Η ΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΜΗΤΡΩΝ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΕΩΝ (1)

Τοῦ κ. ΘΕΟΔΩΡΟΥ Γ. ΓΚΑΜΑΛΕΤΣΟΥ

Καθηγητοῦ τῆς 'Ανωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς Πειραιῶς

1. Εἰσαγωγὴ

Σκοπὸς τῆς παρούσης μελέτης εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ἀνάπτυξις τῆς μεθόδου τῶν πολλαπλασιαστικῶν μητρῶν, ἡ ὁποία χρησιμεύει διὰ τὴν ἐκτίμησιν μιᾶς γραμμικῆς πολυμεταβλητῆς παλινδρομήσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ σύγκρισις τῆς μεθόδου ταύτης πρὸς ἐκείνην τῶν Gauss - Doolittle (2).

Πρὸς εὐκολωτέραν παρουσίασιν τῆς ἀνωτέρω μεθόδου θὰ χρησιμοποιήσωμεν ταύτην πρὸς ἐκτίμησιν μιᾶς γραμμικῆς παλινδρομήσεως μὲ τέσσαρας ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς, καὶ ἐν συνεχείᾳ θὰ ἀναπτύξωμεν τὴν γενικὴν μορφὴν ταύτης, ἡ ὁποία χρησιμεύει διὰ τὴν ἐκτίμησιν μιᾶς γραμμικῆς παλινδρομήσεως μὲ n ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς. Διὰ τὴν σύγκρισιν θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν γενικὴν μορφὴν τῆς ἀνωτέρω μεθόδου τῶν εἰδικῶν περιπτώσεων μιᾶς ἢ καὶ δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν εὐκόλως δυναμένων νὰ ἐξαχθοῦν ἐκ ταύτης. Βεβαίως ὡς προϋπόθεσις διὰ τὴν πλήρη κατανόησιν τῆς μεθόδου τίθεται ἡ γνῶσις στοιχειώδους Στατιστικῆς καὶ Γραμμικῆς 'Αλγέβρας. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν ἴδιον συμβολισμὸν πρὸς ἐκεῖνον τοῦ Goldberger καὶ τοῦτο σκοπίμως πρὸς εὐκολωτέραν παραβολὴν τῶν δύο μεθόδων.

---

1. 'Η παροῦσα ἐργασία εἶναι κατὰ βάσιν μετάφρασις τῆς μελέτης τοῦ συγγραφέως A Matrix Multiplication Interpretation of Gauss - Doolittle Computational Schemes for Multiple Regression, Systems Formulation, Methodology and Policy Workshop Paper 6613, Social Systems Research Institute, University of Wisconsin, Madison Wisconsin, 1966.

2. 'Η Gauss - Doolittle μέθοδος ἐκτιμήσεως πολυμεταβλητῶν παλινδρομήσεων εἶναι γνωστὴ εἰς τοὺς οἰκονομολόγους. Διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν δύο μεθόδων θὰ χρησιμοποιηθῇ αὕτη ὅπως παρουσιάζεται ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ Arthur S. Goldberger. Πρὸς τοῦτο βλέπε: Arthur S. Goldberger, Econometric Theory, New York, John Wiley, 1964, σελ. 182 - 192.

2. Ἐφαρμογὴ τῆς Μεθόδου διὰ τὴν Ἐκτίμησιν Γραμμικῆς Παλινδρομήσεως Τεσσάρων Ἀνεξαρτήτων Μεταβλητῶν

Ἔστω ἡ ὑπὸ ἐκτίμησιν ἐξίσωσις

$$y_t = \beta_0 x_{t0} + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \beta_4 x_{t4} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

ὅπου

$x_{t0} = 1$, καὶ ε_t ἡ τυχαία ἀπόκλισις.

Δοθέντων τῶν παρατηρήσεων δι' ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν y_t καὶ x_{ti} $(i = 1, \ldots, 4)$ σχηματίζομεν τὰς μήτρας τῶν ροπῶν

$$X'X = \begin{bmatrix} N & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 & \Sigma x_3 & \Sigma x_4 \\ \cdot & \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_1 x_3 & \Sigma x_1 x_4 \\ \cdot & \cdot & \Sigma x_2^2 & \Sigma x_2 x_3 & \Sigma x_2 x_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma x_3^2 & \Sigma x_3 x_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Sigma x_4^2 \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

ἡ ὁποία εἶναι μία 4×4 συμμετρικὴ μήτρα,

$$X'y = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma x_1 y \\ \Sigma x_2 y \\ \Sigma x_3 y \\ \Sigma x_4 y \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἓν 4×1 διάνυσμα, καὶ

$$y'y = (\Sigma y^2). \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω μητρῶν ἐπιτυγχάνομεν τὰς ἀκολούθους

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ \cdot & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ \cdot & \cdot & R_{33} & R_{34} \\ \cdot & \cdot & \cdot & R_{44} \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

ἡ ὁποία εἶναι συμμετρική, προερχομένη ἐκ τῆς συμμετρικῆς μήτρας (2) ἀνωτέρω,

$$R_{xy} = \begin{bmatrix} R_{15} \\ R_{25} \\ R_{35} \\ R_{45} \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

καὶ

$$R_{yy} = T\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2, \qquad (7)$$

ὅπου

$$R_{ij} = T\Sigma x_i x_j - (\Sigma x_i)(\Sigma x_j) \quad \text{διὰ } i \neq j, \qquad (8)$$

$$R_{ii} = T\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2 \quad \text{διὰ } i \neq j, \text{ καὶ} \qquad (9)$$

$$R_{i5} = T\Sigma x_i y - (\Sigma x_i)(\Sigma y). \qquad (10)$$

Αἱ ἀνωτέρω μῆτραι τῶν ροπῶν χρησιμεύουν, ὡς γνωστόν, διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων συντελεστῶν b_i τῶν μεταβλητῶν x_{ti} ὡς καὶ διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν ἀντιστοίχων διακυμάνσεων αὐτῶν S_{bi}, δοθέντος ὅτι

$$b_z = R_{xx}^{-1} R_{xy}, \qquad (11)$$

καὶ

$$S_{bb} = QR_{xx}^{-1}, \qquad (12)$$

ὅπου

$$Q = (R_{yy} - b_z' R_{xy}) / (T - n - 1) \text{ [1]}. \qquad (13)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (11) ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν συντελεστῶν b_z ἀπαιτεῖται προηγουμένως ἡ γνῶσις τῆς μήτρας R_{xx}^{-1}, ἤτοι τῆς ἀντιστρόφου τῆς μήτρας R_{xx}. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς μορφῆς τῆς μήτρας R_{xx}^{-1} ἐφαρμόζομεν τὰς πολλαπλασιαστικὰς μήτρας $P^{(i)}$, τῶν ὁποίων ἡ μορφὴ θὰ παρουσιασθῇ κατωτέρω κατὰ στάδια. Πρὶν ὅμως προχωρήσωμεν θὰ ἦτο σκόπιμον νὰ λεχθῇ ὅτι, διὰ τὴν ἁπλούστευσιν τῆς μορφῆς ὡρισμένων ἐκ τῶν στοιχείων τῶν μητρῶν $P^{(i)}$ χρησιμοποιοῦμεν τὰς ἐξισώσεις

$$B_{ij} = A_{ij} / A_{ii} \qquad (i, j = 1, \ldots, 4) \qquad (14)$$

καὶ

$$A_{ij} = R_{ij} - \Sigma_k B_{kj} A_{kj} \qquad (i, j = 1, \ldots, 4 \cdot k = 1,2,3). \qquad (15)$$

1. Πρὸς τοῦτο βλέπε: Θεοδώρου Γκαμαλέτσου, Οἰκονομετρία, Ἀθῆνα 1972, σελ. 100 - 108

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις ἂν καὶ ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνονται νὰ ὁμοιάζουν πρὸς τοὺς κανόνας, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν γνωστὴν μέθοδον ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss (Gaussian Elimination Method), ἐν τούτοις διαφέρουν ἐκείνων, διότι εἰς τὴν παροῦσαν μέθοδον εἰς ἕκαστον στάδιον μετασχηματισμοῦ μιᾶς μήτρας ἀναφερόμεθα εἰς τὰ ἀρχικὰ στοιχεῖα αὐτῆς. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις εὑρίσκομεν τὰς πολλαπλασιαστικὰς μήτρας $P^{(i)}$ ἀκολουθοῦντες τὰ κάτωθι στάδια :

$$P^{(1)} R_{xx} = R^{(1)}_{xx} \qquad (\text{I}\alpha)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}$$

ὅπου $A_{ij} = R_{ij} / 1$.

$$P^{(2)} R^{(1)}_{xx} = R^{(2)}_{xx} \qquad (\text{II}\alpha)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{A_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}$$

ἐφαρμόζοντες τὴν ἐξίσωσιν $B_{ij} = \dfrac{A_{ij}}{A_{ii}}$.

$$P^{(3)} R^{(2)}_{xx} = R^{(3)}_{xx} \qquad (\text{III}\alpha)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -A_{12} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιοῦντες τὴν ἐξίσωσιν $A_{2j} = R_{2j} - A_{12}B_{1j}$, καὶ ὅπου $A_{12} = R_{12} = R_{21}$, διότι ἡ μήτρα R_{xx} εἶναι συμμετρική.

$$P^{(4)} R_{xx}^{(3)} = R_{xx}^{(4)} \qquad \text{(IVα)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}$$

ἐφαρμόζοντες τὴν ἐξίσωσιν $B_{2j} = A_{2j} / A_{22}$.

$$P^{(5)} R_{xx}^{(4)} = R_{xx}^{(5)} \qquad \text{(Vα)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -A_{13} & -A_{23} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιοῦντες τὴν ἐξίσωσιν $A_{3j} = R_{3j} - A_{13} B_{1j} - A_{23} B_{2j}$.

$$P^{(6)} R_{xx}^{(5)} = R_{xx}^{(6)} \qquad \text{(VIα)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 1 & B_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}$$

ἐφαρμόζοντες τὴν ἐξίσωσιν $B_{3j} = A_{3j} / A_{33}$.

$$P^{(7)} R_{xx}^{(6)} = R_{xx}^{(7)} \qquad \text{(VIIα)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -A_{14} & -A_{24} & -A_{34} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 1 & B_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 1 & B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιοῦντες τὴν ἐξίσωσιν $A_{4j} = R_{4j} - A_{14} B_{1j} - A_{24} B_{2j} - A_{34} B_{3j}$, καὶ διότι $A_{14} = R_{14} = R_{41}$.

$$P^{(8)} R_{xx}^{(7)} = R_{xx}^{(8)} \qquad (\text{VIII}\alpha)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_{44}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 1 & B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 1 & B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἐὰν θέσωμεν ἐν συνεχείᾳ ὅπου $P^{(8)} \,.\, P^{(7)} \,.\, \ldots \,.\, P^{(2)} \,.\, P^{(1)} = P^{(8!)}$ ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$P^{(8)} R_{xx}^{(7)} = P^{(8!)} R_{xx}, \qquad (16)$$

ὅπου

$$P^{(8!)} = P^{(8!)} I = \begin{bmatrix} B_{16} & 0 & 0 & 0 \\ B_{26} & B_{27} & 0 & 0 \\ B_{36} & B_{37} & B_{38} & 0 \\ B_{46} & B_{47} & B_{48} & B_{49} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

εἶναι μία κάτωθεν τριγωνικὴ μήτρα ὡς προερχομένη ἀπὸ γινόμενον κάτωθεν τριγωνικῶν μητρῶν ὡς εἶναι αἱ $P^{(i)}$ ($i = 1,2, \ldots, 8$).

Κατὰ τὴν ἰδίαν διαδικασίαν χρησιμοποιοῦντες τὰς ἀνωτέρω μήτρας $P^{(i)}$ ἐπὶ τοῦ διανύσματος R_{xy} εὑρίσκομεν τὸ διάνυσμα

$$P^{(8!)} R_{xy} = \begin{bmatrix} B_{15} \\ B_{25} \\ B_{35} \\ B_{45} \end{bmatrix} . \qquad (18)$$

Ἐν συνεχείᾳ προχωροῦμεν χρησιμοποιοῦντες τὸ δεύτερον ὑποσύνολον τῶν $P^{(i)}$ ($i = 9, 10, 11$) εἰς τὴν μήτραν $R_{xx}^{(8)}$ μέχρις ὅτου εὕρωμεν τὴν μοναδιαίαν μήτραν I. Ἔχομεν ἑπομένως ἀκόμη τὰ κάτωθι τρία στάδια :

$$P^{(9)} R_{xx}^{(8)} = R_{xx}^{(9)} \qquad (\text{I}\beta)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 1 & B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{(10)}\, R^{(9)}_{xx} = R^{(10)}_{xx} \qquad (II\beta)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -B_{23} & -B_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & B_{23} & B_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

καὶ τέλος

$$P^{(11)}\, R^{(10)}_{xx} = R^{(11)}_{xx} \qquad (III\beta)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -B_{12} & -B_{13} & -B_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δηλαδὴ $R^{(11)}_{xx} = I$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ πολλαπλασιαστικαὶ μῆτραι $P^{(i)}$ δίδουν τελικῶς $R^{(11)}_{xx} = I$, ἕπεται ὅτι

$$P^{(11!)}\, R_{xx} = I. \qquad (19)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι αἱ μῆτραι $P^{(i)}$ ($i = 9{,}10{,}11$) εἶναι ἄνωθεν τριγωνικαί. Διὰ τὴν εὕρεσιν δὲ τῆς μήτρας $P^{(11!)}$, ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν ἤδη τὴν $P^{(8!)}$, ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως : Χρησιμοποιοῦντες τὴν μήτραν $P^{(8!)}$, ὡς δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως (17), λαμβάνομεν τὸ γινόμενον

$$P^{(9)}\, P^{(8!)} = \begin{bmatrix} B_{16} & 0 & 0 & 0 \\ B_{26} & B_{27} & 0 & 0 \\ (B_{36} - B_{34} B_{46}) & (B_{37} - B_{34} B_{47}) & (B_{38} - B_{34} B_{48}) & (-B_{34} B_{49}) \\ B_{46} & B_{47} & B_{48} & B_{49} \end{bmatrix}$$

καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ γινόμενον

$$P^{(10)}\,P^{(9')} = \begin{bmatrix} B_{16} & 0 & 0 & 0 \\ (B_{26}-B_{23}(B_{36}-B_{34}B_{46})-B_{24}B_{46}) & (B_{27}-B_{23}(B_{37}-B_{34}B_{47})-B_{24}B_{47}) & (-B_{23}(B_{38}-B_{34}B_{48})-B_{24}B_{48}) & (B_{23}B_{34}B_{49}-B_{24}B_{49}) \\ B_{36}-B_{34}B_{46} & B_{37}-B_{34}B_{47} & B_{38}-B_{34}B_{48} & -B_{34}B_{49} \\ B_{46} & B_{47} & B_{48} & B_{49} \end{bmatrix}$$

Τελικῶς δὲ εὑρίσκομεν τὴν μήτραν $P^{(11!)} = P^{(11)} P^{(10!)}$, τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα P_{ij} εἶναι τῆς μορφῆς

$$P_{11} = B_{16} - B_{12}\,[B_{26} - B_{23}\,(B_{36} - B_{34}B_{46}) - B_{24}B_{46}] - B_{13}\,(B_{36} - B_{34}B_{46}) - B_{14}B_{46},$$

$$P_{12} = -B_{12}\,[B_{27} - B_{23}\,(B_{37} - B_{34}B_{47}) - B_{24}B_{47}] - B_{13}\,(B_{37} - B_{34}B_{47}) - B_{14}B_{47}),$$

$$P_{13} = -B_{12}\,[-B_{23}\,(B_{38} - B_{34}B_{48}) - B_{24}B_{48}] - B_{13}\,(B_{38} - B_{34}B_{48}) - B_{24}B_{48},$$

$$P_{14} = -B_{12}\,(B_{23}B_{34}B_{49} - B_{24}B_{49}) - B_{13}B_{34}B_{49} - B_{14}B_{49},$$

$$P_{21} = B_{26} - B_{23}\,(B_{36} - B_{34}B_{46}) - B_{24}B_{46},$$

$$P_{22} = B_{27} - B_{23}\,(B_{37} - B_{34}B_{47}) - B_{24}B_{47},$$

$$P_{23} = -B_{23}\,(B_{38} - B_{34}B_{48}) - B_{24}B_{48},$$

$$P_{24} = B_{23}B_{34}B_{49} - B_{24}B_{49},$$

$$P_{31} = B_{36} - B_{34}B_{46},$$

$$P_{32} = B_{37} - B_{34}B_{47},$$

$$P_{33} = B_{38} - B_{34}B_{48},$$

$$P_{34} = -B_{34}B_{49},$$

$$P_{41} = B_{46},$$

$$P_{42} = B_{47},$$

$$P_{43} = B_{48},$$

$$P_{44} = B_{49}.$$

Ἡ μήτρα $P^{(11!)} = R_{xx}^{-1}$ εἶναι συμμετρική [1]·

---

1) Διὰ νὰ εἶναι, ὡς γνωστόν, μία μήτρα συμμετρικὴ πρέπει $P_{ij} = P_{ji}$. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ μήτρα $P^{(11!)}$ εἶναι συμμετρικὴ λαμβάνομεν ἓν στοιχεῖον της, ἔστω τὸ $P_{41} = B_{46}$. Τοῦτο πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ στοιχεῖον

$$P_{14} = -B_{12}\,(B_{23}B_{34}B_{49} - B_{24}B_{49}) + B_{13}B_{34}B_{49} - B_{14}B_{49}.$$ Πράγματι ἔχομεν

$$B_{46} = (-B_{14} - A_{24}B_{26} - A_{34}B_{36})\,\frac{1}{A_{44}}$$

$$= \left(-B_{14} - A_{24}\frac{A_{26}}{A_{22}} - A_{34}\frac{A_{36}}{A_{33}}\right)\frac{1}{A_{44}}$$

$$= \left(-B_{14} + \frac{A_{24}A_{12}B_{16}}{A_{22}} - A_{34}\,\frac{-A_{13}B_{16} - A_{23}B_{26}}{A_{33}}\right)\frac{1}{A_{44}}$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ διανύσματος b_x τῶν συντελεστῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν χρησιμοποιοῦμεν τὰς πολλαπλασιαστικὰς μήτρας $P^{(i)}$ $(i=9,10,11)$ ὡς ἀκολούθως: Κατ' ἀρχὴν λαμβάνομεν τὸ γινόμενον

$$P^{(8)} R_{xy}^{(7)} = R_{xy}^{(8)} = \begin{bmatrix} B_{15} \\ B_{25} \\ B_{35} \\ B_{45} \end{bmatrix},$$

τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐξ ἀριστερῶν μὲ τὴν μήτραν $P^{(9)}$ δίδει τὴν μήτραν $R_{xy}^{(9)}$, ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς

$$P^{(9)} R_{xy}^{(8)} = R_{xy}^{(9)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{15} \\ B_{25} \\ B_{35} \\ B_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{15} \\ B_{25} \\ B_{35}-B_{34}B_{45} \\ B_{45} \end{bmatrix},$$

ἐν συνεχείᾳ λαμβάνομεν τὴν μήτραν $R_{xy}^{(10)}$ ὑπὸ τῆς κάτωθι σχέσεως

$$P^{(10)} R_{xy}^{(9)} = R_{xy}^{(10)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -B_{23} & -B_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{15} \\ B_{25} \\ B_{35}-B_{34}B_{45} \\ B_{45} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_{15} \\ B_{25} - B_{23}(B_{35}-B_{34}B_{45}) - B_{24}B_{45} \\ (B_{35} - B_{34}B_{45}) \\ B_{45} \end{bmatrix}$$

$$= \left(-B_{14} + \frac{A_{24}A_{12}}{A_{11}A_{22}} + \frac{A_{34}A_{13}}{A_{33}A_{11}} - \frac{A_{34}A_{23}A_{12}}{A_{33}A_{22}A_{11}} \right) \frac{1}{A_{44}}$$

$$= \frac{-A_{12}A_{23}A_{34} + A_{12}A_{24}A_{33} + A_{13}A_{34}A_{22} - A_{14}A_{22}A_{33}}{A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}}$$

$$= \frac{-A_{12}A_{23}A_{34}A_{49}}{A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}} + \frac{A_{12}A_{24}A_{49}}{A_{11}A_{22}A_{44}} + \frac{A_{13}A_{34}A_{49}}{A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}} - \frac{A_{14}A_{49}}{A_{11}A_{44}}$$

$$= -B_{12}(B_{23}B_{34}B_{49} - B_{24}B_{49}) + B_{13}B_{34}B_{49} - B_{14}B_{49},$$

διότι $A_{49} = 1$.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ διὰ κάθε ἄλλο στοιχεῖον αὐτοῦ ἰσχύει ὁ κανὼν τῆς συμμετρίας.

καὶ τελικῶς ἔχομεν τὸ διάνυσμα b_z, τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$b_z = P^{(11)} R^{(10)}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & -B_{14} & -B_{24} & -B_{34} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{15} \\ B_{25} - B_{23}(B_{35} - B_{34}B_{45}) - B_{24}B_{45} \\ B_{35} - B_{34}B_{45} \\ B_{45} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_{15} - B_{12}\, B_{25}B_{23}(B_{35} - B_{34}B_{45}) - B_{24}B_{45} - B_{13}(B_{35} - B_{34}B_{45}) - B_{14}B_{45} \\ B_{25} - B_{23}(B_{35} - B_{34}B_{45}) - B_{24}B_{45} \\ B_{35} - B_{34}B_{45} \\ B_{45} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν μήτραν τῶν διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων $S_{bb} = QR^{-1}_{xx}$ πρέπει προηγουμένως νὰ προσδιορίσωμεν τὴν μήτραν Q. Ἐκ τῆς σχέσεως (13) παρατηροῦμεν ὅτι $R_{yy} = T\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2$ καὶ

$$R'_{xy}\, b_z = A_{15}B_{15} + A_{25}B_{25} + A_{35}B_{35} + A_{45}B_{45}\ (^1). \quad (21)$$

Ἄρα ἡ μήτρα Q διαστάσεων (1×1) εἶναι εἷς "ἀριθμός" (scalar).

---

1) Ἡ ἀπόδειξις αὐτοῦ δίδεται ὡς ἀκολούθως: Ἐκ τοῦ γινομένου τῶν μητρῶν R'_{xy} καὶ b_z, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως (1×4) καὶ (4×1) διαστάσεων εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν

$$R_{15}\,\{ B_{15} - B_{12}\,[\, B_{25} - B_{23}(B_{35} - {}_{31}B_{45}) - B_{21}B_{45}\,] - B_{13}(B_{35} - B_{34}B_{45}) - B_{14}B_{45} \} +$$
$$+ R_{25}\,[\, B_{25} - B_{23}(B_{35} - B_{34}B_{45}) - B_{24}B_{45}\,] + R_{35}(B_{35} - B_{34}B_{45}) + R_{45}B_{45}$$

Ἐν συνεχείᾳ χρησιμοποιοῦντες τὴν ἐξίσωσιν $R_{i5} = A_{i5} + \sum_{k=1}^{K} B_{k5} A_{ki}$, ὅπου διὰ κάθε $i = 1,2,3,4$, ἔχομεν $K = i - 1$, τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα γίνεται

$$A_{15}\,\{ B_{15} - B_{12}\,[\, B_{25} - B_{23}(B_{35} - B_{34}B_{45}) - B_{24}B_{45}\,] - B_{13}(B_{35} - B_{34}B_{45}) - B_{14}B_{45} \} +$$
$$+ (A_{25} + A_{12}B_{15})\,\{ B_{25} - B_{23}(B_{35} - B_{34}B_{45}) - B_{24}B_{45}\,] +$$
$$+ (A_{35} + A_{13}B_{15} + A_{23}B_{25})(B_{35} - B_{34}B_{45}) +$$
$$+ (A_{45} + A_{14}B_{15} + A_{24}B_{25} + A_{34}B_{35})B_{45}$$
$$= A_{15}B_{15} - A_{15}B_{12}\,[\, B_{25} - B_{23}(B_{35} - B_{34}B_{45}) - B_{24}B_{45}\,] - A_{15}B_{13}(B_{35} - B_{34}B_{45}) -$$
$$- A_{15}B_{14}B_{45} + A_{25}B_{25} + A_{12}B_{15}B_{25} - B_{23}(B_{35} - B_{34}B_{45})(A_{25} + A_{12}B_{15}) -$$
$$- B_{24}B_{45}(A_{25} + A_{12}B_{15}) + A_{35}B_{35} + B_{35}(A_{13}B_{15} + A_{23}B_{25} -$$
$$- B_{34}B_{45}(A_{35} + A_{13}B_{15} + A_{23}B_{25}) + A_{45}B_{45} + B_{45}(A_{14}B_{15} + A_{24}B_{25} + A_{34}B_{35}).$$

Εὑρίσκοντες τὴν μήτραν S_{bb} εὐκόλως ἐξ αὐτῆς ἐξάγομεν τὰς μέσας ἀποκλίσεις τετραγώνων τῶν συντελεστῶν b_i, αἱ ὁποῖαι, ὡς γνωστόν, εἶναι αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν στοιχείων τῆς μεγίστης διαγωνίου τῆς S_{bb}.

3. Ἐφαρμογὴ τῆς Μεθόδου διὰ τὴν Ἐκτίμησιν Γραμμικῆς Παλινδρομήσεως n Ἀνεξαρτήτων Μεταβλητῶν

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$y = X\beta + \varepsilon, \tag{22}$$

ὅπου

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{n0} & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix}, \text{ καὶ } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Ἐὰν ἐξαιρέσωμεν τοὺς ὅρους $A_{15}B_{15}$, $A_{25}B_{25}$, $A_{45}B_{45}$ πρέπει οἱ ἐναπομείναντες ὅροι νὰ ἰσοῦνται πρὸς τὸ μηδέν. Τοῦτο πράγματι συμβαίνει διότι

$$- A_{15} [B_{12}B_{25} - B_{12}B_{23} (B_{35} - B_{34}B_{45}) - B_{12}B_{24}B_{45} + B_{13}B_{35} - B_{13}B_{34}B_{45} +$$
$$+ B_{14}B_{45}] + A_{12}B_{15}B_{25} - B_{23} (B_{35} - B_{34}B_{45}) (A_{25} + A_{12}B_{15}) -$$
$$- B_{24}B_{45} (A_{25} + A_{12}B_{15}) + B_{35} (A_{13}B_{15} + A_{23}B_{25}) - B_{34}B_{45} (A_{35} + A_{13}B_{45} +$$
$$+ A_{23}B_{25}) + B_{45} (A_{14}B_{15} + A_{24}B_{25} + A_{34}B_{35}) =$$
$$= \frac{A_{45}A_{14}A_{15}}{A_{44}A_{41}} + \frac{A_{45}A_{24}A_{25}}{A_{44}A_{22}} + \frac{A_{45}A_{34}A_{35}}{A_{44}A_{33}} + \frac{A_{35}A_{13}A_{15}}{A_{33}A_{11}} +$$
$$+ \frac{A_{35}A_{23}A_{25}}{A_{33}A_{22}} - \frac{A_{34}A_{45}A_{35}}{A_{33}A_{44}} - \frac{A_{34}A_{45}A_{13}A_{15}}{A_{33}A_{44}A_{11}} - \frac{A_{34}A_{45}A_{23}A_{25}}{A_{33}A_{44}A_{22}} +$$
$$+ \frac{A_{12}A_{15}A_{25}}{A_{11}A_{22}} - \frac{A_{23}A_{35}A_{25}}{A_{22}A_{33}} - \frac{A_{23}A_{35}A_{12}A_{15}}{A_{22}A_{33}A_{11}} + \frac{A_{23}A_{34}A_{45}A_{25}}{A_{22}A_{33}A_{44}} +$$
$$+ \frac{A_{23}A_{34}A_{45}A_{12}A_{15}}{A_{22}A_{33}A_{44}A_{11}} - \frac{A_{24}A_{45}A_{25}}{A_{22}A_{44}} - \frac{A_{24}A_{45}A_{12}A_{15}}{A_{22}A_{44}A_{11}} - \frac{A_{15}A_{12}A_{15}}{A_{11}A_{22}} +$$
$$+ \frac{A_{15}A_{12}A_{23}A_{35}}{A_{11}A_{22}A_{33}} - \frac{A_{15}A_{12}A_{23}A_{34}A_{45}}{A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}} + \frac{A_{15}A_{12}A_{24}A_{45}}{A_{11}A_{22}A_{44}} -$$
$$- \frac{A_{15}A_{13}A_{35}}{A_{11}A_{33}} + \frac{A_{15}A_{13}A_{34}A_{45}}{A_{11}A_{33}A_{44}} - \frac{A_{15}A_{14}A_{45}}{A_{11}A_{44}} = 0. \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Κατ' ἀρχὴν εὑρίσκομεν τὰς μήτρας $X'X$ καὶ $X'y$, αἱ ὁποῖαι εἶναι $(n x n)$ καὶ $(n x 1)$ διαστάσεων ἀντιστοίχως. Ἐν συνεχείᾳ, χρησιμοποιοῦντες τὰς σχέσεις (4) – (9), εὑρίσκομεν τὰς μήτρας R_{xx} καὶ R_{xy}, αἱ ὁποῖαι εἶναι $(n x n)$ καὶ $(n x 1)$ διαστάσεων ἀντιστοίχως. Ἐξ αὐτῶν σχηματίζομεν τὴν γενικὴν μήτραν

$$W = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & I \\ P^{(2n!)} R_{xx} & P^{(2n!)} R_{xy} & P^{(2n!)} I \\ b_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{xx}^{-1} \\ S_{bb} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

ὅπου I εἶναι ἡ $(n x n)$ μοναδιαία μήτρα, $P^{(2n!)} = P^{(2n)} P^{(2n-1)} \dots P^{(2)} P^{(1)}$, $P^{(2n!)} R_{xx}$ καὶ $P^{(2n!)} I$ εἶναι τριγωνικαὶ μῆτραι $(n x n)$ καὶ $(n x 1)$ διαστάσεων ἀντιστοίχως, $b_z' = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ εἶναι τὸ διάνυσμα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, R_{xx}^{-1} εἶναι ἡ ἀντίστροφος μήτρα τῆς R_{xx}, ἡ ὕπαρξις τῆς ὁποίας προϋποθέτει ὅτι ἡ μήτρα R_{xx} πρέπει νὰ εἶναι ὁμαλὴ ἤτοι $|R_{xx}| \neq 0$, καὶ τέλος $S_{bb} = Q R_{xx}^{-1}$, ὅπου ἡ μήτρα Q δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως (13) καὶ εἰς τὴν ὁποίαν ἔχομεν

$$R_{xy}' b_z = \sum_{i=1}^{n} A_{i(n+1)} B_{i(n+n)}, \ (i = 1,2, \dots, n).$$

Ἑπομένως εἰς τὴν γενικὴν μήτραν W τὰ στοιχεῖα – μῆτραι αὐτῆς κατέχουν τὰς ἑξῆς γραμμὰς καὶ στήλας:

R_{xx} τὰς n πρώτας γραμμὰς καὶ n πρώτας στήλας,

R_{xy} τὰς n πρώτας γραμμὰς καὶ τὴν $(n + 1)$ στήλην,

I τὰς n πρώτας γραμμάς, καὶ τὰς στήλας ἀπὸ $(n + 2)$ ἕως $(2n + 1)$ καὶ n τὸ πλῆθος,

$P^{(2n!)} R_{xx}$ τὰς c_1 γραμμὰς καὶ n πρώτας στήλας, ὅπου c_1 αἱ γραμμαὶ ἀπὸ $(n + 1)$ ἕως $(2n)$ καὶ n τὸ πλῆθος,

$P^{(2n!)} R_{xy}$ τὰς c_1 γραμμὰς καὶ τὴν $(n + 1)$ στήλην,

$P^{(2n!)} I$ τὰς c_1 γραμμὰς καὶ τὰς στήλας ἀπὸ $(n + 2)$ ἕως $(2n + 1)$, καὶ n τὸ πλῆθος,

R_{xx}^{-1} τὰς c_2 γραμμὰς καὶ τὰς στήλας ἀπὸ $(n + 2)$ ἕως $(2n + 1)$, n τὸ πλῆθος καὶ ὅπου c_2 αἱ ἀμέσως ἑπόμεναι γραμμαὶ τῶν c_1, n τὸ πλῆθος, καὶ

S_{bb} τὰς c_3 γραμμὰς καὶ τὰς n πρώτας στήλας, ὅπου c_3 αἱ ἀμέσως ἑπόμεναι γραμμαὶ τῶν c_2, n τὸ πλῆθος.

Διὰ νὰ ἐξετάσωμεν τὴν μορφὴν τῶν πολλαπλασιαστικῶν μητρῶν $P^{(i)}$, ὅπου $i = 1,2, \ldots, n, \ldots, 2n, (2n+1), \ldots, (3n-1)$, διακρίνομεν αὐτὰς εἰς δύο ὑποσύνολα:

α) Τὸ ὑποσύνολον τῶν $P^{(i)}$, ὅπου $i = 1,2, \ldots, 2n$, αἱ ὁποῖαι πολλαπλασιαζόμεναι σταδιακῶς μὲ τὰς μήτρας R_{xx} καὶ I δίδουν τριγωνικὰς μήτρας $P^{(2n)} R_{xx}$ καὶ $P^{(2n)} I$ ἀντιστοίχως, ἐνῷ πολλαπλασιαζόμεναι μὲ τὸ διάνυσμα R_{xy} δίδουν τὸ διάνυσμα

$$P^{(2n)} R_{xy} = \begin{bmatrix} B_{1(n+1)} \\ B_{2(n+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{n(n+1)} \end{bmatrix} . \tag{24}$$

β) Τὸ ὑποσύνολον τῶν $P^{(i)}$, ὅπου $i = (n+1), (2n+2), \ldots, (3n-1)$, αἱ ὁποῖαι πολλαπλασιαζόμεναι σταδιακῶς μὲ τὴν τριγωνικὴν μήτραν $P^{(2n)} R_{xx}$ δίδουν τελικῶς τὴν μοναδιαίαν μήτραν I.

Ἑπομένως τὸ γινόμενον ὅλων τῶν $P^{(i)}$ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀντίστροφον μήτραν R_{xx}^{-1}, διότι $P R_{xx} = I$, ὅπου $P = P^{(3n-1)} P^{(3n-2)} \ldots P^{(2n)} \ldots P^{(2)} P^{(1)}$.

Ἐν συνεχείᾳ χρησιμοποιοῦντες πρὸς ἁπλούστευσιν τῶν στοιχείων τῶν μητρῶν αὐτῶν τὰς σχέσεις (14) καὶ (15), διακρίνομεν τὸ πρῶτον ὑποσύνολον τῶν $P^{(i)}$ εἰς τρία μερικώτερα ὑποσύνολα: α1) $\{P^{(1)}\}$, α2) $\{P^{(2i)}\}$ καὶ α3) $\{P^{(2i+1)}\}$. Ἡ $P^{(1)}$ εἶναι ἡ $(n \times n)$ μοναδιαία μήτρα. Αἱ μῆτραι $P^{(2i)}$ ὁμοιάζουν πρὸς τὴν $(n \times n)$ μοναδιαίαν μήτραν ἐκτὸς τοῦ διαγωνίου στοιχείου τῆς i γραμμῆς, τὸ ὁποῖον εἶναι τῆς μορφῆς $(1/A_{ii})$, διὰ $i = 1,2, \ldots, n$, κατὰ τὸ στάδιον (2i). Τέλος, αἱ μῆτραι $P^{(2i+1)}$ εἶναι $(n \times n)$ κάτωθεν τριγωνικαὶ ἔχουσαι στοιχεῖα μόνον εἰς τὴν γραμμὴν j, τὰ ὁποῖα εἶναι τῆς μορφῆς $-A_{ij}$, τῶν $-A_{ij} = 0$ διὰ $i < j$ κατὰ τὸ στάδιον $(2i+1)$ $(j = 2,3, \ldots, n,\ i = 1,2 \ldots, n-1)$. Ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων $-A_{ij}$ εἰς τὴν j γραμμὴν εἶναι ἴσος πρὸς $(j-1)$, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται ἐπίσης πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν δεικνύοντα τὸ στάδιον ὅπου ἐργαζόμεθα μεῖον τὸν ἀριθμὸν τὸν δεικνύοντα τὴν γραμμήν, δηλ.. $[(2i+1)-j]$. Ἑπομένως ἔχομεν $(j-1) = [(2i+1)-j]$, ἄρα $j = (i+1)$ – ἐδῶ βεβαίως ὁ i εἶναι ἕνας σταθερὸς ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ἔχει προκαθορισθῆ διὰ νὰ δεικνύῃ τὸ στάδιον $(2i+1)$ ὅπου ἐργαζόμεθα. Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ἀνωτέρω πολλαπλασιαστικὰς μήτρας $P^{(2i+1)}$, αἱ μῆτραι αἱ ὁποῖαι συνιστοῦν τὸ δεύτερον ὑποσύνολον εἶναι ἄνωθεν τριγωνικαί, $(n \times n)$ διαστάσεων ἔχουσαι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν στοιχεῖα μόνον εἰς τὴν γραμμὴν k, ὅπου $k = n-1, n-2, \ldots, 3,2,1$. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι τῆς μορφῆς $(-B_{k\lambda})$, ὅπου διὰ κάθε k γραμμὴν ἔχομεν τὰς στήλας $\lambda = n, n-1, n-2, \ldots, 3,2$, τῶν $(-B_{k\lambda})$

ἴσων πρὸς τὸ μηδὲν διὰ $\lambda < k$. Ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων ἐν προκειμένῳ ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν λ μεῖον τὸν ἀριθμὸν k, ὁ ὁποῖος δεικνύει τὴν γραμμὴν τῆς ὁποίας ἐνδιαφερόμεθα νὰ καθορίσωμεν τὰ στοιχεῖα. Ὁ δὲ ἀριθμὸς k δίδεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος δεικνύει τὸ στάδιον β ὅπου ἐργαζόμεθα, ἀρχίζοντες ὅμως νὰ μετρῶμεν τὰς γραμμὰς τῆς μήτρας ἐκ τῆς προτελευταίας τοιαύτης.

Ἐξετάζοντες τὴν γενικὴν μορφὴν τῆς (συμμετρικῆς) ἀντιστρόφου μήτρας R_{xx}^{-1} παρατηροῦμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα ταύτης εἰς ἑκάστην γραμμὴν ἀκολουθοῦν τοὺς κάτωθι κανόνας, ἀρχίζοντες ἐκ τῆς τελευταίας γραμμῆς:

$$\alpha_{ni} = B_{ni} \text{ διὰ } i = n+2, n+3, \ldots, 2n+1 \, (^1). \qquad (25)$$

$$\alpha_{(n-1)i} = B_{(n-1)i} - B_{(n-1)n}\,\alpha_{ni}, \qquad (26)$$

$$\alpha_{(n-2)i} = B_{(n-2)i} - B_{(n-2)(n-1)}\,\alpha_{(n-1)i} - B_{(n-2)n}\,\alpha_{ni} \qquad (27)$$

$$\alpha_{(n-3)i} = B_{(n-3)i} - B_{(n-3)(n-2)}\,\alpha_{(n-2)i} - B_{(n-3)(n-1)}\,\alpha_{(n-1)i} - B_{(n-3)n}\,\alpha_{ni} \qquad (28)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{1i} = B_{1i} - B_{12}\,\alpha_{2i} - B_{13}\,\alpha_{3i} - \cdots - B_{1(n-1)}\,\alpha_{(n-1)i} - B_{1n}\,\alpha_{ni}. \qquad (29)$$

Τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας $P^{(2n!)} R_{xy}$ εἶναι τῆς μορφῆς $B_{i(n+1)}$, ὅπου $i = 1, 2, \ldots, n$, καὶ $(n+1)$ δεικνύει τὴν στήλην εἰς τὴν γενικὴν μήτραν W. Τέλος, αἱ συντεταγμέναι τοῦ διανύσματος $b_z = R_{xx}^{-1} R_{xy}$, ἀρχίζοντες ἐκ τῆς τελευταίας γραμμῆς ἀκολουθοῦν τοὺς κάτωθι κανόνες:

$$b_{nk} = B_{nk} \qquad (30)$$

$$b_{(n-1)k} = B_{(n-1)k} - B_{(n-1)n}\,b_{nk} \qquad (31)$$

$$b_{(n-2)k} = B_{(n-2)k} - B_{(n-2)(n-1)}\,b_{(n-1)k} - B_{(n-2)n}\,b_{nk} \qquad (32)$$

$$b_{(n-3)k} = B_{(n-3)k} - B_{(n-3)(n-2)}\,b_{(n-2)k} - B_{(n-3)(n-1)}\,b_{(n-1)k} - B_{(n-3)n}\,b_{nk} \qquad (33)$$

$$\vdots$$

$$b_{1k} = B_{1k} - B_{12}\,b_{2k} - B_{13}\,b_{3k} - \cdots - B_{1(n-2)}\,b_{(n-2)k} - B_{1(n-1)}\,b_{1(n-1)k} - B_{1n}\,b_{nk}, \qquad (34)$$

1) Σημειωτέον ὅτι ἐν προκειμένῳ ὁ δείκτης i ἀναφέρεται εἰς τὰς στήλας τῆς γενικῆς μήτρας W.

ὅπου n εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν συντεταγμένων καὶ k δεικνύει τὴν στήλην $(n+1)$ εἰς τὴν γενικὴν μήτραν W, ἐνῷ τὰ στοιχεῖα B_{nk}, $B_{(n-1)k}$, $B_{(n-2)k}, \ldots, B_{2k}, B_{1k}$ ἀποτελοῦν τὰς γραμμὰς τῆς μήτρας $P^{(2n!)} R_{xy}$.

Γνωρίζοντες ἑπομένως τὴν μορφὴν ὅλων τῶν στοιχείων τῆς γενικῆς μήτρας W δυνάμεθα νὰ λύσωμεν οἱανδήποτε πολλαπλῆν γραμμικὴν παλινδρόμησιν.

4. Σύγκρισις τῆς Μεθόδου τῶν Πολλαπλασιαστικῶν Μητρῶν καὶ τῆς Μεθόδου τῶν Gauss – Doolittle [1].

Εἶναι σκόπιμον πρὶν ὑπεισέλθομεν εἰς τὴν σύγκρισιν τῶν δύο μεθόδων νὰ περιγράψωμεν συνοπτικῶς τὴν μέθοδον Gauss - Doolittle, ὡς αὕτη ἀναπτύσσεται ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ Goldberger. Πρὸς τοῦτο θὰ χρησιμοποιήσωμεν μίαν γραμμικὴν παλινδρόμησιν τεσσάρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Πρὸς καλυτέραν παρουσίασιν τῆς Gauss – Doolittle μεθόδου ὁ καθηγητὴς Goldberger δίδει ἕνα πίνακα, ὁ ὁποῖος ἔχει $R_1, R_2, R_3, R_4, A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, C_1, \ldots, C_{12}$ γραμμὰς καὶ ἕνδεκα στήλας.

Εἰς τὰς πρώτας γραμμὰς R_1, R_2, R_3, καὶ R_4 τοποθετοῦνται αἱ μῆτραι τῶν ῥοπῶν M_{xx}, M_{xy}, I ὅπου M_{xx} κατέχει τὰς πρώτας τέσσαρας στήλας, M_{xy} τὴν πέμπτην στήλην καὶ I τὰς στήλας, ἀπὸ 6 ἕως καὶ 9. Ἡ στήλη 10 δίδει τὰ ἀθροίσματα τῶν γραμμῶν. Αἱ γραμμαὶ A_i καὶ B_i σχηματίζονται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μητρῶν τῶν ῥοπῶν ἐφαρμόζοντες τοὺς κάτωθι κανόνας :

$$B_{1j} = \frac{A_{1j}}{A_{11}}, \tag{35}$$

$$B_{2j} = \frac{A_{2j}}{A_{22}}, \tag{36}$$

$$B_{3j} = \frac{A_{3j}}{A_{33}}, \tag{37}$$

$$B_{4j} = \frac{A_{4j}}{A_{44}}, \tag{38}$$

$$A_{2j} = R_{2j} - A_{12} B_{1j}, \tag{39}$$

$$A_{3j} = R_{3j} - A_{13} B_{1j} - A_{23} B_{2j}, \tag{40}$$

$$A_{4j} = R_{4j} - A_{14} B_{1j} - A_{24} B_{2j} - A_{34} B_{3j}. \tag{41}$$

1) Ἡ Gauss–Doolittle μέθοδος παρουσιάζεται ἐν προκειμένῳ ὡς διετυπώθη ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ A. S. Goldberger. Πρὸς τοῦτο βλέπε, Arthur Goldberger, *Econometric Theory*, New York, Wiley, 1964, σελ. 182 – 192.

Ἡ στήλη 11 χρησιμεύει πρὸς ἔλεγχον τῶν ὑπολογισμῶν. Τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς C_0 δίδονται βάσει τῶν ἐξισώσεων

$$C_{04} = B_{45}, \tag{42}$$

$$C_{03} = B_{35} - B_{34}\, C_{04}, \tag{43}$$

$$C_{02} = B_{25} - B_{24}\, C_{04} - B_{23}\, C_{03}, \tag{44}$$

$$C_{01} = B_{15} - B_{14}\, C_{04} - B_{13}\, C_{03} - B_{12}\, C_{02}. \tag{45}$$

Τὰ στοιχεῖα ταῦτα δίδουν τὰς ἐκτιμήσεις τῶν συντελεστῶν b_i, $(i = 1,2,3,4)$.

Μεταξὺ τῶν γραμμῶν C_1 ἕως καὶ C_4 καὶ τῶν στηλῶν 6 ἕως καὶ 9 σχηματίζεται ἡ ἀντίστροφος μήτρα M_{xx}^{-1}, τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα τῶν γραμμῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν κάτωθι κανόνων :

$$C_{4j} = B_{4j}\,, \tag{46}$$

$$C_{3j} = A_{38}\, B_{3j} + A_{48}\, B_{4j}\,, \tag{47}$$

$$C_{2j} = A_{27}\, B_{2j} + A_{37}\, B_{3j} + A_{47}\, B_{4j}\,, \tag{48}$$

$$C_{1j} = A_{16}\, B_{1j} + A_{26}\, B_{2j} + A_{36}\, B_{3j} + A_{46}\, B_{4j}\,. \tag{49}$$

Εἰς τὰς ἑπομένας γραμμὰς C_5, C_6 καὶ C_7 καὶ εἰς τὴν στήλην 5 τοποθετοῦνται ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοὶ $b_z' M_{xy} = TSSR\ (= N\Sigma(\hat{y}-\bar{\hat{y}})^2)$, $M_{yy} = TSST\ (= T\Sigma\ y - \bar{y}\ )^2)$ καὶ $TSSE = TSST - TSSR$ ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ὁ συντελεστὴς προσδιορισμοῦ $R^2 = TSSR/TSST$ καὶ $Ts^2 = TSSE/(T-K-1)$. Ὁ "ἀριθμὸς" (scalar) $b_z' M_{xy} = TSSR$ εὑρίσκεται χρησιμοποιῶν τὴν ἐξίσωσιν

$$TSSR = A_{15}\, B_{15} + A_{25}\, B_{25} + A_{35}\, B_{35} + A_{45}\, B_{45}, \tag{50}$$

ὅπου T εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων καὶ K ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Τέλος, εἰς τὰς γραμμὰς C_8 ἕως καὶ C_{11} καὶ εἰς τὰς στήλας 1 ἕως καὶ 4 ἀπεικονίζεται ἡ μήτρα τῶν διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων $S_{bb} = (\ Ts^2\ )\ M_{xx}^{-1}$, τῆς ὁποίας αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν στοιχείων τῆς μεγίστης διαγωνίου της δίδουν τὰς μέσας ἀποκλίσεις τετραγώνων τῶν συντελεστῶν b_i, καὶ ἀποτελοῦν τὴν C_{12} γραμμὴν τοῦ πίνακος.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως μεταξὺ τῶν δύο μεθόδων παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ μῆτραι M_{xx},καὶ M_{xy} ἔχουν ὑπολογισθῆ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πρὸς τὰς μήτρας R_{xx} καὶ R_{xy} καὶ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως. Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ γραμμαὶ A_i καὶ B_i ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ στάδια α τῆς μεθόδου τῶν πολλαπλασιαστικῶν μητρῶν. Αἱ μῆτραι $P^{(2n!)}\, R_{xx}$, $P^{(2n!)}\, R_{xy}$ καὶ $P^{(2n!)}\ I$ τῆς γενικῆς μήτρας W μᾶς δίδουν τὰς γραμμὰς A_i καὶ B_i προοδευτικῶς κατὰ τὰ διάφορα στάδια. Αἱ γραμμαὶ κάτωθι τῆς μοναδιαίας μήτρας εἰς τὸν πίνακα τοῦ Goldberger δίδονται ὡς ἀκολούθως: Ἡ μήτρα $P^{(2)} P^{(1)}$ δίδει τὴν γραμμὴν B_{1j} (ὅπου $j = 6,7,8,9$), ἡ μήτρα $P^{(4)}$ δίδει τὰς γραμμὰς B_{1j} καὶ B_{2j}, ἡ μήτρα $P^{(6)}$ δίδει τὰς γραμμὰς B_{1j}, B_{2j} καὶ B_{3j}, καὶ τέλος ἡ μήτρα $P^{(8)}$ δίδει τὴν γραμμὴν B_{4j} καὶ ὅλας τὰς προηγουμένας.

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ διανύσματος b_z ἂν καὶ ἐγένετο διαφορετικῶς κατὰ τὴν μέθοδον τῶν πολλαπλασιαστικῶν μητρῶν, ἐν τούτοις, παρατηροῦμεν ὅτι, οἱ κανόνες οἱ διέποντες τὰς συντεταγμένας αὐτοῦ δὲν διαφέρουν ἀπὸ τοὺς κανόνας τοὺς διέποντας τὴν γραμμὴν C_0, ἡ ὁποία δίδει τοὺς συντελεστὰς b_i.

Οἱ κανόνες, οἱ ὁποῖοι ἐχρησιμοποιήθησαν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν πολλαπλασιαστικῶν μητρῶν διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς ἀντιστρόφου μήτρας R^{-1}_{xx} διαφέρουν ἐκείνων, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων προκύπτουν κατὰ τὴν Gauss—Doolittle μέθοδον αἱ γραμμαὶ C_1, C_2, C_3, C_4, διότι εἶναι ἐκπεφρασμένοι μόνον εἰς ὅρους B_{ij}. Τέλος, ἂν καὶ ἀκολουθῶμεν διαφορετικὸν τρόπον ἐκτιμήσεως τοῦ ἀριθμοῦ $TSSR = b'_z R_{xy}$ καταλήγομεν εἰς τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα χρησιμοποιοῦντες τὴν σχέσιν $R'_{xy}\ b_z = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Gamaletsos Theodore, «A Martix Multiplication Interpretation of Gauss-Doolittle Computational Schemes for Multiple Regression», Systems Formulation, Methodology and Policy Workshop Paper 6613, Social Systems Research Institute, University of Wisconsin, 1966.

Γκαμαλέτσος Θεόδωρος, Οἰκονομετρία Ἀθῆναι 1972, σελ. 100–108.

Goldberger Arthur, Econometric Theory, New York, Willey, 1964, σελ. 182–192.

Hadley G., Linear Algebra, Reading: Addison – Wesley, Κεφ. 5.