ΜΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΛΟΥΣΤΕΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ $ΣΧ^2$, ΣΧΥ, $ΣΧ^3$ . . . κλπ.

Τοῦ κ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Α. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ

1. Εἰσαγωγὴ

Εἰς πᾶσαν δειγματοληπτικὴν ἔρευναν, ἐκτὸς τῆς ἐκτιμήσεως μιᾶς παραμέτρου (π.χ., ἑνὸς μέσου ἢ συνόλου) ἀπαιτεῖται καὶ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀντιστοίχου δειγματοληπτικοῦ σφάλματος, χαρακτηρίζοντος τὴν ἀκρίβειαν τῆς ἐκτιμήσεως.

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις τοῦτο ἐγκαταλείπεται ἢ γίνεται εἰς πολὺ περιωρισμένην κλίμακα (δι' ἐλαχίστας βασικὰς ἐκτιμήσεις), λόγῳ τῶν ἀπαιτουμένων κοπιαστικῶν ὑπολογιστικῶν πράξεων. Βασικῶς ἡ δυσκολία παρουσιάζεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δεδομένων, ἤτοι τῆς ποσότητος $ΣΧ^2$, ἡ ὁποία ὑπεισέρχεται εἰς τοὺς τύπους ὑπολογισμοῦ τῶν δειγματοληπτικῶν σφαλμάτων. Εἰς ἄλλα στατιστικὰ προβλήματα, ὡς, λ.χ., τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως, τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν παραμέτρων εἰς μίαν ἐξίσωσιν παλινδρομήσεως, τῆς προσαρμογῆς μιᾶς ἐξισώσεως τάσεως εἰς χρονολογικὰς σειρὰς κ.λ.π., παρουσιάζονται πολλάκις ἀνυπέρβλητοι δυσκολίαι, αἱ ὁποῖαι, ἂν δὲν ὁδηγήσουν εἰς πλήρη ματαίωσιν τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος, συνεπάγονται ἀπώλειαν χρόνου. Αἱ δυσκολίαι αὐταὶ εἶναι συνέπεια τῶν ἀπαιτουμένων μακροσκελῶν καὶ ἐπιπόνων πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἀθροισμάτων ὡς τὰ ΣΧΥ, $ΣΧ^2Υ$, $ΣΧ^3$... κλπ., τὰ ὁποῖα ὑπεισέρχονται εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα.

Σκοπὸς τοῦ παρόντος ἄρθρου εἶναι νὰ ὑποδείξῃ ἁπλοῦς τρόπους ὑπολογισμοῦ τῶν ἀνωτέρω ἐκφράσεων, τῇ βοηθείᾳ τῶν διαλογικῶν μηχανῶν ἢ καὶ τῶν πινακογραφικῶν τοιούτων. Βεβαίως οἱ ἀνωτέρω ὑπολογισμοὶ δύνανται νὰ γίνουν πολὺ ταχύτερον τῇ βοηθείᾳ ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν. Ἡ χρῆσις ὅμως τῶν τελευταίων, καὶ ὅταν ἀκόμη εἶναι διαθέσιμοι, δυνατὸν νὰ εἶναι ἀσύμφορος διὰ τοιαύτας μεμονωμένας ἐργασίας μικρᾶς κλίμακος.

Εἰς τὰ ἑπόμενα, καὶ ἰδιαιτέρως δι' ἑκάστην ἐκ τῶν ἀνωτέρω πρὸς ὑπολογισμὸν ἐκφράσεων, ἐπεξηγεῖται ἡ μαθηματικὴ θεμελίωσις τοῦ ὑποδεικνυομένου τρόπου ὑπολογισμοῦ, δίδονται αἱ ἀπαιτούμεναι ὁδηγίαι πρὸς τὴν μηχανογραφικὴν Ὑπηρεσίαν (διὰ τὰς ἀναγκαίας διαλογάς, πινακοποιήσεις κλπ.).

2. Ὑπολογισμὸς ΣX^2

2.1. Μαθηματικὴ θεμελίωσις :

Ἔστω ὅτι ὁ ἀριθμὸς Χ εἶναι τριψήφιος *, ἤτοι τῆς μορφῆς

$$X = 10^2\varepsilon + 10\delta + \mu$$

ὅπου ε αἱ ἑκατοντάδες, δ αἱ δεκάδες, μ αἱ μονάδες αὐτῶν.

Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην εἶναι :

$$(1) \quad \Sigma X^2 = 10^4\Sigma\varepsilon^2 + 10^2\Sigma\delta^2 + \Sigma\mu^2 + 2\,[\,10^3\Sigma\varepsilon\delta + 10^2\Sigma\varepsilon\mu + 10\Sigma\delta\mu\,]$$

Οὕτω, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ΣX^2 ἀρκεῖ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1). Ἐπειδὴ τὰ ε, δ, μ λαμβάνουν τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ἀρκεῖ, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐν λόγῳ ἀθροισμάτων, νὰ εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ εἰς αὐτὰ ἐμφανιζόμενοι συνδυασμοὶ τῶν ἀριθμῶν 0, 1, 2, ... 9 καὶ τὰ προκύπτοντα γινόμενα, λαμβανόμενα ὡς προσθετέοι, ἀναλόγως τῆς συχνότητος ἐμφανίσεώς των, νὰ ἀθροισθοῦν. Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω εἰς τὴν πρᾶξιν θὰ χρησιμοποιηθῇ ὁ συνημμένος πίναξ 1 καὶ θὰ ἐφαρμοσθοῦν αἱ κάτωθι ὁδηγίαι.

2.2. Ὁδηγίαι (διὰ τὰς διαλογὰς κ λ π.)

α. Οἱ ἀριθμοὶ Χ γράφονται ἐπὶ τῶν εἰδικῶν καρτελλῶν μηχανογραφίας.

β. Ἐκτελοῦνται αἱ διπλαῖ διαλογαὶ (ε, ε), (δ, δ), (μ, μ), (ε, δ), (ε, μ), (δ, μ) καὶ συμπληροῦνται τὰ φατνία τοῦ πίνακος 1 μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν καρτελλῶν, αἱ ὁποῖαι ἐμπίπτουν εἰς αὐτά.

Συγκεκριμένως, προκειμένου περὶ τῆς (ε, ε) γίνεται διαλογὴ τῶν καρτελλῶν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων τῶν ἀριθμῶν Χ καὶ (χωρὶς νὰ ἐπαναληφθῇ αὕτη, διότι δίδει τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα) τὰ ἐξαγόμενα (ἀριθμὸς καρτελλῶν) καταχωροῦνται εἰς τὰ φατνία τῶν ἀναλόγων γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ πίνακος 1.

Ἡ (ε, δ) σημαίνει διαλογὴ εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ ἐν συνεχείᾳ, εἰς ἕκαστον ὑποσύνολον, διαλογὴ εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων κ.ο.κ.

2.3. Συμπληρωματικοὶ ὑπολογισμοὶ

Ὁ πίναξ 1 περιλαμβάνει τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἀνωτέρω διαλογῶν. Εἰς τὰς θέσεις Α, Β καταχωρεῖται τὸ ψηφίον ἑκάστης διαλογῆς π.χ., Α(δ) καὶ Β(μ) καὶ εἰς τὴν θέσιν «Τελικὸν ἄθροισμα» τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῶν ἑξῆς πράξεων :

α. Οἱ ἀριθμοὶ τῶν φατνίων ἑκάστης γραμμῆς, πολλαπλασιάζονται μὲ

* Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται ἀκριβῶς καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ διὰ μεγαλυτέρους ἀριθμούς.

τοὺς εὑρισκομένους εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ πίνακος ἀριθμοὺς 0, 1, 2, ... 9 ἀντιστοίχως καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων καταχωρεῖται ἐπὶ τῆς ἰδίας γραμμῆς καὶ εἰς τὴν τελευταίαν στήλην τοῦ πίνακος.

β. Τὰ ἀνωτέρω ἀθροίσματα γινομένων, τὰ ὁποῖα κατεχωρήθησαν εἰς τὴν τελευταίαν στήλην, πολλαπλασιάζονται ἀντιστοίχως ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 0, 1, 2, ... 9 τῆς πρώτης στήλης καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων αὐτῶν καταχωρεῖται, ὡς ἀποτελοῦν τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον τοῦ πίνακος, εἰς τὴν θέσιν «τελικὸν ἄθροισμα».

γ. Τὰ τελικὰ ἀθροίσματα ἐξ ὅλων τῶν καταρτισθέντων πινάκων, τίθενται εἰς τὸν τύπον (1), ὡς ἀποτελοῦντα τὰ $\Sigma\varepsilon^2$, $\Sigma\delta^2$, $\Sigma\mu^2$, $\Sigma\varepsilon\delta$, $\Sigma\varepsilon\mu$, $\Sigma\delta\mu$ κλπ. καὶ προκύπτει, οὕτω, τὸ ΣX^2.

2.4. *Ἀξιολόγησις τῆς μεθόδου*

Διὰ τῆς προτεινομένης μεθόδου, ἡ ἐργασία τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ ΣX^2 διευκολύνεται, ὁ δὲ ἀπαιτούμενος χρόνος μειώνεται σημαντικὰ * ἰδιαιτέρως εἰς περίπτωσιν πολυαρίθμων δεδομένων.

Συγκεκριμένως οἱ καταρτισθησόμενοι ὑπὸ τῆς μηχανογραφικῆς Ὑπηρεσίας πίνακες εἶναι :

ι) διὰ τριψηφίους ἀριθμοὺς ἓξ (6)

ιι) διὰ τετραψηφίους ἀριθμοὺς δέκα (10)

ιιι) διὰ πενταψηφίους ἀριθμοὺς δεκαπέντε (15) κ.ο.κ.

οἱ δὲ συμπληρωματικοὶ ὑπολογισμοὶ ἁπλούστατοι, λόγῳ τῶν μικρῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ὑπεισέρχονται εἰς αὐτούς.

3. Ὑπολογισμὸς ΣΧΥ

3.1. *Μαθηματικὴ θεμελίωσις*

Ὑποθέτοντες ὡς καὶ προηγουμένως τοὺς ἀριθμοὺς Χ, Υ τριψηφίους, ἤτοι τῆς μορφῆς

$$X = 10^2\varepsilon_X + 10\delta_X + \mu_X \quad \text{καὶ} \quad Y = 10^2\varepsilon_Y + 10\delta_Y + \mu_Y$$

λαμβάνομεν :

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma XY = {} & 10^4\Sigma\varepsilon_X\,\varepsilon_Y + 10^3\Sigma\varepsilon_X\,\delta_Y + 10^2\Sigma\,\varepsilon_X\,\mu_Y + \\ & + 10^3\Sigma\,\delta_X\,\varepsilon_Y + 10^2\Sigma\,\delta_X\,\delta_Y + 10\,\Sigma\,\delta_X\,\mu_Y + \\ & + 10^2\Sigma\mu_X\,\varepsilon_Y + 10\Sigma\mu_X\,\delta_Y + \Sigma\mu_X\,\mu_Y \end{aligned}} \tag{2}$$

* Ἰδὲ σχετικὰς συγκρίσεις εἰς τὴν παρ 5.

Ὁ τύπος (2) ὑποδεικνύει, ἀναλόγως πρὸς τὸν (1), τὸν πρακτικὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τοῦ ΣΧΥ.

3.2. Ὁδηγίαι

α. Οἱ ἀριθμοὶ X, Y γράφονται ἐπὶ τῶν εἰδικῶν καρτελλῶν.

β. Ἐκτελοῦνται ὅλαι αἱ δυναταὶ διπλαῖ διαλογαί, διὰ συνδυασμοῦ τῶν ψηφίων τῶν X, Y, ἤτοι:

$$\varepsilon_X\varepsilon_Y,\ \varepsilon_X\delta_Y,\ \varepsilon_X\mu_Y,\ \delta_X\varepsilon_Y,\ \delta_X\delta_Y,\ \delta_X\mu_Y,\ \mu_X\varepsilon_Y,\ \mu_X\delta_Y,\ \mu_X\mu_Y,$$

αἱ ὁποῖαι φαίνονται καὶ εἰς τὸν τύπον (2), καὶ καταχωροῦνται τὰ σχετικὰ ἐξαγόμενα εἰς πίνακας τῆς μορφῆς τοῦ πίνακος 2.

3.3. Συμπληρωματικοὶ ὑπολογισμοὶ

Γίνονται ὅπως ἀκριβῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ $ΣX^2$ καὶ τελικῶς χρησιμοποιεῖται ὁ τύπος (2).

4. Ὑπολογισμὸς ΣXYZ, $ΣX^2Y$, $ΣX^3$

A) ΣXYZ.

4.1. Μαθηματικὴ θεμελίωσις

Ὑποθέτοντες ὁμοίως τριψηφίους τοὺς ἀριθμοὺς X καὶ Y λαμβάνομεν:

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma XYZ &= 10^4\Sigma\varepsilon_X\varepsilon_Y\,\Sigma Z_{\varepsilon_X\varepsilon_Y} + 10^3\Sigma\varepsilon_X\delta_Y\,\Sigma Z_{\varepsilon_X\delta_Y} + 10^2\Sigma\varepsilon_X\mu_Y\,\Sigma Z_{\varepsilon_X\mu_Y} \\ &+ 10^3\Sigma\delta_X\varepsilon_Y\,\Sigma Z_{\delta_X\varepsilon_Y} + 10^2\Sigma\delta_X\delta_Y\,\Sigma Z_{\delta_X\delta_Y} + 10\Sigma\delta_X\mu_Y\,\Sigma Z_{\delta_X\mu_Y} + \\ &+ 10^2\Sigma\mu_X\varepsilon_Y\,\Sigma Z_{\mu_X\varepsilon_Y} + 10\,\Sigma\mu_X\delta_Y\,\Sigma Z_{\mu_X\delta_Y} + \Sigma\mu_X\mu_Y\,\Sigma Z_{\mu_X\mu_Y} \end{aligned}} \tag{3}$$

ὅπου $\Sigma Z_{\varepsilon_X\varepsilon_Y}$, π.χ., συμβολίζει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν Z, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀριθμοὺς X, Y ἔχοντες ἀντιστοίχως ψηφία ἑκατοντάδων ε_X καὶ ε_Y. Ὁ τύπος (3) ὑποδεικνύει καὶ τὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τοῦ ΣXYZ, διὰ τὸ ὁποῖον θὰ χρειασθῇ ἐκτὸς τῆς διαλογικῆς καὶ ἡ πινακογραφικὴ* μηχανή.

* Ὁ ἀνωτέρω ὑπολογισμὸς δύναται νὰ γίνῃ καὶ μόνον διὰ τῆς διαλογικῆς μηχανῆς (διὰ γενικεύσεως τῆς μεθόδου τοῦ ΣXY), ἀλλὰ αἱ ἀπαιτούμεναι διαλογαὶ καθίστανται ἀρκετὰ πολυάριθμοι ὡς καὶ οἱ ἀντίστοιχοι πίνακες.

4.2. Ὁδηγίαι :

α. Οἱ ἀριθμοὶ X, Y, Z γράφονται ἐπὶ τῶν εἰδικῶν καρτελλῶν.

β. Ἐκτελοῦνται ὅλαι αἱ διπλαῖ διαλογαί, διὰ συνδυασμοῦ τῶν ψηφίων τῶν X, Y ὡς καὶ ἀνωτέρω. Εἰς ἕκαστον ὅμως φατνίον τοῦ πίνακος 3 δὲν γράφεται ὁ ἀριθμὸς τῶν καρτελλῶν, αἱ ὁποῖαι ἐμπίπτουν εἰς αὐτό, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν Z τῶν ἐν λόγῳ καρτελλῶν, ἀπαιτουμένης συνεπῶς πινακογραφήσεως αὐτῶν ὡς πρὸς Z.

4.3. Συμπληρωματικοὶ ὑπολογισμοὶ

Γίνονται ὅπως ἀκριβῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὑπολογισμοῦ ΣX^2. Ἐν προκειμένῳ ὅμως εἰς τὰ φατνία εἶναι καταχωρημένα ἀθροίσματα ὡς πρὸς Z καὶ ὄχι συχνότητες καρτελλῶν.

B) $\Sigma X^2 Y$.

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ ΣXYZ, ὑποτιθεμένου ὅτι X = Y.

Συνεπῶς ὁ τύπος (3) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma X^2 Y = {} & 10^4 \Sigma \varepsilon^2 \Sigma Y_\varepsilon + 10^2 \Sigma \delta^2 \Sigma Y_\delta + \Sigma \mu^2 \Sigma Y_\mu + \\ & + 2\,[\,10^3 \Sigma \varepsilon\delta \Sigma Y_{\delta\varepsilon} + 10^2 \Sigma \varepsilon\mu \Sigma Y_{\mu\varepsilon} + 10 \Sigma \delta\mu \Sigma Y_{\delta\mu}\,]\end{aligned}} \tag{4}$$

Αἱ διαλογαὶ θὰ γίνουν ὅπως καὶ διὰ τὸ ΣX^2, ἀλλ' ἕκαστον φατνίον θὰ καταχωρῆται τὸ ἄθροισμα τῶν Y τῶν ἀντιστοίχων εἰς τὸ φατνίον καρτελλῶν.

Οἱ ὑπολογισμοὶ ἐν συνεχείᾳ γίνονται ὁμοίως ἐπὶ πινάκων τῆς μορφῆς τοῦ πίνακος 3α.

Γ) ΣX^3

Τοῦτο εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ $\Sigma X^2 Y$ ἂν X = Y. Κατὰ συνέπειαν ὁ τύπος (4) γίνεται :

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma X^3 = {} & 10^4 \Sigma \varepsilon^2 \Sigma X_\varepsilon + 10^2 \Sigma \delta^2 \Sigma X_\delta + \Sigma \mu^2 \Sigma X_\mu + \\ & + 2\,[\,10^3 \Sigma \varepsilon\delta \Sigma X_{\varepsilon\delta} + 10^2 \Sigma \varepsilon\mu \Sigma X_{\varepsilon\mu} + 10 \Sigma \delta\mu \Sigma X_{\delta\mu}\,]\end{aligned}} \tag{5}$$

Ὅλαι αἱ ὑπόλοιποι ἐργασίαι γίνονται ὡς καὶ διὰ τὸ $\Sigma X^2 Y$ μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι αἱ σχετικαὶ πινακογραφήσεις γίνονται ὡς πρὸς αὐτὸ τοῦτο τὸ X.

Χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης οἱ πίνακες 3α.

Δ) Τὰ ἀνωτέρω δύνανται νὰ γενικευθοῦν καταλλήλως καὶ διὰ ἀθροίσματα ἀνωτέρων δυνάμεων τοῦ X ἢ γινομένων μὲ παράγοντας ἀνωτέρων δυνάμεων.

5. Σύγκρισις τῆς ἀνωτέρω μεθόδου μὲ τοὺς κλασσικοὺς τρόπους ὑπολογισμοῦ τῶν ΣX^2, ΣXY, $\Sigma X^2 Y$, ΣX^3...

Ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἡ ἀνωτέρω μέθοδος συντομεύει σημαντικώτατα τὸν χρόνον ὑπολογισμοῦ. Ἐκτὸς τούτου πλεονεκτεῖ τῶν κλασσικῶν μεθόδων καὶ εἰς τὰ ἑξῆς :

α) Ἡ ἐργασία γίνεται κυρίως διὰ τῶν διαλογικῶν μηχανῶν καὶ περιορίζεται εἰς τὸ ἐλάχιστον ἡ πιθανότης σφαλμάτων.

β) Ἀποφεύγεται ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ἀνθρωπίνου παράγοντος εἰς ἐργασίας κοπιαστικὰς καὶ μὴ παρουσιαζούσας πνευματικὸν ἐνδιαφέρον καὶ κατὰ συνέπειαν προξενούσας τὴν ἀνίαν (πολλάκις αἰτίαν σφαλμάτων).

γ) Ὑπολογισμοὶ ἀδύνατοι διὰ τῶν συνήθων ὑπολογιστικῶν μηχανῶν (π.χ. ἄθροισμα τετραγώνων πολυψηφίων ἀριθμῶν) καθίστανται δυνατοὶ ἀναγόμενοι εἰς ἁπλοῦς τοιούτους ἐπὶ τῶν πινάκων καὶ

δ) Ἡ μέθοδος δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ ἀπὸ ἐντελῶς ἀνειδικεύτους ὑπαλλήλους καὶ δὴ ἐργαζομένους συγχρόνως (ἐπὶ διαφόρων πινάκων τοῦ αὐτοῦ προβλήματος).

Κατωτέρω δίδεται ἕνας πίναξ παρέχων λεπτομερῆ στοιχεῖα ἐπὶ τοῦ ἀπαιτηθέντος χρόνου ὑπολογισμοῦ διαφόρων ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκφράσεων, ἀφ' ἑνὸς μὲ τὴν κλασσικὴν μέθοδον ἀφ' ἑτέρου μὲ τὴν παροῦσαν.

Ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ὥρας ἐργασίας ἑνὸς ὑπαλλήλου ἢ μιᾶς μηχανῆς.

Μέθοδος Ὑπολογισμοῦ	Ὑπολογισθὲν Ἄθροισμα	
	$\sum_{\iota=1-2568}^{2568*} X_\iota^2$	$\sum_{\iota=1-2568}^{2568*} X_\iota Y_\iota$
Α. Κλασσικὴ Μέθοδος	40 ὧραι	45 ὧραι
Β. Παροῦσα Μέθοδος		
α. Ἐργασία Ὑπαλλ.	3 »	4 »
β. » Μηχανῆς	4 »	5 »

Εἰς τοὺς πίνακας τῆς ἑπομένης σελίδος ἐμφαίνεται ὁ τρόπος διεξαγωγῆς τῶν ὑπολογισμῶν.

* Οἱ ἀριθμοὶ X_ι, Y_ι, ἦσαν τετραψήφιοι.

ΠΙΝΑΞ 1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $ΣX^2$

Τάξις ψηφίων διαλογής Α: ____ Β: ____ Τελικόν άθροισμα: ____

A/B											Αθροίσματα γινομένων οριζοντίως
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											

ΠΙΝΑΞ 2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣX.Y

Τάξις ψηφίων διαλογής x: ____ y: ____ Τελικόν άθροισμα: ____

X \ Y											Αθροίσματα γινομένων οριζοντίως
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											

ΠΙΝΑΞ 3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣX.YZ

Τάξις ψηφίων διαλογής x: ____ y: ____ Τελικόν άθροισμα: ____

X \ Y											Αθροίσματα γινομένων οριζοντίως
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											

ΠΙΝΑΞ 3α. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $ΣX^2Y$, $ΣX^3$

Τάξις ψηφίων διαλογής Α: ____ Β: ____ Τελικόν άθροισμα: ____

A \ B											Αθροίσματα γινομένων οριζοντίως
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											