Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΙΓΝΙΔΙΩΝ ΚΑΙ Η ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Ὑπὸ τοῦ κ. Δ. ΚΟΝΙΔΑΡΗ

1. Τὰ παιγνίδια 2. Ὀρθογώνια παιγνίδια μὲ δύο παίκτας καὶ σύνολον πληρωμῶν μηδέν. 3. Τὰ σελλοσημεῖα. 4. Ἡ μικτὴ στρατηγική. 5. Γραφικαὶ λύσεις. 6. Συνεχὴς στρατηγική. 7. Ὀρθογώνια παιγνίδια μὲ ν παίκτας καὶ σύνολον πληρωμῶν μηδέν. 8. Ἡ θεωρία τῶν Von Neumann - Morgenstern *καὶ ἡ οἰκονομία.*

Ἀπὸ τοῦ 1928, ὁ πρὸ ὀλίγων μηνῶν ἀποθανὼν μεγάλος μαθηματικὸς John von Neumann εἶχε παρουσιάσει μίαν θεωρίαν σχετικὴν μὲ τὴν «στρατηγικὴν» τῶν παιγνιδίων: τὴν «Theory of Games»· καὶ μέχρι τοῦ 1944, ἐκτὸς μιᾶς μερίδος μαθηματικῶν—στατιστικῶν ἀσχολουμένων εἰδικῶς μὲ τὰς νέας θεωρητικὰς ἐπιτεύξεις, ἐγνώριζον ὅλοι διὰ τὴν θεωρίαν τόσα, ὅσα διὰ τοὺς κατοίκους τοῦ Ἄρεως καὶ ἐνδιεφέροντο δι' αὐτὴν ὅσον δι' ἐκείνους. Ὁπότε τὸ 1944 ὁ John von Neumann καὶ ὁ οἰκονομολόγος Oscar Morgenstern ἀπεφάσισαν νὰ λύσουν βάσει τῶν πορισμάτων τῆς θεωρίας τοῦ πρώτου—καὶ τοῦτο διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν μαθηματικῶν βασανιστηρίων εἰς ἃ ὑποβάλλονται ἀπό τινος χρόνου οἱ οἰκονομολόγοι—ὄχι μόνον προβλήματα σχετικὰ μὲ τὸ «σκάκι», τὸ «μπρίτζ», τὸ «δυὸ δάχτυλα τοῦ Morra», ἀλλὰ καὶ προβλήματα σχετικὰ μὲ τὴν οἰκονομικὴν ἐπιστήμην· καὶ παρουσιάζουν τὸ περιώνυμον πλέον ἔργον των Theory of Games and Economic Behavior (1 ἔκδ. 1944, 2 ἔκδ. 1947), ἀρκετὸν εἰς ὄγκον, πλούσιον εἰς θεωρητικὰς εἰσηγήσεις, ἐπαναστατικὸν μέχρι σημείου ἀπορρίψεως ὅλων τῶν προηγηθέντων συστημάτων οἰκονομικῆς μετρικῆς, αἰσιόδοξον διὰ τὴν συνέπειάν του εἰς τὸν τομέα τῶν ἐφαρμογῶν καὶ—τοῦτο εἶναι τὸ περιεργότερον—ὑποσχόμενον εὔκολον χειρισμόν, διότι, κατὰ τὴν εἰσαγωγικὴν παρατήρησιν τῶν συγγραφέων, δὲν ἀπαιτεῖται ἀνωτέρα μαθηματικὴ κατάρτισις διὰ τὴν κατανόησιν τῆς μεθόδου καὶ τὴν λύσιν οἰκονομικῶν προβλημάτων. Τὸ τελευταῖον μάλιστα ἐπιβεβαιώνουν καὶ μερικοὶ ἐκ τῶν μελετησάντων τὸ βιβλίον. Δὲν θέλομεν νὰ διαψεύσωμεν οὔτε τας διαβεβαιώσεις τῶν συγγραφέων, οὔτε τὰς διαπιστώσεις τῆς προαναφερθείσης μερίδος τῶν ἀναγνωστῶν των· τὸ μόνον ἴσως τὸ ὁποῖον θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ζητήσωμεν εἶναι «μία ἀπόδειξις τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῶν συνεχῶν παιχνιδίων, ἄνευ τῆς χρήσεως ὁλοκληρώματος κατὰ Stieltjes». Καὶ τοῦτο διότι δὲν δυνάμεθα ν' ἀντιληφθῶμεν πῶς μία θεωρία ἥτις λύει τὰ προβλήματά της μὲ τὴν χρῆσιν τῶν μαθηματικῶν ἐργαλείων τύπου «matrix» «min. max», «Stieltjes integral», «convex payoff functions» κ.τ.τ., εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι εὔχρηστος εἰς τοὺς οἰκονομολόγους καὶ μάλιστα εἰς τοὺς μὴ ἔχοντας ἀνωτέραν μαθηματικὴν κατάρτισιν· βεβαίως οἱ κύριοι ἐκπρόσωποι τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης δὲν ἀπεφάνθησαν ἀκόμη κατὰ πόσον ἡ θεωρία εἶναι ἐφαρμόσιμος, παρ' ὅλον ὅτι ἄλλοι, οἱ ὀλιγώτερον ὑπεύθυνοι καὶ ὡς συνήθως περισσότερον ἐνθουσιώδεις, ἰσχυρίζονται ὅτι πρόκειται περὶ «ἐπαναστάσεως».

Θ' ἀπαιτηθῆ μεγάλη ἐξοικείωσις μὲ τὴν θεωρίαν καὶ πλῆθος τεχνικῶν ἐφαρμογῶν αὐτῆς, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν υἱοθέτησίν της ἀπὸ ὅλους τοὺς εἰδικοὺς τῆς οἰκονομίας. Λέγοντες ταῦτα δὲν ἀσκοῦμεν δυσμενῆ κριτικὴν τῆς θεωρίας· ἀπ' ἐναντίας. Ἁπλῶς θέλομεν νὰ διατυπώσωμεν ἀμφιβολίας ὅσον ἀφορᾶ τοὺς ἰσχυρισμοὺς περὶ εὐκόλου μεταχειρίσεως αὐτῆς.

Κατωτέρω δίδομεν ἁπλῆν ἔκθεσιν τῆς θεωρίας, δι' ἁπλουστεύσεως—κατὰ τὸ δυνατὸν—καὶ τοῦ συμβολισμοῦ καὶ τῶν ἀποδείξεων, ὁπότε δίδεται ἡ εὐκαιρία εἰς τοὺς ἀναγνώστας τοῦ παρόντος νὰ κρίνουν διὰ τὸν βαθμὸν τῆς ἁπλότητος. Παραλλήλως πρὸς τὰ βασικὰ θέματα δίδεται καὶ μία σύντομος ἔκθεσις τῶν τελευταίων ἐπιτευγμάτων τῆς θεωρίας τῶν ἐμφανισθέντων εἰς τὰ τελευταῖα ἐπιστημονικὰ περιοδικά, διὰ τὴν ἐμφάνισιν τῶν νέων προοπτικῶν τῆς θεωρίας.

1. ΤΑ ΠΑΙΓΝΙΔΙΑ

Ἡ λέξις παιγνίδιον εἰς τὴν καθημερινὴν γλῶσσαν χρησιμοποιεῖται εἰς δύο περιπτώσεις: εἰς τὴν πρώτην, τῆς ὁποίας καὶ θὰ κάμωμεν χρῆσιν ἐνταῦθα, ἡ λέξις ἀποδίδει ἓν σύνολον συνθηκῶν διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν κινήσεων καὶ τῶν συνεπειῶν τὰς ὁποίας θὰ ἔχουν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κινήσεων διὰ τοὺς παίκτας· εἰς τὴν δευτέραν ἡ λέξις ἀποδίδει μίαν πλήρη ἐκτέλεσιν ὅλων τῶν κινήσεων ποὺ ἐπιβάλλονται διὰ νὰ θεωρηθῇ ἕνα «παίξιμο» τερματισθέν, δηλαδὴ διὰ νὰ τερματισθῇ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον οἱ παῖκται συνήθως καλοῦν «παρτίδα». Π.χ. ἡ πρώτη περίπτωσις παρουσιάζεται ὅταν λέγωμεν ὅτι «τὸ σκάκι εἶναι δυσκολώτερο ἀπὸ τὸ τάβλι» καὶ ἡ δευτέρα ὅταν λέγωμεν «παίξαμε τρία παιχνίδια τάβλι». Τὴν τελευταίαν ταύτην ἔκφρασιν θ' ἀποφεύγωμεν ἀντικαθιστῶντες αὐτὴν μὲ τὴν ἔκφρασιν «παίξαμε τρεῖς παρτίδες τάβλι». Δηλαδὴ τὴν λέξιν παιγνίδιον θὰ χρησιμοποιοῦμεν ὁσάκις πρόκειται νὰ παρουσιάσωμεν μονολεκτικῶς ἓν σύνολον κανόνων καὶ συνθηκῶν ἐκτελέσεως κινήσεων καὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν κινήσεων τούτων διὰ τοὺς ἐκτελεστὰς αὐτῶν.

Τὸ πλῆθος τῶν παιγνιδίων ποὺ ὑπῆρξαν, ὑπάρχουν καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξουν εἶναι προφανῶς ὑπερμέγεθες. Ἡ θεωρία τῶν παιγνιδίων ἀσχολεῖται μ' ἐκεῖνα τὰ παιγνίδια εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ μία «στρατηγική» ἀπὸ μέρους τῶν παικτῶν, δηλαδὴ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπηρεασθῇ κατὰ κάποιον τρόπον ἡ τελικὴ ἔκβασις τοῦ παιγνιδίου διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς κινήσεων τῶν παικτῶν. Κατὰ κοινὴν ὁμολογίαν τὸ στρατηγικώτερον τῶν παιγνιδίων εἶναι τὸ σκάκι· καὶ τοῦτο διότι κατὰ μέγα μέρος τὸ ἀποτέλεσμα θὰ ἐξαρτηθῇ ἐκ τῶν κινήσεων τὰς ὁποίας θὰ ἐκτελέσουν οἱ παῖκται.

Τὰ κυριώτερα γνωρίσματα τῶν παιγνιδίων εἶναι.

I. «Ὁ ἀριθμὸς τῶν παικτῶν». Εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξουν παιγνίδια μὲ ἕνα, δύο, τρεῖς, . . ., ν παίκτας. Ἡ «πασέντζα» π.χ. εἶναι παιγνίδιον μ' ἕνα παίκτην. Τὸ σκάκι παίζεται ὑπὸ δύο παικτῶν καὶ τὸ τάβλι ἐπίσης. Τὸ μπρίτζ παίζεται ὑπὸ 4 παικτῶν — 2 ὁμάδων τῶν δύο — τὸ ποδόσφαιρον (*) μὲ 22 παί-

(*) Ἐπειδὴ προεβλέψαμεν κάποιαν «ἀναπήδησιν εἰς τὸ κάθισμα» τοῦ πλείστου τῶν ἀναγνωστῶν, ἅμα τῇ ἀναγνώσει τῆς λέξεως, ἐρχόμεθα νὰ σημειώσωμεν ἐδῶ ὅτι ἡ ἀπὸ κτας — δύο ὁμάδας τῶν 11. Τὰ δύο τελευταῖα παιγνίδια, παρ' ὅλον ὅτι παίζονται ὑπὸ περισσοτέρων τῶν δύο προσώπων, ἐν τούτοις πρέπει νὰ θεωρηθοῦν ὡς παιγνίδια δύο παικτῶν — ἀκριβέστερον δύο «ὁμάδων» — καὶ τοῦτο διότι τὰ ἐντὸς ἑκάστης ὁμάδος πρόσωπα ἔχουν ταυτοσήμους ἐπιδιώξεις καὶ ἐφαρμόζουν κοινὴν στρατηγικήν. Δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν παικτῶν ἐξαρτᾶται κυρίως ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν διαφορετικῶν ἐπιδιώξεων εἰς τὸ παιγνίδιον. Δυνατὸν ὅμως ὁ ἀριθμὸς τῶν προσώπων ποὺ λαμβάνουν μέρος εἰς τὸ παιγνίδιον νὰ μὴ εἶναι ὡρισμένος, ὡς π. χ. συμβαίνει εἰς τὴν ρουλέτα, τὸ «31» κ. ἄ.

II. «Ὁ ἀριθμὸς κινήσεων». Ἡ λέξις «κίνησις» ἀποδίδει τὴν ἐκλογὴν ἀπὸ μέρους ἑνὸς παίκτου μιᾶς παραλλαγῆς ἐξ ὅσων παρουσιάζονται εἰς τὸ παιγνίδιον. Ὁ ἀριθμὸς τῶν κινήσεων εἰς ἓν παιγνίδιον δυνατὸν νὰ εἶναι ὡρισμένος, δυνατὸν ὅμως ὄχι. Τὸ παιγνίδιον «δυὸ δάχτυλα τοῦ Morra» παίζεται ὑπὸ δύο παικτῶν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον: Ἕκαστος παίκτης δεικνύει εἰς τὸν ἄλλον «ἕνα ἢ δύο δάχτυλα» προφέρων συγχρόνως ἕνα ἐκ τῶν ἀριθμῶν «ἕνα» ἢ «δύο», τῆς τελευταίας ταύτης ἐκφωνήσεως σκοπὸν ἐχούσης τὸν προσδιορισμὸν τῶν δακτύλων τὰ ὁποῖα θὰ ἐπιδείξῃ ὁ συμπαίκτης. Μεθ' ἕκαστον τοιοῦτον ζεῦγος κινήσεων ὁ παίκτης Α λαμβάνει ἀπὸ τὸν παίκτην Β ἓν ποσὸν ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ ἑπομένου πίνακος:

A \ B	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
(1, 1)	0	2	− 3	0
(1, 2)	− 2	0	0	3
(2, 1)	3	0	0	− 4
(2, 2)	0	− 3	4	0

Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἑκάστης παρενθέσεως φανερώνει τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπιδειχθέντων δακτύλων καὶ ὁ δεύτερος τὸν ἀναφωνηθέντα ὑπὸ τοῦ παίκτου ἀριθμόν. Τὰ ἀρνητικὰ πρόσημα δηλώνουν ὅτι ὁ Α θὰ πληρώσῃ εἰς τὸν Β τὸ ἑπόμενον τοῦ προσήμου ποσόν. Ἑκάστη τῶν παρενθέσεων—παραλλαγῶν τοῦ παιχνιδίου—(1,1) (1,2) (2,1) (2,2) ἀποτελεῖ μίαν κίνησιν δι' ἕκαστον παίκτην· τοιουτοτρόπως τὸ παιχνίδιον «δυὸ δάχτυλα τοῦ Morra» εἶναι παιγνίδιον

πολλῶν ἐτῶν ἀναπτυχθεῖσα τεχνικὴ τοῦ ποδοσφαίρου ἀπέδειξεν ὅτι πρόκειται περὶ παιγνιδίου ἐπιδεχομένου σωρείαν στρατηγημάτων, ἐξ ὧν ἄλλα πρέπει νὰ εἶναι μακροχρόνια καὶ ἄλλα νὰ ἐφαρμόζωνται εἰς κλάσματα τοῦ δευτερολέπτου. Τὸ τελευταῖον τοῦτο προσδίδει καὶ τὴν γνωστὴν συναρπαστικότητα εἰς τὸ παιγνίδιον καὶ κατέστησε τοῦτο — πρὸς ἔκπληξιν τῶν σοβαρῶν ἀνθρώπων — δημοφιλέστατον.

τεσσάρων κινήσεων, τῆς ἐκλογῆς ἑκάστης κινήσεως πραγματοποιουμένης συγχρόνως ὑπὸ τῶν δύο παικτῶν. Τὸ παιγνίδιον τῆς τράπουλας «ξερή», ὅταν παίζεται ὑπὸ δύο παικτῶν, ἔχει 24 κινήσεις (4 ὁμάδας 6 κινήσεων). Τὸ παιγνίδιον τῆς ρουλέτας ἔχει μίαν κίνησιν (ὕστερα ἀπὸ κάθε «μπιλιὰ» ἐπακολουθοῦν πληρωμαὶ καὶ κατόπιν ἐπαναλαμβάνεται). Ἄλλα παιγνίδια ὅμως ἔχουν μὴ ὡρισμένον ἀριθμὸν κινήσεων, περατούμενα ὁσάκις ἔλθωμεν εἰς ὅρους ἀποδίδοντας εἰς ἕνα παίκτην ἢ ὁμάδα παικτῶν τὸ ἐπιδιωκόμενον κέρδος—ἐνδεχομένως καὶ ἰσοπαλίαν—ἢ ἄλλα ἅμα τῇ παρελεύσει ὡρισμένου χρονικοῦ διαστήματος ἀνεξαρτήτως κέρδους παικτῶν. Μία «παρτίδα σκακιοῦ» περατοῦται ὅταν ἕνας τῶν παικτῶν ἐπιτύχη «ματ» ἤ, πρᾶγμα ἐπίσης σύνηθες, ὅταν ἐπιτευχθῇ ἰσοπαλία—περίπτωσις «πὰτ» καὶ «νούλας». Ἕνα «ματς» ποδοσφαίρου ὅμως περατοῦται εἰς 90 λεπτὰ ἀνεξαρτήτως νίκης τοῦ ἑνὸς ἢ ἰσοπαλίας.

III. «Τὸ ποσὸν τῆς πληροφορίας». Ἡ ταξινόμησις ἀφορᾷ τὸ τί γνωρίζει ἕκαστος παίκτης, πρὸ ἑκάστης κινήσεώς του, διὰ τὰς προηγουμένας κινήσεις τοῦ ἀντιπάλου ἢ τῶν ἀντιπάλων, εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύναται νὰ προβλέψῃ μερικὰς τῶν ἑπομένων καὶ νὰ ἐφαρμόσῃ κατάλληλον στρατηγικήν.

Τοῦτο εἶναι δυνατόν, ὡς γνωστόν, ἀπολύτως εἰς τὸ σκάκι, τὸ τάβλι, τὴν ντάμα κ.ἄ. Εἰς τὸ πόκερ ὅμως ἀγνοῶν ὁ παίκτης «τὶς κάρτες» τῶν ἄλλων στερεῖται πληροφορίας σχετικῆς μὲ τὸ «παίξιμο» τῶν ἄλλων καὶ προσπαθεῖ «νὰ ἐκτιμήσῃ τὸ φύλλο τους διὰ παρακολουθήσεως τῶν ψυχολογικῶν ἀντιδράσεών των κατὰ τὸ παίξιμο».

IV. «Αἱ πληρωμαί». Ἐὰν θεωρήσωμεν ἓν παιγνίδιον ν παικτῶν Π_1, Π_2, ..., Π_ν καὶ ὀνομάσωμεν π_1, π_2, ..., π_ν τὰς πληρωμὰς εἰς ἕκαστον εἰς τὸ τέλος τοῦ παιγνιδίου, τότε ἐὰν συμβῇ νὰ εἶναι

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_\nu = 0$$

καλοῦμεν τὸ παιγνίδιον «μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν». Εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὡρισμένα ἐκ τῶν π_i ($i=1, 2, \ldots, \nu$)—ἓν τουλάχιστον—πρέπει νὰ εἶναι ἀρνητικά: τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ ἀντίστοιχοι παῖκται ἀντὶ νὰ λάβουν θὰ δώσουν ἓν ποσόν. Ὅλα τὰ παιγνίδια τῶν λεσχῶν, τῶν σαλονιῶν καὶ τῶν ἐν γένει συγκεντρώσεων εἶναι παιγνίδια μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν, δηλαδὴ διατηροῦν ἀμετάβλητον τὸν συνολικὸν πλοῦτον τῶν παικτῶν, δι' αὐτὸ ἀπὸ κοινωνικο-οικονομικῆς πλευρᾶς θεωροῦνται ἐπιβλαβῆ, τόσον διὰ τὴν κατασπατάλησιν τοῦ πολυτίμου χρόνου τῶν παικτῶν, ὅσον καὶ διὰ τὴν ἐκμετάλλευσιν τῶν ἀδαῶν ἀπὸ τοὺς τεχνίτας· ἀλλ' οὔτε καὶ ἀπὸ ψυχαγωγικῆς πλευρᾶς εἶναι δυνατὸν νὰ συστηθοῦν τὰ ἐπὶ χρήμασι παιζόμενα παιγνίδια, λόγῳ τοῦ πάθους διὰ τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον μεταβιβάζουν εἰς τοὺς παίκτας. Καθαρῶς ψυχαγωγικὰ πρέπει νὰ θεωρηθοῦν τὰ παιγνίδια διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $\pi_i = 0$ ($i=1, 2, \ldots, \nu$). Ἐνδιαφέροντα ἀπὸ κοινωνικο-οικονομικῆς πλευρᾶς πρέπει νὰ θεωρηθοῦν τὰ παιγνίδια τὰ δυνάμενα νὰ ληφθοῦν ὡς πρότυπα —ὑποδείγματα, models — οἰκονομικῶν διαδικασιῶν, ὁπότε θὰ ἔχωμεν, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ οἰκονομικὴ διαδικασία αὐξάνει ἢ ἐλαττώνει τὸν πλοῦτον, παιγνίδια μὲ σύνολον πληρωμῶν διάφορον τοῦ μηδενός, ταῦτα δὲ ἐξετάζονται εἰς τὸ τέλος τοῦ παρόντος.

2. ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΑΙΓΝΙΔΙΑ ΜΕ ΔΥΟ ΠΑΙΚΤΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΟΝ ΠΛΗΡΩΜΩΝ ΜΗΔΕΝ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ παρουσιασθέντος πίνακος πληρωμῶν διὰ τὸ παιγνίδιον «δυὸ δάκτυλα τοῦ Morra» παραλείψωμεν τὰς παρενθέσεις τὰς ἐνδεικτικὰς τῶν παραλλαγῶν τοῦ παιγνιδίου καὶ τὴν σχετικὴν γραμμογράφησιν, διατηρήσωμεν ὅμως τὴν σχετικὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν τῶν δεικνυόντων τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα λαμβάνει ὁ Α, τότε δι' ἐγκλείσεως αὐτῶν ἁπλῶς εἰς μίαν παρένθεσιν λαμβάνομεν τὸ σχῆμα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

τὸ ὁποῖον καλεῖται, ὡς γνωστόν, εἰς τὰ μαθηματικὰ «μήτρα» — matrix, matrice. — Εἰς τὴν περίπτωσίν μας καλοῦμεν ταύτην «μήτρα πληρωμῶν εἰς τὸν Α». Εἰς τὸ ἀνωτέρω παιγνίδιον αἱ παραλλαγαὶ — αἱ δυναταὶ κινήσεις — διὰ τὸν Α εἶναι ἴσαι μὲ αὐτὰς τοῦ Β, δηλαδὴ ἐν ὅλῳ τέσσαρες. Εἶναι δυνατὸν ὅμως, ὡς θὰ συνέβαινεν π.χ διὰ τὸ παιγνίδιον μὲ μήτραν πληρωμῶν διὰ τὸν Α τὴν

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

αἱ παραλλαγαὶ διὰ τὸν Α νὰ εἶναι ὀλιγώτεραι — ἢ περισσότεραι — ἀπὸ αὐτὰς τοῦ Β, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ὁ Α ἔχει τρεῖς δυνατὰς κινήσεις ἐνῷ ὁ Β τέσσαρας. Ἐν γένει, ἓν παιγνίδιον δύο παικτῶν μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν καὶ μήτραν πληρωμῶν διὰ τὸν Α τὴν

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1\nu} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{\mu 1} & \pi_{\mu 2} & \dots & \pi_{\mu\nu} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

θὰ τὸ καλοῦμεν «ὀρθογώνιον παιγνίδιον μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν». Τὴν μήτραν ταύτην θὰ παρουσιάζωμεν συντόμως μὲ τὸ γράμμα Π, τὸ δὲ τυχὸν στοιχεῖον αὐτῆς—τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὴν κ γραμμὴν εἰς τὴν λ στήλην—μὲ τὸ $\pi_{\kappa\lambda}$.

Δοθείσης τώρα τῆς μήτρας Π πληρωμῶν διὰ τὸν Α, γεννᾶται ἀμέσως τὸ ἐρώτημα: «Ποία κίνησις—δηλαδὴ ἡ ἐκλογὴ ποίας γραμμῆς—συμφέρει τὸν Α;» Ἐὰν ἦτο δυνατὸν νὰ γίνη γνωστὴ προηγουμένως εἰς τὸν Α ἡ ἐκλογὴ τοῦ Β τότε τὸ πρόβλημα λύεται ἀμέσως: τῆς γραμμῆς εἰς ἣν θ' ἀνήκη ἡ μεγίστη ἐκ τῶν πληρωμῶν τῶν εὑρισκομένων εἰς τὴν ἐκλεγεῖσαν ὑπὸ τοῦ Β στήλην. Δεδομένου ὅμως ὅτι ὁ Α ἀγνοεῖ, πρὸ τῆς ἐκλογῆς του, τὴν ἐκλογὴν τοῦ Β, πρέπει νὰ ἐκλέξῃ γραμμὴν μὲ ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγωτέρας ἀπωλείας· δηλαδὴ νὰ ἐκλέξῃ μίαν γραμμὴν εἰς τρόπον ὥστε, οἱανδήποτε στήλην καὶ νὰ ἐκλέξῃ ὁ Β, νὰ ἔχῃ οὗτος—ὁ Α—τὴν μικροτέραν ἀπώλειαν. Τοῦτο εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Συμβολίζομεν(*) μὲ $\underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa\lambda}$ τὸ μέγιστον τῶν $\pi_{\kappa\lambda}$ τῆς γραμμῆς καὶ μὲ $\underset{\kappa}{E}\pi_{\kappa\lambda}$ τὸ ἐλάχιστον· ὁμοίως μὲ $\underset{\lambda}{M}\pi_{\kappa\lambda}$ θὰ συμβολίζωμεν τὸ μέγιστον τῆς στήλης λ καὶ μὲ $\underset{\lambda}{E}\pi_{\kappa\lambda}$ τὸ ἐλάχιστον ταύτης. Τοιουτοτρόπως ἐὰν ὁ Α ἐκλέξῃ τὴν κ γραμμὴν δύναται νὰ εἶναι βέβαιος ὅτι ἡ μικροτέρα πληρωμὴ εἰς αὐτὸν θὰ εἶναι ἡ $\underset{\lambda}{E}\pi_{\kappa\lambda}$. (Ἐὰν ἡ τελευταία αὕτη ποσότης εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς θὰ σημαίνῃ τοῦτο ὅτι θὰ πληρώσῃ εἰς τὸν Β τὸ ἑπόμενον τοῦ προσήμου ποσόν). Ἄρα θὰ πρέπῃ νὰ ἐκλέξῃ γραμμὴν εἰς τρόπον ὥστε ἡ ποσότης $\underset{\lambda}{E}\pi_{\kappa\lambda}$ νὰ εἶναι—ἀλγεβρικῶς—ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέρα· δηλαδὴ νὰ ἐκλέξῃ γραμμὴν εἰς τὴν ὁποίαν θ' ἀντιστοιχῇ ἡ ποσότης:

$$\boxed{\underset{\kappa}{M}\,\underset{\lambda}{E}\,\pi_{\kappa\lambda}} \qquad (4)$$

Καὶ τοῦτο διότι, καθὼς ἀνεφέρθη, ἀγνοεῖ τὴν ἐκλογὴν τῆς στήλης λ ὑπὸ τοῦ Β καὶ θέλει νὰ ἐξασφαλίσῃ τὴν μικροτέραν δυνατὴν ἀπώλειαν· τὸ νὰ ἐκλέξῃ τὴν γραμμὴν μὲ τὸ μέγιστον τῶν $\pi_{\kappa\lambda}$ εἶναι προφανῶς ἀσύμφορον, διότι ἡ ἰδία γραμμὴ εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχῃ ἓν ἀπὸ τὰ μικρότερα τῶν $\pi_{\kappa\lambda}$ ἢ ἀκόμη καὶ αὐτὸ τοῦτο τὸ ἐλάχιστον τῶν $\pi_{\kappa\lambda}$, ὁπότε ἡ ἐκλογὴ ὑπὸ τοῦ Β τῆς στήλης εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ τὸ τελευταῖον τοῦτο θὰ ὁδηγήσῃ τὸν Α εἰς μεγαλυτέραν ἀπώλειαν. Δι' ἐκλογῆς λοιπὸν ὑπὸ τοῦ Α τῆς γραμμῆς εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἡ ποσότης (4) εἶναι βέβαιος ὅτι ὁ Α θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν Β τουλάχιστον τὸ ποσὸν (4).

Δι' ἀναλόγων συλλογισμῶν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ Β πρέπει νὰ ἐκλέξῃ τὴν στήλην εἰς τὴν ὁποίαν θ' ἀντιστοιχῇ ἡ ποσότης $\underset{\lambda}{M}\,\underset{\kappa}{E}\,(-\pi_{\kappa\lambda})$, καὶ τοῦτο διότι αἱ πληρωμαὶ εἰς τὸν Β εἶναι ἀντίθετοι—ὡς πρὸς τὸ πρόσημον—τῶν πληρωμῶν εἰς τὸν Α. Λόγῳ ὅμως τῶν σχέσεων:

$$\underset{\lambda}{M}\,\underset{\kappa}{E}\,(-\pi_{\kappa\lambda}) = \underset{\lambda}{M}\,(-\underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa\lambda}) = -\underset{\lambda}{E}\,\underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa\lambda}$$

συμπεραίνομεν ὅτι ὁ Β πρέπει νὰ ἐκλέξῃ στήλην εἰς τρόπον ὥστε νὰ ὑπάρχῃ εἰς αὐτὴν τὸ $-\underset{\lambda}{E}\underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa\lambda}$, θὰ εἶναι δὲ βέβαιος ὅτι θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν Α τουλάχιστον τὸ ποσὸν τοῦτο, ἤ, πρᾶγμα ταυτό, ὅτι ὁ Α θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν Β τὸ πολὺ ποσὸν

$$\boxed{\underset{\lambda}{E}\,\underset{\kappa}{M}\,\pi_{\kappa\lambda}} \qquad (5)$$

Δηλαδὴ ὁ Α δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ «παίξιμο» εἰς τρόπον ὥστε νὰ πάρῃ

(*) Συνήθως χρησιμοποιεῖται ὁ συμβολισμὸς $\max_{\kappa} \pi_{\kappa\lambda}$ ἀντὶ τοῦ $\underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa\lambda}$ καὶ ὁ $\min_{\kappa}$ $\pi_{\kappa\lambda}$ ἀντὶ τοῦ $\underset{\kappa}{E}\pi_{\kappa\lambda}$. Ἐξελέξαμεν τοὺς πρώτους διὰ ταχυγραφικοὺς καὶ τυπογραφικοὺς όγους.

ἀπὸ τὸν Β τουλάχιστον τὸ ποσὸν (4), ἀλλὰ πρέπει νὰ γνωρίζῃ ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐμποδισθῇ ἀπὸ τὸν Β νὰ πάρῃ περισσότερα ἀπὸ τὸ ποσὸν (5).

Ἐὰν συμβῇ νὰ εἶναι

$$\boxed{\underset{\kappa}{M}\,\underset{\lambda}{E}\,\pi_{\kappa\lambda} = \underset{\lambda}{E}\,\underset{\kappa}{M}\,\pi_{\kappa\lambda} = \tau} \tag{6}$$

τότε ὁ Α ἀντιλαμβάνεται ὅτι ἠμπορεῖ νὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν Β τουλάχιστον τὸ ποσὸν τ, ἀλλὰ καὶ ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐμποδισθῇ ἀπ' αὐτὸν νὰ πάρῃ περισσότερα ἀπὸ τ. Ἐὰν ἡ (6) ἀληθεύῃ διὰ μίαν μήτραν πληρωμῶν Π, τότε ἡ εὕρεσις ἑνὸς τρόπου παιξίματος προνομιούχου καὶ διὰ τοὺς δύο παίκτας εἶναι δυνατὴ καὶ οὐδὲν πέραν αὐτοῦ ἔχομεν νὰ εἴπωμεν.

Τὸ οὐσιῶδες πρὸς λύσιν πρόβλημα εἶναι ἐκεῖνο καθ' ὃ αἱ ποσότητες (4) καὶ (5) εἶναι διάφοροι ἀλλήλων, ὡς συμβαίνει ἐπὶ παραδείγματι διὰ τὴν μήτραν πληρωμῶν (1). Πράγματι εἶναι δι' αὐτὴν

$$\underset{\kappa\ \lambda}{ME}\pi_{\kappa\lambda} = M\,[\underset{\lambda}{E}\pi_{1\lambda},\ \underset{\lambda}{E}\pi_{2\lambda},\ \underset{\lambda}{E}\pi_{3\lambda},\ \underset{\lambda}{E}\pi_{4\lambda}] = M\,[-3, -2, -4, -3] - 2$$

$$\underset{\lambda\ \kappa}{EM}\pi_{\kappa\lambda} = E\,[\underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa 1},\ \underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa 2},\ \underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa 3},\ \underset{\kappa}{M}\pi_{\kappa 4}] = E\,[3, 2, 4, 3] = 2$$

ΣΗΜ. Διὰ τῶν συμβόλων $M[x, y, \ldots, z]$ καὶ $E[x, y, \ldots, z]$ παρουσιάζομεν, ἀντιστοίχως, τὸ μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τῶν $x, y, \ldots, z$.

Ἐρχόμεθα ν' ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἀκόλουθον θεμελιώδη πρότασιν:

Δοθείσης τῆς συναρτήσεως $z = \sigma(x, y)$ ὡρισμένης εἰς τὸν τόπον $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ καὶ ὑπαρχόντων τῶν $\underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,z$ καὶ $\underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,z$

θὰ εἶναι

$$\boxed{\underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,z \leqq \underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,z} \tag{7}$$

Πράγματι, ὡς γνωστόν, εἶναι

$$\underset{y}{E}\,z \leqq z \quad \text{καὶ} \quad z \leqq \underset{x}{M}\,z$$

δηλαδὴ καὶ

$$\underset{y}{E}\,z \leqq \underset{x}{M}\,z$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς τελευταίας ταύτης σχέσεως εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ y, ἕπεται ὅτι τὸ ἐλάχιστον αὐτοῦ ὡς πρὸς y εἶναι πάλιν τὸ $\underset{y}{E}\,z$ καὶ συνεπῶς

$$\underset{y}{E}\,z \leqq \underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,z$$

Τῆς νέας ταύτης σχέσεως τὸ δεξιὸν μέλος εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x καὶ ἄρα τὸ μέγιστον αὐτοῦ ὡς πρὸς x εἶναι πάλιν τὸ $\underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,z$ καὶ ἄρα

$$\boxed{\underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,z \leqq \underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,z}$$

Ἡ σχέσις (7) εἶναι, προφανῶς, ἀληθὴς καὶ δι' οἱανδήποτε μήτραν πληρωμῶν Π μὲ τυχὸν στοιχεῖον τὸ $\pi_{\kappa\lambda}$, διότι διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἀρκεῖ μόνον νὰ θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν σ (κ,λ) ὡρισμένην εἰς τὰ σημεῖα P (κ,λ) [ὅπου $\kappa=1, 2,\dots, \mu$ καὶ $\lambda = 1, 2,\dots, \nu$] διὰ τῆς ἐξισώσεως $\pi_{\kappa\lambda} = \sigma(\kappa, \lambda)$. Ἄρα θὰ εἶναι

$$\boxed{\underset{\kappa}{M}\,\underset{\lambda}{E}\,\pi_{\kappa\lambda} \leqq \underset{\lambda}{E}\,\underset{\kappa}{M}\,\pi_{\kappa\lambda}} \tag{8}$$

3. ΤΑ ΣΕΛΛΟΣΗΜΕΙΑ (*)

Λέγομεν ὅτι τὸ σημεῖον $\Sigma\,(x_0, y_0)$ εἶναι «σελλοσημεῖον», διὰ τὴν ὡρισμένην εἰς τὸν τόπον $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ συνάρτησιν σ (x, y), ἐὰν ὑπάρχουν δι' αὐτὴν αἱ σχέσεις :

$$\sigma(x, y_0) \leqq \sigma(x_0, y_0) \leqq \sigma(x_0, y)$$

Σχετικῶς μὲ τὰ σελλοσημεῖα ὑπάρχει ἡ ἀκόλουθος πρότασις χρησιμεύουσα εἰς τὴν θεωρίαν τῶν παιγνιδίων :

«Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τὸ σημεῖον $\Sigma\,(x_0, y_0)$ εἶναι σελλοσημεῖον τῆς ὡρισμένης εἰς τὸν τόπον $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ συναρτήσεως σ (x, y) διὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν τὰ

$$\underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) \quad \text{καὶ} \quad \underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y)$$

εἶναι ἡ

$$\boxed{\sigma(x_0, y_0) = \underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) = \underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y)} \tag{1}$$

Πρῶτον θ' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία. Δηλαδὴ θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον $\Sigma\,(x_0, y_0)$ εἶναι ἓν σελλοσημεῖον τῆς σ (x, y) καὶ θὰ δείξωμεν, ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς ὑποθέσεως ταύτης, τὴν ἀλήθειαν τῶν (1).

Πράγματι, ἀφοῦ τὸ Σ εἶναι σελλοσημεῖον τῆς σ (x, y) θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμόν :

$$\sigma(x, y_0) \leqq \sigma(x_0, y_0), \quad \sigma(x_0, y_0) \leqq \sigma(x_0, y) \tag{2}$$

ἐξ αὐτῶν δὲ συμπεραίνομεν καὶ τὰς

$$\underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0) \leqq \sigma(x_0, y_0), \quad \sigma(x_0, y_0) \leqq \underset{y}{E}\,\sigma(x_0, y) \tag{3}$$

Εἶναι ὅμως

$$\underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y) \leqq \underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0), \quad \underset{y}{E}\,\sigma(x_0, y) \leqq \underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) \tag{4}$$

ὁπότε ἐκ τῶν (4) γίνονται αἱ (3)

$$\underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y) \leqq \sigma(x_0, y_0) \quad \sigma(x_0, y_0) \leqq \underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) \tag{5}$$

(*) Μὲ τὴν λέξιν «σελλοσημεῖον» ἀπεδώσαμεν τὸ καλούμενον ἀγγλιστὶ Saddle-point. Ἐξελέξαμεν ταύτην ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι δίδει κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον πιστὴν μετάφρασιν, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι δὲν ἠδυνήθημεν νὰ σχηματίσωμεν ἄλλην λέξιν.

Λόγῳ τοῦ ὅτι ὅμως ὑπάρχει καὶ ἡ

$$\underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) \leqq \underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y)$$

συμπεραίνομεν ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν αἱ ἀνισωτικαὶ σχέσεις εἰς τὰς (5), ὁπότε

$$\boxed{\sigma(x_0, y_0) = \underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y) = \underset{y}{E}\,\underset{x}{M}\,\sigma(x, y)}$$

Διὰ νὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ἡ συνθήκη εἶναι καὶ ἱκανὴ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: ὑποθέτομεν ὅτι ἓν σημεῖον x_0 τοῦ διαστήματος $[x_1, x_2]$ καθιστᾶ τὴν $\underset{y}{E}\,\sigma(x, y)$ μεγίστην καὶ ἓν σημεῖον y_0 τοῦ διαστήματος $[y_1, y_2]$ καθιστᾶ τὴν $\underset{x}{M}\,\sigma(x, y)$ ἐλαχίστην. Δηλαδὴ ὅτι εἶναι:

$$\underset{y}{E}\,(x_0, y) = \underset{x}{M}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y), \quad \underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0) = \underset{x}{E}\,\underset{y}{M}\,\sigma(x, y)$$

Ἀφοῦ ὅμως ἀληθεύει, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ (1) συμπεραίνομεν ὅτι

$$\underset{y}{E}\,\sigma(x_0, y) = \underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0) \tag{6}$$

καὶ λόγῳ τῶν σχέσεων

$$\underset{y}{E}\,\sigma(x_0, y) \leqq \sigma(x_0, y_0),\ \sigma(x_0, y_0) \leqq \underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0)$$

καὶ τῆς (6) ἔχομεν

$$\underset{x}{M}\,\sigma(x, y_0) \leqq \sigma(x_0, y_0),\ \sigma(x_0, y_0) \leqq \underset{y}{E}\,\sigma(x_0, y)$$

ἄρα καὶ κατὰ μείζονα λόγον,

$$\sigma(x, y_0) \leqq \sigma(x_0, y_0), \quad \sigma(x_0, y_0) \leqq \sigma(x_0, y)$$

Δηλαδὴ συμπεραίνομεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν ὅτι τὸ $\Sigma(x_0, y_0)$ θὰ εἶναι σελλοσημεῖον.

Ὡς πόρισμα τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἔχομεν ὅτι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἡ μήτρα πληρωμῶν Π, μὲ τυχὸν στοιχεῖον τὸ $\pi_{\kappa\lambda}$, ἔχῃ ἓν σελλοσημεῖον, δηλαδὴ ἓν στοιχεῖον $\pi_{\kappa\lambda}$ διὰ τὸ ὁποῖον νὰ ὑπάρχουν αἱ σχέσεις

$$\pi_{\kappa\lambda_0} \leqq \pi_{\kappa_0\lambda_0} \leqq \pi_{\kappa_0\lambda}$$

εἶναι ἡ

$$\boxed{\pi_{\kappa_0\lambda_0} = \underset{\kappa}{M}\,\underset{\lambda}{E}\,\pi_{\kappa\lambda} = \underset{\lambda}{E}\,\underset{\kappa}{M}\,\pi_{\kappa\lambda}} \tag{7}$$

Συνεπῶς ἐὰν ἡ μήτρα πληρωμῶν εἰς τὸν Α ἔχῃ ἓν σελλοσημεῖον τότε πρέπει νὰ ἐκλέξῃ οὗτος τὴν κ_0 καὶ ὁ Β τὴν λ_0 στήλην, ἡ ἐκλογὴ δὲ αὕτη εἶναι ἡ ἀρίστη ἐξ ὅσων εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρξουν καὶ δι' αὐτὸ καλεῖται καὶ «ἰδανικὴ ἐκλογή». Τὸ στοιχεῖον $\pi_{\kappa_0\lambda_0}$ καλεῖται «τιμὴ» τοῦ παιγνιδίου διὰ τὸν Α.

4. Η ΜΙΚΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι δύο παῖκται Α καὶ Β παίζουν ἓν παιγνίδιον μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν καὶ μήτραν πληρωμῶν εἰς τὸν Α τὴν

$$\begin{pmatrix} \rho & -\rho \\ -\rho & \rho \end{pmatrix} \qquad \rho > 0 \qquad (1)$$

Εἶναι εὔκολον ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ μήτρα αὕτη δὲν ἔχει σελλοσημεῖον. Πράγματι εἶναι

$$\underset{\kappa}{\mathrm{M}}\,\underset{\lambda}{\mathrm{E}}\,\pi_{\kappa\lambda} = \mathrm{M}\left[\underset{\lambda}{\mathrm{E}}\,\pi_{1\lambda},\ \underset{\lambda}{\mathrm{E}}\,\pi_{2\lambda}\right] = \mathrm{M}\,[-\rho, -\rho] = -\rho$$

$$\underset{\lambda}{\mathrm{E}}\,\underset{\kappa}{\mathrm{M}}\,\pi_{\kappa\lambda} = \mathrm{E}\left[\underset{\kappa}{\mathrm{M}}\,\pi_{\kappa 1},\ \underset{\kappa}{\mathrm{M}}\,\pi_{\kappa 2}\right] = \mathrm{E}\,[\ \rho,\ \rho\ ] = \rho$$

καὶ συνεπῶς $\underset{\kappa}{\mathrm{M}}\,\underset{\lambda}{\mathrm{E}}\,\pi_{\kappa\lambda} \neq \underset{\lambda}{\mathrm{E}}\,\underset{\kappa}{\mathrm{M}}\,\pi_{\kappa\lambda}$

Ἐφ' ὅσον λοιπὸν ἡ μήτρα δὲν ἔχει σελλοσημεῖον, αἱ προηγούμεναι μέθοδοι εὑρέσεως ἰδανικῆς ἐκλογῆς δὲν ἐφαρμόζονται καὶ πρέπει ν' ἀναζητηθοῦν ἄλλαι μέθοδοι. Ἐπὶ πλέον εἰς τὸ παιγνίδιον αὐτὸ ἕνας ἕκαστος ἐκ τῶν παικτῶν εὑρίσκεται εἰς ἀμηχανίαν προκειμένου νὰ ἐκλέξῃ τὴν κίνησίν του, διότι διὰ νὰ κερδίσῃ ὁ Α πρέπει νὰ ἐκλέξῃ γραμμὴν τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ τὴν τῆς ἐκλεγείσης ὑπὸ τοῦ Β στήλης, ἐνῷ διὰ νὰ κερδίσῃ ὁ Β πρέπει νὰ ἐκλέξῃ στήλην διαφορετικῆς τάξεως. Τὸ νὰ ἐκλέξῃ ὁ Α μίαν ὡρισμένην γραμμὴν καὶ νὰ παίζῃ συνεχῶς αὐτὴν εἶναι προφανῶς ἀσύμφορον, διότι ὁ Β ὅταν ἀντιληφθῇ τοῦτο θ' ἀρχίσῃ νὰ παίζῃ τὴν στήλην μὲ τὴν διαφορετικὴν τάξιν· ἀνάλογος συλλογισμὸς γίνεται καὶ διὰ τὸν Β. Ὁ μόνος τρόπος λοιπὸν εἶναι νὰ ἐκλέγουν τυχαῖα τὰς κινήσεις των ἀλλὰ σὲ κάποιαν ἀναλογίαν, ἐὰν ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀναλογία αὕτη εἶναι προνομιοῦχος. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἐξετασθῇ τὸ ζήτημα τῆς ὑπάρξεως καὶ εὑρέσεως τῶν τοιούτων προνομιούχων ἀναλογιῶν.

Ἄς ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις ὅτι ὁ Α παίζει, εἰς ἕνα σύνολον Τ κινήσεων, τὴν κίνησιν «ἕνα» — τὴν πρώτην γραμμὴν — αΤ φοράς, δηλαδὴ μὲ συχνότητα α καὶ τὴν κίνησιν «δύο» — τὴν δευτέραν γραμμὴν — (1 - α)Τ φοράς, δηλαδὴ μὲ συχνότητα 1 - α. Ἐπίσης ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Β παίζει, εἰς τὸ αὐτὸ σύνολον τῶν κινήσεων, τὴν κίνησιν «ἕνα» — τὴν πρώτην στήλην — βΤ φοράς, δηλαδὴ μὲ συχνότητα β καὶ τὴν κίνησιν «δύο» — τὴν δευτέραν στήλην — (1-β)Τ φοράς, δηλαδὴ μὲ συχνότητα 1 - β. Τὸ παίξιμο αὐτὸ δύναται νὰ ἐπιτύχῃ ὁ Α π.χ. καὶ δι' ἕνα Τ κάπως μεγάλο, ἀνασύρων ἐκ μιᾶς κάλπης περιεχούσης ἄσπρα σφαιρίδια εἰς ἀναλογίαν α καὶ μαῦρα εἰς ἀναλογίαν 1 - α, ἓν σφαιρίδιον πρὸ ἑκάστης κινήσεως καὶ παίζων τὴν πρώτην γραμμὴν ὁσάκις ἐμφανίζεται ἄσπρο καὶ τὴν δευτέραν ὁσάκις μαῦρο. Ἀνάλογος παρατήρησις γίνεται καὶ διὰ τὸν παίκτην Β. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τοῦ Α ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ «ἕνα - ἕνα» — ὁ Α παίζει τὴν πρώτην γραμμήν, ὁ Β τὴν πρώτην στήλην — εἶναι ραβ, διότι πρόκειται περὶ συνθέτου γεγονότος: θὰ λάβῃ τὸ ποσὸν ρ ἐὰν ἐκλέξῃ τὴν πρώτην γραμμὴν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ Β θὰ ἐκλέξῃ τὴν πρώτην στήλην· ἡ πιθανότης ὅμως τοῦ νὰ ἐκλέξῃ ὁ Α τὴν πρώτην γραμμὴν εἶναι α καὶ ὁ Β τὴν πρώτην στήλην β καὶ ἄρα ἡ σύνθετος πιθανότης αβ. Ὁμοίως ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τοῦ Α ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ «ἕνα - δύο» εἶναι — ρα(1 - β), ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ «δύο - ἕνα» — ρ (1 - α) β καὶ τοῦ συνδυασμοῦ «δύο - δύο» ρ (1 - α) (1 - β). Ἄρα ἡ συνολικὴ μαθηματικὴ ἐλπὶς τοῦ Α εἶναι :

$$ε(α,β) = ραβ - ρα(1\text{-}α)β + ρ(1\text{-}α)(1\text{-}β) \qquad \text{ἢ ἁπλούστερον}$$

$$\boxed{ε(α,β) = ρ(2α\text{-}1)(2β\text{-}1)} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι

$$ε\left(α,\frac{1}{2}\right) = ε\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = ε\left(\frac{1}{2},β\right)$$

συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σημεῖον $Σ\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ εἶναι σελλοσημεῖον διὰ τὴν συνάρτησιν ε(α,β) — καθὼς καὶ διὰ τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα — ε(α,β) τοῦ Β.

Ὥστε ἡ «ἰδανικὴ μαθηματικὴ ἐλπὶς» διὰ τοὺς παίκτας τοῦ παιγνιδίου μὲ μήτραν πληρωμῶν εἰς τὸν Α τὴν (1) ὑπάρχει ὅταν παίζουν μὲ συχνότητας $α = \frac{1}{2}$ καὶ $β = \frac{1}{2}$. Ἐξ αὐτῆς τῆς παρατηρήσεως λαμβάνοντες ἀφορμὴν καλοῦμεν τὴν συχνότητα $\overset{*}{α}$ τοῦ Α — συχνότης παιξίματος ὑπὸ τοῦ Α τῆς πρώτης γραμμῆς εἰς ἓν παιγνίδιον μὲ μήτραν δύο γραμμῶν καὶ δύο στηλῶν — «ἰδανικὴν συχνότητα» καὶ τὴν $\overset{*}{β}$ ἰδανικὴν συχνότητα διὰ τὸν Β ἐὰν ὑπάρχουν αἱ σχέσεις

$$ε(α,\overset{*}{β}) \leqq ε(\overset{*}{α},\overset{*}{β}) \leqq ε(\overset{*}{α},β)$$

ὅπου

$$O \leqq \overset{*}{α} \leqq 1 \qquad O \leqq \overset{*}{β} \leqq 1$$

Τ' ἀνωτέρω γενικεύομεν καὶ διὰ παιγνίδια μὲ τυχοῦσαν ὀρθογώνιον μήτραν πληρωμῶν εἰς τὸν Α. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μήτρα αὔτη εἶναι τάξεως (μ,ν). Θὰ καλοῦμεν «μικτὴν στρατηγικὴν» διὰ τὸν Α μίαν διατεταγμένην μ—άδα θετικῶν ἀριθμῶν $α_κ$ (κ = 1, 2, . . . , μ), διὰ τοὺς ὁποίους ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$\sum_{κ=1}^{κ=μ} α_κ = 1$$

Ἀντιστοίχως καλοῦμεν μικτὴν στρατηγικὴν διὰ τὸν Β μίαν διατεταγμένην ν—άδα θετικῶν ἀριθμῶν $β_λ$ (λ = 1, 2, . . . , ν), διὰ τοὺς ὁποίους ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$\sum_{λ=1}^{λ-ν} β_λ = 1$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τοῦ Α θὰ εἶναι, ὅταν οὗτος παίζῃ τὴν κ γραμμὴν μὲ συχνότητα $α_κ$ καὶ ὁ Β τὴν λ στήλην μὲ συχνότητα $β_λ$, ἴση μὲ

$$\sum_{κ=1}^{κ=μ} \sum_{λ=1}^{λ=ν} α_κ β_λ π_{κλ}$$

συμβολίζομεν δὲ ταύτην μὲ ε(α,β), ὅπου α σημειώνει τὴν μ—άδα τῶν $α_κ$ (κ = 1, 2, . . . , μ) καὶ β τὴν ν—άδα τῶν $β_λ$ (λ = 1, 2, . . . , ν).

Ἐὰν ὑπάρχῃ ζεῦγος $\overset{*}{α}, \overset{*}{β}$ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε

$$ε(α, \overset{*}{β}) \leqq ε(\overset{*}{α}, \overset{*}{β}) \leqq ε(\overset{*}{α}, β) \qquad (3)$$

τότε λέγομεν ὅτι ὑπάρχει «ἰδανικὴ μικτὴ στρατηγική» διὰ τοὺς παίκτας Α καὶ Β, εἶναι δὲ ἐκείνη καθ' ἣν ὁ Α παίζει τὴν πρώτην γραμμὴν μὲ συχνότητα $\overset{*}{\alpha}_1$, τὴν δευτέραν μὲ συχνότητα $\overset{*}{\alpha}_2,\ldots$, τὴν μ-στὴν μὲ συχνότητα $\overset{*}{\alpha}_\mu$, ὁ δὲ Β τὴν πρώτην στήλην μὲ συχνότητα $\overset{*}{\beta}_1$, τὴν δευτέραν μὲ συχνότητα $\overset{*}{\beta}_2,\ldots$, τὴν ν-στὴν μὲ συχνότητα $\overset{*}{\beta}_\nu$. Ἡ ποσότης $\varepsilon(\overset{*}{\alpha}, \overset{*}{\beta})$ καλεῖται «τιμὴ» τοῦ παιγνιδίου διὰ τὸν Α, ἡ δὲ διατεταγμένη δυὰς $(\overset{*}{\alpha}, \overset{*}{\beta})$ καλεῖται «λύσις» τοῦ παιγνιδίου ἢ «στρατηγικὸν σελλοσημεῖον». Ἡ ὕπαρξις δηλαδὴ λύσεως τοῦ παιγνιδίου σημαίνει, κατὰ τὰ προαναφερθέντα, ὅτι ὁ Α ἐλπίζει νὰ πάρῃ ἀπὸ τὸν Β τουλάχιστον $\varepsilon(\overset{*}{\alpha}, \overset{*}{\beta})$, ἐνῷ ὁ Β ἐλπίζει εἰς τὸ νὰ ἐμποδίσῃ τὸν Α νὰ πάρῃ περισσότερα ἀπὸ τὸ ποσὸν αὐτό. Ἐὰν συμβῇ αἱ ποσότητες $\tau_1 = \underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$, $\tau_2 = \underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$ νὰ ὑπάρχουν καὶ νὰ εἶναι ἴσαι, τότε, συμφώνως πρὸς προαποδειχθὲν θεώρημα, θὰ ὑπάρχουν αἱ (3), δηλαδὴ θὰ ὑπάρχῃ μιὰ ἰδανικὴ μικτὴ στρατηγική. Κατωτέρω θ' ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχουν πάντοτε τὰ τ_1 καὶ τ_2 καὶ εἶναι ἴσα, ὑποθέτοντες γνωστὴν ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ ν-διαστάτου Εὐκλειδείου χώρου E_ν τὴν πρότασιν καθ' ἥν, δοθείσης τῆς μήτρας

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \ldots & \pi_{1\nu} \\ \pi_{21} & \pi_{12} & \ldots & \pi_{2\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \pi_{\mu 1} & \pi_{\kappa 2} & \ldots & \pi_{\kappa\nu} \end{pmatrix}$$

τότε εἴτε ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu)$ τοῦ E_μ διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\alpha_1\,\pi_{1\lambda} + \alpha_2\,\pi_{2\lambda} + \ldots + \alpha_\mu\,\pi_{\mu\lambda} \geqq O \qquad \text{διὰ } \lambda = 1, \ldots, \nu \qquad (4)$$

εἴτε ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu)$ τοῦ E_ν διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\beta_1\,\pi_{\kappa 1} + \beta_2\,\pi_{\kappa 2} + \ldots + \beta_\nu\,\pi_{\kappa\nu} \leqq O \qquad \text{διὰ } \kappa = 1, \ldots, \mu \qquad (5)$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τώρα τῆς προτάσεως, τῆς καλουμένης καὶ «θεμελιώδους προτάσεως τῶν ὀρθογωνίων παιγνιδίων», τῆς ἀφορώσης τὴν ὕπαρξιν ἰδανικῆς μικτῆς στρατηγικῆς σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως :

Διὰ κάθε β ἡ συνάρτησις $\varepsilon(\alpha, \beta)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῆς α, ἡ ὁποία εἶναι ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ ὑποσυνόλου U_μ τοῦ E_μ. Ἄρα τὸ $\underset{\alpha}{M}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$ θὰ ὑπάρχῃ διὰ κάθε β τοῦ U_ν. Ἐπὶ πλέον εἶναι εὔκολον νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι τὸ $\underset{\alpha}{M}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$ εἶναι μία γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ β καὶ συνεχής. Ἄρα τὸ U_ν εἶναι ἕνα κλειστὸν ὑποσύνολον τοῦ E_ν καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ $\underset{\beta}{E}\,\underset{\alpha}{M}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$ ὑπάρχει· καθ' ὅμοιον τρόπον συμπεραίνομεν ὅτι τὸ $\underset{\alpha}{M}\,\underset{\beta}{E}\,\varepsilon(\alpha, \beta)$ ὑπάρχει. Ἐὰν ὑπάρχῃ τώρα ἡ συνθήκη (4), τότε ὑπάρχει ἓν στοιχεῖον α τοῦ U_μ εἰς τρόπον ὥστε διὰ κάθε β τοῦ U_ν νὰ εἶναι

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} (\alpha_1\,\pi_{1\lambda} + \alpha_2\,\pi_{2\lambda} + \ldots + \alpha_\mu\,\pi_{\mu\lambda})\,\beta_\lambda \geqq O \qquad (6)$$

'Εφ' ὅσον λοιπὸν ἡ (6) ὑπάρχει διὰ κάθε β τοῦ U_ν θὰ εἶναι

$$\underset{\beta}{E}\ \varepsilon(\alpha,\beta) \geqq O$$

καὶ

$$\underset{\alpha}{M}\ \underset{\beta}{E}\ \varepsilon(\alpha,\beta) \geqq O \tag{7}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ συνθήκη (5) θὰ εἶναι

$$\underset{\beta}{E}\ \underset{\alpha}{M}\ \varepsilon(\alpha,\beta) \leqq O. \tag{8}$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι ὅμως θὰ ὑπάρχῃ μία μόνον τῶν συνθηκῶν (4) καὶ (5) συμπεραίνομεν ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν συγχρόνως αἱ σχέσεις

$$\underset{\alpha}{M}\ \underset{\beta}{E}\ \varepsilon(\alpha,\beta) < o \qquad \underset{\beta}{E}\ \underset{\alpha}{M}\ \varepsilon(\alpha,\beta) > o \tag{9}$$

'Εὰν θεωρήσωμεν τώρα τὴν μήτραν Π_c μὲ στοιχεῖον τῆς κ γραμμῆς καὶ λ στήλης τὸ $\pi_{\kappa\lambda} - C$ ($\kappa = 1, \ldots, \mu$, $\lambda = 1 \ldots, \nu$), τότε, ἐὰν συμβολίσωμεν μὲ ε_c τὴν συνάρτησιν ἐλπίδος διὰ τὴν Π_c, θὰ εἶναι

$$\varepsilon_c(\alpha,\beta) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\mu} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\nu} (\pi_{\kappa\lambda} - C)\, \alpha_\kappa \beta_\lambda \tag{10}$$

καὶ δὲν θὰ ὑπάρχουν δι' αὐτὴν συγχρόνως αἱ σχέσεις

$$\underset{\alpha}{M}\ \underset{\beta}{E}\ \varepsilon_c(\alpha,\beta) < O\ ,\ \underset{\beta}{E}\ \underset{\alpha}{M}\ \varepsilon_c(\alpha,\beta) > O \tag{11}$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι ἐκ τῆς (10) εἶναι

$$\varepsilon_c = \varepsilon - C \tag{12}$$

συμπεραίνομεν διὰ συγκρίσεως τῶν (11) καὶ (12) ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν συγχρόνως αἱ σχέσεις

$$\underset{\alpha}{M}\ \underset{\beta}{E}\ \varepsilon(\alpha,\beta) < C \quad \underset{\beta}{E}\ \underset{\alpha}{M}\ \varepsilon(\alpha,\beta) > C \tag{13}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ σχέσις:

$$\underset{\alpha}{M}\ \underset{\beta}{E}\ \varepsilon(\alpha,\beta) < \underset{\beta}{E}\ \underset{\alpha}{M}\ \varepsilon(\alpha,\beta) \tag{14}$$

καὶ ἄρα θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι:

$$\underset{\alpha}{M}\ \underset{\beta}{E}\ \varepsilon(\alpha,\beta) \geqq \underset{\beta}{E}\ \underset{\alpha}{M}\ \varepsilon(\alpha,\beta) \tag{15}$$

'Επειδὴ ὅμως εἶναι γνωστὸν ὅτι εἶναι καὶ

$$\underset{\alpha}{M}\ \underset{\beta}{E}\ \varepsilon(\alpha,\beta) \leqq \underset{\beta}{E}\ \underset{\alpha}{M}\ \varepsilon(\alpha,\beta) \tag{16}$$

συμπεραίνομεν διὰ συγκρίσεως τῶν (15) καὶ (16) ὅτι θὰ εἶναι

$$\boxed{\underset{\alpha}{M}\ \underset{\beta}{E}\ \varepsilon(\alpha,\beta) = \underset{\beta}{E}\ \underset{\alpha}{M}\ \varepsilon(\alpha,\beta)} \tag{17}$$

'Εκ τοῦ τελευταίου τούτου συμπεραίνομεν τὴν τόσον μεγάλης σημασίας πρότασιν καθ' ἣν: «κάθε παίκτης ὀρθογωνίου παιγνιδίου ἔχει μίαν ἰδανικὴν στρατηγικήν».

5. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

'Εκτὸς τῶν ἀνωτέρω ὑποδειχθεισῶν ἀναλυτικῶν μεθόδων εὑρέσεως τῆς ἰδανικῆς μικτῆς στρατηγικῆς ὑπάρχουν καὶ γραφικαὶ μέθοδοι, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς εὔχρηστοι μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν μήτρας τάξεως $(2, \nu)$ ἢ $(\mu, 2)$ καί, μὲ κάποιαν περισσοτέραν δυσκολίαν, εἰς τὴν περίπτωσιν μήτρας τάξεως (3, ν) ἢ (μ, 3). Εἰς τὴν περίπτωσιν μήτρας τάξεως (μ. ν) ἡ γραφικὴ μέθοδος δὲν ἔχει ἐφαρμογήν.

Ἂς θεωρήσωμεν π.χ. τὸ παιγνίδιον μὲ μήτραν πληρωμῶν εἰς τὸν Α τὴν

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ μήτρα αὕτη δὲν ἔχει σελλοσημεῖον· ἄρα θὰ πρέπῃ ν' ἀναζητήσωμεν μίαν ἰδανικὴν μικτὴν στρατηγικήν.

Ἐὰν ὁ Α παίζῃ τὴν πρώτην γραμμὴν μὲ συχνότητα α καὶ τὴν δευτέραν μὲ συχνότητα $1-\alpha$, τοῦ Β παίζοντος τὴν πρώτην στήλην, θὰ ἔχῃ οὗτος — ὁ Α — ὡς ἐλπίδα τὸ ποσὸν

$$\alpha \,.\, 1 + (1-\alpha)\,(-1)$$

δηλαδὴ τὸ

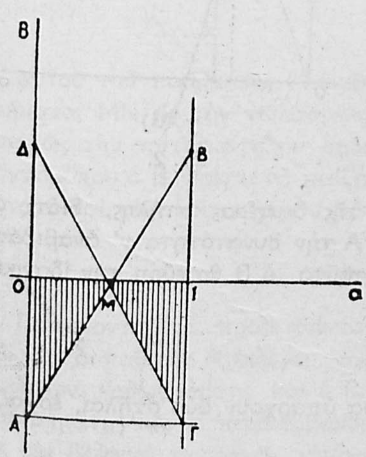
$$2\alpha - 1 \tag{1}$$

Ἐὰν ὁ Β παίζῃ τὴν δευτέραν στήλην, ἡ ἐλπὶς τοῦ Α θὰ εἶναι

$$\alpha \,.\, (-1) + (1-\alpha) \,.\, 1$$

δηλαδὴ ἴση μὲ

$$1 - 2\alpha \tag{2}$$



Σχ. 1.

Χαράσσομεν τώρα εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων Οα καὶ Οβ τὰς εὐθείας

$$\beta = 2\alpha - 1 \quad , \quad \beta = 1 - 2\alpha$$

(βλέπε σχ. 1). Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ δίδει τὴν ἐλπίδα τοῦ παίκτου Α συναρτήσει τῆς συχνότητος α καὶ ὅταν ὁ Β παίζῃ τὴν πρώτην στήλην, ἐνῷ τὸ ΓΔ δίδει τὴν ἐλπίδα τοῦ Α ὅταν ὁ Β παίζῃ τὴν δευτέραν στήλην.

Ἡ τεθλασμένη λοιπὸν ΑΜΓ δίδει τὰ ἐλάχιστα — δι' ὅλα τὰ α τοῦ διαστήματος [0,1] — · ἄρα ὁ Α θὰ ἐκλέξῃ τὸ α τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τῶν ἐλαχίστων αὐτῶν, δηλαδὴ τὸ α τοῦ σημείου Μ. Τοῦτο ἰσοῦται προφανῶς μὲ $\frac{1}{2}$. Ἄρα ἡ ἰδανικὴ μικτὴ στρατηγικὴ διὰ τὸν Α ὑπάρχει καὶ διὰ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐκλεγεῖσα πρέπει οὗτος νὰ παίζῃ τὴν πρώτην γραμμὴν μὲ συχνότητα ἴσην πρὸς τὴν τῆς δευτέρας. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν καὶ διὰ τὴν ἰδανικὴν μικτὴν στρατηγικὴν τοῦ Β.

Θεωροῦμεν τώρα τὸ παιγνίδιον μὲ μήτραν πληρωμῶν εἰς τὸν Α τὴν

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε αἱ ἐλπίδες τοῦ Α, τοῦ Β παίζοντος τὴν πρώτην, τὴν δευτέραν, τὴν τρίτην στήλην, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως:

$$(1) \quad 5-4\alpha$$
$$(2) \quad 3\alpha$$
$$(3) \quad 1+\alpha$$

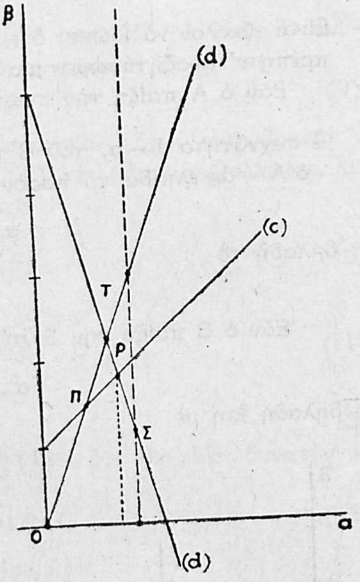
Ἐὰν λοιπὸν σχεδιάσωμεν τὰς εὐθείας

$$(a) \quad \beta = 5-4\alpha$$
$$(b) \quad \beta = 3\alpha$$
$$(c) \quad \beta = 1+\alpha$$

(βλέπε σχ. 2), ἡ τεθλασμένη ΟΠΡΣ δίδει τὰ ἐλάχιστα — δι' ὅλα τὰ α τοῦ διαστήματος [0,1] — ἄρα ὁ Α θὰ ἐκλέξῃ τὸ α τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τῶν ἐλαχίστων αὐτῶν, δηλαδὴ τὸ α τοῦ σημείου Ρ. Διὰ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων

(a) καὶ (c) εὑρίσκομεν $\alpha = \dfrac{5}{7}$

Ἄρα ὁ Α θ' ἀκολουθῇ τὴν ἰδανικὴν μικτὴν στρατηγικὴν ἐὰν παίζῃ τὴν πρώτην γραμμὴν μὲ συχνότητα $\dfrac{5}{7}$ καὶ τὴν δευτέραν μὲ συχνότητα $\dfrac{2}{7}$. Διὰ νὰ εὕρῃ ὁ Β τὴν ἰδικήν του ἰδανικὴν μικτὴν στρατηγικὴν πρέπει κατ' ἀρχὴν ν' ἀποφύγῃ τὸ «παίξιμο» τῆς δευτέρας στήλης, διότι, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται, θὰ δώσῃ εἰς τὸν Α τὴν δυνατότητα ν' ἀναβιβάσῃ τὴν ἐλπίδα του ἐκ τοῦ Ρ εἰς τὸ Τ. Διὰ τοῦτο ὁ Β θὰ εὕρῃ τὴν ἰδανικὴν μικτήν στρατηγικήν του ἐκ τῆς μήτρας



Σχ. 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

διὰ τὴν εὕρεσιν δὲ αὐτῆς, δεδομένου ὅτι τώρα ὑπάρχουν δύο στῆλαι, ἐργαζόμεθα ὡς διὰ τὸν Α.

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ παιγνίδιον ἔχει μήτραν πληρωμῶν εἰς τὸν Α τὴν

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

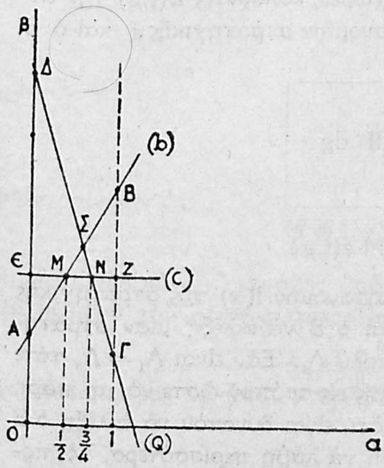
τότε αἱ ἐλπίδες τοῦ Α, τοῦ Β παίζοντος τὴν πρώτην, τὴν δευτέραν, τὴν τρίτην στήλην, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως:

$$(1) \quad 5-4\alpha$$
$$(2) \quad 1+2\alpha$$
$$(3) \quad 2$$

καὶ σχεδιάζοντες τὰς εὐθείας :

$$(a)\quad \beta = 5 - 4\alpha$$
$$(b)\quad \beta = 1 + 2\alpha$$
$$(c)\quad \beta = 2$$

(βλέπε σχ. 3), παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ἐλάχιστα δίδει ἡ τεθλασμένη ΑΜΝΓ — δι' ὅλα τὰ α τοῦ διαστήματος [0,1] — τὸ ἀναζητούμενον ὑπὸ τοῦ Α ὅμως μέγιστον τῶν ἐλαχίστων αὐτῶν δὲν ἀντιστοιχεῖ πλέον εἰς ὡρισμένην τιμὴν τοῦ α ἀλλὰ εἰς σύνολον τιμῶν, καὶ τοῦτο διότι τὸ τμῆμα ΜΝ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν α. Ἡ τετμημένη ὅμως τοῦ Μ εἶναι $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ Ν εἶναι $\frac{3}{4}$· ἄρα ἡ ἰδανικὴ μικτὴ στρατηγικὴ διὰ τὸν Α ὑπάρχει ὅταν παίζῃ μὲ α ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις



Σχ. 3.

$$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$$

Ὁ Β τώρα, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος συμπεραίνεται, πρέπει ν' ἀποφύγῃ νὰ παίζῃ τὴν πρώτην καὶ δευτέραν στήλην, διότι δι' αὐτοῦ τοῦ παιξίματος θ' ἀνεβίβαζε τὴν ἐλπίδα τοῦ Α ἐκ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΜΝ εἰς τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΜΣΝ. Συνεπῶς πρέπει νὰ παίζῃ συνεχῶς τὴν τρίτην στήλην· δηλαδὴ διὰ νὰ παίζῃ τὴν ἰδανικὴν μικτὴν στρατηγικήν του ὁ Β, πρέπει νὰ παίζῃ τὴν πρώτην καὶ δευτέραν στήλην μὲ συχνότητα 0 καὶ τὴν τρίτην μὲ συχνότητα 1.

6. ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Γενικεύοντες τὰ προεκτεθέντα περὶ ὀρθογωνίων παιγνιδίων ὑποθέτομεν ἐδῶ ὅτι ὁ παίκτης Α ἐκλέγει τὴν στρατηγικήν του ἀπὸ ἓν ἄπειρον σύνολον τοιούτων, καθὼς ἐπίσης καὶ ὁ Β. Ὑποθέτομεν δηλαδὴ ὅτι ὅταν ὁ Α ἐκλέξῃ μίαν στρατηγικὴν x περιλαμβανομένην εἰς διάστημα [0,1] — ὁ περιορισμὸς αὐτὸς δὲν βλάπτει προφανῶς τὴν γενικότητα τοῦ προβλήματος — καὶ ὁ Β μίαν στρατηγικὴν y, περιλαμβανομένην εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα, τότε ὁ Β θὰ πληρώσῃ εἰς τὸν Α ἓν ποσὸν σ(x,y) — συνάρτησιν τῶν x καὶ y.

Ἐρχόμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν μίαν μικτὴν ἰδανικὴν στρατηγικὴν διὰ τοὺς δύο παίκτας.

Διὰ κάθε δεδομένον y, ἡ ἐλπὶς τοῦ Α θὰ εἶναι :

$$\int_0^1 \sigma(x,\ y)\ d\ f(x) \qquad \text{(ὁλοκλήρωμα κατὰ Stieltjes)}$$

ὅπου f(x) εἶναι συνάρτησις κατανομῆς τῶν x εἰς τὴν στρατηγικὴν τοῦ Α.

Ἐὰν ὀνομάσωμεν g(y) τὴν συνάρτησιν κατανομῆς τοῦ B εἰς τὴν στρατηγικήν του, τότε ἡ ὁλικὴ ἐλπὶς τοῦ A θὰ εἶναι

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \sigma(x,y)\ d\ f(x) \right] dg(y)$$

ἤ, δι' ἁπλουστέρας γραφῆς τοῦ ἀνωτέρω, θὰ ἔχωμεν, καλοῦντες E(f,g) τὴν ἐλπίδα τοῦ A ὅταν ἀκολουθῇ οὗτος τὴν κατανομὴν στρατηγικῆς f καὶ ὁ B τὴν g, τὴν

$$\boxed{\varepsilon(f,g) = \int_0^1 \int_0^1 \sigma(x,y)\ df\ dg}$$

Ὅταν τὰ

$$\Lambda_1 = \underset{f}{M}\ \underset{g}{E}\ \varepsilon(f,g)\ ,\ \Lambda_2 = \underset{g}{E}\ \underset{f}{M}\ \varepsilon(f,g)$$

ὑπάρχουν, τότε ὁ A δύναται νὰ ἐκλέξῃ μίαν κατανομὴν f(x) τῆς στρατηγικῆς του εἰς τρόπον νὰ λάβῃ τουλάχιστον Λ_1 καὶ ὁ B νὰ ἐκλέξῃ μίαν στρατηγικὴν g(y) εἰς τρόπον ὥστε νὰ πληρώσῃ τὸ πολὺ Λ_2. Ἐὰν εἶναι $\Lambda_1 = \Lambda_2$ τότε ὁ A δύναται νὰ ἐκλέξῃ κατανομὴν στρατηγικῆς εἰς τρόπον ὥστε νὰ μὴ πάρῃ ὀλιγώτερα ἀπὸ Λ_1, ἀλλὰ πρέπει νὰ γνωρίζῃ ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκλέξῃ ὁ B στρατηγικὴν εἰς τρόπον ὥστε νὰ τὸν ἐμποδίσῃ νὰ λάβῃ περισσότερα. Τὸ ποσὸν Λ_1 ἢ Λ_2 εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἰσότητος καλεῖται «τιμὴ» τοῦ παιγνιδίου.

Σχετικῶς μὲ τὰ παιγνίδια τὰ ἐπιδεχόμενα συνεχῆ στρατηγικὴν ἔχομεν τὴν ἑπομένην πρότασιν :

«Ἐὰν ἡ σ(x,y) εἶναι μία συνεχὴς συνάρτησις τῶν x καὶ y τότε αἱ ποσότητες Λ_1 καὶ Λ_2 ὑπάρχουν καὶ εἶναι ἴσαι».

Ἀφοῦ ἡ σ(x,y) εἶναι συνεχὴς ὡς πρὸς x καὶ y, συμπεραίνομεν ὅτι διὰ κάθε κατανομὴν g(y) θὰ εἶναι ἡ

$$\int_0^1 \sigma(x,y)\ dg$$

συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x εἰς τὸ [0,1]. Σύμφωνα λοιπὸν πρὸς γνωστὸν θεώρημα, διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα Stieltjes [1], θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ

$$\underset{f}{M}\ \varepsilon(f,g)$$

ὑπάρχει καὶ εἶναι

$$\underset{f}{M}\ \varepsilon(f,g) = \underset{x}{M} \int_0^1 \sigma(x,y)\ dg \tag{1}$$

Ἄς εἶναι x_g μία τιμὴ τοῦ x καθιστῶσα μέγιστον τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1)· θὰ ἔχωμεν

$$\underset{f}{M} \int_0^1 \sigma(x,y)\ dg = \int_0^1 \sigma(x_g,y)\ dg \tag{2}$$

---

[1] Διὰ ὁλοκλήρωμα Stieltjes βλέπε π.χ. H. Cramér: Mathematical methods of Statistics.

Σύμφωνα μὲ γνωστὸν πάλιν θεώρημα διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα Stieltjes, θὰ εἶναι

$$\int_0^1 \sigma(x_g, y)\, dg \geqq \int_0^1 \left[\underset{x}{E}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x,y)\right] dg$$

ἐπειδὴ δέ,

$$\int_0^1 \left[\underset{x}{E}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x,y)\right] dg = \left[\underset{x}{E}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x,y)\right]\int_0^1 dg$$

καὶ

$$\int_0^1 dg = 1$$

συμπεραίνομεν ὅτι

$$\underset{f}{M}\,\varepsilon(f, g) \leqq \underset{x}{E}\,\underset{y}{E}\,\sigma(x, y)$$

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ ἀνισότης ὑπάρχει διὰ κάθε $g(y)$ καὶ τὸ δεξιὸν μέλος της δὲν περιέχει τὴν $g(y)$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ

$$\underset{f}{M}\,\varepsilon(f, g)$$

ἔχει κάτω πέρας τὸ ὁποῖον γράφομεν

$$\underset{g}{b}\,\underset{f}{M}\,\varepsilon(f, g) \tag{3}$$

Τοῦτο σημαίνει, ὡς γνωστόν, ὅτι ὑπάρχει μία ἀκολουθία κατανομῶν

$$g_1,\ g_2,\ g_3, \ldots,\ g_\nu, \ldots$$

εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι

$$\underset{g}{b}\,\underset{f}{M}\,\varepsilon(f, g) = \lim_{\nu\to\infty} \underset{f}{M}\,\varepsilon(f, g) \tag{4}$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ὡς ἄνω ἀκολουθία τῶν κατανομῶν ἐκλέγεται εἰς τρόπον ὥστε νὰ συγκλίνῃ πρὸς μίαν κατανομὴν G εἰς ὅλα τὰ σημεῖα συνεχείας τῆς G.

Καλέσωμεν x_0 μίαν τιμὴν τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι

$$\underset{x}{M}\int_0^1 \sigma(x, y)\, dG = \int_0^1 \sigma(x_0, y)\, dG \tag{5}$$

Συμφώνως πρὸς γνωστὸν θεώρημα – ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ ὁλοκληρώματος Stieltjes – θὰ ἔχωμεν

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_0^1 \sigma(x_0, y)\, dg_\nu = \int_0^1 \sigma(x_0\, y)\, dG \tag{6}$$

Ἐπειδὴ εἶναι διὰ κάθε ν,

$$\int_0^1 \sigma(x_0, y)\, dg_\nu \leqq \underset{x}{M}\int_0^1 \sigma(x, y)\, dg_\nu$$

θὰ εἶναι καὶ

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_0^1 \sigma(x_0, y)\, dg_\nu \leqq \lim_{\nu\to\infty}\underset{x}{M}\int_0^1 \sigma(x, y)\, dg_\nu \tag{7}$$

Συμπεραίνομεν λοιπόν, ἐκ τῶν σχέσεων (5), (6), (7) ὅτι

$$\underset{x}{M}\int_0^1 \sigma(x, y)\, d\, G \leqq \lim_{\nu \to \infty} \underset{x}{M} \int_0^1 \sigma(x, y)\, dg_\nu \qquad (8($$

Χρησιμοποιοῦντες πάλιν γνωστὸν θεώρημα, ἐπὶ τῆς ὁλοκληρώσεως κατὰ Stieltjes, ἔχομεν ἐκ τῆς (8) τὴν

$$\underset{f}{M}\, \varepsilon(F, G) \leqq \lim_{\nu \to \infty} \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g_\nu) \qquad (9)$$

καὶ συνεπῶς, μέσῳ τῶν (3) καὶ (4) ὅτι

$$\underset{f}{M}\, \varepsilon(f, G) \leqq \underset{g}{b}\, \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) \qquad (10)$$

Ἐκ τῆς γνωστῆς ὅμως ἐννοίας τοῦ κατωτέρου πέρατος εἶναι

$$\underset{g}{b}\, \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) \leqq \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, G) \qquad (11)$$

ἐξ οὗ λαμβάνομεν

$$\underset{g}{b}\, \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) = \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, G) \qquad (12)$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις σημαίνει ὅτι τὸ κατώτερον ὅριον τῆς

$$\underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g)$$

λαμβάνεται διὰ $g = G$, δηλαδὴ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις ἔχει ἕνα ἐλάχιστον. Τὸ ἐλάχιστον αὐτὸ συμβολίζομεν μὲ m· δηλαδὴ θέτομεν

$$m = \underset{g}{E}\, \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) \qquad (13)$$

Καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξις τοῦ

$$n = \underset{f}{M}\, \underset{g}{E}\, \varepsilon(f, g) \qquad (14)$$

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι εἶναι $m = n$.

Πράγματι ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι, διὰ μίαν κατανομὴν g, ὁ ἀριθμὸς x_g ἱκανοποιεῖ τὰς ἑπομένας σχέσεις

$$\int_0^1 \sigma(x_g, y)\, dg = \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) \geqq \underset{g}{E}\, \underset{f}{M}\, \varepsilon(f, g) = m$$

Συνεπῶς διὰ κάθε g θὰ ὑπάρχῃ x_0 τοῦ $[0,1]$ εἰς τρόπον ὥστε

$$\int_0^1 \sigma(x_0, y)\, dg \geqq m \qquad (15)$$

Ἄς ὀνομάσωμεν τώρα μ θετικὸν ἀρκετὰ μικρόν. Ἐφ' ὅσον ἡ $\sigma(x,y)$ ὑπετέθη συνεχής, θὰ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς λ εἰς τρόπον ὥστε διὰ

$$\left|x_1 - x_2\right| < \frac{1}{\lambda} \qquad \left|y_1 - y_2\right| < \frac{1}{\lambda}$$

νὰ εἶναι

$$\left|\sigma(x_1, y_1) - \sigma(x_2, y_2)\right| < \mu$$

Συμβολίζομεν μὲ g_λ μίαν κλιμακωτὴν συνάρτησιν κατανομῆς μὲ ταξικὸν διάστημα πλάτους $1:\lambda$ διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι

$$g_\lambda(y)=\sum_{i=1}^{i=\rho}\varphi_i \qquad \text{διὰ } \frac{\rho}{\lambda}\leqq y\,\frac{\rho+1}{\lambda}$$

ὅπου φ_i ἡ συχνότης τοῦ ταξικοῦ διαστήματος i.

Εἶναι προφανὲς ὅτι διὰ κάθε x τοῦ $[0,1)$ θὰ ὑπάρχη ἀριθμὸς $j\leqq\lambda$ εἰς τρόπον ὥστε

$$\left|x-\frac{j}{\lambda}\right|<\frac{1}{\lambda}$$

καὶ συνεπῶς, λόγω τῆς συνεχείας τῆς $\sigma(x,y)$

$$\left|\int_0^1\left[\sigma(x,y)-\sigma\left(\frac{j}{\lambda},y\right)\right]dg_\lambda\right|\leqq\int_0^1\mu\,dg_\lambda$$

καὶ ἀφοῦ

$$\int_0^1 dg_\lambda=1$$

θὰ εἶναι

$$\left|\int_0^1\left[\sigma(x,y)-\sigma\left(\frac{j}{\lambda},y\right)\right]dg_\lambda\right|\leqq\mu$$

Ἄρα διὰ κάθε x τοῦ $[0,1]$ θὰ ὑπάρχη $j\leqq\lambda$ εἰς τρόπον ὥστε

$$\int_0^1\sigma\left(\frac{j}{\lambda},y\right)dg_\lambda\geqq\int_0^1\sigma(x,y)\,dg_\lambda-\mu \tag{16}$$

καὶ συνεπῶς, ἐκ τῶν (15) καὶ (16) συμπεραίνομεν ὅτι θὰ ὑπάρχη $j\leqq\lambda$ εἰς τρόπον ὥστε

$$\int_0^1\sigma\left(\frac{j}{\lambda},y\right)dg_\lambda\geqq m-\mu \tag{17}$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ g_λ ὑπετέθη κλιμακωτὴ συνάρτησις, θὰ ἔχωμεν

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=\lambda}\sigma\left(\frac{j}{\lambda},\frac{\kappa}{\lambda}\right)\varphi_\kappa\geqq m-\mu \tag{18}$$

Σύμφωνα ὅμως μὲ γνωστὴν πρότασιν τῆς γραμμικῆς ἀλγέβρας, θὰ ὑπάρχουν τότε λ πραγματικοὶ υ_j $(j=1,\ldots,\lambda)$, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι καὶ

$$\sum_{j=1}^{j=\lambda}\sum_{\kappa=1}^{\kappa=\lambda}\sigma\left(\frac{j}{\lambda},\frac{\kappa}{\lambda}\right)\varphi_\kappa\,\upsilon_j\geqq m-\mu \tag{19}$$

Ὁρίζομεν τώρα μίαν κλιμακωτὴν συνάρτησιν κατανομῆς f_0 μὲ ταξικὸν διάστημα πλάτους $1 : \lambda$, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{j=\rho} \upsilon_j \qquad \text{διὰ } \frac{\rho}{\lambda} \leqq x < \frac{\rho+1}{\lambda}$$

Τότε θὰ εἶναι κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τοῦ ὁλοκληρώματος Stieltjes

$$\int_0^1 \sigma(x, y)\, df_0 = \sum_{j=1}^{j=\lambda} \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, y\right) \upsilon j$$

Ἰδιαιτέρως, θὰ ἔχωμεν

$$\int_0^1 \sigma\left(x, \frac{\kappa}{\lambda}\right) df_0 = \sum_{j=1}^{j=\lambda} \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, \frac{\kappa}{\lambda}\right) \upsilon j \tag{20}$$

$$\text{διὰ } \kappa = 1, \ldots, \lambda$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ἐξισώσεως κ τάξεως ἐκ τῶν (20) ἐπὶ φ_κ καὶ προσθέσεως λαμβάνομεν ἐκ τῆς (19)

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=\lambda} \left[\varphi_\kappa \int_0^1 \sigma\left(x, \frac{\kappa}{\lambda}\right) df_0\right] = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\lambda} \left[\varphi_\kappa \sum_{j=1}^{j=\lambda} \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, \frac{\kappa}{\lambda}\right) \upsilon j\right] =$$

$$\sum_{j=1}^{j=\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\lambda} \sigma\left(\frac{j}{\lambda}, \frac{\kappa}{\lambda}\right) \varphi_\kappa\, \upsilon_j > m - \mu \tag{21}$$

Ἀφοῦ ἡ (21) ὑπάρχει δι' ὅλα τὰ φ_κ $(\kappa = 1, \ldots, \lambda)$ λαμβάνομεν $\varphi_k = 1$ καὶ $\varphi_l = 0$ διὰ $l \neq k$. Ἄρα

$$\int_0^1 \sigma\left(x, \frac{\kappa}{\lambda}\right) df_0 > m - \mu \quad \text{διὰ } \kappa = 1, \ldots, \lambda \tag{22}$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι ὅμως ἡ $\sigma(x, y)$ εἶναι συνεχὴς θὰ ἔχωμεν ὅτι διὰ κάθε y θὰ ὑπάρχῃ κάποιον κ εἰς τρόπον ὥστε

$$\int_0^1 \sigma(x, y)\, df_0 \geqq \int_0^1 \sigma\left(x, \frac{\kappa}{\lambda}\right) df_0 - \mu \tag{23}$$

Ἐκ τῶν (22) καὶ (23) συμπεραίνομεν ὅτι διὰ κάθε y

$$\int_0^1 \sigma(x, y)\, df_0 \geqq m - 2\mu \tag{24}$$

Δι' ἐφαρμογῆς γνωστοῦ θεωρήματος διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα Stieltjes βλέπομεν ὅτι διὰ κάθε κατανομὴν g εἶναι

$$\varepsilon(f_0, g) \geqq \int_0^1 (m - 2\mu)\, dg$$

καὶ

$$\varepsilon(f_0, g) \geqq m - 2\mu.$$

Καὶ ἄρα

$$\underset{g}{E}\ \varepsilon(f_0, g) \geqq m - 2\mu \qquad (25)$$

Μέσῳ τώρα τῶν (14) καὶ (25) καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μεγίστου λαμβάνομεν

$$n = \underset{f}{M}\ \underset{g}{E}\ \varepsilon(f, g) \geqq \underset{g}{E}\ \varepsilon(f_0, g) \geqq m - 2\mu$$

Δηλαδὴ εἶναι

$$n \geqq m - 2\mu$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ μ ὑπετέθη μικρότερος παντὸς δοθέντος θετικοῦ, θὰ εἶναι

$$n \geqq m \qquad (26)$$

Ἐξ ἄλλου ὅμως εἶναι, λόγῳ προαποδειχθέντος θεωρήματος διὰ τὰ ὀρθογώνια παιγνίδια καὶ τῶν (13) καὶ (14)

$$n \leqq m \qquad (27)$$

Ἄρα ἔχομεν τελικῶς ἐκ τῶν (26) καὶ (27)

$$n = m.$$

7. ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΑΙΓΝΙΔΙΑ ΜΕ ν ΠΑΙΚΤΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΟΝ ΠΛΗΡΩΜΩΝ ΜΗΔΕΝ

Θὰ ἐξετάσωμεν ὀρθογώνια παιγνίδια μὲ ν παίκτας· δηλαδὴ παιγνίδια ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ν κινήσεις. Εἰς τὴν i κίνησιν ($i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$) ὁ παίκτης A_i , μὴ ἔχων πληροφορίας διὰ τὰς προηγηθείσας κινήσεις, ἐκλέγει ἕνα ἀριθμὸν α_i ἀπὸ ἕνα σύνολον E_i . Μόλις παιχθῇ καὶ ἡ ν—στὴ κίνησις τότε ὁ παίκτης A_i λαμβάνει τὸ ποσὸν $\pi_i\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu)$. Ἐπειδὴ τὸ παιγνίδιον θεωρεῖται μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν, θὰ εἶναι

$$\sum_{i=1}^{\iota=\nu} \pi_i\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu) = 0$$

Διὰ τὴν ἁπλότητα τοῦ συμβολισμοῦ ἀντικαθιστῶμεν τὰ σύμβολα A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, \nu)$, διὰ τοὺς παίκτας, μὲ τὰ i, $(i = 1, 2, 3, \ldots, \nu)$, γράφομεν δὲ τὸ σύνολον τῶν παικτῶν μὲ τὸ

$$S = \{1, 2, 3, \ldots, \nu\}$$

Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι τὸ σύνολον τῶν παικτῶν S διασπᾶται εἰς δύο ὑποσύνολα — δύο ὁμάδας παικτῶν — τὸ ὑποσύνολον R καὶ τὸ ὑποσύνολον $\overline{R}$. Ἔχομεν δηλαδὴ

$$R \cup \overline{R} = S$$

Ὑποθέτομεν τοὺς παίκτας R συνεργαζομένους μεταξύ των καθὼς καὶ τοὺς $\overline{R}$. Τότε ὅμως τὰ R καὶ $\overline{R}$ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς δύο παῖκται ἑνὸς παιγνιδίου μὲ δύο παίκτας. Ὑποθέτομεν ὅτι, εἰς τὸ ἀρχικὸν παιγνίδιον, ὁ παίκτης i ἐκλέγει ἕνα ἀριθμὸν ἀπὸ τὸ σύνολον E_i καὶ ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι

$$R = [i_1, i_2, i_3, \ldots . i_\lambda], \quad \overline{R} = [j_1, j_2, j_3, \ldots, j_\mu] \quad (\lambda + \mu = \nu)$$

Τότε εἰς τὸ τεχνητὸν παιγνίδιον τῶν δύο παικτῶν, μὲ παίκτας R καὶ $\overline{R}$, ὁ παίκτης R ἐκλέγει ἓν στοιχεῖον ἀπὸ τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον (1) E τῶν συνόλων

$$E_{i_1}, E_{i_2}, E_{i_3}, \ldots, E_{i_\lambda}$$

καὶ ὁ παίκτης $\overline{R}$ ἓν στοιχεῖον ἀπὸ τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $\overline{E}$ τῶν συνόλων

$$E_{j_1}, E_{j_2}, E_{j_3}, \ldots, E_{j_\mu}$$

Ἂς ὀνομάσωμεν X_l ὅπου

$$X_l = [x_{l_1}, x_{l_2}, x_{l_3}, \ldots, x_{l_\mu}] \qquad [\ ] = \text{πίναξ γραμμή},$$

τὰ στοιχεῖα τοῦ E καὶ Y_m, ὅπου

$$Y_m = [x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots, x_{m_\nu}]$$

τὰ στοιχεῖα τοῦ $\overline{E}$.

Εἶναι φανερὸν τότε ὅτι ἡ συνάρτησις πληρωμῆς εἰς τὸν σύνθετον παίκτην R θὰ εἶναι ἡ

$$\pi_i\ (X_l, Y_m)$$

Ἐὰν ὁ R χρησιμοποιῇ τὴν στρατηγικὴν X_l καὶ ὁ $\overline{R}$ τὴν Y_m τότε ἡ συνολικὴ πληρωμὴ εἰς ἕκαστον τῶν R καὶ $\overline{R}$, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως

$$\sum_{R} \pi_i\,(X_l, Y_m)\ , \quad \sum_{\overline{R}} \pi_i\,(X_l, Y_m)$$

γραφόμεναι, συντόμως, ἀντιστοίχως

$$\pi_R\,(X_l, Y_m)\ , \quad \pi_{\overline{R}}\,(X_l, Y_m)$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι τὸ παιγνίδιον εἶναι μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν θὰ ἔχωμεν,

$$\pi_R + \pi_{\overline{R}} = 0$$

Ἐὰν τώρα τὸ E περιέχῃ r στοιχεῖα, τὰ περιλαμβανόμενα εἰς τὸν πίνακα

$$[X_1, X_2, \ldots, X_l, \ldots, X_r]$$

καὶ τὸ $\overline{E}$ s στοιχεῖα, τὰ περιλαμβανόμενα εἰς τὸν πίνακα

$$[Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, \ldots, Y_s]$$

τότε μία μικτὴ στρατηγικὴ διὰ τὸν R θὰ εἶναι μέλος τοῦ u_r καὶ μία μικτὴ στρατηγικὴ διὰ τὸν $\overline{R}$ θὰ εἶναι μέλος τοῦ u_s.

Ἐὰν τώρα ὁ R χρησιμοποιῇ τὴν μικτὴν στρατηγικὴν

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r]$$

καὶ ὁ $\overline{R}$ τὴν μικτὴν στρατηγικὴν

$$\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_s]$$

---

(1) «Καρτεσιανὸν γινόμενον» δύο συνόλων E_1 καὶ E_2 (ὄχι ἀπαραιτήτως ὑποσυνόλων τοῦ αὐτοῦ χώρου) καλεῖται ὡς γνωστὸν τὸ σύνολον F ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x_1, x_2), ὅπου $x_1 \in E_1$ καὶ $x_2 \in E_2$.

τότε ἡ ὁλικὴ ἐλπὶς τῶν R καὶ $\overline{R}$, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως

$$\sum_{m=1}^{m=s}\sum_{l=1}^{l=r}\pi_R\,\alpha_l\,\beta_m\,,\quad \sum_{m=1}^{m=s}\sum_{l=1}^{l=r}\pi_{\overline{R}}\,\alpha_l\,\beta_m$$

ἢ δι' ἁπλουστέρας γραφῆς

$$\varepsilon_R(\alpha,\beta),\ \varepsilon_{\overline{R}}(\alpha,\beta).$$

Ἐκ τῆς προηγηθείσης θεωρίας τῶν ὀρθογωνίων παιγνιδίων μὲ δύο παίκτας, ἔχομεν ὅτι

$$\underset{\alpha}{M}\ \underset{\beta}{E}\ \varepsilon_R(\alpha,\beta)=\underset{\beta}{E}\ \underset{\alpha}{M}\ \varepsilon_R(\alpha,\beta)$$

Ἐὰν θέσωμεν

$$\Theta(R)=\underset{\alpha}{M}\ \underset{\beta}{E}\ \varepsilon_R(\alpha,\beta)$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις Θ(R), ὡρισμένη δι' ἕκαστον R τοῦ S, δίδει τὸ ὁλικὸν ποσὸν τὸ ὁποῖον ἐλπίζει νὰ λάβῃ τὸ σύνολον τῶν μελῶν τῆς ὁμάδος R. Ἡ συνάρτησις αὕτη καλεῖται «χαρακτηριστικὴ» συνάρτησις τοῦ παιγνιδίου.

Σχετικῶς μὲ τὰ παιγνίδια μὲ ν παίκτας καὶ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν ὑπάρχουν αἱ ἑπόμεναι δύο θεμελιώδεις προτάσεις:

Πρότασις Ι. Ἐὰν Θ (R) εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις ἑνὸς παιγνιδίου μὲ παίκτας τοῦ

$$R=[1,\ 2,\ 3\ldots,\ \nu]$$

τότε α) $\Theta(S)=O$

β) $\Theta(\overline{R})=-\Theta(R)$ ὅπου $R\subset S$

γ) $\Theta(Q+R)\geqq\Theta(Q)+\Theta(R)$, ὅπου $Q\subset S$, $R\subset S$, $Q\cap R=\emptyset$

Πρότασις ΙΙ. Ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις τῆς προτάσεως Ι εἶναι

α) $\Theta(\Phi)=O$ $\qquad\emptyset$=τὸ κενὸν σύνολον

β) $\Theta(R_1+R_2+\ldots+R_\nu)\geqq\Theta(R_1)+\Theta(R_2)+\ldots+\Theta(R_\nu)$

ὅπου $R_i\subset S$ $(i=1,\ldots,\nu)$, $R_i\Pi R_j=\Theta$, $i\neq j$ $(i,\ j=1,\ldots,\nu)$

γ) $\Theta(R_1)+\Theta(R_2)+\ldots+\Theta(R_\eta)\geqq O$, ὅπου

$R_i\subset S$ $(i=1,\ldots,\nu)$, $R_i\cap R_j=\Phi$, $i\neq j$, $(i,\ j=1,\ldots,\nu)$

Τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων αὐτῶν παραλείπομεν ὡς ἐξερχομένας τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος.

8. Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ von NEUMANN - MORGESTERN ΚΑΙ Η ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Τὰ παιγνίδια τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν μέχρι τοῦδε ἦσαν παιγνίδια μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν, ταῦτα δέ, καθὼς καὶ ἀλλοῦ ἀνεφέρθη, παίζονται συνήθως εἰς τὰς συγκεντρώσεις—σαλόνια, καζίνα κ.τ.τ. Ἐρχόμεθα ἐδῶ νὰ σημειώσωμεν—καὶ τοῦτο ἀκριβῶς ὑπῆρξεν ἡ ἀφορμὴ τῆς εὐρυτέρας γνωστοποιήσεως τῆς θεωρίας—ὅτι δὲν εἶναι τὰ μόνα δυνάμενα νὰ θεωρηθοῦν παιγνίδια, διότι δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ παιγνίδια μὲ σύνολον πληρωμῶν διάφορον τοῦ μηδενός. Τὰ τελευταῖα δὲ εἶναι πολὺ χρήσιμα, ὑπὸ ἔποψιν ἐφαρμογῶν, εἰς τὴν οἰκονομίαν. Δηλαδὴ ἐὰν θεωρήσωμεν, ἐπὶ παραδείγματι, τὰς ἀμοιβαίας σχέσεις ἑνὸς ἐργατοσυνόλου μὲ μίαν βιομηχανίαν ὡς ἓν παιγνίδιον δύο προσώπων, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ παιγνίδιον αὐτὸ θὰ εἶναι μὲ σύνολον πληρωμῶν διάφορον τοῦ μηδενός, δεδομένου ὅτι ὡρισμέναι ἐνέργειαι δύνανται ν' ἀποβοῦν ἐπικερδεῖς καὶ διὰ τοὺς δύο παίκτας, ἐνῷ ἄλλαι ἐνέργειαι εἶναι δυνατὸν νὰ βλάψουν ἢ καὶ τοὺς δύο ἢ ἕνα τῶν παικτῶν. Γίνεται ἀμέσως φανερὸν ἐκ τοῦ παραδείγματος ὅτι μία θεωρία παιγνιδίων τὰ ὁποῖα εἶναι μὲ σύνολον πληρωμῶν διάφορον τοῦ μηδενὸς θὰ ἦτο πολὺ χρήσιμος.

Ἡ μόρφωσις τῆς νέας θεωρίας ἐπιτυγχάνεται δι' ἐπεκτάσεως τῆς προηγηθείσης τῶν ν παικτῶν μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν. Περισσότερον συγκεκριμένα, εἰσάγεται εἰς τὸ παιγνίδιον ἓν φανταστικὸν πρόσωπον καθαρῶς μαθηματικῆς ἐπινοήσεως, καλούμενον ἀγγλιστὶ mathematical fiction. Τὸ πρόσωπον αὐτὸ χωρὶς νὰ λαμβάνῃ μέρος εἰς τὰς κινήσεις τοῦ παιγνιδίου χάνει τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον κερδίζουν οἱ ἄλλοι παῖκται καὶ ἀντιστρόφως. Μὲ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ φανταστικοῦ αὐτοῦ προσώπου ἐπιτυγχάνεται ἡ σύνθεσις ἑνὸς παιγνιδίου $\nu+1$ προσώπων μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν, ὁπότε εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθοῦν τὰ συμπεράσματα τῆς προηγηθείσης θεωρίας.

Εἰς τὸ ἑξῆς τὰ παιγνίδια μὲ σύνολον πληρωμῶν διάφορον τοῦ μηδενὸς θὰ καλοῦνται «γενικὰ παιγνίδια».

Εἶναι ἀμέσως φανερὸν ὅτι διὰ τὴν διαπραγμάτευσιν τῶν γενικῶν παιγνιδίων ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις τῶν ὀρθογωνίων παιγνιδίων καὶ τοῦτο διότι διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τῆς στρατηγικῆς δυνάμεθα πάντοτε ν' ἀναγάγωμεν κάθε γενικὸν παιγνίδιον εἰς ἓν γενικὸν παιγνίδιον μὲ ὀρθογώνιον μορφήν.

Τοιουτοτρόπως ἓν γενικὸν παιγνίδιον μὲ τοὺς παίκτας

$$S_\nu = 1, 2, 3, \ldots, \nu$$

εἶναι ὡρισμένον ὅταν δοθοῦν ν σύνολα — ἐκλογῆς

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\nu$$

καὶ ν συναρτήσεις πληρωμῆς

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\nu$$

Ἕνα παίξιμο τοῦ παιγνιδίου εἶναι ἡ ἑξῆς διαδικασία: Ὁ παίκτης i ($i = 1, 2, 3. \ldots, \nu$) ἐκλέγει ἓν στοιχεῖον x_i ἀπὸ τὸ σύνολον E_i, τὴν ἐκλογήν του δὲ ταύτην καθιστᾷ γνωστὴν εἰς ἕνα διαιτητήν, χωρὶς οὐδεὶς τῶν ἄλλων παικτῶν νὰ λάβῃ γνῶσιν· ὅταν πραγματοποιηθοῦν ὅλαι αἱ ἐκλογαὶ τότε ὁ διαιτητὴς πληρώνει εἰς τὸν παίκτην i τὸ ποσὸν

$$\sigma_i \; (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu)$$

Τὸ παιγνίδιον θὰ εἶναι μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν ἐὰν δι' οἱονδήποτε

$$[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu]$$

ἀνῆκον εἰς τὸ Καρτεσιανὸν γινόμενον

$$E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_\nu$$

ἔχωμεν,

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \sigma_i \left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu \right) = 0$$

Ἐρχόμεθα τώρα νὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀνωτέρω ἰσότης δὲν ὑπάρχει.

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν ἓν παιγνίδιον ν προσώπων μέ τοὺς παίκτας

$$S_\nu = 1, 2, 3, \ldots, \nu$$

καὶ ν σύνολα ἐκλογῆς

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\nu$$

καθὼς καὶ ν συναρτήσεις πληρωμῆς

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\nu \cdot$$

ὑποθέτομεν ὅτι λαμβάνομεν τὸ $E_{\nu+1}$ ὡς ἓν αὐθαίρετον σύνολον καὶ ὅτι ὁρίζομεν τὸ $\sigma_{\nu+1}$ εἰς τρόπον ὥστε διὰ κάθε μέλος

$$[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu]$$

τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου

$$E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots E_\nu$$

νὰ εἶναι

$$\sigma_{\nu+1} + \sum_{i=1}^{i=1} \sigma_i = 0$$

Τότε δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰ E_i $(i = 1, 2, 3, \ldots \nu + 1)$ ὡς σύνολα ἐκλογῆς καὶ τὰς σ_i $(i = 1. 2, 3, \ldots. \nu + 1)$ ὡς συναρτήσεις πληρωμῆς (payoff functions) ἑνὸς παιγνιδίου μὲ $\nu + 1$ παίκτας· ἄρα θὰ ἔχωμεν, καθ' ὃν τρόπον ἐδόθη ὁ ὁρισμὸς τῆς $\sigma_{\nu+1}$, ἓν παιγνίδιον μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν.

Δὲν πρέπει ὅμως νὰ νομισθῇ ὅτι διὰ μιᾶς ἀνήχθη ἡ γενικὴ θεωρία τῶν παιγνιδίων εἰς τὴν θεωρίαν μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν καὶ τοῦτο διότι διὰ τὸ εἰσαχθὲν $\nu + 1$ πρόσωπον ἀληθεύουν μερικαὶ προτάσεις. Ἐκτὸς τοῦ ὅτι τὸ $\nu + 1$ πρόσωπον εἶναι ἓν φανταστικὸν δημιούργημα τῆς μαθηματικῆς τεχνικῆς, ἐπὶ πλέον αἱ παραδεδεγμέναι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως πληρωμῆς εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς γενομένης ἐκλογῆς ὑπὸ τοῦ παίκτου $\nu + 1$. Παρ' ὅλον ὅτι αἱ διαφοραὶ αὗται εἶναι βασικαί, ἐν τούτοις καταβάλλεται προσπάθεια ὅπως γίνῃ ἡ ἐπέκτασις ἑνὸς γενικοῦ παιγνιδίου ν προσώπων εἰς ἓν παιγνίδιον $\nu + 1$ προσώπων μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν λόγῳ τῆς χρησιμότητος ἣν ἔχουν τὰ γενικὰ παιγνίδια διὰ τὰ οἰκονομικὰ προβλήματα.

Ἂς σημειώσωμεν μὲ Π ἓν παιγνίδιον ν προσώπων καὶ μὲ $\overset{*}{\Pi}$ τὴν ἐπέκτασίν του εἰς ἓν παιγνίδιον $\nu + 1$ προσώπων μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδέν. Ἐκ τῶν προηγηθεισῶν παραγράφων βλέπομεν ὅτι τὸ $\overset{*}{\Pi}$ ἐπιδέχεται μίαν χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν Θ, ὡρισμένην ἐπὶ ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ συνόλου

$$S_{\nu+1} = \{ 1, 2, 3, \ldots \nu + 1 \}$$

τῶν παικτῶν τοῦ $\overset{*}{\Pi}$, ἡ ὁποία δι' ἓν ὑποσύνολον R τοῦ $S_{\nu+1}$ θὰ ἔχῃ τὴν τιμὴν Θ(R) καὶ θὰ παριστάνη τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον ἐλπίζουν νὰ κερδίσουν οἱ παῖκται τοῦ R ἐὰν συνεργάζωνται. Καλοῦμεν ἐπίσης τὴν Θ «χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν» τοῦ ἀρχικοῦ παιγνιδίου Π.

Ἐρχόμεθα ν' ἀποδείξωμεν τὰς ἑπομένας θεμελιώδεις προτάσεις:

Πρότασις I. Ἐὰν Θ εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις ἑνὸς γενικοῦ παιγνιδίου μὲ παίκτας τοὺς

$$S_\nu = \{ 1, 2, 3, \ldots, \nu \}$$

τότε θὰ εἶναι

$$\Theta(\emptyset) = 0 \qquad \emptyset = \text{τὸ κενὸν σύνολον}$$

Πράγματι ἐὰν Θ εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις τοῦ γενικοῦ παιγνιδίου Π τοῦ ὁποίου οἱ παῖκται ἀνήκουν εἰς τὸ S_ν, τότε θὰ ὑπάρχη ἓν ἐπεκτεταμένον παιγνίδιον $\overset{*}{\Pi}$ μὲ σύνολον πληρωμῶν μηδὲν καὶ παίκτας ἀνήκοντας εἰς τὸ

$$S_{\nu+1} = \{ 1, 2, 3, \ldots, \nu + 1 \}$$

εἰς τρόπον ὥστε ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις $\overset{*}{\Theta}$ τοῦ $\overset{*}{\Pi}$ νὰ ἱκανοποιῇ τὴν σχέσιν

$$\Theta(R) = \overset{*}{\Theta}(R) \qquad \text{διὰ } R \subseteqq S_\nu \tag{1}$$

Τότε ὅμως σύμφωνα μὲ προαναφερθείσας προτάσεις θὰ εἶναι

$$\Theta(\Phi) = \overset{*}{\Theta}(\emptyset) = \overset{*}{\Theta}(-S_{\nu+1}) = -\overset{*}{\Theta}(S_{\nu+1}) = -0 = 0$$

ἄρα καὶ

$$\Theta(\emptyset) = 0$$

Πρότασις II. Ἐὰν Θ εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις ἑνὸς γενικοῦ παιγνιδίου μὲ παίκτας τοὺς

$$S_\nu = \{1, 2, 3, \ldots . \nu\}$$

τότε θὰ εἶναι

$$\Theta(Q+R) \geqq \Theta(Q) + \Theta(R)$$

διὰ

$$Q \subset S_\nu \qquad R \subset S_\nu \qquad Q \cap R = \emptyset$$

Ἐπειδὴ πάλιν συμφώνως πρὸς προαναφερθεῖσαν πρότασιν εἶναι

$$\overset{*}{\Theta}(Q+R) \geqq \overset{*}{\Theta}(Q) + \overset{*}{\Theta}(R)$$

διὰ

$$Q \subset S_\nu \qquad R \subset S_\nu \qquad Q \cap R = \emptyset$$

συμπεραίνομεν, λόγῳ τῆς ἰσότητος (1) τῆς προηγουμένης προτάσεως, ὅτι θὰ εἶναι καὶ

$$\Theta(Q+R) \geqq \Theta(Q) + \Theta(R)$$

διὰ

$$Q \subset S_\nu \qquad R \subset S_\nu \qquad Q \cap R = \emptyset$$

Πρότασις ΙΙΙ. Ἐὰν Θ εἶναι μία πραγματικὴ συνάρτησις ὡρισμένη ἐπὶ τῆς κλάσεως ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ S_ν, διὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν αἱ προτάσεις Ι καὶ ΙΙ, τότε ὑπάρχει ἓν γενικὸν παιγνίδιον Π τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν Θ ὡς χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς τρίτης ταύτης προτάσεως ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως: Ὁρίζομεν τὴν συνάρτησιν $\overset{*}{\Theta}$ ἐπὶ τῶν κλάσεων ὅλων τῶν ὑποσυνόλων $S_{\nu+1}$ ὡς ἀκολούθως:

$$\overset{*}{\Theta}(R) = \Theta(R) \tag{2}$$

ὅταν τὸ $\nu+1$ δὲν ἀνήκη εἰς τὸ R καὶ

$$\overset{*}{\Theta}(R) = -\Theta(S_{\nu+1} - R) \tag{3}$$

ὅταν τὸ $\nu+1$ ἀνήκη εἰς τὸ R.

Χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ $\nu+1$ ἀνήκει εἰς τὸ Q καὶ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ R.

Παρατηροῦμεν τότε ὅτι τὰ δύο σύνολα R καὶ $S_{\nu+1} - (Q \cup R)$ εἶναι ξένα ὑποσύνολα τοῦ S_ν· ἄρα κατὰ τὴν πρότασιν ΙΙ θὰ εἶναι

$$\Theta(R \cup [S_{\nu+1} - (Q \cup R)]) \geqq \Theta(R) + \Theta[S_{\nu+1} - (Q \cup R)] \tag{4}$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι τὰ Q καὶ R εἶναι ξένα θὰ ἔχωμεν

$$R \subseteqq S_{\nu+1} - Q$$

καὶ ἄρα

$$R \cup [S_{\nu+1} - (Q \cup R)] = R \cup [S_{\nu+1} - Q] = S_{\nu+1} - Q \tag{5}$$

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) ἔχομεν λοιπὸν

$$\Theta(S_{\nu+1} - Q) \geqq \Theta(R) + [S_{\nu+1} - (C \cup R)]$$

ἢ λόγῳ τῶν (2) καὶ (3)

$$-\overset{*}{\Theta}(Q) \geqq \overset{*}{\Theta}(R) - \overset{*}{\Theta}(Q \cup R)$$

Ἄρα καὶ

$$\overset{*}{\Theta}(Q \cup R) \geqq \overset{*}{\Theta}(Q) + \overset{*}{\Theta}(R)$$
