ΣΠΟΥΔΗ ΤΩΝ ΕΠΟΧΙΑΚΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΕΙΣ ΤΑΣ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΑΣ ΣΕΙΡΑΣ

Τοῦ κ. Ε. Δ. ΜΑΡΓΑΡΙΤΗ, Καθηγητοῦ τῆς Α.Σ.Β.Σ.

1. Εἰσαγωγή.

Κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τῶν χρονολογικῶν σειρῶν μέγα ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν αἱ λεγόμεναι περιοδικαὶ κινήσεις αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν χώραν κατὰ χρονικὰ διαστήματα ἴσα καὶ μὲ μίαν μορφὴν σχεδὸν σταθεράν. Ὁ πλέον συνήθης τύπος τοιούτων κινήσεων, τὸν ὁποῖον συχνότερον συναντῶμεν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν οἰκονομικῶν σειρῶν, εἶναι ἡ ἐποχιακὴ κίνησις.

Ὅταν τὰ δεδομένα εἶναι ἐτήσια ἡ ἀνάλυσις περιορίζεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς γενικῆς τάσεως καὶ εἰς τὴν σπουδὴν τῶν κυκλικῶν κυμάνσεων. Εἰς τινας περιπτώσεις ὅμως αἱ περιοδικαὶ κινήσεις ἀναφαίνονται εἰς χρονικὰ διαστήματα βραχύτερα τοῦ ἔτους (μῆνας, ἑβδομάδας, ὥρας). Ἡ ἐποχιακὴ μεταβολὴ παρουσιάζει τὴν διακύμανσιν τοῦ μεγέθους ἑνὸς φαινομένου, ἡ ὁποία δύναται νὰ ὀφείλεται πραγματικῶς εἰς τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἐποχικότητος, ὡς π.χ. ἡ μεταβολὴ τῶν τιμῶν τῶν λαχανικῶν καὶ τῶν φρούτων συνδεομένη μὲ τὴν συγκομιδήν, ἡ μεταβολὴ εἰς τὴν παραγωγὴν συνδεομένη μὲ τὰς ἀγορὰς ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῶν ἑορτῶν, ἡ μεταβολὴ τοῦ ὕψους τῆς νομισματικῆς κυκλοφορίας συνδεομένη μὲ τὴν χορήγησιν τῶν δώρων ἢ τὴν ἔκτακτον πιστοδότησιν ἑνὸς κλάδου παραγωγῆς κ.ο.κ.

Τὸ πρόβλημα συνίσταται τότε νὰ ἀποκαλυφθῇ ὁ ἐποχιακὸς χαρακτὴρ ἑνὸς φαινομένου, ὅταν ὑφίσταται τοιοῦτος, μετὰ ταῦτα δὲ νὰ γίνῃ ἀπαλοιφὴ τῶν ἐποχιακῶν διακυμάνσεων διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ μία νέα σειρὰ δεδομένων ἀπηλλαγμένων τῆς ἐποχαικῆς ἐπιδράσεως καὶ ἐπὶ τῆς ὁποίας νὰ γίνῃ ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἄλλων κινήσεων (γενικῆς τάσεως, κυκλικῶν διακυμάνσεων).

Ἡ ὕπαρξις μιᾶς ἐποχιακῆς κινήσεως εἰς μίαν σειρὰν δύναται νὰ ἀποκαλυφθῇ ἐποπτικῶς, οὕτως εἰπεῖν, διὰ γραφικῆς παραστάσεως τῆς σειρᾶς. Ἡ γραφικὴ ὅμως παράστασις δὲν ἀρκεῖ διὰ τὴν ἀνάλυσιν τῆς ἐποχιακῆς κινήσεως, ἥτις ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέραν στατιστικὴν καὶ τεχνικὴν ἐπεξεργασίαν.

2. Μέθοδοι προσδιορισμοῦ τῆς ἐποχιακῆς κινήσεως.

Ὑπάρχουν πολλαὶ μέθοδοι προσδιορισμοῦ τῆς ἐποχιακῆς κινήσεως, ὡς ἡ μέθοδος τῶν μηνιαίων μέσων, ἡ μέθοδος τῶν λόγων πρὸς τὸν κινητὸν μέσον, ἡ μέθοδος τῶν λόγων πρὸς τὸν ἐτήσιον μέσον, ἡ μέθοδος τῶν σχετικῶν κρίκων ἢ τῆς ἁλύσεως τῶν διαδοχικῶν λόγων (méthode des chaînes de rapport aux mois précedents). Ἡ προτίμησις τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης μεθόδου δὲν ὑπόκειται εἰς γενικόν τινα κανόνα καὶ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν διαθέσιμον χρόνον πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν ὑπολογισμῶν, οἱ ὁποῖοι κατὰ κανόνα εἶναι μακροί, καὶ ἀπὸ τὰς τιθεμένας βασικῶς ὑποθέσεις διὰ τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως ἥτις προσιδιάζει εἰς τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα τῶν παρατηρήσεων. Τὰ ἀποτελέσματα διαφέρουν προφανῶς μεταξύ των ἀπὸ τῆς μιᾶς μεθόδου εἰς τὴν ἄλλην. Κατωτέρω ἐκθέτομεν τὴν τεχνικὴν τῶν πλείστων ἐκ τῶν ἀνωτέρω μεθόδων παρέχοντες καὶ τὰς σχετικὰς ἀριθμητικὰς ἐφαρμογὰς ἐπὶ συγκεκριμένων παραδειγμάτων.

I. Ἡ μέθοδος τῶν μέσων μηνιαίων.

Κατὰ ταύτην προσδιορίζομεν, διὰ τὴν ἐξεταζομένην περίοδον, τὴν μέσην ἀριθμητικὴν τιμὴν δι' ἕκαστον τῶν μηνῶν ἀπὸ Ἰανουαρίου μέχρι Δεκεμβρίου καὶ μετὰ ταῦτα τὸν γενικὸν μέσον πάντων τῶν δεδομένων. Αἱ ἀποκλίσεις τῶν μέσων μηνιαίων ἀπὸ τοῦ γενικοῦ μέσου ὑπολογίζονται τότε εὐκόλως καὶ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν ἀποκλίσεων τούτων παρέχει τότε τὴν ἐποχιακὴν φυσιογνωμίαν τοῦ ἐξεταζομένου φαινομένου. Κατωτέρω παρέχομεν ὡς ἐφαρμογὴν δεδομένα τοῦ πίνακος 1, εἰς τὰ ὁποῖα ἐμφαίνονται αἱ μηνιαῖαι δαπάναι δι' ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἑνὸς ἰδιώτου ἐν Γαλλίᾳ[1] κατὰ τὰ τέσσαρα διαδοχικὰ ἔτη.

ΠΙΝΑΞ 1.

Μῆνες	*Ἔτος*					*Μέσος μηνιαῖος*	*Ἀπόκλισις*
	1948	*1949*	*1950*	*1951*	*Ὁλικὰ*		
Ἰανουάριος	1634	1908	2388	2082	8012	2003	+ 296
Φεβρουάριος	1586	1851	2525	1794	7756	1939	+ 232
Μάρτιος	1321	1709	2284	1722	7036	1759	+ 52
Ἀπρίλιος	1464	1815	2400	1657	7336	1834	+ 127
Μάϊος	1316	1640	2019	1285	6260	1565	— 142
Ἰούνιος	1315	1493	1986	1322	6116	1529	— 178
Ἰούλιος	1210	1471	1790	1289	5760	1440	— 267
Αὔγουστος	1200	1349	1487	1272	5308	1327	— 380
Σεπτέμβριος	1250	1588	1566	1428	5832	1458	— 249
Ὀκτώβριος	1545	1825	1918	1572	6860	1715	+ 8
Νοέμβριος	1766	2178	1978	1722	7644	1911	+ 204
Δεκέμριος	1767	2477	1875	1873	7992	1998	+ 291
Σύνολα	17374	21304	24216	19018	81912	20478	
Μέσος ἐτήσιος	1448	1775	2018	1585	6826	$\boxed{1707}$	Μέσος γενικὸς

Τὰ δεδομένα παρουσιάζονται εἰς τὰς πρώτας τέσσαρας στήλας τῶν ἀριθμῶν, εἰς τὴν πέμπτην στήλην ὑπολογίζονται τὰ ὁλικὰ δι' ἕκαστον μῆνα τῶν τεσσάρων ἐτῶν, εἶτα οἱ μέσοι μηνιαῖοι καὶ τέλος αἱ ἀποκλίσεις ἑκάστου μέσου μηνιαίου ἀπὸ τὸν γενικὸν μέσον.

Ὁμοίως εἰς ἑκάστην στήλην ὑπολογίζονται τὰ ἐτήσια δεδομένα καὶ ἐν συνεχείᾳ οἱ μέσοι ἐτήσιοι. Διὰ τὸ 1948 π.χ. ἔχομεν ὡς μέσον ἐτήσιον τὸ πηλίκον $17974 : 12 = 1448$. Ὁ γενικὸς μέσος εἶναι 1707 καὶ ὑπολογίζεται εἴτε ὡς μέσος ἀριθμητικὸς τῶν 12 μηνιαίων μέσων τῆς προτελευταίας στήλης, δηλ. $20478 : 12$, εἴτε ὡς πηλίκον τοῦ $81912 : 48$, εἴτε ὡς πηλίκον $6826 : 4$.

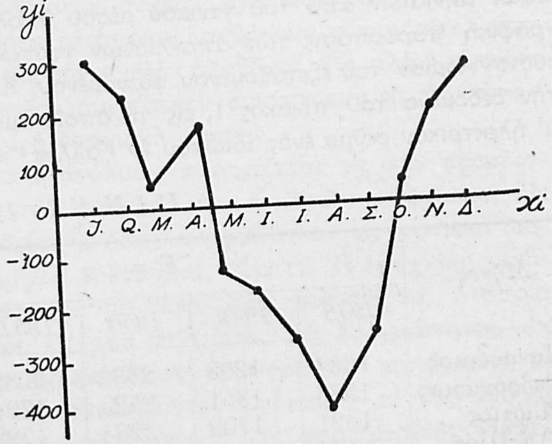
Αἱ ἀποκλίσεις αἱ ὁποῖαι ἐμφαίνονται εἰς τὴν τελευταίαν στήλην προκύ-

1. Πρβλ. A. MONJALON : Introduction à la méthode statistique, σελ. 234.

πτουν εὐκόλως. Διὰ τὸν μῆνα Ἰανουάριον π.χ. ἔχομεν 2003 – 1707 = + 296, διὰ τὸν μῆνα Φεβρουάριον: 1939 – 1707 = + 232, διὰ τὸν Ἰούνιον: 1529 – 1707 = – 178 κ.ο.κ.

Αἱ ἀποκλίσεις αὗται ἐμφαίνονται γραφικῶς εἰς τὸ κάτωθι διάγραμμα.

Ἐκ τοῦ διαγράμματος καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ δαπάνη δι' ἠλεκτρικὸν ρεῦμα βαίνει ἐλαττουμένη ἀπὸ Ἰανουαρίου μέχρι Αὐγούστου, ἐκτὸς μιᾶς ἀνωμαλίας κατ' Ἀπρίλιον, ἔπειτα δὲ βαίνει αὐξανομένη ἀπὸ τοῦ Αὐγούστου μέχρι τοῦ Δεκεμβρίου. Διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν ἐποχιακῶν διακυμάνσεων, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἀρκεῖ ἀπὸ ἕκαστον τῶν ἀρχικῶν μηνιαίων δεδομένων νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν σχετικὴν ἀπόκλισιν τοῦ ἰδίου μηνός. Οὕτω διὰ τὸν Ἰανουάριον τοῦ 1948 ἔχομεν: 1634 - 296 καὶ διὰ τὸν Μάϊον τοῦ 1948 ἔχομεν: 1316 - (- 142) = 1316 + 142 = 1458. Ἂν τοῦτο γίνῃ δι' ὅλας τὰς τιμὰς πίνακος προκύπτει ὁ ἀκόλουθος πίναξ 2 ὅστις περιέχει τὰ διωρθωμένα δεδομένα, τῶν ὁποίων δύναται νὰ γίνῃ ἐν συνεχείᾳ τὸ γραφικὸν διάγραμμα τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται ἀπηλλαγμένον τῶν ἐποχιακῶν ἐπιδράσεων.



Σχ. 1.

Ἡ ἐκτεθεῖσα ἀνωτέρω μέθοδος παρουσιάζει ἀσθενῆ σημεῖα, καθόσον τὰ ἐξαγόμενα εἰς τὰ ὁποῖα ὁδηγεῖ ἡ ἐφαρμογή της εἶναι ἐπηρεασμένα ὑπὸ τῆς τάσεως μακρᾶς διαρκείας καὶ τῆς κυκλικῆς κινήσεως. Χρησιμοποιεῖται ἐν τούτοις λόγῳ τῆς ἁπλότητός της καὶ ἰδίως ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν, εἰς ἃ ἀναφέρεται τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν φαινόμενον, εἶναι περιωρισμένος καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν ἐμφανίζεται σημαντικὴ ἡ ἐπίδρασις τῆς τάσεως μακρᾶς διαρκείας (ὑπόθεσις ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι σταθερά).

ΠΙΝΑΞ 2.

Μῆνες	Ἔτος			
	1948	1249	1950	1551
Ἰανουάριος	1338	1612	2082	1786
Φεβρουάριος	1354	1619	2293	1562
Μάρτιος	1269	1657	2232	1670
Ἀπρίλιος	1337	1688	2273	1530
Μάϊος	1458	1782	2161	1427
Ἰούνιος	1493	1671	2164	1500
Ἰούλιος	1477	1738	2057	1556
Αὔγουστος	1580	1729	1867	1652
Σεπτέμβριος	1499	1837	1815	1617
Ὀκτώβριος	1537	1817	1910	1564
Νοέμβριος	1562	1914	1774	1518
Δεκέμβριος	1476	2186	1584	1582

Σημειωτέον ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν ἀκριβεστέραν εἰκόνα τῆς ἐποχιακῆς κινήσεως εἶναι προτιμώτερον νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἀποκλίσεις ὡς ποσοστὰ καὶ ὄχι ὑπὸ μορφὴν ἀπολύτων ἀριθμῶν.

Συνηθέστερον ἡ μέθοδος τῶν μηνιαίων μέσων ἐφαρμόζεται μὲ ἱκανοποιητικώτερα ἀποτελέσματα ὡς ἀκολούθως :

Ἐὰν $\varphi_{i\kappa}$ εἶναι τὰ δεδομένα τοῦ κ μηνός, τοῦ i ἔτους ($\kappa = 1, 2, 3, \dots 12$) καὶ ($i = 1, 2, 3, \dots \nu$) εὑρίσκομεν τὸν μηνιαῖον μέσον δι' ἕκαστον μῆνα (Ἰανουάριον, Φεβρουάριον κ.ο.κ.) διὰ τοῦ τύπου:

$$\varphi_\kappa = \frac{\Sigma \varphi_{i\kappa}}{n}$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ, ὡς καὶ ἀνωτέρω ἐλέχθη, τὸν γενικὸν μέσον διὰ τοῦ τύπου

$$\varphi = \frac{\Sigma \varphi_\kappa}{12}$$

Ὁ γενικὸς οὗτος μέσος προκύπτει καὶ κατ' ἄλλους τρόπους, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα παρετηρήθη. Οἱ ἐποχιακοὶ συντελεσταὶ προκύπτουν τότε διὰ τοῦ τύπου :

$$S_\kappa = \frac{100 \cdot \varphi_\kappa}{\varphi}$$

Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς τελειοποιημένης οὕτω μεθόδου μηνιαίων μέσων παρέχομεν τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα, τοῦ ὁποίου τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα ἐμφανίζονται εἰς τὸν πίνακα 3, μετὰ τῶν ὑπολογιζομένων ἐποχιακῶν συντελεστῶν.

ΠΙΝΑΞ 3.

Μέσος ἡμερήσιος ἀριθμὸς γάμων κατὰ μῆνα ἐν Γαλλίᾳ διὰ τὰ ἔτη 1946 - 1951.

Ἔτος	Ἰανουάρ.	Φεβρουάρ.	Μάρτιος	Ἀπρίλιος	Μάϊος	Ἰούνιος	Ἰούλιος	Αὔγουστος	Σεπτέμβρ.	Ὀκτώβρ.	Νοέμβριος	Δεκέμβριος
1946	879	1158	1174	2076	1076	1859	1393	1553	1796	1707	1222	1118
1947	730	957	762	2077	902	1363	1215	1268	1449	1408	1006	923
1948	715	727	749	1712	708	1169	1188	984	1256	1272	820	865
1949	599	836	549	1522	613	1092	1081	941	1142	1208	759	886
1950	581	760	510	1562	567	1003	1064	923	1217	1091	701	922
1951	566	605	847	1261	538	1087	951	911	1129	1024	697	889
Ἄθροισμα	4070	5037	4591	10210	4404	7573	6892	6580	7989	7710	5205	5603
Μέσος ἑκάστης στήλης $\varphi_\kappa = \frac{\Sigma \varphi_{i\kappa}}{N}$	678,33	839,50	765,17	1701,67	734	1262,17	1148,66	1096,66	1331,50	1285,00	867,50	933,83
Γενικὸς μέσος : $\varphi = \frac{\Sigma \varphi_\kappa}{12}$	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,67	1053,61	1053,67	1053,67
Συντελεστὴς ἐποχιακῆς μεταβολῆς $S = \frac{\varphi_\kappa \cdot 100}{\varphi}$	64,4	79,7	72,6	161,4	69,7	119,7	109,0	104,0	126,3	121,9	82,3	88,6

II. Ἡ μέθοδος τῶν κινητῶν μέσων 12 μηνῶν.

Περαιτέρω βελτίωσιν τῆς τεχνικῆς διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν συντελεστῶν ἐποχιακῆς μεταβολῆς ἀποτελεῖ ἡ μέθοδος τῶν κινητῶν μέσων ἤ, καλύτερον, ἡ μέθοδος τῶν λόγων ὡς πρὸς τοὺς κινητοὺς μέσους 12 μηνῶν.

Ἂς παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\varphi_{i\kappa}$ τὰ δεδομένα τῆς παρατηρήσεως τοῦ ἔτους i ($i = 1, 2, \ldots\ldots \nu$) καὶ τοῦ μηνὸς κ ($\kappa = 1, 2 \ldots\ldots 12$) καὶ διὰ τοῦ συμβόλου $Y_{i\kappa}$ τὰς ἐξω-ἐποχιακὰς κινήσεις, δηλονότι τὴν γενικὴν ἢ μακραίωνα τάσιν καὶ τὰς κυκλικὰς κυμάνσεις, διὰ τοῦ συμβόλου $S_{i\kappa}$ τὴν ἐποχικὴν αὐτῆς συνιστῶσαν καὶ διὰ $Z_{i\kappa}$ τὴν κατάλοιπον ἢ ἄρρυθμον συνιστῶσαν.

Ὑποθέτομεν πρὸς τούτοις ὅτι ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἐποχικοῦ παράγοντος εἶναι πολλαπλασιαστικὴ καὶ ὅτι ἡ ἐξωεποχιακὴ συνιστῶσα πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν αὐτὸν συντελεστὴν $1 + S_\kappa$ δι' ἕκαστον ὡρισμένον μῆνα. Τούτων τεθέντων ἔχομεν :

$$\varphi_{i\kappa} = Y_{i\kappa}\,(1 + S_\kappa) + Z_{i\kappa} = Y_{i\kappa} + Y_{i\kappa}\,S_\kappa + Z_{i\kappa}$$

Συνήθως ἡ συνιστῶσα $Z_{i\kappa}$ εἶναι ἀμελητέα καὶ ἡ ἐποχιακὴ κίνησις χαρακτηρίζεται διὰ τοῦ δείκτου :

$1 + S_{i\kappa} = \dfrac{\varphi_{i\kappa}}{Y_{i\kappa}}$, ὅστις προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς σχέσεως $\varphi_{i\kappa} = Y_{i\kappa}\,(1 + S_\kappa)$ ἤ, πρακτικώτερον, διὰ τοῦ λόγου τούτου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 100 πρὸς ἀποφυγὴν τῶν πολλῶν δεκαδικῶν ψηφίων. Ὁ ἀνωτέρω τύπος τροποποιεῖται ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον, ἂν τεθῇ $\Psi_{i\kappa} = \bar{\varphi}_{i\kappa}$ ἔνθα μὲ τὸ σύμβολον $\bar{\varphi}_{i\kappa}$ παριστῶμεν τοὺς κινητοὺς μέσους τῶν 12 μηνῶν.

Οἱ δώδεκα συντελεσταὶ τῆς μορφῆς $1 + S_\kappa$ δέον νὰ ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην :

$$\Sigma(1 + S_k) = 12 \quad (\text{ἢ } 1200)$$

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ἂς θεωρήσωμεν τὰ δεδομένα τοῦ προηγουμένου πίνακος 3, εἰς τὸν ὁποῖον παρέχεται ὁ μέσος ἡμερήσιος ἀριθμὸς γάμων κατὰ μῆνα ἐν Γαλλίᾳ.

Ἡ τεχνικὴ τῶν ὑπολογισμῶν ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα 4.

Ἐν συνεχείᾳ καταρτίζομεν τὸν ὑπ' ἀριθ. 5 πίνακα διπλῆς εἰσόδου πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν ἐποχιακῶν συντελεστῶν. Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτω ὑπολογιζομένων συντελεστῶν δὲν εἶναι ἀκριβῶς 1200, κάμνομεν σχετικὴν διόρθωσιν πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον συντελεστὴν S_k μὲ τὸ πηλίκον $1200 : \Sigma S_k$.

Εἰς τὸν πίνακα τοῦτον 5 ἔχουν ὑπογραμμισθῆ καὶ διαγράφονται οἱ κρινόμενοι ὡς ἀνώμαλοι δεῖκται (εἷς ἢ καὶ δύο εἰς ἑκάστην στήλην, παρουσιάζοντες ἀκροτάτας τιμάς).

Μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐποχιακῶν συντελεστῶν, ὡς οὗτοι ἐμφαίνονται εἰς τὸν πίνακα 5, διορθώνομεν τὰ δεδομένα τῶν παρατηρήσεων διαιροῦντες ἑκάστην τιμὴν τοῦ ἀρχικοῦ πίνακος διὰ τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ τοῦ μηνὸς καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 100 τὸ ἐξαγόμενον. Οὕτω ἐπὶ παραδείγματι, ὁ ἀριθμὸς 879 τοῦ Ἰανουαρίου 1946 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν ποσότητα 100/64, ὁ ἀριθμὸς 1158 ἐπὶ 100/74 κ.ο.κ.

Τὰ οὕτω λαμβανόμενα ἐξαγόμενα ἀποτελοῦν τὰ διωρθωμένα δεδομένα, ἤτοι τὰ δεδομένα τῶν παρατηρήσεων ἀπηλλαγμένα τῆς ἐποχιακῆς ἐπιδράσεως. Μία ἐπὶ πλέον γραφικὴ παράστασις τούτων ἐν συγκρίσει μὲ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων καθιστᾷ κατάδηλον τὴν ἐπελθοῦσαν ἐξομάλυνσιν.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐποχιακῶν συντελεστῶν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὴν γραφικὴν μέθοδον χαράσσοντες βάσει τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τὴν γραμμὴν τάσεως δι' ἐλευθέρας χειρός. Δύναται τότε νὰ γίνῃ μία σύγκρισις μεταξὺ τῶν ἐπιτευχθέντων ἐξαγομένων διὰ διαφόρων μεθόδων.

III. Μέθοδος τῶν λόγων ὡς πρὸς τὸν ἐτήσιον μέσον ὅρον (1).

Εἰς τὴν μέθοδον ταύτην ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἐξομάλυνσις τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως, ἅτινα ἀπεικονίζονται δι' ἑνὸς πολυγωνικοῦ διαγράμματος, γίνεται δι' ἐκθετικῆς καμπύλης τῆς μορφῆς

$$Y = A B^t$$

ὁπότε ὁ λόγος δύο τιμῶν τῆς συναρτήσεως ταύτης διὰ δύο διαδοχικὰς χρονικὰς βαθμίδας ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{Y_{i,k+1}}{Y_{i,k}} = \frac{AB^{t+1}}{AB^t} = B$$

Ὅταν ἡ κλίσις τῆς τάσεως δὲν εἶναι αἰσθητὴ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ β ἐλάχιστα διαφέρει τῆς μονάδος καὶ δύναται νὰ τεθῇ $B = 1 + \beta$, ἔνθα β πολὺ μικρόν. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ β σχηματίζομεν τοὺς λόγους

$$\frac{Y_1, k+12}{Y_1, k}, \quad \frac{Y_2, k+12}{Y_2 k}, \quad \ldots \quad \frac{Y\nu, k+12}{Y\nu k}$$

καὶ λαμβάνομεν τὸν μέσον ὅρον αὐτῶν, ὃν καλοῦμεν $(1+\alpha)$. Ἐὰν τὰ δεδομένα προσαρμόζωνται εἰς ἐκθετικὴν συνάρτησιν ἕκαστος τῶν ἀνωτέρω λόγων πρέπει νὰ εἶναι ἴσος πρὸς $(1+\beta)^{12}$

καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$(1+\beta)^{12} = 1+\alpha \quad \text{ἢ} \quad 1+\beta = \sqrt[12]{1+\alpha}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ α εἶναι πολὺ μικρὸς θὰ ἔχωμεν:

$$\beta = \sqrt[12]{1+\alpha} - 1 = \frac{\alpha}{12}$$

μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ $(1+\alpha)^{1/12}$ κατὰ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος.

---

1. Βλ. σχετικῶς Μ. ΜΠΡΙΚΑ «Μαθήματα στατιστικῆς», Τεῦχος ΙΙ, σελ. 267-276.

ΠΙΝΑΞ 4.

Μέσος ἡμερήσιος ἀριθμὸς γάμων κατὰ μῆνα ἐν Γαλλίᾳ.

Ἔτος i	Μῆνες κ	Ἀρχικὰ δεδομένα μηνιαίως $\varphi_{i\kappa}$	Ἄθροισμα δεδομένων 12 διαδοχικῶν μηνῶν	Ὁλικὸν δύο διαδοχικῶν ἀθροισμάτων	Κινητοὶ μέσοι $\bar{\varphi}_{i\kappa}$	Λόγοι $100 \times \frac{\varphi_{i\kappa}}{\bar{\varphi}_{i\kappa}}$
1946 = 1	1	879				
	2	1.158				
	3	1.174				
	4	2.076				
	5	1.076				
	6	1.859				
			17.011			
	7	1.393		33.873	1.411	99
			16.862			
	8	1.553		33.517	1.397	111
			16.655			
	9	1.796		32.848	1.371	131
			16.243			
	10	1.707		32.487	1.354	126
			16.244			
	11	1.222		32.314	1.346	91
			16.070			
	12	1.118		31.644	1.318	85
1947 = 2			15.574			
	1	730		30.970	1.270	57
			15.396			
	2	951		30.507	1.271	75
			15.111			
	3	762		29.875	1.245	61
			14.764			
	4	2.077		29.229	1.218	171
			14.465			
	5	902		28.714	1.196	75
			14.249			
	6	1.363		28.303	1.179	116
			14.054			
	7	1.215		28.093	1.171	104
			14.039			
	8	1.268		27.854	1.156	110
			13.815			
	9	1.449		27.617	1.151	126
			13.802			
	10	1.408		27.239	1.135	124
i = 2			13.437			
	11	1.006		26.680	1.112	90
			13.243			
1948 = 3	12	923		26.292	1.095	84
			13.049			
	1	715		26.071	1.086	66
			13.022			
	2	727		25.760	1.073	68
			12.738			

ΠΙΝΑΞ 4 (συνέχεια).

Ἔτος i	Μῆνες κ	Ἀρχικὰ δεδομένα μηνιαίως $\varphi_{i\kappa}$	Ἀθροίσματα δεδομένων 12 διαδοχικῶν μηνῶν	Ὁλικὸν δύο διαδοχικῶν ἀθροισμάτων	Κινητὸς μέσος $\bar{\varphi}_{i\kappa}$	Λόγοι $100\times\frac{\varphi_{i\kappa}}{\bar{\varphi}_{i\kappa}}$
	3	749		25.283	1.053	71
			12.545			
	4	1.712		24.954	1.040	165
			12.409			
	5	708		24.632	1.026	69
			12.223			
	6	1.169		24.388	1.016	115
			12.165			
	7	1.188		24.214	1.009	118
			12.049			
	8	984		24.207	1.009	97
			12.858			
	9	1.256		24.116	1.005	125
			11.958			
	10	1.272		23.726	989	129
			11.768			
	11	820		23.441	977	84
			11.673			
	12	865		23.269	974	89
1949 = 4			11.596			
	1	599		23.085	962	62
			11.489			
	2	836		22.935	956	87
			11.446			
	3	549		22.778	949	58
			11.332			
	4	1.522		22.600	942	162
			11.268			
	5	613		22.475	936	65
			11.207			
	6	1.092		22.435	935	117
			11.228			
	7	1.081		22.438	935	116
			11.210			
	8	941		22.344	931	101
			11.134			
	9	1.142		22.229	926	123
			11.095			
	10	1.208		22.230	926	130
			11.135			
	11	759		22.224	926	82
			11.089			
	12	886		22.089	920	96
1950 = 5			11.000			
	1	581		21.983	916	63
			10.983			
	2	760		21.948	914	83

ΠΙΝΑΞ 4 (συνέχεια).

Ἔτος i	Μῆνες κ	Ἀρχικὰ δεδομένα μηνιαίως $\varphi_{i\kappa}$	Ἀθροίσματα δεδομένων 12 διαδοχικῶν μηνῶν	Ὁλικὸν δύο διαδοχικῶν ἀθροισμάτων	Κινητὸς μέσος $\bar{\varphi}_{i\kappa}$	Λόγοι $100\times\frac{\varphi_{i\kappa}}{\bar{\varphi}_{i\kappa}}$
			10.965			
	3	510		21.005	917	56
			11.040			
	4	1.562		21.963	915	171
			10.923			
	5	567		21.788	908	62
			10.865			
	6	1.003		21.766	907	111
			10.901			
	7	1.064		21.787	908	117
			10.886			
	8	923		21.617	901	102
			10.731			
	9	1.217		21.709	908	134
			11.068			
	10	1.091		21.835	910	120
			10.767			
	11	701		21.505	896	78
			10.738			
	12	922		21.560	898	103
1951 = 6			10.822			
	1	566		21.531	897	63
			10.709			
	2	605		21.406	892	68
			10.697			
	3	847		21.306	888	95
			10.609			
	4	1.261		21.151	881	143
			10.542			
	5	538		21.081	876	61
			10.538			
	6	1.087		21.043	877	124
			10.505			
	7	951				
	8	911				
	9	1.129				
	10	1.024				
	11	697				
	12	889				

ΠΙΝΑΞ 5.

Ἔτος		*Μῆνες* 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Δεδομένα μηνιαῖα εἰς ἑκατοστὰ τοῦ κινητοῦ μέσου $100 \cdot \frac{\varphi_{i\kappa}}{\bar{\varphi}_{i\kappa}}$	i=1							99	111	131	126	91	85	
	2	57	75	61	171	75	116	104	110	126	124	90	84	
	3	66	68	71	165	69	115	118	97	125	129	84	89	
	4	62	87	58	162	65	117	116	101	123	130	82	96	
	5	63	83	56	171	62	111	117	102	134	120	78	103	
	6	63	68	95	143	61	124							
Μέσος		63,5	73,5	63,3	167,2	64,2	118	117	106	127,3	127,2	86,7	86	Ὁλικὸν
Ἐποχιακοὶ συντελεσταὶ		64	74	63	167	64	118	117	106	127	127	87	86	1200

Ἐὰν ἤδη παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\bar{y}_i$ τὸν ἐτήσιον μέσον ὅρον τοῦ ἔτους i, ὁ μέσος $\bar{y}_{i\kappa}$ θὰ ἰσοῦται πρὸς

$$\bar{y}_{i\kappa} = \frac{\bar{y}_i}{(1+\beta)^{6,5-\kappa}}$$

καὶ θὰ ἔχωμεν

$$(1 + S_{i\kappa}) = \frac{y_{i\kappa}}{\bar{y}_{i\kappa}} = \frac{y_{i\kappa}}{\bar{y}_i} (1+\beta)^{6,5-\kappa}$$

καὶ τελικῶς εὑρίσκομεν διὰ τοὺς ἐποχιακοὺς συντελεστὰς τὰς παραστάσεις

$$100\,(1 + S_{i\kappa}) = 100\,\frac{y_{i\kappa}}{\bar{y}_i}\,(1 + \theta_\kappa)$$

Ἔνθα $\theta_\kappa = (6,5 - \kappa)\,\frac{\alpha}{12}$ ἢ $(6,5 - \kappa)\,\beta$.

Ὡς παράδειγμα διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ταύτης λαμβάνομεν τὰ αὐτὰ δεδομένα τοῦ ἀνωτέρω πίνακος 3. Αἱ λεπτομέρειαι τῶν ὑπολογισμῶν ἐμφαίνονται εἰς τοὺς ἀκολούθους πίνακας 6, 7, 8 καὶ 9.

ΠΙΝΑΞ 6.

Ἔτη	*Μῆνες* Ἰαν.	Φεβρ.	Μάρτ.	Ἀπρ.	Μάϊος	Ἰούν.	Ἰούλ.	Αὔγ.	Σεπτ.	Ὀκτ.	Νοέμβ.	Δεκ.	*Ἐτήσιοι μέσοι ὅροι*
1946	879	1158	1174	2076	1076	1859	1393	1553	1796	1707	1222	1118	1417,6
1947	730	951	762	2077	902	1363	1215	1268	1449	1408	1006	923	1171,2
1948	715	727	749	1712	708	1169	1188	984	1256	1272	820	865	1013,7
1949	599	836	549	1522	613	1092	1081	941	1142	1208	759	886	935,7
1950	581	760	510	1562	567	1003	1064	923	1217	1091	701	922	908,4
1951	566	605	847	1261	538	1087	951	911	1129	1024	697	889	875,4

ΠΙΝΑΞ 7.

	ΜΗΝΕΣ												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1947 : 1946	83	82	65	100	84	73	87	82	81	82	82	83	
1948 : 1947	98	76	98	82	78	86	98	78	87	90	82	94	
1949 : 1948	84	115	73	89	87	93	91	96	91	95	93	102	
1950 : 1949	97	91	93	103	92	92	98	98	107	90	92	104	
1951 : 1950	97	80	166	81	95	108	89	99	93	94	99	96	
Σύνολον	459	444	495	455	436	452	463	453	459	451	448	479	5494

$$100\ (1+\alpha)=\frac{5494}{60}=91{,}57$$

$$1+\alpha=0{,}9157$$

$$\alpha=0{,}9157-1 \qquad \beta=\frac{\alpha}{12}$$

$$\alpha=-0{,}0843 \qquad \beta=-\frac{0{,}0843}{12}=-0{,}007$$

ΠΙΝΑΞ 8.

κ	6,5 – κ	$\theta_\kappa=(6{,}5-\kappa)\ \beta=$ $=(6{,}5-\kappa)\ (-0.007)$	$1+\theta_\kappa$
1	5,5	— 0,0385	0,9615
2	4,5	— 0,0315	0,9685
3	3,5	— 0,0245	0,9755
4	2,5	— 0,0175	0,9825
5	1,5	— 0,0105	0,9895
6	0,5	— 0,0035	0,9965
7	— 0,5	0,0035	1,0035
8	— 1,5	0,0105	1,0105
9	— 2,5	0,0175	1,0175
10	— 3,5	0,0245	1,0245
11	— 4,5	0,0315	1,0315
12	— 5,5	0,0385	1,0385

ΠΙΝΑΞ 9.

Ἔτη	Μῆνες											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1946	0,62	0,82	0,83	1,46	0,76	1,31	0,98	1,10	1,27	1,20	0,86	0,79
1947	0,62	0,81	0,65	1,77	0,77	1,16	1,04	1,08	1,24	1,20	0,86	0,79
1948	0,76	0,72	0,74	1,69	0,70	1,15	1,17	0,97	1,24	1,25	0,81	0,85
1949	0,64	0,89	0,59	1,63	0,66	1'17	1,16	1,02	1,22	1,29	0,81	0,95
1950	0,64	0,84	0,56	1,72	0,62	1,10	1,17	1,01	1,34	1,20	0,77	0,01
1951	0,65	0,69	0,97	1,44	0,61	1,24	1,09	1,04	1,29	1,17	0,80	1,02
Μέσοι ὅροι	0,65	0,80	0,72	1,62	0,69	1,19	1,10	1,04	1,27	1,22	0,82	0,90
$1 + \theta_\kappa$	0,9615	0,9685	0,9755	0,9825	0,9895	0,9965	1,0035	1,0105	1,0175	1,0245	1,0315	1,0385
Ἐποχ. συντελεσταὶ	0,62	0,77	0,70	1,59	0,68	1,19	1,10	1,05	1,29	1,25	0,85	0,93

IV. Μέθοδος τῶν σχετικῶν κρίκων ἢ ἁλύσεως τῶν λόγων.

Ἡ μέθοδος αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεωρήσεως τῶν λόγων μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν μηνιαίων μέσων.

Ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ἢ ἡ διάμεσος (χαρακτηριστικὸν κεντρικῆς τάσεως) τῶν ν λόγων τῆς μορφῆς $\frac{y_{ik}}{y_{i(k-1)}}$ μεταξὺ τῶν παρατηρήσεων τῶν μηνῶν κ καὶ κ − 1 τῶν ἐτῶν $i = 1, 2, \ldots, \nu$, τὸν ὁποῖον ἂς παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $M_{\kappa/\kappa-1}$, ἐμφανίζει τὸν λόγον μεταξὺ τῶν ἐποχιακῶν συντελεστῶν τῶν μηνῶν κ καὶ κ − 1 ἤτοι :

$$\frac{1 + S_\kappa + 1}{1 + S_\kappa}$$

ὡς καὶ τὴν μέσην σχετικὴν ἐξωεποχικὴν αὔξησιν κατὰ ἕνα μῆνα, ἤτοι $1+\alpha$ (ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἐξωεποχιακὴ συνιστῶσα εἶναι ἐκθετική).

Ἔχομεν οὕτω :

$$M_{\kappa/\kappa-1} = 1 + \alpha \frac{1 + S_\kappa}{1 + S_{\kappa-1}}$$

ἐξ οὗ, ἀφ' ἑνός :

$$M_{1/12} \times M_{2/1} \times M_{3/2} \times \ldots \times M_{12/11} = (1 + \alpha)^{12}$$

τοῦθ' ὅπερ ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσωμεν θεωρητικῶς τὸ ποσοστὸν τῆς μέσης μηνιαίας μεταβολῆς α τῆς ἐξωεποχιακῆς συνιστώσης ($M_{1/12}$ παριστᾷ τὸν μέσον λόγον τῆς παρατηρήσεως τοῦ Ἰανουαρίου τοῦ ἔτους i πρὸς τὴν παρατήρησιν τοῦ Δεκεμβρίου τοῦ ἔτους i − 1), καὶ ἀφ' ἑτέρου :

$$1 + S_1 = 1 + S_1$$

$$1 + S_2 = \frac{1 + S_1}{1 + \alpha} M^2/_1$$

$$1 + S_3 = \frac{1 + S_1}{(1 + \alpha)^2} M^3/_2 \times M^2/_1$$

. . . .

. . . .

$$1 + S_{12} = \frac{1 + S_1}{(1+\alpha)^{12}} M^2/_1 \times M^3/_2 \times \ldots\ldots \times M^{12}/_{11}$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ α εἶναι γνωστὴ καθὼς καὶ ἡ τοιαύτη τῶν Μ, βλέπομεν ὅτι οἱ ἐποχιακοὶ συντελεσταὶ προσδιορίζονται ὅλοι συναρτήσει ἑνὸς τούτων, τοῦ $1 + S_1$. Ἡ τιμὴ τοῦ ἀναλογικοῦ τούτου παράγοντος ὁρίζεται ὑπὸ τῆς συνθήκης:

$$\Sigma (1 + S_\kappa) = 12$$

Σημειωτέον ὅτι ἡ παράστασις $1 + S_\kappa$ συνεπάγεται τὴν ἐμφάνισιν τοῦ γινομένου τῶν διαδοχικῶν λόγων:

$M^2/_1$, $M^3/_2$, $M^4/_3$ .... $M\kappa/\kappa - 1$.

Ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία τῆς μεθόδου, ὡς μεθόδου τῶν σχετικῶν κρίκων ἢ ἁλύσεως τῶν λόγων τῶν διαδοχικῶν μηνῶν.

Πρὸς ἐφαρμογὴν ἂς θεωρήσωμεν τὰ δεδομένα τοῦ ἀκολούθου πίνακος 10.

ΠΙΝΑΞ 10.

Ἔτος		Μῆνες (κ)												Ἐτήσιος μέσος
	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	yi
Μηνιαία δεδομένα yik	1	416	318	316	345	330	337	350	345	346	362	358	366	349,1
	2	429	316	306	342	823	329	334	336	342	352	355	353	343,1
	3	444	334	315	352	340	348	372	346	346	368	375	372	359,4
	4	445	327	339	379	356	355	363	374	371	378	376	385	370,0
	5	448	375	357	382	371	370	363	405	409	410	418	424	394,4
	6	483	374	365	391	364	379	387	375	373	401	412	397	391,8
	7	478	273	358	397	382	364	399	399	401	417	417	406	399,3

ΠΙΝΑΞ 11.

Ἔτος x	Μῆνες Κ/κ — 1											
	1/12	2/1	3/2	4/3	5/4	6/5	7/6	8/7	9/8	10/9	11/10	12/11
1		764	993	1,091	956	1,021	1,038	985	1,002	1,046	988	1,022
2	1,172	736	968	1,117	944	1,018	1,015	1,005	1,017	1,060	1,008	994
3	1,249	757	943	1,117	965	1,023	1'068	930	1,000	1,060	1,019	992
4	1,196	734	1,009	1,148	939	997	1,022	1,030	991	1,018	994	1,023
5	1,163	837	952	1,070	971	997	981	1,115	1,009	1,002	1,019	1,014
6	1,139	768	975	1,071	930	1,041	1,021	968	994	1,075	1,027	963
7	1,204	780	959	1.108	962	952	1,096	1,000	1,005	1,039	1,000	973
Διάμεσος Μκ/κ—1	1,184	764	968	1,108	956	1,018	1,022	1,000	1,002	1,039	1,008	994

Προσδιορίζομεν εἰς ἑκάστην στήλην τοῦ πίνακος (11) τὴν διάμεσον $M_{κ/κ-1}$. Αὕτη μεταφέρεται εἰς τὸν πίνακα (12).

ΠΙΝΑΞ 12.

Λόγος μηνῶν Κ/κ—1	Διάμεσος $M_{κ/κ-1}$	Λογ. $M_{κ/κ-1}$	Λογ. $M_{κ/κ-1}$ Λογ. (1+α)	Λογάριθμοι Ἀθροιστικοί	Ἀντιλογάριθμος	Ἐποχιακοὶ Συντελεσταὶ 100 $(1+S_k)$	Μῆνες
1/12	1,184	0,07335	0,07311	0,07311	118,3	121	Ἰανουάριος
2/1	0,764	1,88309	1,88285	1,95596	90,4	93	Φεβρουάριος
3/2	0,968	1,98588	1,98564	1,94160	87,4	90	Μάρτιος
4/3	1,108	0,04454	0,04430	1,98590	96,8	99	Ἀπρίλιος
5/4	0,956	1,98046	1,98022	1,96612	92.5	95	Μάϊος
6/5	1,018	0,00775	0,00751	1,97363	94,1	97	Ἰούνιος
7/6	1,022	0,00945	0,00921	1,98284	96,1	99	Ἰούλιος
8/7	1,000	0,00000	1,99976	1,98260	96,1	99	Αὔγουστος
9/8	1,002	0,00087	0,00063	1,98323	96,2	99	Σεπτέμβριος
10/9	1,039	0,01662	0,01638	1,99961	99,9	102	Ὀκτώβριος
11/10	1,008	0,00346	0,00322	0,00283	100,7	103	Νοέμβριος
12/11	0,994	1,99739	1,99715	1,99998	100,0	103	Δεκέμβριος
Ὁλικὸν		0,00286	0,00000	S =	1168,5	2,200	
Μέσος λογ.(1+α)		0,00024		1200/S =	1,027		

Εὑρίσκομεν ἐν συνεχείᾳ τοὺς δώδεκα λογ. Μ, τὸν μέσον λογ. (1+α), ὅστις ἀφαιρεῖται ἐξ ἑκάστου λογ. Μ. Ἀθροίζομεν μετὰ ταῦτα τὰς διαφορὰς λογ. Μ— λογ. (1 + α) καὶ ὑπολογίζομεν τοὺς διαδοχικοὺς ἀντιλογαρίθμους. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι S οἱ συντελεσταὶ ἐποχιακῆς μεταβολῆς λαμβάνονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀντιλογαρίθμων ἐπὶ 1200/S εἰς τρόπον ὥστε :

$$\Sigma\ (1 + S_κ) = 1200.$$