ΕΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

Τοῦ κ. ΑΝΤΩΝΙΟΥ Χ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΥ

Καθηγητοῦ Οἰκονομικῶν Μαθηματικῶν καὶ Στατιστικῆς
εἰς τὴν Ἀνωτάτην Βιομηχανικὴν Σχολὴν Πειραιῶς

Ἀντικείμενον τῆς παρούσης μελέτης εἶναι τὸ πρόβλημα τῶν μεταφορῶν ὑπὸ μίαν εἰδικὴν μορφὴν αὐτοῦ, ἥτις περιλαμβάνει καὶ διανομήν. Τοῦ προβλήματος τούτου μελετῶνται τρεῖς διακεκριμέναι περιπτώσεις ὑπὸ ὡρισμένας ὑποθέσεις.
Ἡ ἀντιμετώπισις τοῦ προβλήματος γίνεται τῇ βοηθείᾳ τῆς θεωρίας τῶν γραφημάτων [1].

1. Τὸ πρόβλημα

Μία ἑταιρεία χρησιμοποιεῖ μεταφορικὰ μέσα διὰ τὴν προώθησιν τῶν προϊόντων της εἰς τοὺς διαφόρους τομεῖς τῆς διαθέσεώς των. Τὰ μεταφορικὰ μέσα τῆς ἑταιρείας εἶναι αὐτοκίνητα διαφόρων χωρητικοτήτων, δυνάμενα νὰ καλύψουν κατὰ τὴν μεταφορὰν τὰς ζητήσεις δεδομένου ἀριθμοῦ τομέων.

Τὸ δρομολόγιον κάθε μεταφορικοῦ μέσου περιορίζεται μεταξὺ ὡρισμένων μόνον τομέων (τοῦ συνόλου τῶν τομέων), διότι ἡ πλήρης γνῶσις τῶν στοιχείων τῶν διαφόρων τομέων (διαδρομαί, θέσεις, συνήθειαι καταναλωτῶν κλπ.) δὲν εἶναι δυνατὴ εἰς κάθε πλήρωμα μεταφορικοῦ μέσου. Τὸ ὑποσύνολον τῶν τομέων, τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς κάθε μεταφορικὸν μέσον καλεῖται περιοχὴ αὐτοῦ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τὸ κόστος ἐμφανίζεται ὑπὸ τὰς ἑξῆς τρεῖς διακεκριμένας μορφάς:

α) Κόστος μεταβάσεως κάθε μεταφορικοῦ μέσου ἐκ τῆς ἑταιρείας εἰς κάθε τομέα τῆς περιοχῆς του.

β) Κόστος μεταβάσεως κάθε μεταφορικοῦ μέσου ἐξ ἑκάστου τομέως τῆς περιοχῆς του εἰς ἕτερον.

γ) Κόστος διανομῆς κάθε μεταφορικοῦ μέσου ἐντὸς ἑκάστου τομέως τῆς περιοχῆς του.

Τὸ κόστος ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω μορφῶν εἶναι συνάρτησις τοῦ τύπου (πλήρωμα, φορτίον, καύσιμα κλπ.) καὶ τοῦ δρομολογίου (ἀποστάσεις, ὧραι κυκλοφορίας, προτεραιότητες κλπ.) τοῦ μεταφορικοῦ μέσου· εἰδικῶς διὰ τὸ κόστο διανομῆς πρέπει νὰ ληφθῇ ἐπιπλέον ὑπ' ὄψιν ὁ ἀριθμὸς τῶν καταναλωτῶν τοῦ τομέως, ἡ μέθοδος διανομῆς κλπ.

Ζητεῖται νὰ πραγματοποιηθῇ ἡ μεταφορὰ καὶ διανομὴ τῶν προϊόντων, εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἀντίστοιχον ὁλικὸν κόστος νὰ εἶναι ἐλάχιστον, ὅταν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

m ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταφορικῶν μέσων

n ὁ ἀριθμὸς τῶν τομέων

β_j ὁ ἀριθμὸς τῶν τομέων τοῦ j μεταφορικοῦ μέσου

d^j_{oi} τὸ κόστος μεταβάσεως τοῦ j μεταφορικοῦ μέσου ἐκ τῆς ἑταιρείας εἰς τὸν i τομέα τῆς περιοχῆς του

d^j_{ik} τὸ κόστος μεταβάσεως τοῦ j μεταφορικοῦ μέσου ἐκ τοῦ τομέως i εἰς τὸν τομέα κ τῆς περιοχῆς του

c^j_i τὸ κόστος διανομῆς τοῦ j μεταφορικοῦ μέσου εἰς τὸν τομέα i τῆς περιοχῆς του

2. Συμβολισμοὶ καὶ ὑποθέσεις

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω συμβολισμῶν τῶν δεδομένων, ἀπαραίτητοι εἶναι διὰ τὴν μαθηματικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος καὶ οἱ κατωτέρω συμβολισμοί :

0 ἡ ἑταιρεία

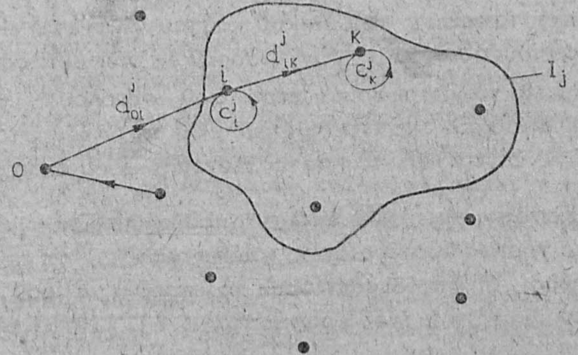
I_j ἡ περιοχὴ τοῦ j μεταφορικοῦ μέσου ($|I_j| \geqslant \beta_j$)

J_i τὸ σύνολον τῶν μεταφορικῶν μέσων τῶν διερχομένων διὰ τοῦ τομέως i

S Τὸ σύνολον τῶν μεταφορικῶν μέσων, τὰ ὁποῖα εἶναι ὑποχρεωμένα ἐξ ὑποθέσεως ἢ ἀπαλειφῆς νὰ καλύψουν ἅπαντας τοὺς τομεῖς τῆς περιοχῆς των

T τὸ σύνολον τῶν μεταφορικῶν μέσων, διὰ τὰ ὁποῖα ἐπιτρέπεται ἡ δυνατότης ἐπιλογῆς τομέων ἐντὸς τῆς περιοχῆς των

Ἤδη ἡ ἑταιρεία καὶ οἱ τομεῖς θὰ παρίστανται κατωτέρω (ἐπὶ τοῦ χάρ-



του) διὰ σημείων καὶ θὰ συνιστοῦν οὕτω τὰς κορυφὰς ἑνὸς μὴ προσανατολισμένου γραφήματος, τοῦ ὁποίου οἱ δεσμοὶ θ' ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς δυνατότητας ἐπικοινωνίας τῶν τομέων. Τὸ γράφημα τοῦτο θὰ συμβολίζεται μὲ G, ἐνῷ μὲ G_j θὰ συμβολίζεται τὸ ὑπογράφημα αὐτοῦ μὲ σύνολον κορυφῶν τὸ $I_j \cup \{0\}$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω :

α) Εἰς κάθε κορυφὴν i τοῦ G_j θὰ ἀντιστοιχῇ τὸ κόστος διανομῆς c_i^j διὰ τὸ διερχόμενον ἐξ αὐτῆς j μεταφορικὸν μέσον.

β) Εἰς κάθε δεσμὸν (i, k) (ἀντιστοίχως $(0, i)$) τοῦ G_j θὰ ἀντιστοιχῇ τὸ κόστος μεταβάσεως d_{ik}^j (ἀντιστοίχως d_{oi}^j) διὰ τὸ διερχόμενον ἐξ αὐτοῦ j μεταφορικὸν μέσον.

γ) Ἡ διαδρομὴ κάθε μεταφορικοῦ μέσου $j \in S$ θὰ εἶναι ἓν κύκλωμα hamilton τοῦ G_j μὲ μῆκος $\beta_j + 1$ καὶ ἀρχὴν 0.

δ) Ἡ διαδρομὴ κάθε μεταφορικοῦ μέσου $j \in T$ θὰ εἶναι ἓν στοιχειῶδες κύκλωμα τοῦ G_j μὲ μῆκος $\beta_j + 1$ καὶ ἀρχὴν 0.

Τέλος, ἐκ τῶν ἑπομένων δύο ὑποθέσεων, ἡ μὲν πρώτη εἶναι ἀναγκαία διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ἡ δὲ δευτέρα ἀναγκαία διὰ τὴν ἀκολουθουμένην κατωτέρω μέθοδον.

ε) Εἰς κάθε γράφημα G_j ὑπάρχει ἓν (τουλάχιστον) στοιχειῶδες κύκλωμα μὲ μῆκος $\beta_j + 1$ καὶ ἀρχὴν 0.

στ) $\sum_{j=1}^{m} \beta_j = n$

3. Πρώτη περίπτωσις

Ἔστω ὅτι διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τῆς θέσεως τῶν τομέων ἑκάστης περιοχῆς τὸ κόστος μεταβάσεως διὰ κάθε μεταφορικὸν μέσον εἶναι σταθερόν, δηλαδή :

$$d_{oi}^j = k_j \, , \ \forall \, i \in I_j$$

$$d_{ik}^j = l_j \, , \ \forall \, i, k \in I_j$$

Τότε ἡ ἐλαχιστοποίησις τοῦ ὁλικοῦ κόστους ἀνάγεται εἰς τὴν ἐλαχιστοποίησιν τοῦ κόστους διανομῆς τῶν διαδρομῶν τῶν μεταφορικῶν μέσων.

Κατ' ἀρχὴν εἰς τὰ μεταφορικὰ μέσα τοῦ συνόλου S ἀντιστοιχεῖ καὶ κόστος διανομῆς σταθερόν· πράγματι ἐπειδὴ δι' αὐτὰ δὲν ὑπάρχει δυνατότης ἐπιλογῆς κορυφῶν, ἕπεται ὅτι τὸ κόστος διανομῆς $\sum_{i \in I_j} c_i^j$ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν εἶναι σταθερόν. Κατόπιν τούτου ἡ ἐπιλογὴ τοῦ κυκλώματος hamilton θὰ γίνῃ μὲ βάσιν ἄλλα κριτήρια (προτεραιότης, χρόνος κλπ.).

Οἱ ἀλγόριθμοι, οἱ ὁποῖοι ἐπιλύουν τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν κυκλωμάτων hamilton ἑνὸς γραφήματος [1], [3], [4] ἐφαρμόζονται ἐνταῦθα.

Τὰ μεταφορικὰ μέσα τοῦ συνόλου T ἔχουν, ὡς ἐλέχθη, δυνατότητα ἐπιλογῆς κορυφῶν. Ὁ δὲ προσδιορισμὸς τῶν κορυφῶν εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχεῖ τὸ ἐλάχιστον κόστος διανομῆς ἐπιτυγχάνεται διὰ τοῦ ἀκολούθου προγράμματος:

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως :

$$f = \sum_{j \in T} \sum_{i \in I_j} c_i^j z_i^j$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\sum_{i \in I_j} z_j^j = b_j \, , \; j \in T$$

$$\sum_{j \in J} z_i^j = 1, \; i \in \bigcup_{j \in T} I_j$$

ὅπου $z_i^j = 1$ ἐὰν τὸ μεταφορικὸν μέσον $j \in T$ διέρχεται διὰ τοῦ τομέως i
$= 0$ ἐὰν ὄχι.

Τὸ ἀνωτέρω πρόγραμμα εἶναι ἓν γραμμικὸν πρόγραμμα διτίμων μεταβλητῶν καὶ μία ἀναγκαία συνθήκη διὰ τὴν ὕπαρξιν λύσεως αὐτοῦ εἶναι ἡ :

$$\sum_{j \in T} b_j = \Big| \bigcup_{j \in T} I_j \Big|$$

Οἱ ἀλγόριθμοι τοῦ προγραμματισμοῦ μὲ διτίμους μεταβλητὰς [2], [5], δίδουν τὴν ἀρίστην λύσιν τούτου.

4. Δευτέρα περίπτωσις

Ἔστω ὅτι διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πελατῶν ἑκάστου τομέως τὸ κόστος διανομῆς, διὰ κάθε μεταφορικὸν μέσον, εἶναι σταθερόν, δηλαδή :

$$c_i^j = m_j \, , \; \forall \; i \in I_j$$

Τότε ἡ ἐλαχιστοποίησις τοῦ ὁλικοῦ κόστους ἀνάγεται εἰς τὴν ἐλαχιστοποίησιν τοῦ κόστους μεταβάσεως τῶν διαδρομῶν τῶν μεταφορικῶν μέσων.

Κατ' ἀρχὴν διὰ νὰ γίνῃ ἐλάχιστον τὸ κόστος μεταβάσεως τῶν διαδρομῶν τῶν μεταφορικῶν μέσων τοῦ συνόλου S θὰ πρέπει τὸ κύκλωμα hamilton ἑκάστου νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ ἐλάχιστον κόστος μεταβάσεως.

Σχετικοὶ ἀλγόριθμοι [3], [4] δίδουν τὴν λύσιν (ἀρκεῖ νὰ ἀντικατασταθῇ ἡ ἀπόστασις μὲ τὸ κόστος).

Ὁ προσδιορισμὸς τῶν διαδρομῶν, τῶν μεταφορικῶν μέσων τοῦ συνόλου T, εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχεῖ τὸ ἐλάχιστον κόστος μεταβάσεως ἐπιτυγχάνεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κατωτέρω ἀλγορίθμου.

Ἀλγόριθμος

Βῆμα 1ον: Προσδιορίζονται διὰ κάθε G_j ὅλα τὰ στοιχειώδη κυκλώματα μ_j^θ, $\theta = 1,2,3,\ldots$, μὲ μῆκος $\beta_j + 1$, ἀρχὴν 0 καὶ περιέχοντα τὰς ὑποχρεωτικὰς κορυφὰς διὰ τὸ μεταφορικὸν μέσον j *).

Βῆμα 2ον: Κατασκευάζεται ἓν μὴ προσανατολισμένον γράφημα $\overline{G}$, τοῦ ὁποίου αἱ μὲν κορυφαὶ κατανέμονται εἰς $|T|$ στάθμας καὶ παριστοῦν τὰ ὡς ἄνω κυκλώματα μ_j^θ, $j \in T$, οἱ δὲ δεσμοὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ζεύγη $(\mu_{j_1}^{\theta_1}, \mu_{j_2}^{\theta_2})$, $j_1 \neq j_2 \in T$ διὰ τὰ ὁποῖα $\mu_{j_1}^{\theta_1} \cap \mu_{j_2}^{\theta_2} = \{0\}$.

Βῆμα 3ον: Προσδιορίζεται ἐπὶ τοῦ γραφήματος $\overline{G}$ κάθε $|T|$-ας κορυφῶν $\mu_1^{\cdot}, \mu_2^{\cdot}, \ldots, \mu_{|T|}^{\cdot}$ τοιαύτη ὥστε κάθε ζεῦγος αὐτῆς νὰ εἶναι καὶ δεσμὸς τοῦ $\overline{G}$. Αἱ οὕτως εὑρισκόμεναι $|T|$-αδες κορυφῶν ἀποτελοῦν τὰς δυνατὰς λύσεις τοῦ προβλήματος καὶ συνιστοῦν ἓν μεταβατικὸν ὑπογράφημα G^* τοῦ γραφήματος $\overline{G}$.

Βῆμα 4ον: Ἡ ἀρχὴ τοῦ Bellman ἐφαρμοζομένη, ὡς πρὸς τὰς τιμὰς κόστους τῶν κορυφῶν τοῦ γραφήματος G^*, δίδει τὴν ἀρίστην λύσιν.

Παράδειγμα

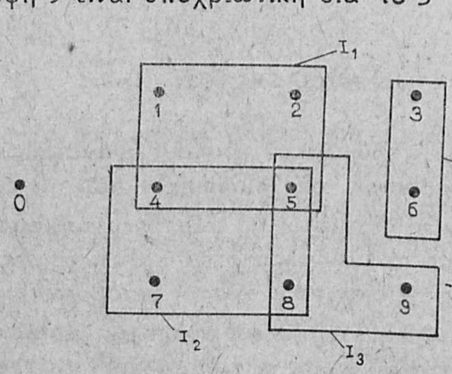
Ἔστωσαν $n = 9$, $m = 4$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 2$, $I_1 = \{1,2,4,5,\}$ $I_2 = \{4,5,7,8\}$ $I_3 = \{5,8,9\}$ καὶ $I_4 = \{3,6\}$ τότε προκύπτουν:

1) $S = \{4\}$, $T = \{1,2,3\}$

2) Αἱ κορυφαὶ 1,2 εἶναι ὑποχρεωτικαὶ διὰ τὸ 1

3) Ἡ κορυφὴ 7 εἶναι ὑποχρεωτικὴ διὰ τὸ 2

4) Ἡ κορυφὴ 9 εἶναι ὑποχρεωτικὴ διὰ τὸ 3



*) Ἐκ τῶν ἐχόντων τὰς αὐτὰς κορυφὰς λαμβάνεται τὸ κύκλωμα, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μικρότερον κόστος μεταβάσεως.

Β ῆ μ α 1ον:

$\mu_1^1 = [\,0,1,2,4,0\,]$ μὲ κόστος μεταβάσεως 20 *)

$\mu_1^2 = [\,0,1,2,5,0\,]$ μὲ κόστος μεταβάσεως 30

$\mu_2^1 = [\,0,4,7,0\,]$ μὲ κόστος μεταβάσεως 10

$\mu_2^2 = [\,0,5,7,0\,]$ μὲ κόστος μεταβάσεως 30

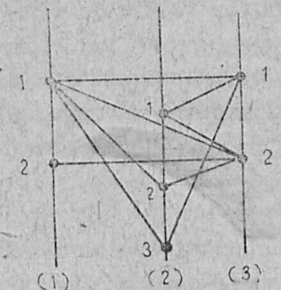
$\mu_2^3 = [\,0,7,8,0\,]$ μὲ κόστος μεταβάσεως 10

$\mu_3^1 = [\,0,5,9,0\,]$ μὲ κόστος μεταβάσεως 40

$\mu_3^2 = [\,0,8,9,0\,]$ μὲ κόστος μεταβάσεως 10

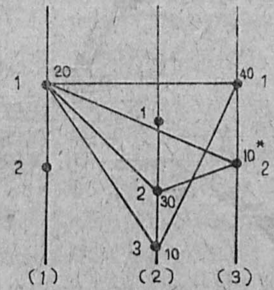
Β ῆ μ α 2ον:

Τὸ γράφημα $\overline{G}$



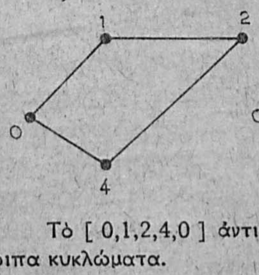
Β ῆ μ α 3ον:

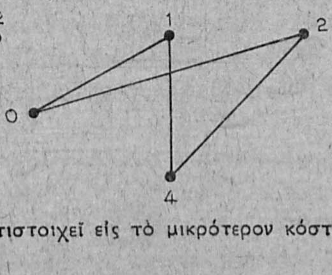
Τὸ γράφημα G*

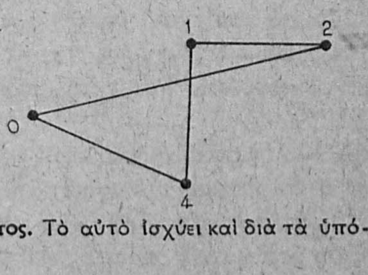


---

*) Κυκλώματα μὲ κορυφὰς τὰς 1,2,4 καὶ ἀρχὴν 0 εἶναι τὰ ἑξῆς:







Τὸ [0,1,2,4,0] ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μικρότερον κόστος. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ὑπόλοιπα κυκλώματα.

Β ῆ μ α 4ον :

Δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τοῦ Bellman εὑρίσκεται ὡς ἀρίστη λύσις, διὰ τὰ μεταφορικὰ μέσα τοῦ συνόλου T, ἡ ($\mu_1^1, \mu_2^2, \mu_3^2$).

Κατόπιν τούτου ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ($\mu_1^1, \mu_2^2, \mu_3^2, \mu_4^1$) ὅπου $\mu_4^1 = [\,0,3,6,0]$.

5. Γενικὴ περίπτωσις

Ὅταν δὲν ὑφίσταται σταθερότης τιμῶν κόστους διανομῆς ἢ μεταβάσεως τότε καὶ πάλιν εἰς τὰ μεταφορικὰ μέσα τοῦ συνόλου S ἀντιστοιχεῖ σταθερὸν κόστος διανομῆς. Κατόπιν τούτου τὸ κύκλωμα hamilton ἑκάστου ἐξ αὐτῶν θὰ πρέπει νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ ἐλάχιστον κόστος μεταβάσεως.

Τέλος, ὅσον ἀφορᾷ τὸν προσδιορισμὸν τῶν διαδρομῶν τῶν μεταφορικῶν μέσων τοῦ συνόλου T θὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ ἀνωτέρω ἀλγόριθμος, ἀφοῦ ἀντικατασταθῇ τὸ κόστος μεταβάσεως μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ κόστους μεταβάσεως καὶ κόστους διανομῆς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] B e r g e : Théorie des graphes et ses applications. Dunod, 1958.

[2] I v a n e s c u and R u d e a n u : Pseudo–Boolean Methods for Bivalent Programming. Springer – Verlag 1966.

[3] K a u f m a n n et M a l g r a n g e : Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'une graphe. Revue Française de Recherche Opérationnelle, No 26, 1963.

[4] R o y : Algèbre moderne et théorie des graphes. Dunod, 1970.

[5] R o y, N g h i e m et B e r t i e r : Programmes linéaires en nombres entiers et procèdure S.E.P. Metra, Vol. IV, 1965.