοπωλίου τοῦ προβλήματος 4.

Πρόβλημα 14ον) Αἱ ἐπιχειρήσεις Α καὶ Β δυοπωλίου τινὸς κατασκευάζουν ὁμοιογενεῖς πολυελαίους ἐκκλησιῶν. Τὸ ὁλικὸν κόστος ἑκάστης ἐπιχειρήσεως εἶναι $\Pi(x) = \frac{1}{35} x^2 + 4x + 140$. Ὅταν ἡ τιμὴ ἑκάστου πολυελαίου εἶναι p ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως $p = 105 - 4p$.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πολυελαίων κατὰ προσέγγισιν, ὅταν τὸ δυοπώλιον εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας του.

Πρόβλημα 15ον) Ἐὰν τὸ ἀνωτέρω δυοπώλιον θεωρηθῇ ὡς μονοπώλιον, ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ παραγωγὴ διὰ τὴν μεγίστην πρόσοδον τοῦ μονοπωλίου; Διατί ἡ τιμὴ αὐτὴ διαφέρει ἀπὸ τὴν τῆς περιπτώσεως τοῦ δυοπωλίου;

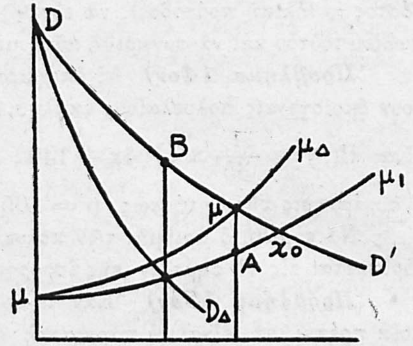
Πρόβλημα 16ον) Ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως τοῦ ἀγαθοῦ Χ εἰς τὴν ἀγορὰν εἶναι $\rho = 6 - \alpha x$. Τὸ μονοπώλιον τὸ ὁποῖον παράγει τὸ ἀγαθὸν Χ ἔχει μέσον κόστος $(\lambda x + \mu)$ ὅταν ἡ παραγωγὴ εἶναι x. Τὸ μονοπώλιον πωλεῖ τὸ προϊόν του εἰς ἕνα μόνον ἔμπορον (μονοπώλιον Β τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου) εἰς τὴν τιμὴν π, ἥτις εἶναι ἡ τιμὴ διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ μεγίστου κέρδους ὑπὸ τοῦ ἐμπόρου, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος εἰς τὴν ἀγορὰν εἶναι ρ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παραγωγὴ τοῦ ἀγαθοῦ ἡ πωληθεῖσα εἰς τὴν ἀγορὰν εἶναι $x = \frac{6 - \mu}{2(\lambda + 2\alpha)}$ καὶ ὅτι $\pi = \beta - 2\alpha x$.

Πρόβλημα 17ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πωλουμένη ποσότης εἰς τὴν ἀγορὰν ἐὰν τὸ μονοπώλιον Α τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος πωλῇ τὸ προϊόν του κατ᾽ εὐθεῖαν εἰς τὴν ἀγορὰν ἄνευ τῆς μεσολαβήσεως τοῦ ἐμπόρου καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ διμερὲς μονοπώλιον τοῦ προβλήματος 16 περιορίζει τὴν παραγωγὴν καὶ αὐξάνει τὴν τιμήν.

Πρόβλημα 18ον) Ἡ ὁλικὴ ζήτησις διὰ προϊόν τι δοθέντος δυοπωλίου εἴς τινα ἀγορὰν δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $p = f(x)$ $(x = x_1 + x_2)$. Ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους τῆς ἐπιχειρήσεως Α εἶναι $\Pi_1(x)$ καὶ τῆς ἐπιχειρήσεως Β εἶναι $\Pi_2(x)$. Ὑποτιθεμένου ὅτι μία τῶν ἐπιχειρήσεων ἐπί τινα χρονικὴν περίοδον δὲν διαθέτει τὸ ὑπ᾽ αὐτῆς παραγόμενον προϊὸν εἰς τὴν ἀγοράν, τότε ἡ ὅλη ζήτησις ἐν τῇ ἀγορᾷ διὰ τὸ προϊὸν τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ ποσὸν τῆς ζητήσεως τῆς ἄλλης ἐπιχειρήσεως. Εἰς τὴν εἰδικὴν αὐτὴν περίπτωσιν δυνάμεθα, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω δεδομένων, νὰ προσδιορίσωμεν τὴν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως δι᾽ ἑκάστην τῶν ἐπιχειρήσεων;

Πρόβλημα 19ον) Ἡ ἔννοια τῶν ὁριακῶν σημείων καθορίζεται ὡς ἀκολούθως: Τὸ ὁριακὸν σημεῖον τοῦ μονοπωλίου Β κεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης DD′ ἄνωθι τοῦ x_0, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς ἀναλύσεως (VI. 11) τὸ δὲ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ μονοπώλιον Β ἔχει τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος ἐκ τοῦ συνολικοῦ κέρδους τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου.

Ὁμοίως τὸ ὁριακὸν σημεῖον τοῦ μονοπωλίου Α κεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης μμ′ κάτωθι τοῦ σημείου p καὶ εἶναι τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ μονοπώλιον Α ἔχει τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος ἐκ τοῦ συνολικοῦ κέρδους τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὁριακὸν σημεῖον τοῦ μονοπωλίου Β εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς καμπύλης DD΄ καὶ τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν κάθετον ἄξονα τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῆς μμ΄ καὶ τῆς διαφορικῆς καμπύλης τῆς DD΄. Ὁμοίως νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ὁριακὸν σημεῖον τοῦ μονοπωλίου Α εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς μμ΄ καὶ τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν κάθετον ἄξονα τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῆς DD΄ καὶ τῆς διαφορικῆς καμπύλης τῆς μμ΄.



Σχ. 54

Πρόβλημα 20ον) Νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα τοῦ διμεροῦς μονοπωλίου ὅταν ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως τοῦ μονοπωλίου Β, $f(x) = \alpha - \lambda_1 x$ καὶ ἡ συνάρτησις τοῦ μέσου κόστους τοῦ μονοπωλίου Α, $\varphi(x) = \beta + \lambda_2^x$. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν καθαρῶν προσόδων τῶν δύο μονοπωλίων εἶναι μεγαλύτερον εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν.

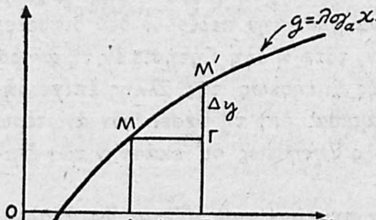
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΚΛΙΜΑΚΕΣ — ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

VII. 1. Παράγωγοι τῶν λογαριθμικῶν καὶ ἐκθετικῶν συναρτήσεων. Λογαριθμικὴ παράγωγος

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\lambda o\gamma_\alpha u$. (Τύπος 9). Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως $\lambda o\gamma_\alpha u$ ὅταν u εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x, εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως $\lambda o\gamma_\alpha x$ ἀκολουθοῦντες τὴν γενικὴν πορείαν (V, 1).



Σχ. 55

Ἔστω **x** ἡ ἀρχικὴ τιμὴ καὶ Δx ἡ αὔξησις (Σχ. 51ον). Τότε

$$\Delta y = \lambda o\gamma_\alpha (x + \Delta x) - \lambda o\gamma_\alpha x$$

$$= \lambda o\gamma_\alpha \frac{(x+\Delta x)}{x} = \lambda o\gamma_\alpha \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

καὶ $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \lambda o\gamma_\alpha \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὅριον τῆς παραστάσεως αὐτῆς ὅταν $\Delta x \to 0$ πολλαπλασιάζομεν καὶ διαιροῦμεν τὸ δεύτερον μέλος μὲ x ἤτοι

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \lambda o\gamma_\alpha \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \lambda o\gamma_\alpha \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

Ὅταν τὸ $\Delta x \to 0$ τὸ ὅριον τῆς παραστάσεως $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$ τείνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν e διότι εἶναι τῆς μορφῆς $(1+\upsilon)^{1/\upsilon}$ ὅταν τὸ $\upsilon \to 0$. Ἑπομένως

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x} \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ}} \lambda o\gamma_\alpha \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x}\lambda o\gamma_\alpha e .$$

Ἐὰν λάβωμεν τώρα τὴν συνάρτησιν $y=\lambda o\gamma_\alpha u$ ὅπου u εἶναι μία συνάρτησις τοῦ x καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (5.3 7) εὑρίσκομεν

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\lambda o\gamma_\alpha e \frac{du}{dx} \qquad (9).$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τῶν φυσικῶν λογαρίθμων $\alpha = e$ καὶ $\lambda o\gamma_e e = 1$.

ἄρα
$$\frac{d}{dx}\lambda\gamma\, u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}. \qquad (9')$$

Ἡ παράγωγος τοῦ φυσικοῦ λογαρίθμου δοθείσης τινὸς συναρτήσεως ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως διαιρουμένης διὰ τῆς συναρτήσεως (ἢ μὲ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τῆς συναρτήσεως).

Ἐὰν $\alpha=10$, δηλαδὴ ἐὰν ἔχωμεν δεκαδικοὺς λογαρίθμους

$$\frac{d}{dx}\lambda o\gamma\, u = \frac{1}{u}\lambda o\gamma_{10} e \frac{du}{dx} \qquad (9'').$$

Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὸν παράγοντα $\lambda o\gamma\, e = 0{,}4342$ χρησιμοποιοῦμεν φυσικοὺς λογαρίθμους εἰς τὸν διαφορικὸν καὶ ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν. Ἀπεναντίας, εἰς τὰς περιπτώσεις λογιστικῶν προβλημάτων, χρησιμοποιοῦμεν τοὺς δεκαδικούς, ἐπειδὴ ἔχομεν τὴν αὐτὴν βάσιν διὰ τοὺς λογαρίθμους καθὼς καὶ διὰ τὸ ἀριθμητικὸν σύστημα. Ἡ κοινὴ αὐτὴ βάσις ἔχει ὡς συνέπειαν εὐκόλους κανόνας διὰ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ. Ἐπίσης ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἀριθμοῦ 10 ἡ εὕρεσις τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου εἶναι ἁπλουστέρα.

Παράδειγμα 1ον)

$$\frac{d}{dx}\lambda\gamma\, x = \frac{1}{x}\lambda\gamma\, e = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\lambda o\gamma\, x = \frac{1}{x}\lambda o\gamma\, e = 0{,}4342\,\frac{1}{x}.$$

Παράδειγμα 2ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς $y=\lambda\gamma\,(x^2+2)$ ἐφαρμοζομένου τοῦ τύπου (9').

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\lambda\gamma\,(x^2+2)=\frac{1}{x^2+2}\frac{d}{dx}(x^2+2)=\frac{2x}{x^2+2}.$$

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως α^u. (Τύπος 10).

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως α^u εὑρίσκεται ἐκ τῆς παραγώγου τῆς $\lambda o\gamma_\alpha u$ διὰ τῆς χρήσεως τοῦ τύπου (8) ὡς ἀκολούθως :

Ἐὰν $y = \alpha^u$ τότε $u = \lambda o\gamma_\alpha\, y$.

Λαμβάνοντες τὰς παραγώγους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ὡς πρὸς y εὑρίσκομεν,

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{y}\lambda o\gamma_\alpha e \frac{dy}{dy} = \frac{1}{y}\lambda o\gamma_\alpha e\,.$$

Χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον (8) ἔχομεν : $\dfrac{dy}{du} = y\,\dfrac{1}{\lambda o\gamma_\alpha e} = y\lambda\gamma\alpha = \alpha^u\,\lambda\gamma\,\alpha.$

Ἑπομένως, ἐὰν u εἶναι συνάρτησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x

$$\frac{d}{dx}\alpha^u = \alpha^u\,\lambda\gamma\,\alpha\,\frac{du}{dx} \qquad (10).$$

Ἡ παράγωγος δυνάμεως μὲ σταθερὰν βάσιν καὶ μεταβλητὸν ἐκθέτην ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ φυσικοῦ λογαρίθμου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν δύναμιν ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ ἐκθέτου. Ἐὰν $\alpha = e$ ἔχομεν

$$\frac{de^u}{dx} = e^u\,\frac{du}{dx} \qquad (10')$$

καὶ ἐὰν $u = x$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \qquad (10'')$$

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ τύπου (5) τῆς παραγράφου (V. 2) ἐγένετο μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὸ ν εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς ἀκέραιος. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ τύπου δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ ν γίνεται ὡς ἀκολούθως :

Ἔστω $\quad y = u^\nu \qquad u > 0\,.$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους (φυσικοὺς) ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν

$$\lambda\gamma\, y = \nu\,\lambda\gamma\, u\,.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὰς παραγώγους τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \nu\,\frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}$$

ἢ

$$\frac{dy}{dx} = \nu\,\frac{y}{u}\,\frac{du}{dx}$$

ἢ

$$\frac{dy}{dx} = \nu\,\frac{u^\nu}{u}\,\frac{du}{dx} = \nu u^{\nu-1}\,\frac{du}{dx}$$

ἐπειδὴ $\quad y = u^\nu$.

Παράδειγμα 1ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως :

$$y = \alpha^{5x^2-3x+2}$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (10) εὑρίσκομεν :

$$\frac{dy}{dx} = \alpha^{5x^2-3x+2}\,\lambda\gamma\,\alpha\,\frac{d^{(5x^2-3x+2)}}{dx}$$

ἢ $$\frac{dy}{dx} = (10x - 3)\ \lambda\gamma\, \alpha \,.\, \alpha^{5x^2-3x+2}.$$

Παράδειγμα 2ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως :

$$y = \beta e^{\alpha x^2+\gamma}.$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (10′) εὑρίσκομεν :

$$\frac{dy}{dx} = \beta\, e^{\alpha x^2+\gamma} \frac{d}{dx}^{(\alpha x^2+\gamma)}$$

ἢ $$\frac{dy}{dx} = 2\alpha \beta\, x\, e^{\alpha x^2+\gamma}.$$

Ἡ παράγωγος τῆς γενικῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως u^{υ}. Τύπος 11.

Ἔστω $$y = u^{\upsilon} \qquad u > 0\,.$$

Λαμβάνοντες τοὺς φυσικοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν εὑρίσκομεν :

$$\lambda\gamma\, y = \upsilon\, \lambda\gamma\, u\,.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὰς παραγώγους τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \upsilon\,\frac{1}{u}\,\frac{du}{dx} = \lambda\gamma\, u\,\frac{d\upsilon}{dx}$$

ἢ $$\frac{dy}{dx} = u^{\upsilon}\left[\frac{\upsilon}{u}\,\frac{du}{dx} + \lambda\gamma\, u\,\frac{d\upsilon}{dx}\right]$$

καὶ $$\frac{dy}{dx} = \upsilon u^{\upsilon-1}\,\frac{du}{dx} + \lambda\gamma\, u\,.\, u^{\upsilon}\,\frac{d\upsilon}{dx} \qquad (11).$$

Ἡ παράγωγος μιᾶς δυνάμεως μὲ μεταβλητὴν βάσιν καὶ ἐκθέτην ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραγώγων ὅταν πρῶτον θεωρήσωμεν τὸν ἐκθέτην ὡς σταθερὸν καὶ δεύτερον τὴν βάσιν ὡς σταθεράν, ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους 5 καὶ 10.

Παράδειγμα 1ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως : $y = x^{x+1}$.
Δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου 11 ὅταν $u = x$ καὶ $\upsilon = x + 1$ εὑρίσκομεν

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)\, x^{x}\,\frac{d}{dx}(x) + \lambda\gamma\ x\,.\, x^{x+1}\,\frac{d}{dx}(x+1)$$

ἢ $$\frac{dy}{dx} = (x+1)\, x^{x} + x^{x+1}\,\lambda o\gamma\, x = x^{x}\,(x\,\lambda\gamma\, x + x + 1)\,.$$

Παράδειγμα 2ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = x^{e^x}$.
Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x}\, x^{e^x-1}\,\frac{d}{dx}(x) + \lambda\gamma\,.\, x^{e^x}\,\frac{d}{dx}(e^{x}) = e^{x}\, x^{e^x-1} + \lambda\gamma\, x\,.\, x^{e^x}\, e^{x}$$

καὶ $$\frac{dy}{dx} = e^{x}\, x^{e^x}\,(1/x + \lambda\gamma\, x)\,.$$

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἡ εὕρεσις τῆς παραγώγου λογαριθμικῆς τινος συναρτήσεως καθίσταται ἁπλουστέρα ὅταν χρησιμοποιοῦμεν πρῶτον τὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων (III. 3).

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως

$$y = \lambda\gamma \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

Γράφομεν τὴν συνάρτησιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $y = {}^1/_2\, [\, \lambda\gamma\, (1+x^2) - \lambda\gamma\, (1-x^2)\,]$

καὶ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\,\lambda\gamma\,(1+x^2) - \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\,\lambda\gamma\,(1-x^2) \qquad (\chi\rho\eta\sigma.\ 3)$$

ἢ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{2}\,\frac{-2x}{1-x^2} \qquad (\chi\rho\eta\sigma.\ 1)$$

καὶ $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1-x^4}.$$

Ἡ εὕρεσις τῆς παραγώγου μιᾶς ἐκθετικῆς συναρτήσεως τῆς ὁποίας ἡ βάσις καὶ ὁ ἐκθέτης εἶναι μεταβληταὶ εἶναι ἁπλουστέρα ὅταν λάβωμεν πρῶτον τοὺς φυσικοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καὶ κατόπιν τὰς παραγώγους.

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = x^x$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν

$$\lambda\gamma y = x\lambda\gamma x$$

καὶ $$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \lambda\gamma x + x\,\frac{1}{x}\,1 + \lambda\gamma x \qquad (\chi\rho\eta\sigma.\ 10)$$

ἢ $$\frac{dy}{dx} = x^x\,(1 + \lambda\gamma x).$$

Ἐπίσης ἐὰν συνάρτησίς τις εἶναι τὸ γινόμενον παραγόντων ἐνδείκνυται νὰ λάβωμεν πρῶτον τοὺς λογαρίθμους καὶ κατόπιν τὰς παραγώγους.

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως

$$y = \sqrt{\frac{x\,(x-1)}{(x+1)\,(x+2)}}$$

$$\lambda\gamma x = \frac{1}{2}\,[\,\lambda\gamma x + \lambda\gamma\,(x-1) - \lambda\gamma\,(x+1) - \lambda\gamma\,(x+2)\,] \qquad (\mathrm{III}.\ 3)$$

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right] \qquad (\chi\rho\eta\sigma.\ 10)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 5x - 2}{x^{1/2}\,(x-1)^{1/2}\,(x+1)^{3/2}\,(x+2)^{3/2}}$$

Γενικώτερον, ἐὰν $y = f(x)$ εἶναι μονότιμος συνάρτησις τοῦ x δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (10) εὑρίσκομεν :

$$\frac{d}{dx}\,(\lambda\gamma\, y) = \frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx}.$$

Τὴν παράγωγον αὐτὴν ὀνομάζομεν ***λογαριθμικὴν παράγωγον*** τῆς συναρτήσεως y, ὡς δ' ἀποδεικνύεται εὐκόλως, αὕτη εἶναι τὸ ὅριον τῆς παραστάσεως :

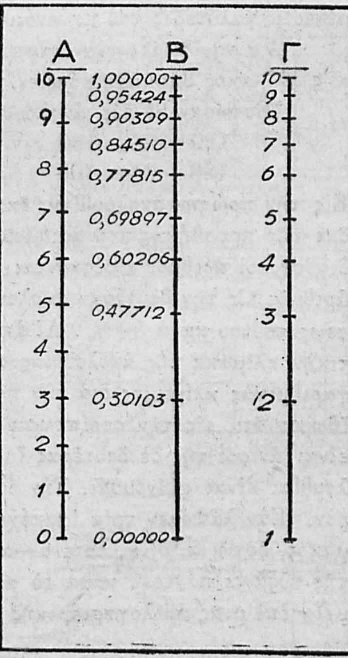
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x\, f(x)}$$

ὅταν $\Delta x \rightarrow 0$.

VII. 2. Λογαριθμικαὶ κλίμακες. Λογαριθμικὰ καὶ ἡμιλογαριθμικὰ διαγράμματα

Εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους ἐχρησιμοποιήσαμεν ἀριθμητικὰς κλίμακας διὰ τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν συναρτήσεων. Δηλαδή, βασισθέντες ἐπὶ ἐκλεγείσης μονάδος μετρήσεως, ἐλάβομεν ἰσαπέχοντα σημεῖα ἐφ' ἑκάστου τῶν ἀξόνων ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων. Αἱ γραφικαὶ αὐταὶ παραστάσεις δεικνύουν τὴν «ἀπόλυτον» μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως y ὅταν μεταβάλλεται τὸ x. Πολλάκις ὅμως εἰς οἰκονομικοστατιστικὰ προβλήματα ἐνδιαφερόμεθα περισσότερον διὰ τὴν «ἀναλογικὴν» μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως καὶ ὀλιγώτερον διὰ τὴν «ἀπόλυτον». Τὴν «ἀναλογικὴν» μεταβολὴν συνήθως ὑπολογίζομεν εἰς ποσοστὰ «ἐπὶ τοῖς ἑκατόν», δηλαδὴ ζητοῦμεν τὴν «ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν» αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν τῆς συναρτήσεως ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ 100 μονάδας. Αἱ μέχρι τοῦδε χρησιμοποιηθεῖσαι ἀριθμητικαὶ κλίμακες εἶναι ἀνεπαρκεῖς διὰ τὴν ἀπ' εὐθείας εὕρεσιν τῶν ἀναλογικῶν μεταβολῶν τῶν συναρτήσεων. Ὡς ἐκ τούτου χρησιμοποιοῦμεν τὰς λεγομένας λογαριθμικὰς κλίμακας καὶ τὰ λογαριθμικὰ καὶ ἡμιλογαριθμικὰ διαγράμματα. Ἐκ τῶν διαγραμμάτων αὐτῶν, τὰ μᾶλλον ἐνδιαφέροντα εἶναι τὰ ἡμιλογαριθμικά, τὰ ὁποῖα θὰ μελετήσωμεν εἰς τὴν παροῦσαν καὶ ἑπομένην παράγραφον. Χάριν εὐκολίας, ὄχι ὅμως κατ' ἀνάγκην, χρησιμοποιοῦμεν δεκαδικοὺς λογαρίθμους.

Πίναξ 11



Διὰ νὰ ὁρίσωμεν μίαν λογαριθμικὴν κλίμακα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων γνωρίζομεν ὅτι ὁ δεκαδικὸς λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως εἰς τὸν ὁποῖον ὑψούμενος ὁ 10 δίδει τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Ἤτοι, ὁ λογάριθμος τοῦ 1 εἶναι 0, ὁ λογάριθμος τοῦ 10 εἶναι 1, τοῦ 100 εἶναι 2, κ.ο.κ. Τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10 εἶναι 0, τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 10 ἕως 100 εἶναι 1, τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 100 ἕως 1.000 εἶναι 2, κ.τ.λ.

Διὰ τὴν κατασκευὴν λογαριθμικῆς κλίμακος ἐπί τινος ἄξονος λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα ἡ ὁποία διαιρεῖ τὸν ἄξονα τοῦτον εἰς δέκα ἴσα μέρη (Πίναξ 11, ἄξων A) καὶ τοποθετοῦμεν ἐπ' αὐτοῦ τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 ἕως 10. Κατόπιν, ἐπὶ δευτέρου ἄξονος (Β) τοποθετοῦμεν τοὺς ἀντιστοίχους λογαρίθμους πρὸς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 1 ἕως 10 τοῦ Α ἄξονος, ἀκολουθοῦντες ἀριθμητικὴν κλίμακα· δηλαδή, τοποθετοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 0,30103, ὅστις εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 2, εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε τὸ ὁριζόμενον ἐπὶ τοῦ Β ἄξονος τμῆμα νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ 0,30103 τοῦ μήκους τοῦ ἐκπροσωποῦντος τὴν μονάδα. Ὁμοίως πράττομεν, τοποθετοῦντες τὸν ἀριθμὸν 0,47712, ὅστις εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ 3, εἰς τὸ ὕψος 0,47712 ἀπὸ τοῦ 0, ἐπὶ τοῦ ἄξονος Β, καὶ προχωροῦμεν καθ' ὅμοιον τρόπον τοποθετοῦντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10 ἐπὶ τοῦ ἄξονος Β. Ἐν συνεχείᾳ σημειώνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος Γ, εἰς γεωμετρικῶς ἀντίστοιχον θέσιν, ἀντὶ τῶν λογαρίθμων, αὐτοὺς τούτους τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 ἕως 10. Οὕτως, ἐπὶ τοῦ τρίτου ἄξονος Γ, ἐπετεύχθη ἡ ζητουμένη λογαριθμικὴ κλῖμαξ.

Ἐὰν θέλωμεν λεπτομερεστέραν λογαριθμικὴν κλίμακα, λαμβάνομεν καὶ ἐνδιαμέσους ἀριθμούς. Εἰς τὰς λογαριθμικὰς κλίμακας, τὸ μηδέν, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν ἀρχὴν διὰ τὰς ἀριθμητικὰς κλίμακας, ἐξαφανίζεται. Εἰς τὸν ἄξονα Β ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐτοποθετήσαμεν τοὺς λογαρίθμους, ὁ λογάριθμος 0,00000 ἐτοποθετήθη εἰς τὴν ἀρχήν· ἀλλὰ κάθε ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς τὴν δύναμιν αὐτὴν δίδει τὴν μονάδα. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον, εἰς τὸν τρίτον ἄξονα Γ, εἰς τὸν ὁποῖον ἐπανερχόμεθα μὲ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, ὁ ἀριθμὸς ἓν εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχήν. Γενικῶς, εἷς ἀριθμὸς ἢ μία ποσότης ἡ ὁποία ἐλαττοῦται κατὰ ἕνα σταθερὸν λόγον ὡς πρὸς τὴν προηγουμένην τιμήν της, τείνει νὰ γίνῃ ἀριθμὸς πολὺ μικρὸς ἀλλὰ πάντοτε παραμένει μεγαλύτερος τοῦ μηδενός.

Διὰ νὰ ἴδωμεν τὴν διαφορὰν μεταξὺ μιᾶς ἀριθμητικῆς καὶ μιᾶς λογαριθμικῆς κλίμακος θὰ παραθέσωμεν τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα.

Ἔστωσαν αἱ δύο ἀκολουθίαι :

120	180	240	300	360	. . .
120	100	270	405	602,5	. . .

Εἰς τὴν πρώτην ἀκολουθίαν, ἕκαστος ἀριθμὸς προκύπτει ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθήκης τοῦ ἀριθμοῦ 60. Ἑπομένως, εἰς μίαν ἀριθμητικὴν κλίμακα, οἱ διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ εὑρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπ' ἀλλήλων. Ἕκαστος ἀριθμὸς εἰς τὴν δευτέραν ἀκολουθίαν προκύπτει ἐκ τοῦ προηγουμένου του δι' αὐξήσεως τούτου κατὰ 50 %. Αἱ ἀποστάσεις δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἰς μίαν ἀριθμητικὴν κλίμακα τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς εἶναι ἄνισοι. Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν ἡμιλογαριθμικὰς κλίμακας διὰ τὴν παράστασιν τῶν δύο ἀκολουθιῶν εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τῆς μὲν πρώτης ἀκολουθίας αἱ ἀποστάσεις εἶναι ἄνισοι τῆς δὲ δευτέρας ἴσαι. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει ἀκόμη καὶ ὅταν αἱ ἀκολουθίαι εἶναι φθίνουσαι. Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δυνάμεθα νὰ δείξωμεν θεωρητικώτερον. Ἐὰν λάβωμεν τρία ἰσαπέχοντα μεταξύ των σημεῖα ἐπὶ μιᾶς ἀριθμητικῆς κλίμακος, ἔστω α, β, γ, τότε $\beta - \alpha = \gamma - \beta$, ἡ δ' ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς αὐξάνει πάντοτε κατὰ τὸ αὐτὸ ποσόν. Ἐὰν λάβωμεν τὰ τρία ἰσαπέχοντα σημεῖα ἐπὶ μιᾶς ἡμιλογαριθμικῆς κλίμακος ἡ ἰδιότης αὐτὴ συνεπάγεται τὴν ἰσότητα :

$$\text{λογ}\,\beta - \text{λογ}\,\alpha = \text{λογ}\,\gamma - \text{λογ}\,\beta \quad \text{ἢ} \quad \text{λογ}\,\frac{\beta}{\alpha} = \text{λογ}\,\frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$

ἡ δ' ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς αὐξάνεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογικὴν ποσότητα.

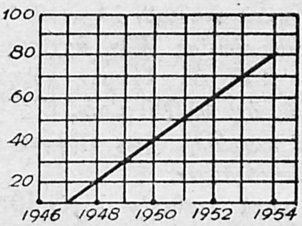
Ὁριζομένων εἰς σύστημα ἀξόνων, ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος Ox μιᾶς ἀριθμητικῆς κλίμακος ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος Oy μιᾶς λογαριθμικῆς, τὸ διάγραμμα τὸ ὁποῖον σχηματίζεται εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ ὀνομάζεται ***ἡμιλογαριθμικόν***. Ἐὰν ὁρίσωμεν ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν ἀξόνων λογαριθμικὰς κλίμακας, τὸ σχηματιζόμενον τότε διάγραμμα ὀνομάζεται ***λογαριθμικόν***.

Τοποθετουμένων τῶν αὐτῶν δεδομένων πρῶτον εἰς ἓν ἀριθμητικὸν διάγραμμα καὶ κατόπιν εἰς ἓν ἡμιλογαριθμικόν, θέλουν προκύψει δύο διαγράμματα, ἔχοντα τελείως διαφορετικὸν σχῆμα, λόγῳ τῶν διαφορετικῶν ἰδιοτήτων τῶν κλιμάκων ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy. Διὰ νὰ δείξωμεν τὴν διαφορὰν αὐτὴν παραθέτομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

Πίναξ 12

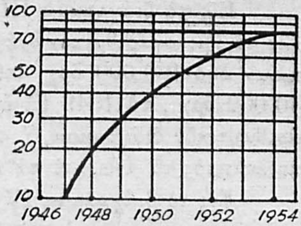
Ἀριθμητικαὶ κλίμακες

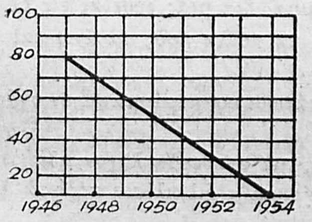
Ἡμιλογαριθμικαὶ κλίμακες



Διάγραμμα I

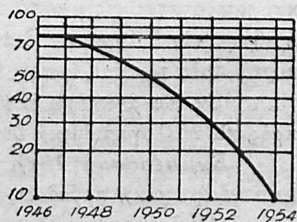
Ἡ ἀκολουθία αὐξάνει κατὰ 100.000 δρ. ἐτησίως.

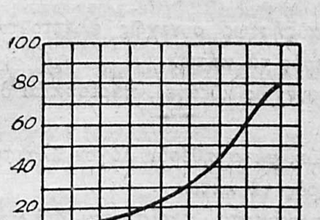




Διάγραμμα II

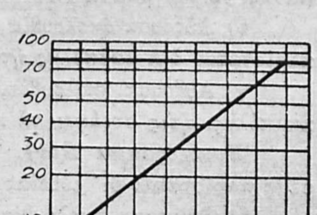
Ἡ ἀκολουθία ἐλαττοῦται κατὰ 100.000 δρ. ἐτησίως.

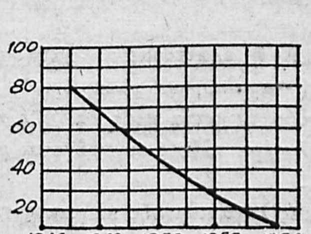




Διάγραμμα III

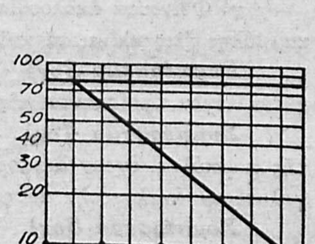
Ἡ ἀκολουθία αὐξάνει κατὰ 40 % ἐτησίως.





Διάγραμμα IV

Ἡ ἀκολουθία ἐλαττοῦται κατὰ 10 % ἐτησίως.



Εἰς τὸ διάγραμμα I ἡ ἀκολουθία αὐξάνεται κατὰ 100 000 ἐτησίως. Εἰς τὸ ἀριθμητικὸν διάγραμμα ἡ ἀκολουθία παρίσταται διὰ μιᾶς εὐθείας, εἰς τὸ ἡμιλογαριθμικὸν διάγραμμα παρίσταται διὰ μιᾶς καμπύλης ἡ ὁποία κλίνει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω, πρὸς τὸν ὁριζόντιον ἄξονα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀναλογικὴ αὔξησις τῆς ἀκολουθίας συνεχῶς ἐλαττοῦται. Ἐάν, π.χ. κατὰ τὸ 1947 αἱ εἰσπράξεις ἐπιχειρήσεώς τινος εἶναι 100 000 κατὰ τὸ 1948 θὰ εἶναι 200 000, ἤτοι ἐπέρχεται αὔξησις 100 %. Τὸ 1949 αἱ εἰσπράξεις ἀνέρχονται εἰς 300 000, ὁπότε ἡ ἀναλογικὴ αὔξησις φθάνει μόνον τὰ 50 % κ.ο.κ. Οὕτως, ἡ ἀκολουθία αὕτη, ἥτις παρίσταται διὰ μιᾶς εὐθείας εἰς τὸ ἀριθμητικὸν διάγραμμα, παρίσταται διὰ μιᾶς καμπύλης εἰς τὸ ἡμιλογαριθμικόν.

Τὸ διάγραμμα II δεικνύει τὴν αὐτὴν ἀκολουθίαν, ὅταν ἐλαττοῦται κατὰ 100 000 ἐτησίως.

Εἰς τὸ διάγραμμα III, ἡ ἀκολουθία αὐξάνεται κατὰ σταθερὸν λόγον 40 %. Εἰς τὸ ἡμιλογαριθμικὸν διάγραμμα παρίσταται διὰ μιᾶς εὐθείας. Ἐὰν ἀρχίσωμεν πάλιν ἀπὸ 100 000 δρχ. τοῦ ἔτους 1947, κατὰ τὸ 1948 θὰ ἔχωμεν αὔξησιν 40 000 δρχ., τὸ 1949 θὰ ἔχωμεν αὔξησιν 56 000 καὶ ὄχι 40 000 κ.ο.κ. Εἰς τὸ ἀριθμητικὸν διάγραμμα, ἡ ἀκολουθία παρίσταται διὰ καμπύλης, ἥτις στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω καὶ τὰ κυρτά της πρὸς τὸν ὁριζόντιον ἄξονα.

Εἰς τὸ διάγραμμα IV ἡ ἀκολουθία ἐλαττοῦται κατὰ σταθερὸν λόγον 10 % καὶ παρίσταται εἰς μὲν τὸ ἡμιλογαριθμικὸν διάγραμμα διὰ μιᾶς εὐθείας εἰς δὲ τὸ ἀριθμητικὸν διάγραμμα διὰ καμπύλης ἥτις στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω καὶ τὰ κυρτὰ πρὸς τὸν ὁριζόντιον ἄξονα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων, συνάγομεν τὰ κάτωθι συμπεράσματα, ἐν σχέσει πρὸς τὲ ἡμιλογαριθμικὰ διαγράμματα :

Συμπέρασμα 1ον) α) Αὔξουσα ἀκολουθία, μὲ σταθερὸν λόγον αὐξήσεως (μία γεωμετρικὴ πρόοδος), παρίσταται δι᾽ εὐθείας γραμμῆς, μὲ κλίσιν πρὸς τὰ ἄνω (πίναξ 12 διάγραμμα I).

β) Αὔξουσα ἀκολουθία τῆς ὁποίας ὁ λόγος αὐξήσεως συνεχῶς ἐλαττοῦται, παρίσταται διὰ καμπύλης ἥτις στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω.

γ) Αὔξουσα ἀκολουθία, τῆς ὁποίας ὁ λόγος συνεχῶς αὐξάνει, παρίσταται διὰ καμπύλης, ἥτις στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω.

Συμπέρασμα 2ον) α) Φθίνουσα ἀκολουθία, μὲ σταθερὸν λόγον ἐλαττώσεως παρίσταται δι᾽ εὐθείας γραμμῆς μὲ κλίσιν πρὸς τὰ κάτω.

β) Φθίνουσα ἀκολουθία μὲ λόγον ἐλαττώσεως φθίνοντα, παρίσταται διὰ καμπύλης ἥτις κλίνει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω.

γ) Φθίνουσα ἀκολουθία μὲ λόγον ἐλαττώσεως αὐξανόμενον, παρίσταται διὰ καμπύλης ἥτις κλίνει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω.

Συμπέρασμα 3ον) Δύο ἀκολουθίαι αὔξουσαι ἢ ἐλαττούμεναι κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον παρίστανται εἰς τὸ αὐτὸ διάγραμμα διὰ παραλλήλων γραμμῶν.

Συμπέρασμα 4ον) Ἐὰν δύο καμπύλαι, ἢ δύο τμήματα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς καμπύλης, ἔχουν διαφορετικὰς κλίσεις, ἡ μεγαλυτέρα κλίσις συνεπάγεται μεγαλυτέραν ἀναλογικὴν αὔξησιν.

Συμπέρασμα 5ον) Ἴσα διαστήματα ἐπὶ μιᾶς λογαριθμικῆς κλίμακος παριστοῦν ἴσας ἀναλογικὰς μεταβολάς, ὄχι ὅμως καὶ ἀπολύτους.

VII. 3. Ἀναλογικὴ μεταβολὴ δοθείσης συναρτήσεως. Ἡμιλογαριθμικὴ παράστασις συναρτήσεων

Ἔστω $y = f(x)$ μία μονότιμος συνάρτησις τοῦ x. Ὡς γνωστόν, ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν μεταβλητὴν x κατὰ Δx τότε ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως ἰσοῦται μὲ $f(x+\Delta x) - f(x)$. Ὀνομάζομεν ἀναλογικὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως y τὴν παράστασιν :

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}.$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ἀναλογικὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως διὰ Δx τὸ ὅριον τῆς παραστάσεως :

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x \, f(x)}$$

ὅταν $\Delta x \to 0$ ὀνομάζομεν διαφορικὴν ἀναλογικὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως. Ἐπομένως ἡ διαφορικὴ ἀναλογικὴ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι :

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x \, f(x)} = \frac{1}{f(x)} \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \lambda\gamma\, y.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος καθίσταται φανερὸν ὅτι, ἡ λογαριθμικὴ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$ δίδει τὴν διαφορικὴν ἀναλογικὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ τοῦ x. Ἐὰν χαράξωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως καὶ λάβωμεν ἐπὶ μὲν τοῦ ἄξονος τῶν x μίαν ἀριθμητικὴν κλίμακα ἐπὶ δὲ τοῦ ἄξονος τῶν y μίαν λογαριθμικὴν κλίμακα, τὴν γραφικὴν αὐτὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως ὀνομάζομεν ***ἡμιλογαριθμικήν***. Αἱ τεταγμέναι τῆς παραστάσεως αὐτῆς δεικνύουν τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως λογ y καὶ ὄχι τῆς συναρτήσεως y. Πράγματι, ἡ γραφικὴ αὐτὴ παράστασις παριστᾷ τὴν συνάρτησιν λογ y εἰς ἀριθμητικὰς κλίμακας.

Ἐὰν ἐπὶ διαστήματος τιμῶν τοῦ **x** εἰς ἴσας αὐξήσεις τῶν τετμημένων ἀντιστοιχοῦν ἴσαι αὐξήσεις τῶν τεταγμένων, τότε αἱ ἀναλογικαὶ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως εἶναι ἴσαι εἰς τὸ διάστημα αὐτὸ καὶ ὄχι αἱ ἀπόλυτοι. Ἐπομένως, ἐὰν ἐνδιαφερώμεθα περισσότερον διὰ τὴν μελέτην τῶν ἀναλογικῶν (ἢ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν) μεταβολῶν μιᾶς συναρτήσεως χαράσσομεν τὴν ἡμιλογαριθμικὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως ἐὰν μᾶς ἐνδιαφέρουν αἱ ἀπόλυτοι μεταβολαὶ χαράσσομεν τὴν ἀριθμητικὴν γραφικὴν παράστασιν ὡς συνήθως.

Ἐὰν λάβωμεν λογαριθμικὰς κλίμακας ἐπ᾽ ἀμφοτέρων τῶν ἀξόνων, ἡ γραφικὴ παράστασις ἡ παριστῶσα τὴν συνάρτησιν εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ ὀνομάζεται ***λογαριθμική***. Ἡ λογαριθμικὴ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ παριστᾷ τὰς μεταβολὰς τῆς συναρτήσεως λογ y ὡς πρὸς λογ x καὶ δεικνύει τὰς ἀναλογικὰς μεταβολὰς τῆς συναρτήσεως y ὡς πρὸς τὰς ἀναλογικὰς μεταβολὰς τοῦ x. Ἐάν, εἴς τινα λογαριθμικὴν γραφικὴν παράστασιν ἀντιστοιχοῦν ἴσαι αὐξήσεις τῶν τεταγμένων εἰς ἴσας αὐξήσεις τῶν τετμημένων τότε εἰς ἴσας ἀναλογικὰς αὐξήσεις τοῦ **x** ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἀναλογικαὶ αὐξήσεις τοῦ y. Ἐπομένως, ὅταν ἐνδιαφερώμεθα διὰ τὰς ἀναλογικὰς μεταβολὰς καὶ τῶν δύο μεταβλητῶν χρησιμοποιοῦμεν λογαριθμικὰς γραφικὰς παραστάσεις.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν ὅτι μία συναρτησιακὴ σχέσις μεταξὺ τοῦ y καὶ x δύναται νὰ παρασταθῇ γραφικῶς κατὰ τρεῖς διαφόρους τρόπους, ἐπὶ ἀριθμητικοῦ, ἡμιλογαριθμικοῦ ἢ λογαριθμικοῦ διαγράμματος. Δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν τὰς διαφορὰς τῶν τριῶν αὐτῶν μεθόδων ἐκ τῶν συναρτήσεων αἵτινες παρίστανται ὡς εὐθεῖαι γραμμαὶ εἰς ἕκαστον τῶν διαγραμμάτων τούτων. Ἐπὶ ἀριθμητικοῦ διαγράμματος ἡ συνάρτησις $y = \alpha x + \beta$ παρίσταται δι' εὐθείας γραμμῆς. Ἐπὶ ἡμιλογαριθμικοῦ διαγράμματος ἡ συνάρτησις $y = \alpha \beta^x$ παρίσταται δι' εὐθείας γραμμῆς· διότι ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους εὑρίσκομεν $\text{λογ}\, y = \text{λογ}\, \alpha + x\, \text{λογ}\, \beta$ καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις λογ y εἶναι γραμμικὴ ὡς πρὸς x.

Ἐπὶ λογαριθμικοῦ διαγράμματος ἡ συνάρτησις $y = \alpha x^\beta$ παρίσταται διὰ εὐθείας γραμμῆς, διότι $\text{λογ}\, y = \text{λογ}\, \alpha + \beta\, \text{λογ}\, x$ καὶ ἡ συνάρτησις λογ y εἶναι γραμμικὴ ὡς πρὸς λογ x. Ἄρα, ἐπὶ ἡμιλογαριθμικοῦ διαγράμματος ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις παρίσταται δι' εὐθείας γραμμῆς, τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως τῆς συναρτήσεως. Ὁμοίως, εἰς ἡμιλογαριθμικὸν διάγραμμα, ἡ συνάρτησις μιᾶς δυνάμεως τοῦ x παρίσταται δι' εὐθείας τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως ἰσοῦται μὲ τὸν σταθερὸν ἐκθέτην. Τὰ λογαριθμικὰ διαγράμματα, καίτοι εἶναι ἐξαιρετικῶς χρήσιμα εἰς στατιστικοοικονομικὰ προβλήματα, λόγῳ τῆς δυσκολίας τῆς μελέτης των δὲν χρησιμοποιοῦνται συχνὰ ἐπὶ τοῦ παρόντος. Ἰδιαιτέρως χρησιμοποιοῦμεν αὐτὰ εἰς τὴν μελέτην τῆς τάσεως τοῦ ποσοστοῦ ἀνεργίας τοῦ ἀστικοῦ ἢ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ χώρας τινὸς ἐν σχέσει πρὸς τὸν ὅλον πληθυσμὸν τῆς χώρας.

Ἐπίσης ὁ νόμος τοῦ Paveto τῆς κατανομῆς τοῦ ἀτομικοῦ εἰσοδήματος (Paveto's income law) παρίσταται εἰς ἕνα λογαριθμικὸν διάγραμμα δι' εὐθείας. διότι ἐὰν y εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων τὰ ὁποῖα πληρώνουν φόρον μεγαλύτερον x δρχ. συμφώνως πρὸς τὴν μαθηματικὴν ἔκφρασιν τοῦ Paveto $y = \frac{\alpha}{x^\mu}$ ὅπου α καὶ μ εἶναι σταθεροί. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἰς ἓν λογαριθμικὸν διάγραμμα παρίσταται δι' εὐθείας μὲ κλίσιν πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀριθμητικῶς ἴσην πρὸς μ.

Ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης ἡ ὁποία παριστᾷ τὴν συνάρτησιν $y = f(x)$ εἰς ἓν ἡμιλογαριθμικὸν διάγραμμα ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον $\frac{d}{dx}(\text{λογ}\, y)$ ἥτις ὡς γνωστὸν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορικὴν ἀναλογικὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως. Ὅταν ἡ συνάρτησις y εἶναι γινόμενον δύο μονοτίμων συναρτήσεων u καὶ υ τότε ἡ διαφορικὴ ἀναλογικὴ μεταβολὴ τῆς y ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορικῶν ἀναλογικῶν μεταβολῶν τῶν u καὶ υ

Διότι $$\text{λογ}\, y = \text{λογ}\, u + \text{λογ}\, \upsilon$$

καὶ $$\frac{d}{dx}(\text{λογ}\, y) = \frac{d}{dx}(\text{λογ}\, u) + \frac{d}{dx}(\text{λογ}\, \upsilon).$$

Ὁμοίως, ὅταν ἡ συνάρτησις y εἶναι τὸ πηλίκον τῶν δύο συναρτήσεων u καὶ

---

* Βλ. Paveto : Cours d'Économie Politique (1897), Βιβλίον 3, Κεφ. I καὶ Bowley Elements of Statistics (4 Ἔκδοσις 1920), σελ. 346—8.

υ, ἡ διαφορικὴ ἀναλογικὴ μεταβολὴ τῆς y ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀναλογικῶν μεταβολῶν τῶν u καὶ υ.

Διότι $$\lambda o\gamma\, y = \lambda o\gamma\, u - \lambda o\gamma\, \upsilon$$

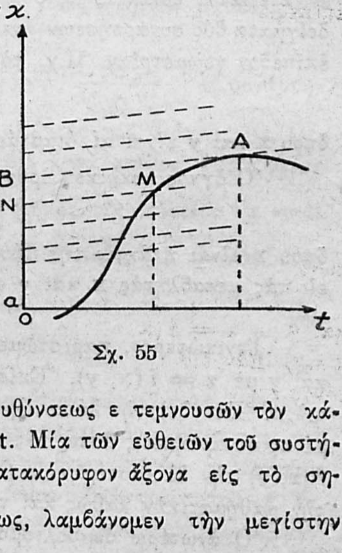
καὶ $$\frac{d}{dx}(\lambda o\gamma\, y) = \frac{d}{dx}(\lambda o\gamma\, u) - \frac{d}{dx}(\lambda o\gamma\, \upsilon).$$

Γενικώτερον, ἐὰν $$y = \frac{u_1, u_2 \ldots u_n}{\upsilon_1, \upsilon_2 \ldots \upsilon_n}$$

τότε

$$\frac{d}{dx}(\lambda o\gamma\, y) = \frac{d}{dx}(\lambda o\gamma\, u_1) + \frac{d}{dx}(\lambda o\gamma\, u_2) + \ldots + \frac{d}{dx}(\lambda o\gamma\, u_n) -$$
$$- \frac{d}{dx}(\lambda o\gamma\, \upsilon_1) - \frac{d}{dx}(\lambda o\gamma\, \upsilon_2) - \ldots - \frac{d}{dx}(\lambda o\gamma\, \upsilon_n)$$

Ὡς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω θὰ δώσωμεν τὴν γραφικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος (Κεφ. IV. 7). Εἰς τὸ σχῆμα 55 ἡ καμπύλη παριστᾷ τὴν συνάρτησιν $x = f(t)$ εἰς ἡμιλογαριθμικὰς κλίμακας. Τὸ μηδὲν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν t ($t = 0$) εἶναι ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ἀρχικὸν κόστος εἶναι γνωστόν, ἔστω $x = \alpha$ μέχρι τῆς ἐναποθηκεύσεως τοῦ οἴνου. Ἄρα διὰ $t = 0$ ἐπὶ τῆς λογαριθμικῆς κλίμακος ἔχομεν α. Ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως εἴς τι σημεῖον Μ εἶναι $\frac{d}{dx}(\lambda o\gamma\, x) = \frac{f'(t)}{f(t)}$. Ἡ παροῦσα ἀξία εἰς χρόνον t δίδεται ὑπὸ τῆς $x = ye^{\varepsilon t}$. Εἰς τὸ διάγραμμα διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ y ἡ συνάρτησις αὐτὴ παριστᾷ



Σχ. 55

σύστημα παραλλήλων εὐθειῶν μὲ συντελεστὴν κατευθύνσεως ε τεμνουσῶν τὸν κάθετον ἄξονα εἰς $x = y$. Διότι $\lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, y + \varepsilon t$. Μία τῶν εὐθειῶν τοῦ συστήματος αὐτοῦ διέρχεται διὰ τοῦ Μ καὶ τέμνει τὸν κατακόρυφον ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον Ν, διὰ τὸ ὁποῖον $ON = \lambda o\gamma\, \frac{x}{\alpha}$. Ἑπομένως, λαμβάνομεν τὴν μεγίστην παροῦσαν ἀξίαν ὅταν τὸ ΟΝ γίνῃ μέγιστον. Τὸ ΟΝ γίνεται μέγιστον ὅταν ἡ εὐθεῖα τῆς παρούσης ἀξίας ἐφάπτεται τῆς καμπύλης. Εἰς τὴν θέσει αὐτὴν $\varepsilon = \frac{f(t)}{f'(t)}$ ἡ δευτέρα συνθήκη πληροῦται διότι εἰς ὁμαλὴν περίπτωσιν ἡ καμπύλη κλίνει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω. Ἡ παροῦσα ἀξία εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ κόστους ἐὰν τὸ Β κεῖται ὑπεράνω τοῦ Ο.

VII. 4. Συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν

Αἱ συναρτήσεις τὰς ὁποίας ἐμελετήσαμεν ἕως τώρα, ἐκφράζουν τὴν σχέσιν μεταξὺ δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ τὴν σχέσιν ἥτις ὑφίσταται μεταξὺ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς ἐξηρτημένης. Ἐπίσης εἰς τὰς μέχρι τοῦδε οἰκονομικὰς ἐφαρμογάς, κατόπιν ὡρισμένων περιορισμῶν κατελήξαμεν πάντοτε εἰς μίαν μαθηματικὴν συνάρτησιν τῆς μορφῆς αὐτῆς.

Εἶναι ὅμως φανερὸν ὅτι ἡ περιγραφὴ φυσικοῦ τινὸς ἢ οἰκονομικοῦ φαινομένου πολλάκις ἀπαιτεῖ τὴν χρησιμοποίησιν περισσοτέρων μεταβλητῶν, καταλλήλως συνδεδεμένων συναρτησιακῶς μεταξύ των. Ἡ ζήτησις ὡρισμένου προϊόντος εἴς τινα ἀγοράν, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν ὑποκατάστατα διὰ τὸ προϊὸν αὐτό, δὲν εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς τιμῆς τοῦ προϊόντος αὐτοῦ, ἀλλὰ ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τῶν τιμῶν τῶν ὑποκαταστάτων τοῦ ἐν λόγῳ προϊόντος. Ἡ πίεσις, ἡ θερμοκρασία ὡς καὶ ἡ πυκνότης τῆς ἀτμοσφαίρας εἰς δοθὲν σημεῖον, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σημείου, ἤτοι ἀπὸ τὰς τρεῖς συντεταγμένας τοῦ σημείου αἵτινες ὁρίζουν τὴν θέσιν αὐτοῦ. Συνεπῶς δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς συναρτήσεις τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ μεγέθη τῶν δύο πλευρῶν του. Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς τρεῖς διαστάσεις του. Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἐπεκτείνεται εὐκόλως εἰς συναρτήσεις μὲ περισσοτέρας μεταβλητάς. Ἁπλᾶ παραδείγματα δύο συναρτήσεων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν εὑρίσκομεν ἀκόμη καὶ εἰς τὴν ἐπίπεδον γεωμετρίαν. Π.χ. τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου:

$$E = xy,$$

ὅπου x καὶ y εἶναι αἱ διαστάσεις τῶν πλευρῶν του.

Ὁ ὄγκος κυκλικοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου:

$$O = \pi x^2 y$$

ὅπου x εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ y τὸ ὕψος. Αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὰς μεταβλητὰς x καὶ y εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι ἐντελῶς ἀνεξάρτητοι μεταξύ των.

Γενικώτερον, παριστῶμεν μίαν συνάρτησιν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x καὶ y μὲ $z = f(x, y)$. Ἐπίσης χρησιμοποιοῦμεν τὰ σύμβολα $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ κ.λ.π. Ἐὰν διὰ τὴν λύσιν ὡρισμένου προβλήματος χρησιμοποιοῦμεν δύο συγκεκριμένας συναρτήσεις, ἔστω τὰς $xy + y^2$ καὶ $x^2 - 3xy$ καλοῦμεν τὴν μὲν πρώτην $f(x, y)$ τὴν δὲ δευτέραν $\varphi(x, y)$. Ἡ συμβολικὴ αὐτὴ παράστασις διευκολύνει τὴν μαθηματικὴν καθὼς καὶ τὴν λογικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ὁ ἀνωτέρω συμβολισμὸς τῆς συναρτήσεως δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἐπεκτείνεται χωρὶς καμμίαν δυσκολίαν εἰς τὰς περιπτώσεις συναρτήσεων τριῶν ἢ καὶ περισσοτέρων μεταβλητῶν. Οὕτως, ἡ σχέσις:

$$u = f(x, y, z)$$

παριστᾷ μίαν συνάρτησιν τῶν τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x, y, z. Μία συνάρτησις δύο ἢ καὶ περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ δοθῇ καὶ ὑπὸ μορφὴν πεπλεγμένης συναρτήσεως, π.χ.:

$$x^2 y - xy^2 + z^3 = 0.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διὰ λύσεως ὡς πρὸς μίαν τῶν μεταβλητῶν εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην λελυμμένην συνάρτησιν.

Γενικώτερον, ἐὰν ἡ συνάρτησις δίδεται ὑπὸ πεπλεγμένην μορφὴν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$f(x, y, z) = 0 .$$

Αἱ ἔννοιαι τῆς συνεχείας, τῆς μονοτίμου συναρτήσεως καθὼς καὶ τοῦ χωρισμοῦ τῶν κλάδων μιᾶς πλειονοτίμου συναρτήσεως, ἐπεκτείνονται εὐκόλως εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν συναρτήσεων τῶν δύο μεταβλητῶν.

Οὕτως, ἡ συνάρτησις τῶν δύο μεταβλητῶν $z = f(x, y)$ εἶναι μία μονότιμος συνάρτησις ἐὰν δι' ἕκαστον παραδεκτὸν ζεῦγος τιμῶν τῶν x καὶ y ὑπάρχῃ μία μόνον τιμὴ τοῦ z [1]. Ἡ συνάρτησις $f(x, y)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (α, β) ἐὰν

$$\underset{\substack{x \to \alpha \\ y \to \beta}}{\text{δρ}} f(x, y) = f(\alpha, \beta)$$

καθ' οἱονδήποτε τρόπον, καθ' οἱανδήποτε κατεύθυνσιν τείνουν τὸ x καὶ y εἰς τὰ ἀντίστοιχα ὅρια αὐτῶν α καὶ β. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς τῆς συνεχείας δύναται νὰ διατυπωθῇ ἐν γενικαῖς γραμμαῖς ὡς ἑξῆς.

Μικρὰ μεταβολὴ τῆς μιᾶς ἢ καὶ ἀμφοτέρων τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἔχει ὡς συνέπειαν μικρὰν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως [2].

Παράδειγμα : Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι ὡρισμένη διὰ κάθε ζεῦγος τιμῶν (x, y) ἐκτὸς τοῦ ζεύγους (O, O). Ἡ συνάρτησις δὲν ἔχει ὅριον εἰς τὸ σημεῖον αὐτό, διότι κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας $x = y$ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι $\frac{1}{2}$ ἐνῶ κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας $x = 0$ εἶναι μηδέν. Οὕτως, ἡ συνάρτησις εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου (O, O) λαμβάνει τὰς τιμὰς $\frac{1}{2}$ καὶ 0 καὶ ἑπομένως δὲν ἔχει ὅριον.

VII. 5. Μερικαὶ παράγωγοι. Ὁλικὸν διαφορικὸν

Ἔστω $u = f(x, y)$ μία συνάρτησις δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ y σταθερὰν τιμήν, τότε ἡ συνάρτησις ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰς τιμὰς τὰς ὁποίας λαμβάνει τὸ x, καὶ ἑπομένως δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις μόνον τοῦ x. Ἐὰν ἡ κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν προκύπτουσα συνάρτησις τοῦ x ἐκ τῆς δοθείσης εἶναι παραγωγήσιμος ὡς πρὸς x, τὴν παράγωγον αὐτὴν ὀνομάζομεν ***μερικὴν παράγωγον*** τῆς u ὡς πρὸς x καὶ τὴν παριστῶμεν μὲ $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁρίζομεν τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς u ὡς πρὸς y καὶ παριστῶμεν

---

1) Μὲ τὴν φράσιν «παραδεκτὸν ζεῦγος τιμῶν» ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ x ἀνήκει εἰς τὸ διάστημα τιμῶν τοῦ x εἰς τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἡ συνάρτησις, καθὼς ἐπίσης ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ y ἀνήκει εἰς τὸ ἀντίστοιχον διάστημα διὰ τὸ y. Πολλάκις τὰ δύο αὐτὰ διαστήματα εἶναι τὰ αὐτά.

2) Ὁ ἀναγνώστης θὰ ἐννοήσῃ καλύτερον τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἐὰν ἐπανέλθῃ εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συνεχείας τῶν συναρτήσεων μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

αὐτὴν μὲ $\frac{\partial u}{\partial y}$. Ἐπίσης διὰ τὸν συμβολισμὸν τῶν μερικῶν παραγώγων χρησιμοποιοῦμεν τὰ σύμβολα : u_x, f_x, u_y, f_y. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς μερικῆς παραγώγου δοθείσης συναρτήσεως χρησιμοποιοῦμεν τὴν αὐτὴν πορείαν καὶ τοὺς αὐτοὺς κανόνας ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Εἶναι ὅμως ἀναγκαῖον νὰ θεωρῶμεν ὅλας τὰς μεταβλητὰς ὡς σταθεράς, ἐκτὸς τῆς μεταβλητῆς ὡς πρὸς τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως.

Παράδειγμα 1ον) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μερικαὶ παράγωγοι τῆς συναρτήσεως :

$$u = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma y^2.$$

Θεωροῦντες τὸ y πρὸς στιγμὴν σταθερὸν εὑρίσκομεν :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\alpha x + 2\beta y .$$

Ὁμοίως
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\beta x + 2\gamma y .$$

Παράδειγμα 2ον) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μερικαὶ παράγωγοι τῆς συναρτήσεως $u = \frac{1}{4} xy^2 + 2x$ διὰ κάθε ζεῦγος τιμῶν (x, y) καὶ διὰ τὰς τιμὰς (3, 6).

Θεωροῦντες τὸ y πρὸς στιγμὴν σταθερὸν εὑρίσκομεν :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{4} + 2$$

Ὁμοίως
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} xy$$

Διὰ τὸ ζεῦγος (3, 6)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(3,\,6)} = 11$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(3,\,6)} = 9$$

Ἡ μερικὴ παράγωγος μιᾶς μερικῆς παραγώγου ὀνομάζεται ***δευτέρα μερικὴ παράγωγος*** ἢ ***παράγωγος δευτέρας τάξεως***. Εἰς ἑκάστην συνάρτησιν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ὑπάρχουν τέσσαρες μερικαὶ παράγωγοι δευτέρας τάξεως.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} .$$

Διὰ τὴν συντομωτέραν γραφὴν τῶν παραγώγων τῆς δευτέρας τάξεως χρησιμοποιοῦμεν πολλάκις καὶ τὰ σύμβολα : u_{xx}, u_{xy} κ.λ.π.

Παράδειγμα 3ον) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι δευτέρας τάξεως τῆς συναρτήσεως τοῦ Παραδείγματος 1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2\alpha x + 2\beta y) = 2\alpha$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2\alpha x + 2\beta y) = 2\beta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2\beta x + 2\gamma y) = 2\beta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2\beta x + 2\gamma y) = 2\gamma$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος βλέπομεν ὅτι $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$.

Ἑπομένως, τὸ ἀποτέλεσμα δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τάξιν τῆς παραγωγήσεως ὡς πρὸς τὰς δύο μεταβλητὰς **x** καὶ y. Ἡ πρότασις αὐτὴ ἰσχύει δι' ὅλας τὰς μερικὰς παραγώγους, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ συνάρτησις καθὼς καὶ ὅλαι αἱ ἐν λόγῳ μερικαὶ παράγωγοι εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις. Γενικώτερον, ἐὰν ἔχωμεν μίαν συνάρτησιν μὲ περισσοτέρας τῶν δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, εἰς ἑκάστην μεταβλητὴν ἀντιστοιχεῖ μία παράγωγος πρώτης τάξεως. Κατὰ τρόπον ὅμοιον πρὸς τὸν ἀνωτέρω ὁρίζομεν τὰς παραγώγους δευτέρας καὶ ἀνωτέρας τάξεως.

Παράδειγμα 4ον) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μερικαὶ παράγωγοι πρώτης τάξεως τῆς συναρτήσεως :

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x + y}{z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{z}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u_z = -\frac{x + y}{z^2}.$$

Ἡ μεταβολὴ Δy μιᾶς συναρτήσεως $y = f(x)$ μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ x εἰς $x + \Delta x$, εὑρίσκεται μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν ὑπὸ τῆς $dy = f'(x)\Delta x$ ἢ ἂν γράψωμεν dx εἰς τὴν θέσιν τοῦ **Δx** ὡς συνήθως ὑπὸ τῆς $dy = f'(x)dx$.

Τὴν ἔκφρασιν αὐτὴν τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ ὀνομάζομεν ***διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως.***

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $u = f(x, y)$ δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ὅταν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ μεταβάλλωνται ἀντιστοίχως κατὰ Δx καὶ Δy. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ **Δu** τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως τότε :

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y).$$

(Συνεχίζεται)