ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΙ
ΚΟΙΝΩΝΙΚΑΙ
ΤΕΧΝΙΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΑΙ

ΜΗΝΙΑΙΑ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ
ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΙΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΗΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΣΧΟΛΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΝ ΕΤΟΣ 1957—1958	ΜΑΡΤΙΟΣ – ΑΠΡΙΛΙΟΣ 1958	Η' ΤΟΜΟΣ	ΑΡΙΘ. ΤΕΥΧΟΥΣ 7-8

Η ΘΕΜΕΛΙΩΣΙΣ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΠΛΗΘΩΝ ΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΗΣ ΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΡΟΠΩΝ

Ὑπὸ Κ. Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

Γενικά. 1. Κατὰ κανόνα, σχεδόν, ἀπαράβατον εἰς τὴν Στατιστικὴν σήμερον ἐπιδιώκομεν νὰ ἐξακριβώσωμεν τὴν Δομὴν (structure) ἑνὸς συνόλου—πληθυσμοῦ—μιᾶς ἰδιότητος, ποσοτικῶς ἐκφραζομένης, ἐπαγωγικῶς, συναρτήσει ὡρισμένης παραμέτρου δείγματος, *κατὰ τύχην ληφθέντος ἀπὸ τοῦ συνόλου τούτου*—ἀπὸ τοῦ πληθυσμοῦ ὡς εἴθισται τὸ σύνολον νὰ ἀποκαλῆται. Ἡ *Δομὴ τοῦ πληθυσμοῦ* ἐξακριβοῦται τώρα διὰ τῆς συγκρίσεως τῆς παραμέτρου τοῦ δείγματος καὶ τῆς ἀντιστοίχου ὁμοειδοῦς παραμέτρου τοῦ πληθυσμοῦ, βάσει τῆς *ὑποθέσεως μηδέν*[1], ὁπότε, ἂν τὸ δεῖγμα, ὅπερ διαθέτομεν, ἔχει ληφθῆ ἀπὸ τοῦ ὑπ' ὄψει πληθυσμοῦ, ἡ διαφορὰ τῶν δύο ὁμοειδῶν παραμέτρων πρέπει νὰ εἶναι *στατιστικῶς ἀσήμαντος*, τουτέστιν νὰ ἔχῃ μεγάλην πιθανότητα (μείζονα δεδομένης συμβατικῆς τοιαύτης, παρ. χάριν 5 %, ἢ 1 %) νὰ ἔχῃ προέλθει ἐκ τῆς καθαρᾶς τύχης (Random).

Ἐὰν ὅθεν ἔχει ληφθῆ ὡς ἐπίπεδον σημαντικότητος τὸ 5 %, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἂν ἐνεργήσωμεν ἀπείρους τὸ πλῆθος λήψεις, ἰσοπληθῶν δειγμάτων, μόνον εἰς τὰ 5 % ἐκ τούτων ἡ τιμὴ τῆς παραμέτρου τῶν δειγμάτων θὰ εἶναι μείζων κατὰ πολὺ τῆς τοιαύτης τῆς παραμέτρου τοῦ πληθυσμοῦ καὶ ἐπειδὴ εἶναι τοῦτο δύσκολον δι' ἑνὸς μόνον δείγματος νὰ ἐκτιμηθῇ, ἡ *ἄγνωστος* παράμετρος τοῦ πληθυσμοῦ, διότι εἰς τοῦτο κατατείνομεν ἐπαγωγικῶς, συναρτήσει

[1] Γενικῶς ὁ ὅρος οὗτος ἀναφέρεται πρὸς ὡρισμένην τινὰ ὑπόθεσιν ἥτις τελεῖ ὑπὸ ἔλεγχον, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν παραλλαγὴν αὐτῆς ἥτις ἔχει προκύψει ἐκ τῶν γεγονότων. Ἐὰν π.χ. ἡ παράμετρος τοῦ δείγματος εἶναι Θ ἐλέγχεται ἡ πιθανότης νὰ ἔχῃ προκύψει τὸ δεῖγμα τοῦτο ἐκ πληθυσμοῦ ἔχοντος ὁμώνυμον παράμετρον τὴν Θ_0, δηλ. ἐὰν ἡ διαφορὰ $\Theta - \Theta_0$ ἔχῃ μεγάλην πιθανότητα, μείζονα τῆς συμβατικῆς τοιαύτης 5 % ἢ 1 % νὰ ἔχῃ προέλθει ἐκ τῶν τυχαίων κυμάνσεων τῆς δειγματοληψίας, ἢ τοὐναντίον νὰ ἔχῃ μικροτέραν τοιαύτην πιθανότητα. Κατὰ τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν εἶναι πάνυ ἀπίθανον ἡ τοιαύτη διαφορὰ νὰ ὀφείλεται εἰς μόνην τὴν τύχην. Κατὰ συνέπειαν τεκμαίρεται ὅτι τὸ ὑπ' ὄψει δεῖγμα δὲν ἔχει προέλθει ἐκ τοῦ ὑπ' ὄψει πληθυσμοῦ, διότι ἡ διαφορὰ τῶν ὁμωνύμων παραμέτρων εἶναι *στατιστικῶς σημαντική*. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ δομὴ τοῦ δείγματος εἶναι διάφορος τῆς δομῆς τοῦ ὑπ' ὄψει πληθυσμοῦ, ἣν ἐπιδιώκομεν νὰ γνωρίσωμεν, συναρτήσει τῆς τοιαύτης τοῦ δείγματος, συνοψιζομένης εἰς τὴν ὑπ' ὄψει παράμετρον.

τῶν δεδομένων τοῦ δείγματος, καθορίζομεν *δύο ὅρια*: *Ἓν μέγιστον* καὶ *ἓν ἐλάχιστον*, μεταξὺ τῶν ὁποίων θὰ περιλαμβάνεται, μετὰ δεδομένης πιθανότητος, ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου παραμέτρου τοῦ πληθυσμοῦ. Τὰ ὅρια ταῦτα καλοῦνται *διάστημα ἐμπιστοσύνης, ὅρια ἢ περιοχαὶ παραδοχῆς* (Fiducial limits ἢ Confidence limits καὶ Regions of acceptance). Ἐὰν ὅθεν συμβατικῶς θεωρηθῇ τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης 95%, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἂν λάβωμεν ἄπειρα τὸ πλῆθος, ἰσοπληθῆ ὅμως δείγματα ἀπό τινος πληθυσμοῦ, εἰς τὰ 95% τούτων ἡ ἄγνωστος τιμὴ τῆς παραμέτρου τοῦ πληθυσμοῦ θὰ περιλαμβάνεται ἐντὸς τῶν, a priori, καθορισθέντων ὁρίων καὶ μόνον εἰς τὰ 5% θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος ἐμπιστοσύνης αὐτοῦ καὶ δὴ εἰς τὰ 2,5% θὰ εἶναι κατωτέρα τοῦ ἐλάσσονος ὁρίου καὶ εἰς τὰ 2,5% μείζων τοῦ μείζονος ὁρίου.

2. Ἡ θεμελίωσις τῶν κριτηρίων σημαντικότητος τῶν *πολυπληθῶν δειγμάτων* ἑδράζεται ἐπὶ τοῦ καλουμένου *κεντρικοῦ ὁρικοῦ θεωρήματος*, καθ' ὅ, ἐὰν ἀπό τινος *ἀπείρου* πληθυσμοῦ (ἐννοεῖται ἰδιότητός τινος ποσοτικῶς ἐκφραζομένης) λάβωμεν *ἄπειρα* κατ' ἀριθμόν, ἰσοπληθῆ ὅμως δείγματα, τότε ἡ κατανομὴ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ὅμως παραμέτρου τῶν καθ' ἕκαστον δειγμάτων ἀκολουθεῖ τὸν Νόμον τοῦ Gauss - Laplace, μὲ μέσον τὴν ἀντίστοιχον παράμετρον τοῦ πληθυσμοῦ καὶ διακύμανσιν ταύτης, συνδεομένην δι' ὡρισμένης σχέσεως πρὸς τὴν διακύμανσιν τοῦ πληθυσμοῦ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἰσχύει, ἀσχέτως ἂν ὁ πληθυσμὸς ἀκολουθῇ ἢ ὄχι τὸν Νόμον τῶν Gauss - Laplace, μὲ μόνον περιορισμὸν νὰ εἶναι *ἄπειρος*, τὰ δείγματα *ἄπειρα τὸ πλῆθος* καὶ τὸ *μέγεθος ἑκάστου δείγματος* νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλύτερον, τεῖνον πρὸς τὸ ἄπειρον.

3. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἐλαχίστων προεισαγωγικῶν ἐννοιῶν, ἐρχόμεθα τώρα εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς *γεννητρίας συναρτήσεως ῥοπῶν* (Moment generating function) (*).

Ἀρχικῶς ἡ γεννήτρια συνάρτησις εἶχε τὴν ἀκόλουθον μορφήν:

$$\Gamma(\theta) = \Gamma(\theta, \varphi) = \sum_i \varphi(x_i)\theta^{x_i} \text{ (δι' ἀσυνεχῆ τυχαῖα μεταβλητά)},$$

ὅπου $\varphi(x_i)$ ἡ πυκνότης πιθανότητος καί:

$$\Gamma(\theta) = \int_R \varphi(x)\theta^x dx \text{ (διὰ συνεχῆ τυχαῖα μεταβλητά)},$$

τῆς ὁλοκληρώσεως ἐκτεινομένης καθ' ὅλην τὴν τάξιν R τῶν δυνατῶν τιμῶν τῆς x.

Ἐὰν νῦν τεθῇ: $\theta = e^t$, τότε:

$$\Gamma(e^t) = E(e^{tx}) = \Sigma\varphi(x)e^{tx} \text{ ἢ } \int_R \varphi(x)e^{tx}dx$$

(ἀναλόγως ἂν πρόκειται περὶ ἀσυνεχῶν ἢ συνεχῶν τυχαίων μεταβλητῶν),

---

(*) Ἡ ἔννοια τῆς γεννητρίας συναρτήσεως φαίνεται ὅτι τὸ πρῶτον εἰσήχθη ὑπὸ τοῦ Cauchy εἰς πλεῖστα ὑπομνήματα ὑποβληθέντα εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Ἐπιστημῶν τὸ 1853. Βραδύτερον τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα τῆς e^{tx}, δηλ. $E(e^{tx})$ ὁ H. Poincaré ἐκάλεσε *χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν* (H. Poincaré, Calcul des probabilités, 1912, σελ. 206). Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τοῦ Poincaré ἐτροποποιήθη βραδύτερον ὑπὸ τοῦ P. Levy, τὸ 1923, κληθείσης ὡς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως τῆς $E(e^{itx})$ (Calcul des probabilités, σελ. 161), ὅπου $i = \sqrt{-1}$. Ἡ $E(e^{itx})$ ἐμφανίζει ἔναντι τῆς $E(e^{tx})$ ὡρισμένα ἀναλυτικὰ πλεονεκτήματα, ἰδίως κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος ἀντιστροφῆς τοῦ Fourier.

ἢ $$E(e^{tx}) = \int_R \left(1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \dots\right)\varphi(x)dx$$

$$= \int_R \varphi(x)dx + t\int_R \varphi(x)xdx + \frac{t^2}{2!}\int_R \varphi(x)x^2dx + \frac{t^3}{3!}\int_R \varphi(x)x^3dy + \dots$$

$$= 1 + t\nu_1 + \frac{t^2}{2!}\nu_2 + \frac{t^3}{3!}\nu_3 + \dots, \quad \text{διότι} \int \varphi(x)dx = 1,$$

ἀλλὰ $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ εἶναι αἱ ροπαὶ 1ης, 2ας, 3ης, ... τάξεως περὶ τὴν αὐθαίρετον ἀρχὴν $x = o$. Ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τῆς (e^{tx}) καλεῖται *γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν*, ἀρκεῖ ὅπως τὸ ἄθροισμα ἢ τὸ ὁλοκλήρωμα συγκλίνῃ καθ' ὅλην τὴν τάξιν τοῦ t. Βάσει τῶν ἄνω προκύπτει ὅτι ἡ ροπὴ r τάξεως περὶ τὴν αὐθαίρετον ἀρχὴν $x = o$ εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ $t^r/_{r!}$ δηλ. τὸ ν_r.

4. Δυνάμεθα, συνεπῶς, εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα νὰ καλῶμεν τὸ $\varphi(x)dx$ *πυκνότητα πιθανότητος* τοῦ τυχαίου μεταβλητοῦ x καὶ νὰ θεωρῶμεν τὸ E ὡς *γραμμικὸν ἐκτελεστὴν* (Linear operator). Ἤδη ζητήσωμεν τὴν γεννήτριαν συνάρτησιν ροπῶν τῆς κατανομῆς τῶν Gauss - Laplace. Πρὸς τοῦτο θέτομεν :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{ὅτε :}$$

$$E(e^{tx}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{e^{t\mu}}{\sigma\sqrt{\sigma\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x-\mu)} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ἢ

$$E(e^{tx}) = \frac{e^{t\mu}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + t(x-\mu)} dx$$

ἀλλά : $$-\frac{(x-\mu)^2}{20} + t(x-\mu) = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu)^2 - 2t\sigma^2(x-\mu) + \sigma^4t^2 - \sigma^4t^2\right]$$

$$= -\frac{(x-\mu-t\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2t^2}{2}$$

συνεπῶς :

$$E(e^{tx}) = \frac{e^{t\mu + \frac{\sigma^2t^2}{2}}}{\sigma\sqrt{2r}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu-t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{t\mu + \frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

δηλ. ἡ γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν τῆς : $\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ εἶναι ἡ $e^{t\mu + \frac{\sigma^2t^2}{2}}$

δηλ. ἡ x κατανέμεται κανονικῶς μὲ μέσον τὸ μ καὶ διακύμανσιν σ^2. Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τὴν ἡ μ ι α ν α λ λ ο ί ω τ ο ν (Semi - invariant) τῆς x, αὕτη ὡς γνωστὸν δίδεται ὑπό: $\log [E(e^{tx})] = K(x) = t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$, ἐξ οὗ συνάγεται ὅτι $K_1 = \mu$ καὶ $K_2 = \sigma^2$, $K_3 = K_4 = \ldots = O$. Συνήθως θέτομεν $M(t) = E(e^{tx})$, ὅτε $K(x) = \log M(t)$, τῆς $K(x)$ ἀναπτυσσομένης εἰς σειρὰν τῆς μορφῆς

$$K(x) = t_1 K_1 + \frac{t^2}{2!} K_2 + \frac{t^3}{3!} K_3 + \ldots\ldots$$

I θεώρημα 4 §. *Ἐὰν τὰ ἀνεξάρτητα τυχαῖα μεταβλητὰ* x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ *κατανέμωνται κανονικῶς* (δηλ. ἡ κατανομὴ ἑνὸς ἑκάστου τούτων εἶναι ἡ τοῦ Gaúss - Laplace), *μὲ μέσους* μ_i *καὶ διακυμάνσεις* σ_i^2, *τότε τὸ ἄθροισμά των κατανέμεται, ἐπίσης, κανονικῶς μὲ μέσον* $\mu = \Sigma\mu_i$ *καὶ διακύμανσιν* $\sigma^2 = \Sigma\sigma_i^2$

Πράγματι: $E\left(e^{t\Sigma x_i}\right) = \Pi E\left(e^{x_i t}\right)$ ἀλλὰ $E\left(e^{x_i t}\right) = e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}}$

Ἑπομένως: $E\left(e^{t\Sigma x_i}\right) = \Pi\left(e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}}\right) = e^{t\Sigma\mu_i + \frac{t^2}{2}\Sigma\sigma_i^2} = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

ὅπου: $\mu = \Sigma\mu_i$ καί: $\sigma^2 = \Sigma\sigma_i^2$.

Ἡ ἔκφρασις: $e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ εἶναι ἡ γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν τῆς τυχαίας μεταβλητῆς $X = \Sigma x_i$, ἐχούσης μέσον $\mu = \Sigma\mu_i$ καὶ διακύμανσιν $\sigma^2 = \Sigma\sigma_i^2$.

II θεώρημα 5 §. *Ἐὰν Χ κατανέμεται κανονικῶς μὲ μέσον* $\overline{x}$ *καὶ διακύμανσιν* σ_x^2 *καὶ Ψ κατανέμεται, ἐπίσης, κανονικῶς μὲ μέσον* $\overline{y}$ *καὶ διακύμανσιν* σ_y^2, *τότε*: $Z = X \pm \Psi$ *κατανέμεται, ἐπίσης, κανονικῶς μὲ μέσον*: $\overline{z} = \overline{x} \pm \overline{y}$ *καὶ διακύμανσιν πάντοτε*: $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

Πράγματι, ἔχομεν:

$$E\left(e^{zt}\right) = E\left(e^{(X\pm\psi)t}\right) = E\left(e^{xt}\right) E\left(e^{\pm\psi t}\right)$$

$$= e^{\overline{x}t + \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}} \; e^{\pm\overline{y} + \frac{\sigma_y^2 t^2}{2}} = e^{(\overline{x}\pm\overline{y})\,t + \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \cdot t^2}{2}}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις εἶναι ἡ γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν μιᾶς κανονικῆς κατανομῆς ἐχούσης ὡς μέσον: $\overline{z} = \overline{x} \pm \overline{y}$ καὶ ὡς διακύμανσιν: $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

III θεώρημα 6 §. *Ἐὰν τὰ ἀνεξάρτημα μεταβλητὰ* x_i $(i=1, 2, 3, \ldots n)$ *κατανέμωνται κανονικῶς περὶ κοινὸν μέσον μ καὶ κοινὴν διακύμανσιν* σ^2, *τότε ὁ μέσος αὐτῶν κατανέμεται, ἐπίσης, κανονικῶς μὲ μέσον μ καὶ διακύμανσιν*: σ^2/n.

Πράγματι, ζητήσωμεν τὴν γεννήτριαν συνάρτησιν ροπῶν τοῦ: $\overline{x}$. Θὰ ἔχωμεν:

$$E\left(e^{\overline{x}t}\right) = E\left(e^{(x_1 + x_2 + \cdot + x_n)t/n}\right) = E\left(e^{x_1 t/n}\right) E\left(e^{x_2 t/n}\right) \ldots E\left(e^{x_n t/n}\right)$$

ἀλλά: $E\left(e^{\bar{x}t}\right) = \Pi E\left(e^{x_i t/n}\right)$. Ὡς γνωστὸν ὅμως $E\left(e^{x_i t/n}\right) = e^{\mu t/n + \frac{\sigma^2 t^2}{2n^2}}$

Ἑπομένως: $$E\left(e^{\bar{x}t}\right) = \Pi\left(e^{\mu t/n + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}\right) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}$$

ἥτις εἶναι ἡ γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν κανονικῆς κατανομῆς, ἐχούσης μέσον τὸ μ καὶ διακύμανσιν σ^2/n. Τὰ ἀνωτέρω ἐδείχθησαν βάσει τῆς ὑποθέσεως ὅτι x_i εἶναι *ἀνεξάρτητα κανονικὰ μεταβλητά*, ἔχοντα μέσον τό: μ καὶ διακύμανσιν: σ^2. Οἱ μέσοι, ἑπομένως, τῶν ἐκ n ἰσοπληθῶν δειγμάτων κατανέμονται, ἐπίσης, κανονικῶς μὲ μέσον τό: μ (μέσον τοῦ πληθυσμοῦ) καὶ διακύμανσιν: σ^2/n, ὅπου σ^2 ἡ διακύμανσις τοῦ πληθυσμοῦ καὶ n τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος.

IV θεώρημα 7 §. *Ἐὰν ὁ μέσος δείγματος ἐκ* n_1 *εἶναι* $\overline{x_1}$ *καὶ ἡ διακύμανσις* σ_1^2 *καὶ ὁ μέσος δείγματος ἐκ* n_2 *εἶναι* $\overline{x_2}$ *καὶ ἡ διακύμανσις* σ_2^2, *τότε ἡ διαφορὰ* $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$, *ἀπείρων ὁμοίων πρὸς τὰ ἀνωτέρω δειγμάτων, κατανέμεται, ἐπίσης, κανονικῶς, μὲ μέσον τό:* $\mu_1 - \mu_2$ *καὶ διακύμανσιν:* $\frac{\sigma_1^2}{n_2} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$.

Πράγματι:

$$E\left(e^{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)t}\right) = E\left(e^{\bar{x}_1 t}\right) E\left(e^{-\bar{x}_2 t}\right) = e^{\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2}{n_1}\cdot\frac{t^2}{2}}\, e^{-\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\cdot\frac{t^2}{2}},$$

δηλ.: $$E\left(e^{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)t}\right) = e^{(\mu_1 - \mu_2)t + \left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)\frac{t^2}{2}},$$

ἥτις εἶναι ἡ γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν κατανομῆς ἐχούσης μέσον τό: $\mu_1 - \mu_2$ καὶ διακύμανσιν: $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$.

V Θεώρημα 8 §. *Ἐὰν πρόκειται τώρα περὶ διωνυμιακῆς κατανομῆς, τότε, ὡς γνωστόν,* $\bar{x} = np$ *καὶ* $\sigma = \sqrt{npq}$. *Ἑπομένως θέτοντες:* $\tau = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$

ἤ $$\tau = \frac{\frac{x}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{p^1 - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}, \quad \left(p^1 = \frac{x}{n}\right)$$

τοῦ τ *κατανεμομένου κανονικῶς μὲ μέσον τὸ* p *καὶ διακύμανσιν* $\sqrt{\frac{pq}{n}}$.

Πράγματι:

$$E\left(e^{xt/n}\right) E = \left(e^{p^1 t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{pq}{n}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{p^1 t - \frac{n}{2pq}(p^1 - p)^2}\, dp^1$$

$$= \frac{e^{pt}}{\sqrt{\frac{2\pi pq}{n}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(p^1-p)t} \, e^{-\frac{n}{2pq}(p^1-p)^2} dp^1$$

ἀλλὰ $-\dfrac{n}{2pq}\left[(p^1-p)^2 - \dfrac{2pqt.\,(p^1-p)}{n} + \dfrac{p^2q^2t^2}{n^2} - \dfrac{p^2q^2t^2}{n^2}\right] =$

$$= -\frac{x}{2pq}\left[\left(p^1-p-\frac{pqt}{n}\right)^2\right] + \frac{pqt}{2n} \text{ δηλ.}$$

$$E\left(e^{p^1t}\right) = e^{pt + \frac{pq}{n}\cdot\frac{t^2}{2}.}$$

ἥτις εἶναι ἡ γενήτρια συνάρτησις ροπῶν κανονικῆς κατανομῆς, μὲ μέσον p καὶ διακύμανσιν pq/n.

VI θεώρημα 9 §. *Ἐὰν εἴς τι δεῖγμα ἡ ἀναλογία εἶναι* p^1_1 *καὶ ἡ διακύμανσις* p_1q_1/n *καὶ εἰς ἄλλο δεῖγμα ἡ ἀναλογία εἶναι* p^1_2 *καὶ ἡ διακύμανσις* p_2q_2/n, *τότε ἡ διαφορά :* $p^1_1-p^1_2$, *κατανέμεται κανονικῶς μὲ μέσον :* (p_1-p_2) *καὶ διακύμανσιν :* $\left(\dfrac{p_1q_1}{n_1}+\dfrac{p_2q_2}{n_2}\right)$

πράγματι,

$$E\left(e^{(p^1_1-p^1_2)t}\right) = E\left(e^{p^1_1t}\right)E\left(e^{-p^1_2t}\right) = e^{p^1t+\frac{p_1q_1}{n_1}\cdot\frac{t^2}{2}}\, e^{-p_2t+\frac{p_2q_2}{n_2}\cdot\frac{t^2}{2}}$$

δηλ. $E\left(e^{(p^1_1-p^1_2)t}\right) = e^{(p_1-p_2)t+\left(\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}\right)\frac{t^2}{2}}$

ἥτις εἶναι ἡ γεννήτρια συνάρτησις ροπῶν κανονικῆς κατανομῆς ἐχούσης μέσον τὴν διαφοράν : (p_1-p_2) καὶ διακύμανσιν : $\left(\dfrac{p_1q_1}{n_1}+\dfrac{p_2q_2}{n_2}\right)$

10 §. Ὁ ἔλεγχος τῆς σημαντικότητος γίνεται εὐκόλως πλέον διότι, ἂν πρόκειται νὰ ἐλεγχθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι : $\bar{x} \neq 0$ ἔναντι τῆς ὑποθέσεως ὅτι $\mu = 0$, θὰ τεθῇ :

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{x}-0)\sqrt{n}}{s},$$ ὅπου s^2 ἡ ἀμερόληπτος — δηλ. ἡ ἄνευ σφάλματος — ἐκτίμησις τοῦ σ^2 τοῦ πληθυσμοῦ (*), τοῦ $\bar{x}$ ὑποτιθεμένου τυχαίου μεταβλητοῦ, μὲ μέσον τὸ μ καὶ διακύμανσιν s^2/n.

Ἐὰν ὅθεν ληφθῇ ὡς ἐπίπεδον σημαντικότητος τὸ $\alpha = 0{,}05$ ὅτε καὶ $t > 1{,}96$ (*) ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς $\alpha = 0{,}05$, τότε ἀπορρίπτεται ἡ ὑπόθεσις ὅτι $\bar{x} = 0$ καὶ γίνεται δεκτὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι $\bar{x}$ διαφέρει σημαντικῶς τοῦ μηδενός.

(*) Ἀμερόληπτος ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι $E(s^2) = \sigma^2$ καὶ $s^2 = \dfrac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ ὅπου n τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος καὶ ὅπου E παριστᾷ τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα τῶν s^2 ὅλων τῶν ἐκ n ἰσοπληθῶν δειγμάτων, ἅτινα ἔχουν ληφθῇ, κατὰ τρόπον τυχαῖον ἐκ τοῦ ἰδίου πληθυσμοῦ, ἔχοντος διακύμανσιν σ^2.

(*) Διὰ $t = \pm 1{,}96$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς καμπύλης διὰ τιμὰς τοῦ t μεγαλυτέρας τοῦ 1,96 κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ πρὸς τὰ πέρατα κατὰ τὰς δύο ἐννοίας αὐτῆς εἶναι ἀκριβῶς 5 %, δηλαδὴ 2,5 % διὰ $t = +1{,}96$ καὶ 2,5 % διὰ $t = -1{,}96$.

Ἐὰν πάλιν πρόκειται νὰ ἐλεγχθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι : $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, σχηματίζεται ὁ λόγος :

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \mu_1) - (\bar{x}_2 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}},$$ [τῆς διαφορᾶς $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ ὑποτιθεμένης τυχαίας μεταβλητῆς μὲ μέσον τὸ $(\mu_1 - \mu_2)$ καὶ διακύμανσιν $\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$]

βάσει τῆς ὑποθέσεως μηδέν, δηλ. ὅτι $\mu_1 = \mu_2$, ἤτοι ὅτι τὰ δείγματα ἔχουν ληφθῇ ἀπὸ τὸν ἴδιον πληθυσμόν, ἔχοντα μέσον : $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἄγνωστα τά: σ_1^2 καὶ σ_2^2, ἀντικαθίστανται ταῦτα ὑπὸ τῶν ἀμερολήπτων ἐκτιμήσεων αὐτῶν s_1^2 καὶ s_2^2. Ἐὰν ὅθεν $\alpha = 0{,}05$ καὶ $\pm\, t < 1{,}96$. γίνεται δεκτὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, δηλ. *ὅτι τὰ δύο δείγματα ἔχουν ληφθῇ ἀπὸ τὸν ἴδιον πληθυσμὸν* μὲ μέσον $\mu = \mu_1 = \mu_2$, τῆς διαφορᾶς τῶν μέσων τότε τῶν δειγμάτων $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ οὔσης *στατιστικῶς ἀσημάντου*, δηλ. δυναμένης νὰ ἔχῃ προέλθει ἐκ μόνον τῶν τυχαίων κυμάνσεων τῆς δειγματοληψίας.

11 §. Ἐξυπακούεται ὅτι εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις ἡ διακύμανσις τοῦ πληθυσμοῦ σ^2, ἐξ οὗ τὸ δεῖγμα ἔχει ληφθῇ, παραμένει *ἄγνωστος*. Αὕτη, κατ' ἀκολουθίαν, εἰς τοὺς σχετικοὺς τύπους, ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς διακυμάνσεως τοῦ δείγματος s^2, διδομένης ὑπό : $s^2 = \frac{\Sigma(x_1 - \bar{x})^2}{n-1}$ καὶ ἀποτελούσης ἐκτίμησιν τῆς σ^2 ἄνευ σφάλματος (unbiassed estimation). Τὸ τελευταῖον ἀποδεικνύεται ἁπλούστατα ὡς ἑξῆς:

Ὡς γνωστὸν διὰ τὴν κατανομὴν τοῦ : $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\nu s^2}{\sigma^2}$

ἰσχύει ὁ ἀναλυτικὸς νόμος :

$$f(\chi^2)d(\chi^2) = \frac{e^{-\chi^2/2}\,(\chi^2)^{\nu/2-1}\,d(\chi^2)}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)},$$ (διότι αὕτη εἶναι γ μεταβλητὸν μὲ παραμετρον $\nu/2$).

$$= \frac{e^{-\nu s^2/2\sigma^2}\,(\nu s^2)^{\nu/2-1}}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)\,(\sigma^2)^{(\nu s^2)}}\, d\left(\frac{\nu s^2}{\sigma^2}\right)$$

$$f(s^2)\,d(s^2) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \cdot \left(\frac{\nu}{2\sigma^2}\right)^{\nu/2} e^{-\nu s^2/2\sigma^2}\,(s^2)^{\nu/2-1}\,d(s^2).$$

Ἀλλὰ εἶναι γνωστὸν ἐπίσης ὅτι : $E(\chi^2) = \nu$ καὶ $V(\chi^2) = 2\nu$ (ὅπου $V(\chi^2)$ ἡ διακύμανσις τοῦ χ^2). Ἑπομένως ἐκ τῆς σχέσεως $\chi^2 = \frac{\nu s^2}{\sigma^2}$ λαμβάνομεν :

$$s^2 = \frac{\sigma^2\chi^2}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad E(s^2) = \frac{\sigma^2\,E(\chi^2)}{\nu} = \frac{\sigma^2\nu}{\nu} = \sigma^2$$

δηλ. *ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς ὅλων τῶν* s^2 *ἰσοῦται πρὸς* σ^2.

Ὁμοίως ἔχομεν :

$$V(s^2)=\frac{\sigma^4 V(\chi^2)}{\nu^2}=\frac{\sigma^4\, 2\nu}{\nu^2}=\frac{2\sigma^4}{\nu}=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

ἡ τελευταία ἰσχύει διὰ κατανομάς, δι' ἃς ἡ τετάρτη ἡμιαναλλοίωτος $K_4=O$. Εἰς τὰς κατανομὰς ταύτας, ὡς γνωστόν, περιλαμβάνεται καὶ ἡ κανονικὴ κατανομὴ ὡς ἐδείχθη εἰς § 3.

12 §. Σημειωτέον ὅτι:

$$f(s)ds=\frac{2}{(\Gamma\nu/_2)}\left(\frac{\nu}{2\sigma^2}\right)^{\nu/2} e^{-\nu s^2/2\sigma^2} s^{\nu-1}\, ds.$$

Ἑπομένως: $$E(s)=\frac{2}{\Gamma(\nu/2)}\left(\frac{\nu}{2\sigma^2}\right)^{\nu/_2}\int_o^\infty s e^{-\nu s^2/2\sigma^2} s^{\nu-1}\, ds.$$

$$=\frac{2}{\Gamma(\nu/2)}\left(\frac{\nu}{2\sigma^2}\right)^{\nu/_2}\int_o^\infty e^{-\nu s^2/2\sigma^2} s^{\nu}\, ds.$$

θέτομεν: $\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}=t,\ s=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}}\sqrt{t},\ ds=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}}\cdot\frac{t^{-1/2}\,dt}{2}$

καὶ $s^\nu=\frac{\sigma^\nu\, 2^{\nu/2}\, t^{\nu/2}}{\nu^{\nu/2}}$, ἑπομένως:

$$E(s)=\frac{2}{\Gamma(\nu/2)}\left(\frac{\nu}{2\sigma^2}\right)^{\nu/2}\frac{\sigma^\nu\,\sigma\sqrt{2}\,2^{\nu/2}}{\sqrt{\nu}\ 2\ \nu^{\nu/2}}\int_o^\infty e^{-t}\, t^{\nu/2-1/2}\, dt$$

$$=\left(\frac{2\sigma^2}{\nu}\right)^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu/2)}\quad \text{ἢ}\quad \nu=n-1.$$

Δηλαδή: $$E(s)=\left(\frac{2\sigma^2}{n-1}\right)^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\simeq\sigma\sqrt{\frac{n-3/2}{n-1}}.$$

Ἐπειδὴ δέ: $E(s^2)=\sigma^2$, θὰ ἔχωμεν:

$$V(s)=E(s^2)-[E(s)]^2,$$ (ὅπου V ἡ διακύμανσις τοῦ s)

$$=\sigma^2-\frac{2\sigma^2}{n-1}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right]^2\simeq\frac{\sigma^2}{2n},$$ ὅπου $\simeq$ παριστᾷ τὸ περίπου ἴσον.

Ἑπομένως ἡ διακύμανσις τοῦ s δίδεται ὑπὸ $\frac{\sigma^2}{2n}$, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὰ δείγματα εἶναι ἄπειρα καὶ τὸ μέγεθος ἑκάστου δείγματος $n\to\infty$.

13 §. Ἑπομένως διὰ νὰ ἐλεγχθοῦν τὰ s_1 καὶ s_2 διὰ δειγμάτων ἐκ n_1 καὶ n_2 στηριζόμεθα, mutatis mutandis, εἰς τὴν ἄποψιν ὅτι οἱ πληθυσμοὶ εἶναι *κανονικοί*, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ δείγματα ἔχουν ληφθῆ, καὶ ὅτι ἡ διαφορά: s_1-s_2 κατανέμεται ἐπίσης κανονικῶς μὲ διακύμανσιν ἴσην πρὸς $s^2=\frac{s_1^2}{2n_1}+\frac{s_2^2}{2n_2}$,

ὁπότε σχηματίζομεν καὶ πάλιν τὸν λόγον $t = \frac{s_1 - s_2}{s}$ καὶ ἀναλόγως τῆς τιμῆς τοῦ t, εἰς διδόμενον ἐπίπεδον σημαντικότητος α, εἴτε ἀποδεχόμεθα τὴν ἄποψιν ὅτι: $s_1 = s_2$, δηλ. ὅτι τὰ δύο δείγματα ἔχουν ληφθῆ ἀπὸ τὸν ἴδιον πληθυσμόν, εἴτε ἀπορρίπτομεν αὐτήν. Ἡ χρησιμοποίησις τώρα τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου ἐνδείκνυται ὅταν θέλομεν νὰ διακριβώσωμεν τὴν ὁμοιογένειαν τῶν καθ' ἕκαστον μετρήσεων εἰς τὰ δείγματα, δεδομένου ὅτι ἡ διασπορὰ τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς περὶ τὸν μέσον αὐτῆς μετρεῖται ὑπὸ τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου.

14 §. Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὴν διακύμανσιν τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως r, ἀποδεικνύεται ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς $\sigma_r^2 = \frac{(1-\rho^2)^2}{n}$ ἢ $\sigma_r^2 = \frac{(1-\rho^2)^2}{n-1}$ *, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅμως ὅτι $n > 500$ καὶ ρ εἶναι ἐγγύτατα τοῦ μηδενός. Ἡ ὑποκατάστασις τοῦ ρ ὑπὸ τοῦ r τοῦ δείγματος καὶ δὴ ὅταν $r \rightarrow |1|$ καὶ $n < 500$ ἄγει κατὰ κανόνα εἰς *ἐσφαλμένην ἐκτίμησιν* τῆς μ. ἀποκλίσεως τετραγώνου τοῦ r, διότι ἡ κατανομὴ τῶν r, κατὰ κανόνα, δὲν εἶναι συμμετρική, δηλ. δὲν ἀκολουθεῖ τὸν νόμον Gauss—Laplace, παρὰ μόνον, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ὅταν $\rho \rightarrow o$ καὶ n εἶναι ὑπερμέτρως μέγας ἀριθμός.

Διὰ τὸν ἔλεγχον ὅθεν τῆς σημαντικότητος τοῦ r ἀνεξαρτήτως τοῦ μεγέθους τῶν δειγμάτων εἰσάγεται ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ Fisher : $Z = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r} =$ $1{,}15129 \text{ λογ} \frac{1+r}{1-r}$, ὁ ὁποῖος προκύπτει ὡς κάτωθι:

15 §. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ μεταβλητὸν x ἔχει κατανομὴν τοιαύτην ὥστε: $E(x) = \mu$ καὶ διακύμανσιν: $V(x) = f(\mu)$ ὥστε $f(\mu)$ δὲν εἶναι σταθερά. Ἐπιδιώκομεν τώρα νὰ προσδιορίσωμεν μίαν νέαν μεταβλητὴν y, συνάρτησιν τοῦ x, δι' ἧς ἡ διακύμανσις νὰ εἶναι *ἀνεξάρτητος τοῦ μ*. Ἔστω, συνεπῶς, $y = \varphi(x)$, τότε θὰ ἔχωμεν ἀναπτύσοντες κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor καὶ περιοριζόμενοι εἰς τοὺς δύο πρώτους ὅρους

$$y = \varphi(\mu) + (x-\mu)\,\varphi'(\mu), \text{ ὅπου } \varphi' \text{ ἡ παράγωγος τοῦ } \varphi$$

Ἀλλά: $E(y) = E[\varphi(\mu) + \varphi'(\mu)\,E(x-\mu)] = \varphi(\mu)$, διότι $E(x-\mu) = O$

Ἐπομένως: $y - \varphi(\mu) = (x-\mu)\,\varphi'(\mu)$

ἢ $E[y-\varphi(\mu)]^2 = V(y) = [\varphi'(\mu)]^2 E(x-\mu)^2 = V(x)\,[\varphi'(\mu)]^2 = f(\mu)\,[\varphi'(\mu)]^2$

Ἐὰν τεθῇ: $V(y) = c^2$, σταθερά, τότε

$$\varphi'(\mu) = c/\sqrt{f(m)} \text{ ἢ } \varphi(\mu) = c\int \sqrt{\frac{dm}{f(m)}}$$

τούτου τεθέντος, ἔχομεν:

$$f(m) = \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n-1}}$$

---

* M. Kendall «The advanced theory of statistics», τόμος I σελὶς 211 καὶ ρ ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως τοῦ πληθυσμοῦ.

ἄρα: $\varphi(\mu) = c\int \frac{\sqrt{n-1}}{1-\rho^2}d\rho = \int \frac{d\rho}{1-\rho^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right)d\rho$

$\left(\text{τιθεμένου } c = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$

δηλ.: $\varphi(\mu) = \frac{1}{2}\int\frac{d\rho}{1+\rho} + \frac{1}{2}\int\frac{d\rho}{1-\rho} = \frac{1}{2}\log(1+\rho) - \frac{1}{2}\log(1-\rho) =$

$\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{2-\rho}$

ἢ $\varphi(\mu) = Z = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$

16 §. Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὸ z τοῦτο κατανέμεται κατὰ *προσέγγισιν κανονικῶς*. Πράγματι διὰ δείγματα ληφθέντα ἀπὸ *ἀσυσχέτιστον κανονικὸν πληθυσμόν*, ἡ κατανομὴ τοῦ r εἶναι:

$$dp = \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}(n-4)}dr}{B(^1/_2,\ ^1/_2(n-2))} \quad *$$

Ἐκ τοῦ ἄνω μετασχηματισμοῦ ὅμως τοῦ Fisher ἔχομεν: $2z = \log\frac{1+r}{1-r}$

ἢ τέλος: $r = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = \text{εφ}hz$. Ἑπομένως: $dr = \text{τεμ}\ h^2z\ dz$.

Κατὰ συνέπειαν: $1-r^2 = 1-\text{εφ}h^2z = \frac{1}{\text{συν}h^2z} = \text{τεμ}hz^2$ καὶ ἄρα: $dp = \frac{\text{τεμ}hz^{n-2}dz}{B(^1/_2,\ ^1/_2(n-2))}$

$$\text{τεμ}hz = \frac{1}{\text{συν}hz} = \frac{2}{e^z+e^{-z}} = \frac{2}{1+z+z^2/_2+\ldots+1-z+z^2/_2\ldots+} = \frac{1}{1+z^2/_2+\ldots} = e^{-z^2/2}$$

$$e^{-\frac{1}{2}(n-2)z^{2E}}\ dz$$

ἑπομένως: $d\rho = \frac{e\quad dz}{\left(B^1/_2,\ \frac{(n-2)}{2}\right)} = ce^{-\frac{z^2}{2}(n-2)}\ dz$

δηλ. ἡ κατανομὴ τοῦ z εἶναι κατὰ προσέγγισιν κανονικὴ μὲ διακύμανσιν: $\sigma_z^2 = \frac{1}{n-2}$. Ὁ Fisher ὅμως ἔδειξεν ὅτι καλυτέρα προσέγγισις ἐπιτυγχάνεται ὅταν: $\sigma^2 z = \frac{1}{n-3}$

---

* Ἴδε M. Kendall op. cit. σελὶς 342.