Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΥΠΟ ΤΩΝ κ. κ. Κ. ΠΛΗΘΕΙΔΗ - Β. ΜΕΤΑΞΑ

3. (Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΤΙΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

1. Εἰσαγωγή

Σκοπὸς τοῦ τετάρτου κεφαλαίου εἶναι νὰ παρουσιάσῃ, μὲ καταλλήλως ἐκλελεγμένην σειρὰν λελυμένων προβλημάτων, τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον χρησιμοποιοῦνται οἱ διάφοροι κλάδοι τῶν μαθηματικῶν διὰ τὴν λύσιν οἰκονομικῶν προβλημάτων. Ἐπίσης, ὅπως ὁ ἀναγνώστης ἐξοικειωθῇ περισσότερον μὲ τὸν τρόπον τῆς χρήσεως τῶν διαφόρων κλάδων τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰ οἰκονομικά. Ὡς κριτήριον εἰς τὴν ἀκολουθητέαν σειρὰν τοποθετήσεως τῶν διαφόρων προβλημάτων λαμβάνομεν ὑπ᾽ ὄψει καὶ τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον διεισέδυσαν τὰ μαθηματικὰ εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἐπιστήμην.

Οὕτως, εἰς τὴν πρώτην ὁμάδα περιλαμβάνομεν προβλήματα τῶν ὁποίων ἡ λύσις δίδεται καθαρῶς διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου. Ἡ γραφικὴ μέθοδος, ἥτις ἀποτελεῖ τὸν πρῶτον κλάδον τῶν μαθηματικῶν ὅστις ἐχρησιμοποιήθη εὐρέως ὑπὸ τῶν οἰκονομολόγων, καὶ τὴν ὁποίαν παραδέχονται σήμερον τόσον οἱ ἐπικριταὶ τῆς μαθηματικῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως ὅσον καὶ οἱ ὀπαδοί της, δίδει τὴν παραστατικὴν εἰκόνα τῶν διαφόρων ἀξιωμάτων, ὁρισμῶν, θεωρητικῶν συμπερασμάτων καὶ ἐν γένει συντελεῖ εἰς τὴν γενίκευσιν τῶν προβλημάτων τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης.

Ἐν συνεχείᾳ, εἰς τὴν δευτέραν ὁμάδα προβλημάτων θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν γραφικὴν μέθοδον ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν ἀναλυτικήν, δηλαδὴ θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς συναρτήσεις καὶ τὰς γραφικὰς παραστάσεις αὐτῶν. Οὕτως, ἡ μέθοδος καθίσταται σαφεστέρα καὶ γενικωτέρα, ὁδηγεῖ δ᾽ εἰς πλέον σαφῆ καὶ συγκεκριμένα συμπεράσματα. Τὰ ἑπόμενα τῆς δευτέρας ὁμάδος προβλήματα εἶναι γενικωτέρας φύσεως καὶ ἐκλελεγμένα οὕτως ὥστε νὰ χρησιμοποιῶνται διάφοροι κλάδοι τῶν μαθηματικῶν διὰ τὴν λύσιν των.

2. Ἡ ἁπλῆ Γραφικὴ Μέθοδος

Πρόβλημα 1ον. Τὰ προβλήματα τῆς ἰσορροπίας τῆς Ἀγορᾶς. Ἐὰν ὁ κατωτέρω πίναξ δεικνύῃ τὴν ζήτησιν καὶ τὴν προσφορὰν εἰς τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ ἐλαίου εἴς τινα ἀγοράν, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ πίνακος αὐτοῦ τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τῆς ἀγορᾶς (ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ).

---

* Ὡς ἐμφαίνεται καὶ ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς, σκοπὸς τοῦ τετάρτου Κεφαλαίου εἶναι νὰ δείξῃ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν διαφόρων κλάδων τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης εἰς τὴν λύσιν οἰκονομικῶν προβλημάτων καὶ τὴν ἐπεξεργασίαν διαφόρων οἰκονομικῶν φαινομένων.

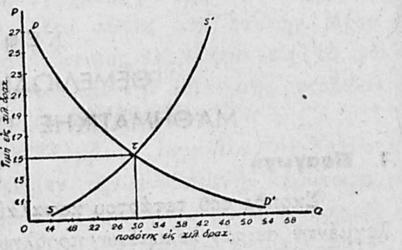
Διὰ τὴν συστηματικὴν μελέτην τοῦ IV Κεφαλαίου νομίζομεν ὅτι ὁ ἀναγνώστης ἀπαιτεῖται νὰ κατέχῃ τουλάχιστον τὰς μαθηματικὰς ἐννοίας τοῦ 1ου, 2ου, 3ου καὶ ἰδιαιτέρως τοῦ 5ου Κεφαλαίου τοῦ παρόντος βιβλίου.

Πίναξ 2

Τιμή, Ζήτησις καὶ Προσφορὰ Ἐλαίου εἰς μίαν Ἀγορὰν

Τιμὴ (εἰς χιλ. δρχ.)	Ζήτησις (εἰς χιλ. ὀκ.)	Προσφορὰ (εἰς χιλ. ὀκ.)
2.5	1.600	4.700
2.3	1.700	4.600
2.1	2.000	4.300
1.9	2.200	4.000
1.7	2.500	3.600
1.5	3.000	3.000
1.3	3.700	2.400
1.1	4.500	1.600

Λαμβάνομεν δύο ὀρθογωνίους ἄξονας ἐπὶ τῶν ὁποίων ὁρίζομεν κλίμακας εἰς χιλιάδας δραχμῶν καὶ ὀκάδων. Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος λαμβάνομεν εἰς χιλιάδας ὀκάδας τὴν ζήτησιν καὶ τὴν προσφορὰν καὶ ἐπὶ τοῦ καθέτου τὴν τιμὴν τοῦ ἐλαίου εἰς χιλιάδας δραχμῶν. Ἐὰν τοποθετήσωμεν ἐπὶ τοῦ σχεδιαγράμματος τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα, ὡς ταῦτα προκύπτουν ἐκ τοῦ πίνακος, εὑρίσκομεν τὰς δύο καμπύλας τῆς ζητήσεως καὶ τῆς προσφορᾶς. Οὕτως, ἡ καμπύλη DD′ δεικνύει τὰς διαφόρους ποσότητας ἐλαίου τὰς ὁποίας οἱ καταναλωταὶ ἔχουν τὴν δυνατότητα νὰ ἀγοράσουν εἰς τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς ἀγορᾶς. Ὁμοίως ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς SS′ δεικνύει τὰς ποσότητας τὰς ὁποίας προσφέρουν οἱ πωληταὶ εἰς τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς ἀγορᾶς. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο καμπυλῶν εἶναι τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τῆς ἀγορᾶς, ὅταν ἡ ἀγορὰ αὕτη λειτουργῇ ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ.



Σχ. 16

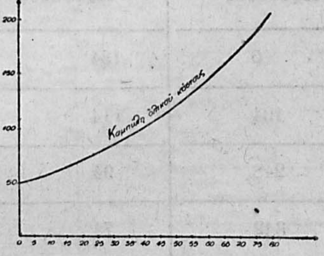
Πίναξ 3

Ἡ Παραγωγὴ καὶ τὸ Κόστος δοθείσης τινὸς Ἐπιχειρήσεως

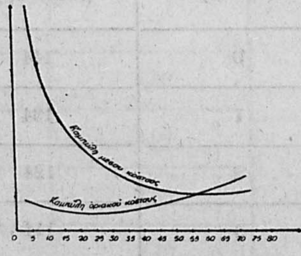
Παραγωγὴ	Ὁλικὸν Κόστος	Μέσον Κόστος	Ὁριακὸν Κόστος
0	50		1.60
5	58	11.60	1.40
10	65	6.50	1.20
15	71	4.73	1.00
20	76	3.80	1.00
25	81	3.24	1.20
30	87	2.90	1.40
35	94	2.69	1.60
40	102	2.55	1.80
45	111	2.47	2.00
50	121	2.42	2.20
55	132	2.40	2.40
60	144	2.40	2.60
65	157	2.42	2.80
70	171	2.44	3.00
75	186	2.48	3.20
80	202	2.53	

Πρόβλημα 2ον). Τὸ πρόβλημα τῶν τριῶν καμπυλῶν τοῦ κόστους : Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ πίνακος (3) νὰ σχεδιασθοῦν αἱ καμπύλαι τοῦ ὁλικοῦ, μέσου καὶ διαφορικοῦ κόστους καὶ νὰ γίνῃ ἡ περιγραφή των.

Γραφικὴ παράστασις. Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος λαμβάνομεν τὰς μονάδας παραγωγῆς καὶ ἐπὶ τοῦ καθέτου τὸ κόστος. Ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ διαγράμματος, ἡ καμπύλη τοῦ ὁλικοῦ κόστους, ὡς ἐλέχθη καὶ προηγουμένως, τέμνει τὸν θετικὸν ἄξονα τῶν Π. Ἡ καμπύλη τοῦ μέσου κόστους εἶναι σχήματος U καὶ ἡ καμπύλη τοῦ ὁριακοῦ κόστους δεικνύει τὸν λόγον αὐξήσεως τοῦ ὁλικοῦ κόστους ὅταν αὐξάνεται ἡ παραγωγή. Ἐὰν πρὸς στιγμὴν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ κόστος μεταβάλλε-



Σχ. 17



Σχ. 18

Ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τῶν διαγραμμάτων αἱ χρησιμοποιούμεναι κλίμακες εἶναι διαφορετικαί. Αὐτὸ εἶναι ἀπαραίτητον, διότι ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τοῦ ὁλικοῦ κόστους εἶναι κατὰ πολὺ μεγαλύτερος τοῦ λόγου αὐξήσεως τοῦ μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους.

ται συνεχῶς μεταβαλλομένης τῆς ποσότητος τῆς παραγωγῆς, τότε γίνεται φανερὸν ὅτι οἱ δοθέντες συναρτησιακοὶ ὁρισμοὶ ἐπαληθεύονται διὰ τὰς τιμὰς τοῦ πίνακος.

Πρόβλημα 3ον). Εἰς τὸν κατώτερω πίνακα δίδονται ἡ πωλουμένη ποσότης ἑνὸς ἐμπορεύματος καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ κατὰ τόννον εἰς ἑκατομμύρια δραχμάς. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ ὁλικὴ καὶ ὁριακὴ πρόσοδος καὶ νὰ συμπληρωθῇ ὁ κατωτέρω πίναξ :

Πίναξ 4

Ποσότης (q) εἰς τόννους	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Τιμὴ (p) εἰς χιλ. δραχ.	144	134	124	114	104	94	84	74	64	54	54

Τὴν ὁλικὴν πρόσοδον εὑρίσκομεν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πωλουμένην ποσότητα ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν ($R = p \times q$), π.χ. $2 \times 124 = 248$, τὴν δὲ ὁριακὴν πρόσοδον εὑρίσκομεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δι᾽ ἀφαιρέσεως δύο διαδοχικῶν ὁλικῶν προσόδων. Εὑρίσκομεν τὴν ὁριακὴν πρόσοδον κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, ἐπειδὴ εἰς τὸν δοθέντα πίνακα 5 (σελ. 118) ἡ ποσότης αὐξάνεται διαδοχικῶς κατὰ ἕνα τόννον.

3. Προβλήματα Ἀναλυτικῆς μεθόδου

Πρόβλημα 1ον). Ἐὰν ἁλιευτικὸς συνεταιρισμὸς χρησιμοποιῇ x ἁλιευτικὰς λέμβους τὴν ἡμέραν, τὸ ὁλικὸν κόστος του εἶναι :

$$\left\{ \frac{x^2(x+1)}{10(x+3)} + 5 \right\} \text{ ἑκατομμ. δρχ.}$$

Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ ὁλικοῦ καὶ μέσου κόστους καὶ νὰ περιγραφῇ ὁ τρόπος μεταβολῆς τοῦ ὁλικοῦ κόστους ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν λέμβων αὐξάνῃ. Ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ διὰ ποῖον ἀριθμὸν λέμβων τὸ μέσον κόστος εἶναι ἐλάχιστον.

Λύσις : Ἐκ τῆς δοθείσης συναρτήσεως

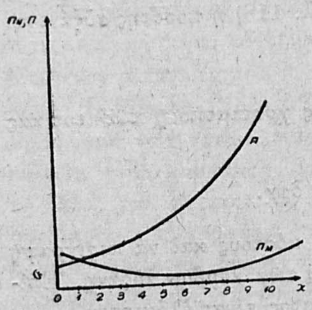
$$\Pi(x) = \frac{x^2(x+1)}{10(x+3)} + 5, \qquad \Pi_M = \frac{x(x+11)}{10(x+3)} + \frac{5}{x}$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν συναρτήσεων αὐτῶν σχηματίζομεν τὸν πίνακα 6 σελ. 119.

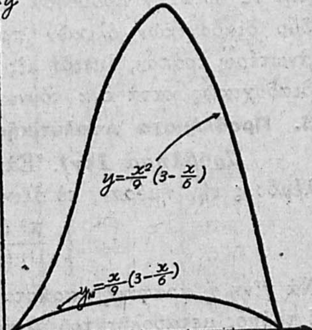
Πίναξ 5

Ποσότης (q) (τόννοι)	Τιμὴ (p) (ἑκατ. δρχ.)	Ὁλικὴ (p×q) Πρόσοδος	Ὁριακὴ Πρόσοδος
0	144	0	134
1	134	134	114
2	124	248	94
3	114	342	74
4	104	416	54
5	94	470	34
6	84	504	14
7	74	518	— 6
8	64	512	— 26
9	54	486	— 46
10	44	440	

Χαράσσομεν τὰς καμπύλας τοῦ κόστους καὶ τοῦ μέσου κόστους ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τιμῶν αὐτῶν. Ἐκ τῆς καμπύλης τοῦ ὁλικοῦ κόστους συνάγομεν ὅτι ἡ αὔξησις τοῦ κόστους κατὰ λέμβον εἶναι μεγαλυτέρα ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν λέμβων αὐξάνεται. Ἡ καμπύλη τοῦ μέσου κόστους εἶναι σχήματος U, ὡς συνήθως, καὶ ἔχει τὴν ἐλαχίστην της τιμὴν ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν χρησιμοποιουμένων λέμβων εἶναι 7, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ διαγράμματος.



Σχ. 19



Σχ. 20

Πρόβλημα 2ον) Ἐὰν ἐργοστάσιον τσιμέντων χρησιμοποιῇ x ἐργάτας εἰς ἕκαστον ἐργατικὸν ὀκτάωρον (βάρδια), ἡ παραγωγὴ τῆς ἑταιρίας κατὰ ὀκτάωρον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις τῶν χρησιμοποιουμένων ἐργατῶν. Ἔστω

Πίναξ 6

Ἀριθμὸς Λέμβων x	Ὁλικὸν κόστος εἰς ἑκατομμύρια	Μέσον κόστος εἰς ἑκατομμύρια
0	5,00	—
1	5,30	5,30
2	6,04	3,02
3	7,10	2,36
4	8,41	2,10
5	10,00	2,00
6	11,80	1,96
7	13,82	1,97
8	16,05	2,00
9	18,50	2,05
10	21,15	2,11

ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι : $\left[\frac{x^2}{q}\left(3-\frac{x}{6}\right)\right]$ εἰς τόννους.

α) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς καὶ νὰ μελετηθῇ ὁ τρόπος μεταβολῆς της ἀναλόγως μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν χρησιμοποιουμένων ἐργατῶν.

β) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παραγωγὴ κατὰ ἐργάτην (μέση παραγωγὴ) καὶ νὰ γίνῃ ἡ γραφική της παράστασις.

γ) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x ἔχομεν τὴν μεγίστην παραγωγήν ; Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x ἔχομεν τὴν μεγίστην μέσην παραγωγήν ;

Λύσις. Ἐὰν ὀνομάσωμεν y τὴν παραγωγήν, τότε

$$y=\frac{x^2}{9}\left(3-\frac{x}{6}\right) \quad \text{καὶ} \quad y_M=\frac{x}{9}\left(3-\frac{x}{6}\right)$$

Ἐὰν σχηματίσωμεν πίνακας διὰ τὰς δύο αὐτὰς συναρτήσεις ὡς ἀνωτέρω, λαμβάνομεν τὰς δύο γραφικὰς παραστάσεις (σχ. 20). Οὕτως, ἡ ὁλικὴ παραγωγὴ ἀνέρχεται συνεχῶς καὶ λαμβάνει τὴν μεγαλυτέραν της τιμὴν ὅταν οἱ ἐργάται τοῦ ἑνὸς ὀκταώρου εἶναι 12. Κατόπιν τῆς μεγίστης της τιμῆς, ἡ παραγωγὴ συνεχῶς ἐλαττοῦται. Ἡ καμπύλη τῆς μέσης παραγωγῆς εἶναι παραβολὴ καὶ ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς μέσης παραγωγῆς ἀντιστοιχεῖ εἰς 9 ἐργάτας κατὰ ἐργατικὸν ὀκτάωρον.

Πρόβλημα 3ον) Ἔστω ὅτι εἷς γαλακτοκομικὸς συνεταιρισμὸς προσφέρει τὸ γάλα του εἰς τὴν ἀγορὰν μιᾶς πόλεως ἑβδομαδιαίως. Ἡ ἑβδομαδιαία προσφορὰ (ποσότης x εἰς ὀκάδας) ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς ὀκᾶς εἰς δραχμάς, σύμφωνα μὲ τὸν νόμον :

$$x = \sqrt{p - 1\,200} + 200$$

ὅπου p μετρεῖται εἰς ἑκατοντάδας δραχμῶν. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς προσφορᾶς καὶ νὰ ἀποδειχθῇ :

α) Ὅτι δὲν ὑπάρχει προσφορὰ ὅταν ἡ τιμὴ εἶναι μικροτέρα τῶν 1 200 δρ.

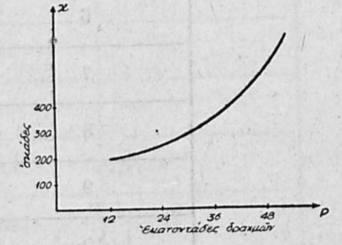
β) Ὅτι ἡ προσφορὰ αὐξάνει συνεχῶς ὅταν ἡ τιμὴ αὐξάνῃ πέραν τῶν 1 200 δρ.

Πίναξ 7

Τιμὴ εἰς ἑκατμ. δρ. τοῦ p	Ὀκάδες γάλακτος x
12	200,0
13	210,0
14	214,1
15	217,3
16	220,0
17	222,3
18	224,4
19	226,4
20	228,2
21	230,0

Λύσις. Ἐκ τῆς δοθείσης συναρτήσεως τῆς προσφορᾶς σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα 7 καὶ χαράσσομεν τὴν καμπύλην.

Ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς εἶναι μονοτόνως αὔξουσα· διὰ τιμὰς τῆς τιμῆς p μικροτέρας τῶν 1 200 δρ. ἡ ρίζα δὲν εἶναι πραγματικὴ καὶ ἐπομένως δὲν ὑπάρχει προσφορά. Ὅταν ἡ τιμὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 1 200 δραχμῶν καὶ αὐξάνεται συνεχῶς τότε καὶ ἡ προσφορὰ εἶναι μεγαλυτέρα.



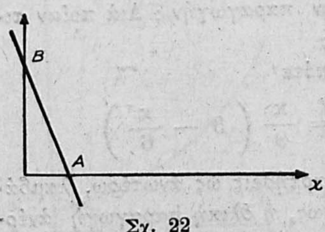
Σχ. 21

4. Ἡ Γραφικὴ Μέθοδος εἰς τὴν λύσιν Γενικῶν Προβλημάτων

Εὕρεσις τῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως.

α) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta_0 = 0$ εἶναι ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Ἐὰν $\alpha \neq 0$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει πάντοτε μίαν πραγματικὴν ρίζαν $x = -\frac{\beta}{\alpha}$. Ἐὰν λάβωμεν τὴν συνάρτησιν $y = \alpha x + \beta$ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως εἶναι μία εὐθεῖα καὶ ἡ εὕρεσις τῆς ρίζης τῆς ἐξισώσεως ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ σημείου τομῆς τῆς εὐθείας μὲ τὸν ἄξονα τῶν x. Εἰς τὸ σχῆμα παρίσταται ἡ εὐθεῖα $y = 3x + 3$.

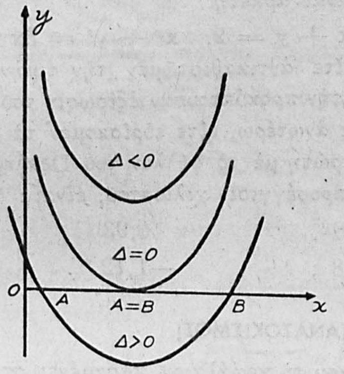


Σχ. 22

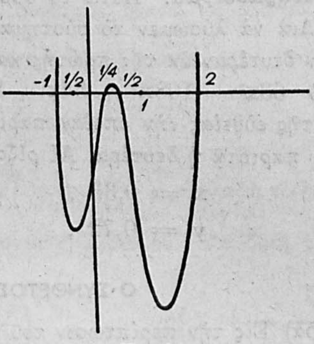
β) Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δίδεται ὑπὸ τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, $x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, φανταστικαὶ ἢ ἴσαι, ἐὰν $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ ἢ $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως αὐτῆς εἶναι μία παραβολὴ (ἴδε Ἀναλ. Γεωμ. *Ν. Σακελλαρίου*), ἥτις τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς δύο σημεῖα, ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος, ἢ δὲν ἔχει



Σχ. 23



Σχ. 24

κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν ἄξονα. Παραπλεύρως δεικνύονται αἱ τρεῖς περιπτώσεις τῆς σχετικῆς θέσεως τῶν ἀξόνων καὶ τῆς ἐν λόγῳ παραβολῆς (σχ. 23). Ἂν λάβωμεν ὡς ἀριθμητικὸν παράδειγμα τὴν συνάρτησιν $y = x^2 - 6x - 3$ (Κεφ. 3ον) αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι 6,46—0,46.

γ) Ἡ γραφικὴ μέθοδος διὰ τὴν λύσιν ἐξισώσεων βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου δὲν ὁδηγεῖ πάντοτε εἰς ἀκριβῆ ἀποτελέσματα, ὅταν χρησιμοποιῶμεν μόνον ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x. Π.χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $y = 8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - z$. Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν μόνον ἀκεραίας διαδοχικὰς τιμὰς τοῦ x, εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα (—2, 188), (—1, 0), (0, —2), (1, —6), (2, 0), (3, 220), τὰ ὁποῖα, ἐὰν τὰ τοποθετήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ χαράξωμεν τὴν καμπύλην, ἀφ' ἑνὸς μὲν δίδουν ἐσφαλμένον σχῆμα τῆς καμπύλης καὶ ἀφ' ἑτέρου παρέχουν μόνον τὰς δύο πραγματικὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως —1 καὶ 2 (σχ. 24). Οὕτως, ἐνῷ τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης εἶναι τῆς μορφῆς W καὶ αἱ τέσσαρες πραγματικαὶ ῥίζαι εἶναι —1, 1/4, 1/2, 2, αἱ ἀνωτέρω ἀκέραιαι τιμαὶ δίδουν τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης ὑπὸ μορφὴν U μὲ δύο πραγματικὰς ῥίζας —4, 2. Ἡ μέθοδος αὐτὴ καθίσταται περίσσοτερον ἀκριβὴς ὅταν ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς καμπύλης εἶναι τελειοτέρα (βλ. Κεφ. 5ον).

5. Συστήματα ἐξισώσεων

Ἡ λύσις τῶν γραμμικῶν συστημάτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἐπιτυγχάνεται εὐκόλως δι' ἀλγεβρικῶν μεθόδων, γνωστῶν ἐκ τῶν γυμνασιακῶν βιβλίων. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἓν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφήν : $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$

Τὸ ζεῦγος (x_1, y_1) εἶναι μία λύσις τοῦ συστήματος ὅταν :

$$f_1(x_1, y_1) = 0 \qquad f_2(x_1, y_1) = 0$$

δηλαδὴ τὸ σημεῖον (x_1, y_1) εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν δύο ἐξισώσεων. Ἑπομένως, διὰ τὴν γραφικὴν λύσιν τοῦ συστήματος εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα τομῆς τῶν δύο καμπυλῶν αἵτινες παριστοῦν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Τὴν γραφικὴν αὐτὴν μέθοδον ἐφαρμόζομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μία ἢ καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις εἶναι ὑπερβατικαί. Ἡ γραφικὴ μέθοδος μᾶς δίδει μίαν προσέγγισιν τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως ἢ τοῦ συστήματος, ἥτις εἰς τὰ οἰκονομικὰ ἢ βιομηχανικὰ προβλήματα εἶναι ἀρκετή.

Παράδειγμα. Ἔστω τὸ σύστημα $4x + y = 2$, $x^3 + y^3 = 3xy = 0$.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα αὐτό, εἴτε ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ x εἰς τὴν δευτέραν ἐκ τῆς πρώτης καὶ λύομεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν τοῦ τρίτου βαθμοῦ $63x^3 - 108x^2 + 54x - 8 = 0$ ὡς ἀνωτέρω, εἴτε εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ πρώτη μὲ τὸ φύλλον τοῦ Desargue τὸ ὁποῖον παριστᾷ ἡ δευτέρα. Αἱ ρίζαι, κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ, εἶναι :

$$x = 0{,}33\ , \quad 0{,}48\ , \quad 0{,}93$$
$$y = 0{,}72\ , \quad 0{,}08\ , \quad -1{,}72\ *.$$

Ο ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ (ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ)

5α) Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἁπλοῦ τόκου τὸ κεφάλαιον παραμένει σταθερὸν κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον τοῦ δανείου. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνθέτου τόκου τὸ κεφάλαιον αὐξάνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστης ἀνατοκιστικῆς—χρονικῆς περιόδου, διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ἀντιστοίχου τόκου, διαρκούσης τῆς περιόδου τοῦ δανείου. Εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς δευτέρας ἀνατοκιστικῆς περιόδου, τὸ κεφάλαιον εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῆς πρώτης ἀνατοκιστικῆς περιόδου. Ἑπομένως ὁ τόκος τῆς δευτέρας περιόδου εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ὀφειλόμενον τόκον εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης περιόδου. Ὁμοίως, εἰς τὸ τέλος ἑκάστης τῶν ἑπομένων ἀνατοκιστικῶν περιόδων τὸ κεφάλαιον συνεχῶς αὐξάνεται καὶ ἑπομένως ὁ τόκος ὁ ὀφειλόμενος εἰς τὸ τέλος μιᾶς τῶν διαδοχικῶν περιόδων εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ ἐκεῖνον τῆς προηγουμένης περιόδου.

Ἡ ἀνατοκιστικὴ χρονικὴ περίοδος καθορίζεται ἐπὶ τῇ βάσει συμφωνίας, δύναται δὲ νὰ εἶναι οἱαδήποτε χρονικὴ περίοδος, π.χ. ἔτος, ἑξαμηνία, τριμηνία κ.τ.λ. Διὰ μίαν μακρὰν χρονικὴν περίοδον, ἡ διαφορὰ μεταξὺ συνθέτου καὶ ἁπλοῦ τόκου εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη.

Θὰ δείξωμεν τὴν διαφορὰν αὐτὴν δι' ἑνὸς διαγράμματος εἰς τὸ ὁποῖον χαράσσομεν τὰς γραφικὰς παραστάσεις τοῦ ἁπλοῦ καὶ συνθέτου τόκου.

Ἔστω α τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον τοκιζόμενον μὲ ἐπιτόκιον ε %. Ἐὰν λάβωμεν πρῶτον τὴν περίπτωσιν τοῦ ἁπλοῦ τόκου, τότε εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ ἔχωμεν $\alpha + \frac{\Sigma}{100}$, εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου $\alpha + 2\frac{\varepsilon}{100}\alpha$ καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ μ-οῦ ἔτους $\alpha + \mu\frac{\varepsilon}{100}\alpha$. Δηλαδή, τὸ ἑκάστοτε κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος μιᾶς

---

* Διὰ τὴν διερεύνησιν τῶν γραμμικῶν συστημάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπαραίτητα δι' οἰκονομικὰς θεωρίας καὶ ἰδιαιτέρως τῆς θεωρίας τοῦ ἰσοζυγίου.

Βλέπε Ν. Χατζηδάκι «Μαθήματα Ἀνωτέρας Ἀλγέβρας», Pareto «Manuel d'Economie Politique» 2α ἔκδ. 1927, σελ. 5 963, Bowley «The Mathematical groundwork of economics».

χρονικῆς περιόδου εἶναι ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου

$$\alpha, \quad \alpha + \frac{\varepsilon}{100}\alpha, \quad \alpha + 2\frac{\varepsilon}{100}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad \alpha + \mu\frac{\varepsilon}{100}\alpha$$

τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ α καὶ λόγος $\frac{\varepsilon}{100}\alpha$.

Ἐὰν λάβωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνθέτου τόκου ὡς ἀνατοκιστικὴν περίοδον τὸ ἔτος, εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ ἔχωμεν κεφάλαιον $\alpha + \frac{\varepsilon}{100}\alpha$ ἢ $\alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$, εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ ἔχωμεν $\alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2$, καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ μ-οῦ ἔτους θὰ ἔχωμεν $\alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^\mu$, δηλαδὴ τὸ ἑκάστοτε κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος μιᾶς ἀνατοκιστικῆς χρονικῆς περιόδου εἶναι ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

$$\alpha, \quad \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right), \quad \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^\mu$$

τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ α καὶ λόγος $\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$.

Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἐπιτόκιον $100\varepsilon\,\%$ τότε αἱ ἀντίστοιχοι πρόοδοι γράφονται.

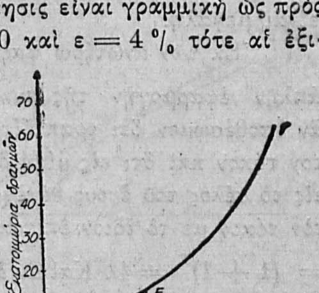
$$\alpha, \quad \alpha(1 + \varepsilon), \quad \alpha(1 + 2\varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad \alpha(1 + \mu\varepsilon)$$

$$\alpha, \quad \alpha(1 + \varepsilon), \quad \alpha(1 + \varepsilon)^2 \quad . \quad . \quad . \quad \alpha(1 + \varepsilon)^\mu$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τώρα τὸ κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς ἀνατοκιστικῆς περιόδου ὡς συνάρτησιν τοῦ χρόνου x καὶ ὀνομάσωμεν αὐτὸ y, τότε εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν τοῦ ἁπλοῦ τόκου $y = \alpha(1 + \varepsilon x)$, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν τοῦ συνθέτου $y = \alpha(1 + \varepsilon)^x$. Ἡ μὲν πρώτη συνάρτησις εἶναι γραμμικὴ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, ἡ δευτέρα ἐκθετική. Ἐὰν $\alpha = 1\,000\,000$ καὶ $\varepsilon = 4\,\%$ τότε αἱ ἐξισώσεις εἶναι

$y = 1\,000\,000$ καὶ $y = 1\,000\,000\,(1{,}04)$

Εἰς τὸ διάγραμμα (σχ. 25) ἡ εὐθεῖα ΑΒ παριστᾷ τὸν ἁπλοῦν τόκον, ἡ δὲ καμπύλη ΑΓ τὸν σύνθετον.



Σχ. 25

Ἡ κλῖμαξ τοῦ κεφαλαίου μετρεῖται εἰς ἑκατομμύρια δραχμῶν, ὁ δὲ χρόνος εἰς ἔτη. Ἡ διαφορὰ τῶν τετεταγμένων ΔΕ δεικνύει τὸ ἐπὶ πλέον ποσὸν τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνθέτου τόκου διὰ μίαν περίοδον 30 ἐτῶν. Ἐκ τοῦ διαγράμματος ἐπίσης φαίνεται ὅτι διὰ μίαν βραχυχρόνιον περίοδον ἡ διαφορὰ εἶναι μικρά. Ἀλλὰ διὰ μίαν μακροχρόνιον ἡ διαφορὰ εἶναι τεραστία.

Αἱ συναρτήσεις ὁρίζονται μόνον διὰ ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x. Θὰ ἐξετάσωμεν ἀναλυτικώτερον τὴν συνάρτησιν τοῦ συνθέτου τόκου.

Ἐὰν ἡ συχνότης τῆς ἀνατοκιστικῆς περιόδου εἶναι ν δι' ἕκαστον ἔτος τότε ὡς γνωστόν :

$$y = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{\nu x}$$

καὶ τὸ x λαμβάνει τιμὰς αἵτινες εἶναι πολλαπλάσια τοῦ $\frac{1}{\nu}$.

Διὰ τιμὰς τοῦ x αἵτινες δὲν εἶναι πολλαπλάσια τοῦ $\frac{1}{\nu}$ ἡ συνάρτησις ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος δὲν εἶναι ὡρισμένη. Τὸ κεφάλαιον ἐξαρτᾶται ἀπὸ δύο παραμέτρους, αἱ ὁποῖαι παριστοῦν τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὴν συχνότητα. Εἶναι φανερὸν ἐκ τῆς συναρτήσεως ὅτι τὸ κεφάλαιον, ἐὰν ἡ συχνότης εἶναι ἡ αὐτή, αὐξάνεται ταχύτερον ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι μεγαλύτερον. Ἐπίσης διὰ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον τὸ κεφάλαιον αὐξάνεται ταχύτερον ὅταν ἡ συχνότης εἶναι μεγαλυτέρα.

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι $\nu \to \infty$, δηλαδὴ ὅτι ἡ ἀνατοκιστικὴ περίοδος εἶναι στιγμιαία, τότε γράφομεν :

$$y = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{\nu x} = \alpha\left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right]^{\varepsilon x} = \alpha\left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^{\varepsilon x}$$

ὅπου $\mu = \frac{\nu}{\varepsilon}$.

Ὅταν $\nu \to \infty$, $\mu \to \infty$ καὶ $\underset{\mu\to\infty}{\text{ὅρ.}}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu} = e$ (Κεφ. III § 3).

Ἑπομένως, $y = \alpha e^{\varepsilon x}$ ὅταν $\nu \to \infty$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ἀνατοκισμὸς εἶναι συνεχής.

Ἡ ἔννοια τοῦ συνεχοῦς ἀνατοκισμοῦ εἶναι ἀφηρημένη καὶ ἀπέχει τῆς πραγματικότητος ἀλλὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς προσέγγισις αὐτῆς ὅταν ἡ συχνότης εἶναι μεγάλη.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω φαίνεται ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ ἀνατοκισμοῦ ἀποτελεῖ μίαν ἁπλῆν ἐφαρμογὴν τῆς συναρτήσεως e^x καὶ αὐτοῦ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ e. Οὕτως, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τραπεζίτης τις χρησιμοποιεῖ εἰς τὰς ἐργασίας του τὸν σύνθετον τόκον καὶ ὅτι εἰς μίαν δραχμὴν λαμβάνει 100 % διὰ τὴν περίοδον ἑνὸς ἔτους, εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους θὰ ἔχῃ $1 + 1 = 2$ δρ. Ἐὰν ἐπανατοκίσῃ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν τόκον μὲ τὸ ἴδιον ἐπιτόκιον εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ ἔχῃ $2 + 2 = (1 + 1)^x = 4$. Καὶ ἂν ἐπαναλάβῃ τὸ αὐτὸ ἐπὶ X ἔτη θὰ λάβῃ $(1+1)^x = 2^x$.

Ἐὰν τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, δηλαδὴ 1 δρχ., ἀνατοκίζεται καθ' ἑκάστην ἑξαμηνίαν πρὸς 50 % ἐπιτόκιον, τότε ὁ Τραπεζίτης θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης ἑξαμηνίας $1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$ δρχ. καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2$. Μετὰ x ἔτη θὰ λάβῃ $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2x}$, ποσὸν τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου. Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ τριμηνίαν μὲ

$25\ \%$ εἰς τὸ τέλος τῶν x ἐτῶν θὰ λάβῃ $\left(1+\frac{1}{4}\right)^{4x}$, ποσὸν τὸ ὁποῖον εἶναι ἀκόμη μεγαλύτερον· ἐὰν ἡ περίοδος τοῦ ἀνατοκισμοῦ εἶναι 1/365 τοῦ ἔτους πρὸς $1/365\ \%$ μετὰ x ἔτη θὰ λάβῃ $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365x}$.

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα : ἐὰν ὁ Τραπεζίτης ὑποδιαιρῇ συνεχῶς τὴν χρονικὴν ἀνατοκιστικὴν περίοδον θὰ λαμβάνῃ συνεχῶς περισσότερον ἢ ὄχι ;

Ἡ ἀπάντησις εἶναι ἀρνητική, διότι $\underset{\mu\to\infty}{\text{ὄρ.}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)=e=2{,}718\ \ldots$ καὶ ἑπομένως τὸ μεγαλύτερον ποσὸν τὸ ὁποῖον δύναται νὰ λάβῃ ὁ Τραπεζίτης εἰς x ἔτη εἶναι e^x

β) Ἓν Κοινωνικὸν ταμεῖον προσφέρει δύο εἰδῶν Ἀσφαλείας εἰς τὰ μέλη του. Τὸ πρῶτον εἶδος πρὸς 5 000 δρχ. ἐφ' ἅπαξ καὶ τὸ δεύτερον εἶδος πρὸς 500 δρχ. ἐτησίως. Ἐὰν αἱ καταθέσεις εἰς τὰς Τραπέζας ἔχουν ἐπιτόκιον $2\ \%$ μετὰ πόσα ἔτη τὸ δεύτερον εἶδος ἀσφαλείας εἶναι συμφερώτερον τοῦ πρώτου διὰ τὰ μέλη ;

Λύσις : Τὸ ποσὸν τῶν 5 000 κατατιθέμενον εἴς τινα Τράπεζαν ὕστερα ἀπὸ x ἔτη θὰ ἀνέλθῃ εἰς $5\,000\,(1{,}02)^x$. Ἡ δευτέρα ἀσφάλεια θὰ ἀξίζῃ μετὰ x ἔτη $500\,x$. Ἑπομένως, ἡ δευτέρα θὰ εἶναι συμφερωτέρα τῆς πρώτης ἐὰν

$$500\,x \geqslant 5000\,(1{,}02)^x$$

ἢ

$$5\,x \geqslant 50\,(1{,}02)^x$$

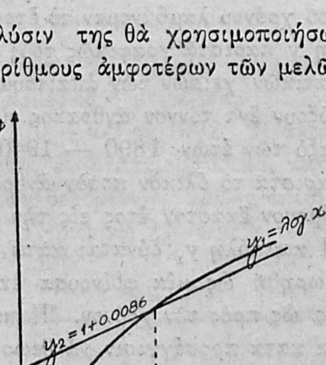
Ἡ ἐξίσωσις εἶναι ὑπερβατικὴ καὶ διὰ τὴν λύσιν της θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν γραφικὴν μέθοδον. Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ὡς πρὸς βάσιν 10 καὶ ἡ ἐξίσωσις γράφεται.

$$\text{λογ}\,5+\text{λογ}\,x \geqslant \text{λογ}\,50+x\,\text{λογ}\,1{,}02$$

ἢ

$$\text{λογ}\,x \geqslant \text{λογ}\,10+x\,\text{λογ}\,1{,}02=1+0{,}008$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν λύσιν σχεδιάζομεν τὰς συναρτήσεις $y_2=1+0{,}0086\,x$ καὶ $y_1=\text{λογ}\,x$ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀξόνων. Ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου τῆς τομῆς των δίδει τὴν λύσιν, αἱ καμπύλαι συναντῶνται περίπου εἰς τὸ σημεῖον $x=13$ καὶ ἑπομένως ὅταν $x\geqslant 13$ ἡ ἐφ' ἅπαξ ἀσφάλεια εἶναι συμφερωτέρα.



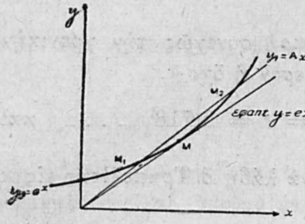
Σχ. 26

Εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐχρησιμοποιήσαμεν τὴν λογαριθμικὴν συνάρτησιν μὲ βάσιν 10. Ἀλλὰ εἰς προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμεν Διαφορικὸν ἢ Ὁλοκληρωτικὸν λογισμόν, ἡ φυσικὴ λογαριθμικὴ συνάρτησις εἶναι προτιμωτέρα διὰ λόγους τοὺς ὁποίους θὰ ἴδωμεν εἰς ἑπόμενον κεφάλαιον περὶ παραγώγων.

6. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $Ax=e^x$

Πρόβλημα 1ον) Ἡ ἐξίσωσις $Ax=e^x$ εἶναι ὑπερβατικὴ ἐξίσωσις, ὡς πρὸς ἄγνωστον x. Ἐὰν ὀνομάσωμεν $y_1=Ax$ καὶ $y_2=e^x$ τότε ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως εἶναι λύσις τοῦ συστήματος καὶ ἑπομένως ἐξισώσεως.

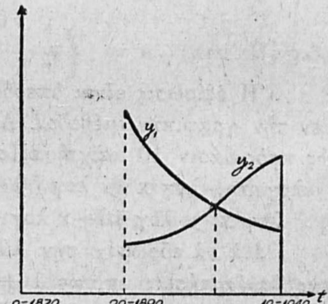
Ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων εἶναι e καὶ ἡ ἐξίσωσίς της $y = ex$. Ἑπομένως ἐὰν $A > e$ τότε ἔχομεν δύο σημεῖα τομῆς, ἐὰν $A = e$ τότε ἔχομεν ἓν σημεῖον ἐπαφῆς, καὶ ἐὰν $A < e$ τὸ σημεῖον τομῆς εἶναι φανταστικόν.



Σχ. 27

Προβλήματα τῶν ὁποίων συνήθως ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως τῆς ἀνωτέρω μορφῆς προέρχονται ἀπὸ στατιστικὰ δεδομένα τῶν ὁποίων αἱ γραφικαὶ παραστάσεις δύνανται κατὰ προσέγγισιν νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς ἐκθετικαί. Ἡ συνεχὴς ἐκμηχανοποίησις, κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη, τῶν μέσων τῆς παραγωγῆς συνεχῶς συντελεῖ εἰς τὴν ἐλάττωσιν τῶν ἐργατικῶν χειρῶν πρὸς παραγωγὴν πρώτων ὑλῶν, π.χ. ἄνθρακος, σιδήρου κ.λ.π., ἐνῷ ἡ ἀνάπτυξις τῆς βιομηχανίας ἀπαιτεῖ συνεχῶς μεγαλυτέρας ποσότητας πρώτων ὑλῶν.

Ἑπομένως ἡ μὲν ἐλάττωσις τῶν ἐργατικῶν χειρῶν εἶναι φθίνουσα συνάρτησις ὡς πρὸς τὸν χρόνον, ἡ δὲ ἀπαιτουμένη ποσότης πρώτων ὑλῶν εἶναι αὔξουσα, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι θὰ παραμένουν αἱ αὐταί. Οὕτως, ἡ ἐκμηχανοποίησις καὶ αἱ ἀνάγκαι τῆς βιομηχανίας εἶναι δύο ἀντιτιθέμενοι παράγοντες εἰς τὴν χρησιμοποίησιν ἐργατικῶν χειρῶν. Εἰς τὸ διάγραμμα εἰς τὸ ὁποῖον ὡς ἀρχὴν τοῦ χρόνου λαμβάνομεν τὸ ἔτος 1870, ἡ καμπύλη y παριστᾷ γραφικῶς τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἐργατικῶν χειρῶν τῶν ἀπαιτουμένων διὰ νὰ ἐξορύξουν ἕνα τόννον ἄνθρακος εἰς μίαν ὥραν, μεταξὺ τῶν ἐτῶν 1890 — 1940. Ἡ καμπύλη y_2 παριστᾷ τὸ ὁλικὸν ποσὸν ἄνθρακος τὸ ἐξορυσσόμενον ἕκαστον ἔτος εἰς τὴν αὐτὴν περίοδον. Ἡ καμπύλη y_1 δύναται κατὰ προσέγγισιν νὰ θεωρηθῇ ὡς μία φθίνουσα ἐκθετικὴ συνάρτησις ὡς πρὸς τὸν χρόνον. Ἡ καμπύλη y_2 δύναται κατὰ προσέγγισιν νὰ θεωρηθῇ ὡς μία αὔξουσα ἐκθετικὴ μὲ σημεῖον καμπῆς.



Σχ. 28

Ὥστε δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἐξισώσεις τῶν καμπυλῶν τὰς κάτωθι :

$$y_1 = \frac{\lambda_1}{t^\gamma}, \qquad y_2 = \frac{\lambda_2}{1 + e^{\alpha - \beta t}} \tag{1}$$

ὅπου λ_1, λ_2, α, β, γ, εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $(\alpha > \gamma > 1)$.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατικῶν χειρῶν τῶν χρησιμοποιουμένων καθ' ὥραν εἰς ἓν ἔτος, εἰς τὴν περίοδον ἀπὸ 1890—1940 δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως :

$$y = y_1 y_2 = \frac{\lambda}{t^\gamma(1+e^{\alpha-\beta t})}, \qquad \lambda = \lambda_1 \lambda_2 \tag{2}$$

Ἐὰν ζητήσωμεν εἰς τὴν περίοδον αὐτὴν τὸ ἔτος κατὰ τὸ ὁποῖον χρησιμοποιοῦνται οἱ περισσότεροι ἀνθρακωρύχοι, θὰ πρέπῃ νὰ εὕρωμεν τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως (2) (Κεφ. 5. 8, Γ). Ἡ συνάρτησις (2) εἶναι συνεχὴς καὶ ἑπομένως:

$$y' = \lambda \frac{(1 + e^{\alpha-\beta t})\,\gamma\, t^{\gamma-1} - t^{\gamma}\, \beta\, e^{\alpha-\beta t}}{t^{\gamma}(1 + e^{\alpha-\beta t})} = 0$$

Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ t διὰ τὴν ὁποίαν ὁ παρονομαστὴς γίνεται ἄπειρος, θὰ πρέπῃ ὁ ἀριθμητὴς $t^{\gamma-1}[\,\gamma(1 + e^{\alpha-\beta t}) - \beta\, t\, e^{\alpha-\beta t} = 0.$

Ἡ ρίζα $t = 0$ ἀπορρίπτεται ἐπειδὴ κεῖται ἔξω τῆς χρονικῆς περιόδου εἰς τὴν ὁποίαν μελετῶμεν τὸ πρόβλημα καὶ ἡ ὁποία πράγματι ἀρχίζει εἰς τὴν τιμὴν $t = 20$ (1870). Αἱ ἄλλαι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως δίδονται ὑπὸ τῆς

$$\gamma(1 + e^{\alpha-\beta t} - \beta\, t\, e^{\alpha-\beta t} = 0 \qquad \text{ἢ} \qquad e^{\alpha-\gamma} e^{\gamma-\beta t}(\gamma - \beta t) + \gamma = 0.$$

Θέτομεν $\gamma - \beta\,\tau = -\omega$ (3) καὶ $A = \dfrac{e^{\alpha-\gamma}}{\gamma}$ καὶ ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς $A\omega = e^{\omega}$.

Ἐὰν λάβωμεν ἀπὸ στατιστικὰ δεδομένα τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς

$$\alpha = 3{,}57\,, \quad \beta - 0{,}093\,, \quad \gamma = 1{,}06\,, \quad \text{τότε} \quad A = \frac{e^{3{,}57-1{,}06}}{1{,}06} = 11{,}61 > e$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται $e^{\omega} = 11{,}61\,\omega$ καὶ ἑπομένως ἔχει δύο πραγματικὰς ρίζας, $11{,}61 > e$.

Ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν γραφικῶς, ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν $\omega_1 = 0{,}10$ καὶ $\omega_2 = 3{,}8$. Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν

$$t_1 = 12 \text{ ἔτη} \qquad \text{καὶ} \qquad t_2 = 52 \text{ ἔτη}$$

Ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς y_1 βλέπομεν ὅτι ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον διὰ $t = 13$ καὶ μέγιστον διὰ $t = 52$. Ἑπομένως ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ἀνθρακωρύχων ἐχρησιμοποιήθη κατὰ τὸ ἔτος 1870 + 52 = 1922. Ἡ ἀκρίβεια τῆς λύσεως ἑνὸς προβλήματος τῆς μορφῆς αὐτῆς ἐξαρτᾶται, φυσικά, κατὰ πρῶτον λόγον ἀπὸ τὴν προσέγγισιν τῶν στατιστικῶν δεδομένων, καθὼς ἐπίσης ἀπὸ τὸν τρόπον λύσεως τῆς ὑπερβατικῆς ἐξισώσεως. Ἡ γραφικὴ λύσις μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως μᾶς δίδει μίαν ἀρκετὰ καλὴν προσέγγισιν τῶν ριζῶν, ἀλλὰ θὰ πρέπῃ νὰ ἀναφέρωμεν ὅτι ὑπάρχουν καὶ μέθοδοι αἵτινες μᾶς δίδουν μεγαλυτέραν προσέγγισιν, π.χ. ἡ μέθοδος τοῦ Newton, ἡ μέθοδος τῶν χορδῶν κλπ. (Βλ. Salvatori : The Math. solution of Eng. Problem. Κεφ. III).

Πρόβλημα 2ον) Ὁ κατωτέρω πίναξ δεικνύει τὸν ἀριθμὸν ὡρῶν ποὺ χρειάζονται διὰ τὴν κλῶσιν, βαφὴν καὶ ὕφανσιν 1 000 πήχεων ἐξ ἑκάστου εἴδους υφασμάτων Α, Β, Γ (περιλαμβανομένων καθυστερήσεων ἐκ τῆς ἀλλαγῆς ἐργατικῶν ὁμάδων κ.τ.λ.).

Πίναξ 8

Α	Β	Γ	
1	2	1	Κλῶσις
2	1	3	Βαφὴ
3	1	2	Ὕφανσις

Ὁ διευθυντὴς τοῦ ἐργοστασίου θέλει νὰ γνωρίζῃ πόσους πήχεις ἐξ ἑκάστου εἴδους δύναται νὰ παραγάγῃ τὸ ἐργοστάσιον κατὰ τὴν περίοδον ἑνὸς ὀκταώρου (ἐργατικὴ ἡμέρα), χωρὶς ἀνάπαυσιν ;

Λύσις : Ἐὰν ὀνομάσωμεν x, y, ω, τὸν ἀριθμὸν τῶν πήχεων εἰς χιλιάδας ἀπὸ κάθε εἶδος, οἵτινες δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν εἰς ἕνα ὀκτάωρον (ἐργατικὴ ἡμέρα), τότε διὰ τὴν κλῶσιν τῶν πήχεων αὐτῶν θὰ χρειασθοῦν $(x + 2y + \omega)$ ὧραι. Ἐπειδὴ τὸ κλωστήριον θὰ ἐργασθῇ ὀκτὼ ὥρας : $x + 2y + \omega = 8$
Μὲ τὸν ἴδιον συλλογισμὸν διὰ τὴν βαφὴν θὰ ἔχωμεν : $2x + y + 3\omega = 8$
καὶ διὰ τὴν ὕφανσιν : $3\omega + y + 2\omega = 8$
Ἑπομένως αἱ τρεῖς ἄγνωστοι ποσότητες εἶναι ρίζαι τοῦ συστήματος :

$$\begin{aligned} x + 2y + \omega &= 8 \\ 2x + y + 3\omega &= 8 \\ 3x + y + 2\omega &= 8 \end{aligned}$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x ἐκ τῆς πρώτης εἰς τὴν δευτέραν καὶ τρίτην, εὑρίσκομεν :

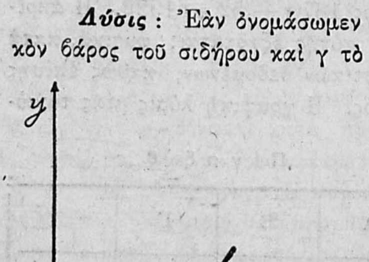
$$\begin{aligned} 3y - \omega &= 8 \\ 5y + \omega &= 16 \end{aligned}$$

Λύοντες τὸ σύστημα αὐτό, εὑρίσκομεν $y = 3$ καὶ $\omega = 1$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν y καὶ ω εἰς τὴν πρώτην λαμβάνομεν $x = 1$. Ἡ λύσις τοῦ συστήματος $x = 1$, $y = 3$, $\omega = 1$, εἶναι παραδεκτή, ἀφοῦ ὅλαι αἱ τιμαὶ εἶναι θετικαί. Μία ἀρνητικὴ τιμὴ ὁποιασδήποτε μεταβλητῆς θὰ ἐδείκνυε τὸ ἀδύνατον λύσεως τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 3ον). Ἑταιρία τις κατασκευάζει θαλασσίους χαλυβδίνους σημαντῆρας. Ἐὰν τὸ σχῆμα τῶν σημαντήρων εἶναι κυβικὸν πλευρᾶς 2 τ.μ. νὰ προσδιορισθῇ τὸ πάχος τῶν ἑδρῶν ὥστε ὁ σημαντὴρ νὰ ἐπιπλέῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης.

Λύσις : Ἐὰν ὀνομάσωμεν α τὴν ἐξωτερικὴν πλευρὰν τοῦ κύβου, ω τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σιδήρου καὶ γ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος καὶ ἐξισώσωμεν τὸ βάρος τοῦ σημαντῆρος μὲ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀρχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὸ πάχος x τοῦ σημαντῆρος :



Σχ. 29

$$\omega \left[\alpha^3 - (\alpha - 2x)^3 \right] = \gamma \alpha^3$$

Δι᾿ ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν τῶν $\alpha = 2$ καὶ $\frac{\gamma}{\omega} = 1{,}85$ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τρίτου βαθμοῦ :

$$8x^3 - 24x^2 + 24x - 1{,}02 = 0$$

Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς χρησιμοποιοῦμεν τὴν γραφικὴν μέθοδον. Ἐκ τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης βλέπομεν ὅτι μόνον μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι πραγματική. Αἱ ἄλλαι δύο ρίζαι εἶναι φανταστικαί. Ὡς ἐκ τούτου ἡ μόνη παραδεκτὴ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι $x = 0{,}044$.

Ἡ λύσις αὐτὴ κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ εἶναι ἀρκετὰ ἀκριβὴς διὰ τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν τοῦ προβλήματος. Εἰς τὸ διάγραμμα χρησιμοποιοῦμεν διαφορετικὰς κλίμακας διὰ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν καὶ τὴν συνάρτησιν. Ἡ κλῖμαξ τοῦ ἄξονος τῶν x εἶναι μεγαλυτέρα, διότι ἡ ἀναμενομένη λύσις ἐκ τῆς φύσεώς της πρέπει νὰ εἶναι μικρὸς ἀριθμός.

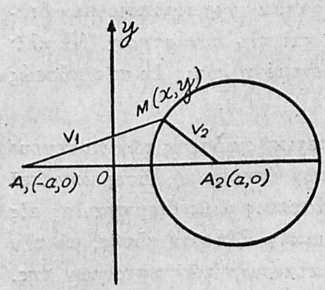
Πρόβλημα 4ον) Τὸ ἑπόμενον πρόβλημα, διαφορετικῆς φύσεως τῶν προηγουμένων, ἀνήκει εἰς μίαν κατηγορίαν προβλημάτων τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀπαιτεῖ γνῶσιν Γεωμετρίας καὶ ἰδίως Ἀναλυτικῆς. Ἡ ἐγκατάστασις μιᾶς βιομηχανίας εἴς τινα χώραν εἶναι στενὰ συνδεδεμένη μὲ τὸ συγκοινωνιακὸν δίκτυον αὐτῆς, μὲ τὴν τοποθεσίαν τῶν πρώτων ὑλῶν καθὼς καὶ μὲ τὴν κατανομὴν τῶν κατοίκων της. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ χώρα εἶναι ἐπίπεδος (πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν ἀπέχει τῆς πραγματικότητος διὰ τὴν κατωτέρω ἀνάλυσιν), τότε τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ ἀνάγονται εἰς προβλήματα τῆς ἐπιπέδου γεωμετρίας ἢ τοῦ χώρου τῶν δύο διαστάσεων. Ἡ ἔννοια τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου καθὼς καὶ αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ ἔχουν τὸν πρωτεύοντα ρόλον εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν. Οὕτως, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι μία καὶ ἡ αὐτὴ ἐπιχείρησις ἔχει δύο ἐργοστάσια εἰς δύο διαφορετικὰς πόλεις, π.χ. Ἀθήνας καὶ Βόλον, τὰ ὁποῖα παράγουν τὸ αὐτὸ προϊὸν ἀλλὰ ὑπὸ διαφορετικὰς συνθήκας παραγωγῆς καθὼς καὶ μεταφορικῶν ἐξόδων, τότε εἶναι φυσικὸν διὰ τὴν Ἑταιρίαν νὰ ἐξετάσῃ τὸ πρόβλημα τοῦ συμφερωτέρου τρόπου διανομῆς εἰς τὰς ἀγοράς της ἐν σχέσει μὲ τὴν θέσιν τῶν ἐργοστασίων της, δηλαδὴ νὰ ἐξακριβώσῃ ποίας περιοχὰς τῆς χώρας θὰ πρέπῃ νὰ τροφοδοτῇ ἐκ τοῦ ἐργοστασίου Ἀθηνῶν καὶ ποίας ἐκ τοῦ ἐργοστασίου Βόλου.

Ἑπομένως, θὰ πρέπῃ νὰ προσδιορίσωμεν μίαν γραμμήν, ἥτις νὰ χωρίζῃ τὴν ὅλην περιοχὴν τῶν καταναλωτῶν εἰς δύο περιοχάς. Τὴν περιοχὴν διανομῆς τοῦ ἐργοστασίου Ἀθηνῶν καὶ τὴν περιοχὴν διανομῆς ἐργοστασίου Βόλου. Γενικώτερον, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ δύο ἐργοστάσια τῆς αὐτῆς Ἑταιρίας ἅτινα παράγουν τὸ αὐτὸ ἀγαθὸν εἶναι ἐγκατεστημένα εἰς δύο θέσεις A_1 καὶ A_2 ἀπεχούσας 2α μίλλια. Ὑποθέτομεν ὅτι «αἱ συνθῆκαι παραγωγῆς» διὰ τὰ ἐργοστάσια A_1 καὶ A_2 εἶναι αἱ αὐταὶ καὶ ὅτι ἡ τιμὴ ἐργοστασίου κατὰ μονάδα εἶναι λ, καθὼς ἐπίσης ὅτι ἡ ἀξία τῶν μεταφορικῶν εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τῶν καταναλωτῶν ἀπὸ τοῦ ἐργοστασίου καὶ ὅτι αἱ ἀποστάσεις εἶναι εὐθύγραμμοι. Ἡ τιμὴ τῶν μεταφορικῶν δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἡ αὐτή. Οὕτως, ἔστω ὅτι ἡ τιμὴ τῶν μεταφορικῶν ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον A_1 κατὰ μονάδα προϊόντος κατὰ μίλιον εἶναι τ_1 καὶ τοῦ ἐργοστασίου A_2 εἶναι τ_2.

Διὰ καταναλωτὴν εὑρισκόμενον ν_1 μίλια ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον A_1 καὶ ν_2 μίλια ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον A_2, ἡ ἀξία τῆς μονάδος τοῦ προϊόντος τοῦ ἐργοστασίου A_1 διὰ τὸν καταναλωτὴν αὐτὸν θὰ εἶναι $(\lambda + \nu_1 \tau_1)$ δρχ., ἐνῶ τοῦ ἐργοστασίου A_2 θὰ εἶναι $(\lambda + \nu_2 \tau_2)$ δρχ. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ καταναλωτὴς θὰ ἀγοράσῃ εἰς τὴν χαμηλοτέραν τιμὴν τοῦ προϊόντος, ἡ διαχωριστικὴ γραμμὴ τῶν δύο περιοχῶν θὰ εἶναι ἡ γραμμὴ διὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο ἀξίαι εἶναι αἱ αὐταί. Ἄρα ἡ γραμμὴ αὐτὴ θὰ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων διὰ τὰ ὁποῖα :

$$\lambda + \nu_1 \tau_1 = \lambda + \nu_2 \tau_2 \qquad \text{ἢ} \qquad \nu_1 \tau_1 = \nu_1 \tau_2$$

Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἄξονα τῶν **x** τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τῶν δύο ἐργοστασίων καὶ ὡς ἄξονα τῶν y τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς (Σχ. 30), τότε



Σχ. 30

$$\nu_1 = \sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2}\,, \qquad \nu_2 = \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}$$

καὶ δι᾽ ἀντικαταστάσεως

$$\tau_1 \sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2} = \tau_2 \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}$$

ἢ $\tau_1(x_2 + y^2 + 2\alpha x + \alpha^2) = \tau_2(x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2)$

ἢ $x^2 + y^2 - 2\alpha \dfrac{\tau_2^2 + \tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2} x + \alpha^2 = 0$

Ἐὰν θέσωμεν

$$6 = \frac{\tau_2^2 + \tau_1^2}{\tau_2^2 + \tau_1^2}\alpha \quad \text{τότε} \quad x^2 + y^2 - 26x + \alpha^2 = 0$$

ἥτις εἶναι ἡ ἐξίσωσις περιφερείας μὲ κέντρον (6, 0) καὶ ἀκτῖνα $\sqrt{6^2 - \alpha^2}$

Ἐὰν $\tau_2 > \tau_1$ τότε $6 > \alpha$ καὶ ἡ περιφέρεια κεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἄξονος τῶν y ἐγκλείουσα τὸ ἐργοστάσιον A_2.

Διότι κάθε σημεῖον ἐκτὸς τῆς περιφερείας,

$$\tau_1\nu_1 - \tau_2\nu_2 < 0 \quad \text{ἢ} \quad \tau_1\nu_1 < \tau_2\nu_2 \quad \text{ἢ} \quad \lambda + \tau_1\nu_1 < \lambda + \tau_2\nu_2$$

καὶ ἑπομένως τὸ ἐργοστάσιον A_1 τροφοδοτεῖ τὴν περιοχὴν τῶν καταναλωτῶν τὴν κειμένην ἐκτὸς τῆς περιφερείας. Διὰ κάθε σημεῖον ἐντὸς τῆς περιφείας,

$$\tau_1\nu_1 - \tau_2\nu_2 > 0 \quad \text{ἢ} \quad \tau_1\nu_1 > \tau_2\nu_2 \quad \text{ἢ} \quad \lambda + \tau_1\nu_1 > \lambda + \tau_2\nu_2$$

καὶ ἑπομένως τὸ ἐργοστάσιον A_2 τροφοδοτεῖ τὴν περιοχὴν τὴν κειμένην ἐντὸς τῆς περιφερείας. Εἶναι φανερὸν ὅτι δι᾽ ἀλλαγῆς τῶν δεδομένων δυνάμεθα νὰ δημιουργήσωμεν μίαν σειρὰν προβλημάτων τῆς μορφῆς αὐτῆς (βλ. πρόβλ. 16, 17, 18) *.

((Συνεχίζεται)

* Βλέπε ἄρθρον Καθηγ. Schneider «Bemerkungen zu einer Theorie der Raum-Wirtschaft», Econometrica 1935.