ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΜΠΕΙΡΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ [1]

ΤΟΥ κ. ΙΩΑΝΝΟΥ Α. ΣΑΚΑΛΗ
Στατιστικοῦ - Οἰκονομολόγου

Ἡ ἐπὶ τοῦ Πληθυσμοῦ βάσει τοῦ Δείγματος στατιστικὴ ἔρευνα, περιλαμβάνουσα τὰς τέσσαρας φάσεις (Συλλογὴ Ἀκατεργάστων Δεδομένων, Ἐπεξεργασία τῶν συστηματοποιηθέντων Δεδομένων, Παρουσίασις τῶν Στατιστικῶν Δεδομένων καὶ Στατιστικὴ Ἐπαγωγὴ ἢ Ἀνάλυσις) ἀπασχολεῖ τὸν Περιγραφικὸν Στατιστικὸν διὰ τὰς τρεῖς πρώτας φάσεις καὶ τὸν Μαθηματικὸν Στατιστικὸν διὰ τὴν τελευταίαν.

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην θὰ ἐξετασθῇ τὸ κυριώτερον ἐργαλεῖον ἐρεύνης τοῦ Περιγραφικοῦ Στατιστικοῦ, ἡ Ἐμπειρικὴ Κατανομὴ Συχνοτήτων, ὡς κατωτέρω:

1. Ἔννοια καὶ περιεχόμενον Ἐμπειρικῶν Κατανομῶν

Ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν ὡς Ἐμπειρικαὶ Κατανομαί, ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὰς Θεωρητικὰς Κατανομάς, νοοῦνται αἱ ἐκ παρατηρήσεως τοιαῦται τόσον ἐπὶ στατικῶν καὶ κινητικῶν Πληθῶν, ὅσον καὶ ἐπὶ Πληθῶν κατανεμομένων ἐν τῷ χώρῳ. Ὑπὸ τὴν στενὴν ὅμως ἔννοιαν, ἥτις καὶ ἐνδιαφέρει ἡμᾶς διὰ τὴν ὑπ' ὄψιν διαπραγμάτευσιν, αἱ Ἐμπειρικαὶ Κατανομαί, τόσον αἱ Συνεχεῖς ὅσον καὶ αἱ Ἀσυνεχεῖς, ἀναφέρονται ἀποκλειστικῶς εἰς στατικὰ πλήθη. Ἀκολουθεῖ κατωτέρω περιληπτικὴ θεώρησις τῆς βασικῆς δομῆς τῆς Κατανομῆς Συχνότητος.

2. Προϋποθέσεις Κατανομῆς Συχνοτήτων

α. Ἡ Κατανομὴ Συχνοτήτων ἐφαρμόζεται ἐπὶ ἀριθμοῦ παρατηρήσεων ἐν τῷ συνόλῳ αὐτῶν ἄνω τῶν 100 (κατά τινας συγγραφεῖς καὶ ἄνω τῶν 30).

β. Ἡ Κατανομὴ Συχνοτήτων ἐν τῇ πρακτικῇ δέον νὰ περιλαμβάνῃ ἀπὸ ὀκτὼ μέχρις εἴκοσι τὸ μέγιστον Τάξεις.

γ. Τὰ διαστήματα τάξεως δέον νὰ εἶναι ἰσομεγέθη, ἐξαιρέσει τῶν Κατανομῶν τῆς Φορολογικῆς Στατιστικῆς, ὅπου παρουσιάζονται ἄνισα πλάτη

---

1) Ὅρα καὶ Ι. Σακαλῆ «Εἰσαγωγὴ εἰς τὰς Στατιστικὰς Σειράς» (1972).

εἰσοδημάτων. Εἰς τὰς λοιπὰς περιπτώσεις, ἐφ' ὅσον θὰ ὑπάρξωσιν ἄνισα διαστήματα τάξεων, χωρίζομεν τὰς τάξεις εἰς δύο ἢ τρεῖς ὁμάδας μὲ ἴσα ταξικὰ ἀνύσματα καὶ ἂν καὶ τοῦτο δὲν εἶναι ἐφικτὸν ἐργαζόμεθα μὲ τὴν Ἄμεσον Μέθοδον Ἀρχικῶν Δεδομένων.

Τὸ Διάστημα Τάξεως εἶναι ΣΤΑΘΕΡΟΝ, δηλ. πάντοτε ἴσον, καὶ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΝ, ὅταν ἀφήνεται ἀνοικτὸν εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος τῆς Σειρᾶς π.χ. κάτω τῶν 20, 90 ἐτῶν καὶ ἄνω κλπ.

3. Εἴδη Κατανομῶν Συχνοτήτων

α) Ἁ π λ ῆ (Simple) : Εἶναι τὸ συνηθέστερον ἀπαντώμενον εἶδος Κατανομῶν Συχνοτήτων.

β) Λ ο γ α ρ ι θ μ ι κ ή (Logarithmic) : Εἶναι Κατανομὴ Συχνότητος, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ λογάριθμος τῆς Μεταβλητῆς ἢ ἁπλῆ τις γραμμικὴ συνάρτησις ταύτης κατανέμεται κανονικῶς (Κατανομὴ Galton - MC Allister (1879).

γ) Ἀ θ ρ ο ι σ τ ι κ ή (Cumulative) : Εἶναι Κατανομὴ μὲ τὰς ἀπολύτους συχνότητας συσσωρευθείσας καὶ ἐμφανιζομένη ὑπὸ τὰς μορφὰς «Ὀλιγώτερον ἢ» καὶ «Περισσότερον ἢ».

Τόσον εἰς τὰ συνεχῆ ὅσον καὶ τὰ ἀσυνεχῆ πλήθη ἡ ἀκραία τεταγμένη τῆς Ἁψῖδος τῶν Ἀθροιστικῶν Κατανομῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα.

δ) Μ ο ν ό τ υ π ο ς (Unimodal) : Ὅταν ἡ Κατανομὴ παρουσιάζη ἓν μέγιστον (ἐπικρατοῦσα τιμή).

ε) Δ ί τ υ π ο ς (Bimodal) : Ὅταν ἡ Κατανομὴ παρουσιάζη δύο μέγιστα.

στ) Π ο λ ύ τ υ π ο ς (Multimodal) : Ὅταν ἡ Κατανομὴ παρουσιάζη πλείονα τῶν δύο μέγιστα.

ζ) Ἀ ν ο ι κ τ ή (Open) : Ὅταν ἐλλείπη εἴτε τὸ Ἔλασσον Ὅριον τῆς πρώτης Τάξεως εἴτε τὸ Μεῖζον Ὅριον τῆς τελευταίας Τάξεως ἢ καὶ ἀμφότερα.

η) Κ λ ε ι σ τ ή (Closed) : Ὅταν ἐν τῇ σειρᾷ τῶν μεγεθῶν ὑφίσταται τόσον τὸ Ἔλασσον Ὅριον τῆς πρώτης Τάξεως ὅσον καὶ τὸ Μεῖζον Ὅριον τῆς τελευταίας Τάξεως.

θ) Ἀ σ υ ν ε χ ή ς (Discrete) : Ὅταν ἡ ὑπ' ὄψιν ἰδιότης λαμβάνη μόνον ἀκεραίας διαδοχικὰς τιμάς, ἐκφραζομένας κατά τινα μονάδα μετρήσεως.

ι) Σ υ ν ε χ ή ς (Continuous) : Ὅταν ἡ ὑπ' ὄψιν ἰδιότης, ἐμφανιζομένη ποσοτικῶς κατά τινα μονάδα μετρήσεως, δύναται νὰ λάβη ἁπάσας τὰς τιμὰς ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης μέχρι τῆς μεγίστης, ἄνευ διακοπῆς τινος.

4. Μορφαὶ Κατανομῶν Συχνοτήτων

α) ΣΥΝΗΘΕΙΣ

1) Κ ω δ ω ν ο ε ι δ ή ς ἢ Σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ή ἢ Μ ε σ ό κ υ ρ τ ο ς (Bell Shaped or Symmetrical or Mesokurtic) : Εἶναι ἡ κλασσικὴ περίπτωσις κατὰ τὴν

ὁποίαν αἱ ἐκ τοῦ κεντρικοῦ Μεγίστου ἰσαπέχουσαι παρατηρήσεις ἔχουσι τὴν αὐτὴν συχνότητα.

Ἡ Κανονικὴ Καμπύλη ἀποτελεῖ τὸ πλέον γνωστὸν παράδειγμα Συμμετρικῆς Κατανομῆς.

2) Ἀσύμμετρος (Skewed): Δεξιὰ Ἀσύμμετρος (Right or Positively skewed) καὶ Ἀριστερὰ Ἀσύμμετρος (Left or Negatively skewed): Ὅταν ἡ οὐρὰ τῆς Καμπύλης εἰς τὴν μίαν πλευρὰν (δεξιὰν ἢ ἀριστερὰν) τοῦ κεντρικοῦ Μεγίστου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἑτέρας.

3) Κορυφωμένη ἢ Λεπτόκυρτος (Peaked or Leptokurtic): Ἡ τιμὴ τῆς αἰχμηρότητος δὲν δύναται νὰ κατέλθῃ κάτω τοῦ 4 λόγῳ τῆς ὑφισταμένης ἀνισότητος τοῦ Liapounoff $\mu_4 \geqq \mu_2^2$.

4) Ἐπιπεδωμένη ἢ Πλατύκυρτος (Flattened or Platykurtic): Εἰς τὴν τελείως Συμμετρικὴν Καμπύλην οἱ $\bar{X}$, M_e, M_o συμπίπτουσι, ὁ Συντελεστὴς Ἀσυμμετρίας εἶναι μηδέν, ὁ Συντελεστὴς Κυρτώσεως εἶναι ἴσος πρὸς 6 καὶ τὰ Τεταρτημόρια (Q_1 Q_3) εἶναι ἰσαπέχοντα ἀπὸ τοῦ M_e.

β) ΑΣΥΝΗΘΕΙΣ

1) Σχήματος U: Ὅταν τὰ Μέγιστα ἐμφανίζωνται εἰς ἀμφότερα τὰ τέρματα.

2) Σχήματος j: Ὅταν τὸ Μέγιστον ἐμφανίζεται εἰς τὸ ἓν μόνον τέρμα.

3) Σύνθετος: Προκύπτουσα ἐκ τῆς συνθέσεως δύο ἢ περισσοτέρων μορφῶν. Ἡ ἀνάλυσις τῆς Συνθέτου Κατανομῆς εἰς τὰς συνιστώσας αὐτὴν Κατανομὰς εἶναι συνήθως ἀρκετὰ δυσχερής.

4) Κόλουρος (Truncated): Εἶναι ἡ ἔχουσα τὸ ἀντίστοιχον γεωμετρικὸν σχῆμα τοῦ κολούρου κώνου ἢ τῆς κολούρου πυραμίδος.

Αἱ Κόλουροι Κατανομαὶ δύνανται νὰ θεωρηθῶσι κατὰ τὸ πλεῖστον ὡς τμήματα τῶν μνημονευθεισῶν ἤδη διαφόρων μορφῶν.

5. Χαρακτηριστικὰ Κατανομῆς Συχνοτήτων

α) Κεντρικὴ Τάσις (Central Tendency)

Δεδομένα φυσικά, οἰκονομικὰ καὶ κοινωνικά, βασιζόμενα ἐπὶ παρατηρήσεων, δεικνύουσι μίαν σαφῶς διακρινομένην Τάσιν νὰ συνενῶνται εἰς ὁμάδας πέριξ δοθέντος σημείου. Ἡ ὁμαδικὴ αὐτὴ συνένωσις προκαλεῖ μίαν κορυφήν, ἀπαντωμένην πάντοτε εἰς Κατανομὰς Συχνοτήτων. Ἡ ἐντόπισις λοιπὸν τῆς κορυφῆς ἢ σημείου τῆς Κεντρικῆς Τάσεως ἀποτελεῖ τὸ πρῶτον χαρακτηριστικόν, τὸ ὁποῖον δέον νὰ μετρηθῇ.

Ὁ ἀνθρώπινος νοῦς ἀδυνατῶν νὰ σχηματίσῃ σαφῆ ἀντίληψιν ἑνὸς φαινομένου, ὅταν τὰ ἀφορῶντα τοῦτο δεδομένα εἶναι πολυάριθμα, τείνει νὰ ἀντικαταστήση ταῦτα διὰ μερικῶν μεμονωμένων τιμῶν, αἱ ὁποῖαι κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἐκφράζουσι τὰ κύρια χαρακτηριστικὰ τῶν δεδομένων τούτων. Ἡ Στατιστικὴ Μεθοδολογία διδάσκει πῶς θὰ εὕρωμεν μίαν τιμήν, ἡ ὁποία ν' ἀντιπροσωπεύη κατὰ τὸν καλύτερον δυνατὸν τρόπον τὴν συνολικὴν μᾶζαν τῶν δεδομένων καὶ ἡ εὑρεθησομένη τιμὴ εἶναι ὁ Μέσος Ὅρος. Εἶναι περισσότερον ἄξιον σημασίας νὰ ἔχωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἀντιπροσωπευτικὸν τῆς Ὁμάδος παρὰ νὰ προσπαθῶμεν νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν ἔννοιαν ὁλοκλήρου Σειρᾶς. Περαιτέρω ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν εἶναι πραγματικὸς ἀλλὰ πλασματικὸς ἀριθμός, διὰ τὴν περιγραφὴν τῆς μέσης καταστάσεως τῶν δεδομένων.

Ὁ Μέσος Ὅρος εἶναι 1) Τυπικὴ τιμή, τείνουσα νὰ συνοψίση ἢ περιγράψη τὸ πλῆθος τῶν δεδομένων 2) Χρησιμεύει ὡς βάσις ὑπολογισμοῦ ἢ ἐκτιμήσεως τῶν ἀκραίων ἢ ἀσυνήθων τιμῶν 3) Συντελεῖ εἰς τὴν σύγκρισιν δύο ἢ πολυπληθῶν ὁμάδων δεδομένων καὶ 4) Ἀποτελεῖ μέτρον ἐντοπισμοῦ τῆς Κεντρικῆς Τάσεως.

Κεντρικὴ Τάσις ὅθεν καλεῖται ἡ ροπὴ τῶν ἀκατεργάστων δεδομένων ὅπως συγκεντρώνωνται πέριξ μιᾶς τιμῆς ἐν τῇ Σειρᾷ.

Μέτρα Κεντρικῆς Τάσεως νοοῦνται τὰ μέτρα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἀναλύουσι ἢ μετρῶσι τὴν ὡς ἄνω ροπήν.

Εἴδη Μέσων Ὅρων :

Ὑπολογιζόμενοι
Μέσοι Ὅροι : Ἀριθμητικὸς Μέσος, ($\bar{X}$), Τετραγωνικὸς Μέσος (Q_m),
Ἁρμονικὸς Μέσος (H_m), Ἀντιαρμονικὸς Μέσος (A_m),
Γεωμετρικὸς Μέσος (Q_m).

Μέσοι Ὅροι Θέσεως : Διάμεσος (M_e), Ἐπικρατοῦσα Τιμὴ (M_0),
Τεταρτημόρια (Q_1Q_3), Δεκατημόρια (D),
Ἑκατοντατημόρια (P).

Ἐμπειρικαὶ Σχέσεις μεταξὺ τῶν Μέτρων τῆς Κεντρικῆς Τάσεως :

Εἰς τὰς Μονοτύπους, μετρίως Ἀσυμμέτρους Καμπύλας θὰ ἔχωμεν

$$\bar{X} - M_0 = 3(\bar{X} - M_e) \text{ καὶ } M_0 = \bar{X} - 3(\bar{X} - M_e).$$

β) Διασπορὰ (Dispersion, Scatter)

Ὁ Μέσος Ὅρος ἀποβαίνει ἄνευ σημασίας ἐφ' ὅσον δὲν ἔχομεν καὶ τὸν βαθμὸν τῆς ἀπὸ τούτου διακυμάνσεως. Δύο Κατανομαὶ Συχνοτήτων δυνατὸν νὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν π.χ. Ἀριθμητικὸν Μέσον καὶ ἐν τούτοις νὰ παρουσιάζωσι βασικὰς διαφορὰς μεταξύ των, πρᾶγμα ὅπερ σημαίνει ὅτι οἱ Μέσοι Ὅροι δὲν ἀπεικονίζουσιν ὅλα τὰ χαρακτηριστικὰ μιᾶς Κατανομῆς.

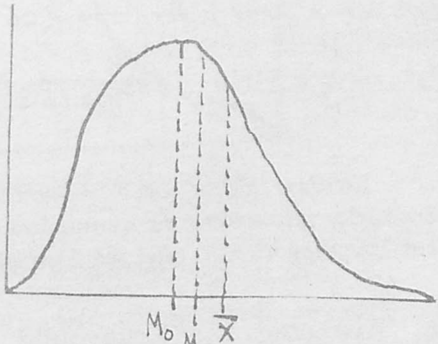
Κατ' ἀκολουθίαν χρειαζόμεθα πλὴν τοῦ Μέσου Ὅρου καὶ ἓν μέτρον διασπορᾶς, δηλ. ἓν μέτρον περὶ τοῦ πόσον ἀπέχουσιν οἱ διάφοροι ὅροι τῆς Κατανομῆς ἀπὸ τοῦ Ἀριθμητικοῦ Μέσου. Ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ διασπορὰ αὐτὴ τόσον περισσότερον ὁ Ἀριθμητικὸς Μέσος καθίσταται ἡ ἀντιπροσωπευτικωτέρα τιμὴ τῆς Κατανομῆς.

Διασπορὰ ὅθεν λέγεται ἡ διακύμανσις τοῦ μεγέθους, ἡ ὁποία λαμβάνει χώραν μεταξὺ τῶν διαφόρων ὅρων μιᾶς Σειρᾶς.

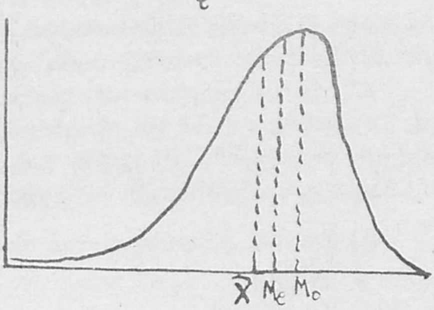
Εἴδη Μέτρων Διασπορᾶς :

Ἀπόλυτα: Ταῦτα ἐνδείκνυνται μόνον διὰ συγκρίσεις ὁμοειδῶν φαινομένων, καθόσον ἔχουσι τὰς διαστάσεις τῶν μεγεθῶν, πρὸς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται. Ταῦτα εἶναι τὸ Εὖρος (Range), ἡ Ἀπόκλισις Μέσου (Mean Deviation), ἡ Πιθανὴ Ἀπόκλισις (Probable Deviation), Τεταρτημοριακὴ Ἀπόκλισις (Quartile Deviation), Ἐνδοτεταρτημοριακὸν Εὖρος (Interquartile Range), Μέση Τετραγωνικὴ Ἀπόκλισις (Standard Deviation), Διακύμανσις (Variance).

Σχετικά: Ταῦτα, ὡς στερούμενα διαστάσεων, συγκρίνουσιν ἑτεροειδῆ φαινόμενα π.χ. ἔντασιν τῆς νομισματικῆς κυκλοφορίας ἀφ' ἑνὸς καὶ τοῦ Τιμαρίθμου Χονδρικῆς Πωλήσεως ἀφ' ἑτέρου. Οὕτως ἔχομεν :



Δεξιὰ ἢ Θετικῶς Ἀσύμμετρος εἶναι ἡ Καμπύλη ἡ ὁποία ἔχει λοξεύσει πρὸς τὰ δεξιά, καθόσον ἡ οὐρά της ἐκτείνεται πρὸς τὰ δεξιά. Ὡς τοιαύτη εἶναι ἡ προκαλουμένη ὑπὸ τῶν ἄκρων εἰς τὰς ὑψηλοτέρας τιμὰς τῆς Κατανομῆς. Ὁ Συντελεστὴς Ἀσυμμετρίας β_1 ἔχει θετικὴν τιμὴν καὶ τὰ Τεταρτημόρια διαφέρουσιν εἰς τὴν ἀπὸ τοῦ Διαμέσου ἀπόστασίν των.



Ἀριστερὰ ἢ Ἀρνητικῶς Ἀσύμμετρος εἶναι ἐκείνη ἡ Καμπύλη, ἡ ὁποῖα ἔχει λοξεύσει πρὸς τὰ ἀριστερά, καθόσον ἡ οὐρά της ἐκτείνεται πρὸς τὰ ἀριστερά, ὡς τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ προκαλουμένη ὑπὸ τῶν ἄκρων εἰς τὰς χαμηλοτέρας τιμὰς τῆς Κατανομῆς. Ἐνταῦθα ὁ Συντελεστὴς Ἀσυμμετρίας ἔχει ἀρνητικὴν τιμήν.

Συντελεστὴν Μεταβλητικότητος (Coefficient of Variation), Συντελεστὰς Διασπορᾶς (Coefficients of Scatter), καὶ Μέσην Διαφορὰν τοῦ Gini.

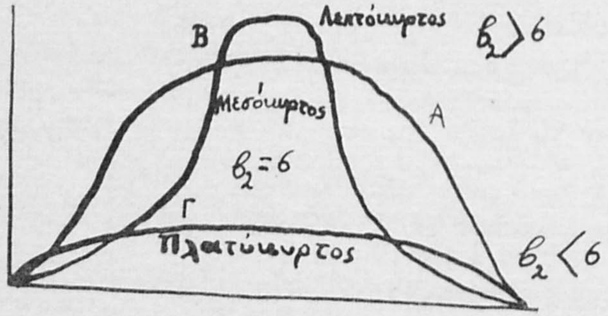
γ) Ἀσυμμετρία (Skewness)

Εἶναι ἡ τάσις ὡρισμένων Σειρῶν νὰ ἐμφανίζωσι τὰς κορυφάς των ἑλκομένας μακρὰν τοῦ κέντρου τῆς Κατανομῆς.

Δοθέντος ὅτι ἔχομεν Συμμετρίαν ὅταν $\beta_1 = 0$, διὰ τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ μηδενὸς ἡ Κατανομὴ εἶναι Ἀσυμμετρικὴ καὶ διὰ $\beta_1 \pm 2$ ὑφίσταται ἀξιοσημείωτος Ἀσυμμετρία.

δ) Κύρτωσις (Kurtosis)

Εἶναι ἡ ἀπόκλισις ἐκ τῆς συμμετρικότητας τῆς Καμπύλης, ἡ ὁποία ἄλλοτε ἀφορᾶ τὴν κορυφότητα καὶ ἄλλοτε τὴν ἐπιπέδωσιν τῆς Καμπύλης. Ἐφ' ὅσον ὁ Συντελεστὴς Κυρτώσεως β_2 ἰσοῦται πρὸς 6 ἔχομεν τὴν Μεσόκυρτον Καμπύλην, ἡ ὁποία ταυτίζεται πρὸς τὴν Συμμετρικήν.



Κατόπιν τῶν ἐκ τῶν Συντελεστῶν β_1 καὶ β_2 συναγομένων διαπιστώσεων δυνάμεθα γενικεύοντες νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὅλαι αἱ Κανονικαὶ Καμπύλαι εἶναι καὶ Συμμετρικαὶ ἀλλ' οὐχὶ καὶ ὅλαι αἱ Συμμετρικαὶ εἶναι Κανονικαί.

6. Ἀνάλυσις τῆς Κατανομῆς Συχνοτήτων διὰ τῶν Στιγμῶν [2]

Μία Κατανομὴ Συχνότητος δύναται ν' ἀναλυθῇ ἀκριβέστερον ἐὰν ὑπολογίσωμεν Σταθεράς τινας ἢ Στιγμὰς τῆς Κατανομῆς.

Αἱ Στιγμαὶ χρησιμεύουσι διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν περιγραφικά τινα μέτρα τῆς Κατανομῆς καὶ διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν καταλληλοτέραν Καμπύλην, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν μαθηματικὴν ἐξομάλυνσιν τῆς Κατανομῆς. Διακρίνομεν τὰς κατωτέρω Στιγμάς:

Α) Στιγμαὶ μετρούμεναι ἀπὸ οἱουδήποτε αὐθαιρέτου σημείου

πρώτη $\nu_1 = \Sigma f\,(d^1) : \nu$

δευτέρα $\nu_2 = \Sigma f\,(d'^2) : \nu$

---

2) Ὁ παρὰ τῶν Ἑλλήνων συγγραφέων καὶ ἐρευνητῶν καθιερωθεὶς ὅρος «Ρ π α ὶ» δὲν εὑρίσκει ἡμᾶς συμφώνους, ὡς μὴ ἀποδίδων τὸν ἀγγλικὸν ὅρον moments.

τρίτη $\nu_3 = \Sigma f\,(d'^3) : \nu$

τετάρτη $\nu_4 = \Sigma f\,(d'^4) : \nu$

Β) Στιγμαὶ μετρούμεναι ἀπὸ τοῦ Ἀριθμητικοῦ Μέσου ὡς ἀφετηρίας :

$\mu_1 = \Sigma f\,(x) : n, \quad \mu_2 = \Sigma f\,(x^2) : n$

$\mu_3 = \Sigma f\,(x^3) : n, \quad \mu_4 = \Sigma f\,(x^4) : n$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων ἀπὸ τοῦ $\overline{X}$ εἶναι μηδέν, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ πρώτη στιγμὴ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν.

Πρώτη Στιγμὴ	$\mu_1 = 0$	Ἡ στιγμὴ αὐτὴ ἐκφράζει τὸν $\overline{X}$
Δευτέρα »	$\mu_2 = \nu_2 - \nu^2_1$	» » » τὴν σ
Τρίτη »	$\mu_3 = \nu_3 - 3\,(\nu_1\nu_2) + 2\,(\nu_1^3)$	» τὸν β_1
Τετάρτη »	$\mu_4 = \nu_4 - 4\,(\nu_1\nu_3) + 6\,(\nu_1^2\nu_2) - 3\,(\nu_1^4)$	» τὸν β_2

Διορθώσεις Sheppard.

Ἐπειδὴ ὁ ὑπολογισμὸς τῶν Στιγμῶν μιᾶς Κατανομῆς Συχνότητος βασίζεται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως ὅτι αἱ τιμαὶ ἐντοπίζονται εἰς τὸ κεντρικὸν σημεῖον τοῦ Διαστήματος Τάξεως καὶ ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ ὑπόκειται εἰς σφάλμα τι, ὁ Sheppard ἐπέτυχε τὴν ἀνεύρεσιν τούτου διὰ τῶν ἀκολούθων Διορθώσεων, αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται μόνον ἐπὶ Συνεχῶν Κατανομῶν καὶ οὐχὶ ἐπὶ τῶν τοιούτων σχήματος U ἢ j.

Διορθωμένη Δευτέρα Στιγμὴ $\mu'_2 = \mu_2 - \frac{1}{12}$

Διορθωμένη Τετάρτη Στιγμὴ $\mu'_4 = \mu_4 - \frac{\mu_2}{2} + \frac{7}{270}$

Ἐκ τῶν μνημοιευθεισῶν Στιγμῶν αἱ Πρώτη καὶ Δευτέρα καλοῦνται καὶ Στιγμαὶ Κατωτέρας Τάξεως, αἱ δὲ Τρίτη καὶ Τετάρτη Στιγμαὶ Ἀνωτέρας Τάξεως. Τέλος αἱ Στιγμαὶ Πρώτη καὶ Τρίτη εἶναι περιττῆς τάξεως ὡς πρὸς τὸν $\overline{X}$ καὶ εἰς μίαν Συμμετρικὴν Κατανομὴν εἶναι μηδενικαί, αἱ δὲ Δευτέρα καὶ Τετάρτη Ἀρτίας Τάξεως.

Γ) Στιγμαὶ Ἀσυνεχῶν Κατανομῶν : Χρησιμοποιοῦνται συχνάκις αἱ εἰσαχθεῖσαι ὑπὸ τῶν Steffensen καὶ Sheppard Παραγοντικαὶ Στιγμαί, κατὰ τὴν ἐφαρμογήν των εἰς τὴν Διωνυμικὴν Κατανομὴν καὶ Κατανομὴν Poisson.

7. Ὁρολογία καὶ Συμβολικὴ τῆς Κατανομῆς Συχνοτήτων

α) Ἐλάχιστον Ὅριον Τάξεως–Lower Class Limit (L.C.L.). Εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμὸς ἑκάστης Τάξεως.

β) Μέγιστον Ὅριον Τάξεως–Upper Class Limit (U.C.L.). Εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ἑκάστης τάξεως μετὰ τὴν στρογγυλοποίησίν του, ἀντιστοιχῶν εἰς τὸ L.C.L. τῆς ἑπομένης τάξεως.

γ) Εὖρος – Range (R). Εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ L.C.L. τῆς πρώτης τάξεως ἀπὸ τοῦ U.C.L. τῆς τελευταίας τάξεως, στρογγυλοποιουμένη εἰς ἄρτιον ἀριθμόν.

δ) Μέσον Σημεῖον Τάξεως–Midpoint (M.P.). Εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως εἰς τὸ L.C.L. μιᾶς τάξεως τοῦ ἡμίσεος τοῦ Διαστήματος Τάξεως.

ε) Διάστημα Τάξεως–Class Interval (C.I.). Εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ L.C.L. μιᾶς Τάξεως ἀπὸ τοῦ L.C.L. τῆς ἀμέσως ὑψηλοτέρας ἐν τῇ Σειρᾷ Τάξεως καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλας τὰς Τάξεις.

στ) Ὑποτιθέμενος Μέσος – Guessed Mean (Z). Προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως εἰς τὸ L.C.L. τῆς Τάξεως μὲ τὴν μεγαλυτέραν συχνότητα τοῦ ἡμίσεος τοῦ διαστήματος τάξεως.

ζ) $\Sigma(X)$ = Ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῆς Μεταβλητῆς X

η) $\Sigma(X - \bar{X})$

ἢ $\Sigma(x)$ = Ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων τῶν τιμῶν τῆς X ἀπὸ τοῦ $\bar{X}$

θ) $\Sigma(X - \bar{X})^2$

ἢ $\Sigma(x)^2$ = Ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν τιμῶν τῆς X ἀπὸ τοῦ $\bar{X}$

ι) N = Ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν βαθμίδων τοῦ Πληθυσμοῦ

ια) n = Ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν περιπτώσεων τοῦ Δείγματος

ιβ) Ἀπόλυτος Συχνότης – Absolute Frequency (f)

ιγ) Σχετικὴ Συχνότης – Relative Frequency (F)

Αἱ τιμαὶ τῆς Ἀπολύτου Συχνότητος τείνουν πάντοτε προσθετικῶς νὰ πλησιάσωσι τὴν τιμὴν τοῦ n, ἐνῷ αἱ τοιαῦται τῶν Σχετικῶν Συχνοτήτων πρὸς τὴν Μονάδα.

ιδ) Στιγμαὶ – Moments

ν μετρούμεναι ἀπὸ οἱουδήποτε αὐθαιρέτου σημείου

μ_1 μετρούμεναι ἀπὸ τοῦ $\bar{X}$ ὡς ἀφετηρίας

μ'_2, μ'_4 διορθωμέναι κατὰ Sheppard

8. Γραφικαὶ Παραστάσεις Στατιστικῶν Μεγεθῶν [3]

Βασικῶς μὲ σύστημα Ὀρθογωνίων Συντεταγμένων καὶ τὴν γνωστὴν ἤδη διάκρισιν τῶν Πληθῶν, ἔχομεν τὰς κατωτέρω παραστάσεις :

---

3) Ἡ εἰς τὸν τομέα τῆς Στατιστικῆς Χαρτογραφίας Ἑλληνικὴ Βιβλιογραφία περιορίζεται εἰς ἐλαχίστας σελίδας τῶν Ἐγχειριδίων Στατιστικῆς. Ἐξαίρεσιν ἀποτελεῖ τὸ ἐκπονηθὲν παρὰ τοῦ ὑποφαινομένου καθ' ἣν ἐποχὴν διηύθυνε τὴν Στατιστικὴν Ὑπηρεσίαν τῆς Ἀεροπορίας Ὑπηρεσιακὸν Ἐγχειρίδιον «Ὁ δ η γ ὸ ς Γ ρ α φ ι κ ῶ ν Ἀ π ε ι κ ο ν ί σ ε ω ν» Ἔκδοσις ΓΕΑ/Α.Ε 155 (1956) καὶ τὸ πολυγραφημένον βοήθημα «Μ α θ ή μ α τ α Σ τ α τ ι σ τ ι κ ῆ ς Χ α ρ τ ο γ ρ α φ ί α ς» (1962), ἀμφότερα ἐξαντληθέντα. Ἐλπίζεται ἡ προσεχὴς ἀνατύπωσίς των.

α) Ἐπὶ Μονοδιαστάτων Στατικῶν Πληθῶν (Κατανομαὶ Συχνότητος)

ι) Ἱστόγραμμα: Τοῦτο σχεδιάζεται ἐν τῷ Χάρτει διὰ τῆς ὑψώσεως ὀρθογωνίων, τῶν ὁποίων τὸ πλάτος ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ Διαστήματος Τάξεως καὶ τὸ ὕψος πρὸς τὴν συχνότητα ἑκάστης Τάξεως. Τὸ Ἱστόγραμμα παρέχει μίαν πρόχειρον προσέγγισιν πρὸς τὴν ἰδεώδη Καμπύλην Πιθανότητος.

ιι) Πολύγωνον Συχνότητος (Frequency Polygon): Εἶναι μία γραμμικὴ σχεδίασις τῆς συχνότητος τάξεως ἔναντι τοῦ Μέσου Σημείου Τάξεως, ἐπιτυγχανομένη διὰ τῆς συνδέσεως τῶν Μέσων Σημείων τῶν κορυφῶν τῶν ὀρθογωνίων τοῦ Ἱστογράμματος.

ιιι) Πολύγωνον Ἀθροιστικῆς Συχνότητος ἢ Ἁψὶς (Cumulative Frequency Polygon or Ogive): Ἐπὶ Ἀθροιστικῆς Συχνότητος «Ὀλιγώτερον ἢ» ἡ Ἁψὶς καλεῖται Ἀριστερόστροφος καὶ ἐπὶ «Περισσότερον ἢ» Δεξιόστροφος.

β) Ἐπὶ Δυδιαστάτων Στατικῶν Πληθῶν: Δι' Ἐπιφανειακῶν Χαρτῶν, διὰ Καμπύλων Ἴσης συχνότητος καὶ διὰ Στικτῶν Διαγραμμάτων ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπαναλήψεων εἶναι μᾶλλον μικρός.

γ) Ἐπὶ Κινητικῶν Πληθῶν: Τὴν Χρονολογικὴν Σειρὰν παριστῶμεν διὰ Χρονογράμματος, διδομένου παρὰ μιᾶς πολυγωνικῆς γραμμῆς μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου συστήματος Συντεταγμένων. Εἰς τὰ Χρονογράμματα ὁ Ἄξων τῶν Τετμημένων παριστᾶ τὸν Χρόνον καὶ ὁ Ἄξων τῶν Τεταγμένων τὰς ἐπαναλήψεις ἢ συχνότητας.

δ) Ἐπὶ Πληθῶν ἐξαρτωμένων ἐκ τοῦ Χώρου: Τὰ Χαρτογράμματα ἢ Χωρογράμματα χρησιμεύουσι διὰ τὴν παράστασιν τῶν Γεωγραφικῶν Κατανομῶν (Spatial Distributions).

Εἰδικώτερον οἱ ὑπὸ τῆς Στατιστικῆς Χαρτογραφίας ὑποδεικνυόμενοι Τύποι Γραφικῶν Ἀπεικονίσεων εἶναι οἱ ἀκόλουθοι:

I. ΕΠΙΠΕΔΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Α. Γραμμικὰ — Καμπυλωτὰ

1. Λογαριθμικὰ

2. Ἀριθμητικὰ

α) ΚΑΜΠΥΛΩΤΑ	β) ΣΤΗΛΟΕΙΔΗ	γ) ΡΑΒΔΩΤΑ
1) Ἁπλοῦς	1) Ἁπλοῦς	1) Ἁπλοῦς
2) Πολλαπλοῦς	2) Συνδεδυασμένος ἢ Ἱστόγραμμον	2) Μετὰ Συμβόλων
3) Σωρευτικὸς	3) Συμπεπλεγμένος	3) Ποσοστιαῖος
4) Κλιμακωτὸς	4) Ὑποδιῃρημένος	4) Ὑποδιῃρημένος
5) Κλιμακωτὸς		

Πολλαπλοῦ Χρόνου
6) Κλιμακωτὸς Πολλαπλῶν Ποσῶν
7) Συμπληρωματικὸς

5) Καθαρᾶς Ἀποκλίσεως
6) Διασταυρωμένης Ἀποκλίσεως
7) Κυμαινόμενος
8) Εὔρους

5) Συμπεπλεγμένος
6) Ζευγαρωτὸς
7) Ἀποκλίσεως
8) Ὀλισθαίνων

δ) ΤΡΙΓΩΝΙΚΑ
ε) ΟΡΕΟΓΡΑΦΙΚΑ
στ) ΤΑΙΝΙΩΤΑ
ζ) ΑΥΞΟΜΕΙΩΤΙΚΑ
η) ΡΙΠΙΔΙΟΕΙΔΗ
θ) ΣΠΕΙΡΟΕΙΔΗ

Β. Μονοδιάστατα Ἐπιφανειακὰ
1. Ἁπλοῦς
2. Κλιμακωτὸς
3. Ποσοστιαῖος
4. Ὑποδιηρημένος
5. Ἐσκιασμένων Ζωνῶν
6. Φωτοεπιφανειακὰ

Γ. Πολικὰ Διαγράμματα ἢ Κυκλικοὶ ἢ κατὰ Τομεῖς Χάρται
1. Χάρται Κατανομῆς Κόστους
2. Χάρται Συγκριτικοὶ Κυκλικοὶ

Δ. Χαρτογράμματα
1. Εἰκονογραφικοὶ Χάρται
2. Χωρογράμματα ἢ Στατιστ. Γεωγραφικοὶ Χάρται
3. Ποσοτικοὶ Χάρται
4. Ποιοτικοὶ Χάρται
5. Χάρται Ροῆς (Διαδικασίας — Ἐνεργείας)

II. ΣΤΕΡΕΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Κυβικά, Σφαιρικά, Κωνικά, Κυλινδρικά, Πυραμιδοειδῆ, Παραλληλεπίπεδα κλπ.

III. ΓΡΑΦΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ
1. Χάρτης Στικτὸς
2. » Καταστάσεως
3. » Προόδου
4. » Βαθμολογικὸς

IV. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΤΥΠΟΙ

1. Συνδεδυασμένοι Τύποι Χαρτῶν
α. Ἐπιφανειακὸς μετὰ Κυμπύλης
β. Στηλοειδὴς μετὰ »
γ. Στηλοειδὴς μετὰ κατωφεροῦς Καμπύλης
δ. Στηλοειδὴς Κλιμακωτὸς
ε. Χωριζομένης Κλίμακος
στ. Ἀριθμοδεικτῶν

2. Τριδιάστατα Ἐκθέματα
3. Συσκευὴ Davis
4. Οἰκονομικὸς Ἀναλυτὴς Tarnowsky
5. Κοσμογράφος

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν Χαρτῶν

— Ἐνδείξεις Καμπυλωτῶν Χαρτῶν:

α) Καταδεικνύουσι τὴν πρόοδον μιᾶς ἢ περισσοτέρων Μεταβλητῶν εἰς διδομένην χρονικὴν στιγμήν.

β) Συγκρίνουσι πολλὰς σειρὰς δεδομένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ Χάρτου.

γ) Ἐπιτρέπουσι συνεχῆ ἀνάγνωσιν.

δ) Ὁσάκις δίδεται ἔμφασις ἐπὶ τῆς κινήσεως μᾶλλον ἢ ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ποσῶν.

ε) Ὁσάκις πρόκειται νὰ προβληθῇ ἡ Τάσις.

— Οἱ Ἀριθμητικοὶ Χάρται εἶναι οἱ συνηθέστερον χρησιμοποιούμενοι, τὰ δὲ δεδομένα τῆς κλίμακος παριστῶνται ὑπὸ τὴν μορφὴν ἀπολύτων (πραγματικῶν) ἀριθμῶν.

— Οἱ Λογαριθμικοὶ Χάρται ἐνδείκνυνται ὁσάκις τὸ ἐνδιαφέρον ἐντοπίζεται ἐπὶ τῆς σχετικῆς κινήσεως τῆς Κινητικῆς Σειρᾶς καὶ οὐχὶ τῆς μεταξὺ τῶν ποσῶν διαφορᾶς, ὁσάκις ὑφίσταται μεγάλον εὗρος μεταξὺ μιᾶς Σειρᾶς τιμῶν καὶ ἑτέρας τοιαύτης ἐκ τῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ Χάρτου χαρασσο ένων καὶ τέλος ὅταν δὲν ὑπάρχουσιν ἀρνητικαὶ τιμαὶ ἐν τῇ Χρονολογικῇ Σειρᾷ.

— Τὰ Τριγωνικὰ Διαγράμματα ἀναπαριστῶσι τὰς σχετικὰς ἀναλογίας πρὸς τρεῖς Μεταβλητάς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα θεωρούμενον ὡς ἴσον πρὸς 100 εἶναι κατὰ συνέπειαν σταθερόν. Σπανίως χρησιμοποιοῦνται ἐν τῇ πράξει.

— Τὰ Σπειροειδῆ Διαγράμματα ἀπεικονίζουσι γραφικῶς τὰς ἐκδηλώσεις φαινομένου τινός, ἐκδηλουμένου περιοδικῶς κατ' ἴσα μηνιαῖα χρονικὰ διαστήματα ἐντὸς ἑνὸς ἔτους.

— Ἐκ τῶν Ἐπιφανειακῶν Χαρτῶν οἱ μὲν Ἁπλοῖ χρησιμοποιοῦνται κυρίως διὰ νὰ δίδωσιν ἔμφασιν εἰς τὸ μέγεθος ἔναντι τῆς κινήσεως, οἱ δὲ Ὑποδιῃρημένοι διὰ νὰ δεικνύωσι τμήματα ἑνὸς συνόλου καὶ εἰδικώτερον ἀναλογίας ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν τοῦ συνόλου.

— Οἱ Στηλοειδεῖς Χάρται ἐνδείκνυνται διὰ νὰ δώσωμεν ἔμφασιν εἰς σύνολα μεγεθῶν εἰς μίαν καὶ μόνην σειρὰν δεδομένων, διὰ νὰ δείξωσιν ὀλίγα συνθετικὰ μέρη συνόλων, διὰ νὰ δείξωσιν ἓν εὗρος τιμῶν ἢ ἀποκλίσεις ἔκ τινος Κανονικοῦ (Normal) ἢ Προτύπου (Standard) καὶ γενικῶς διὰ δεδομένα, ὅπου δὲν ὑπάρχει συνεχὴς ροή.

— Οἱ Ραβδωτοὶ Χάρται χρησιμεύουσι πρὸς ἔμφασιν τῆς συγκρίσεως ἁπλῶν μεγεθῶν εἰς μίαν μόνην Χρονολογικὴν Σειράν, διὰ τὴν κατάδειξιν τῶν μεταβολῶν τῶν συνθετικῶν μερῶν σχετικῶς μικρῶν συνόλων, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἐπὶ πλέον ἢ ἐπὶ ἔλαττον ἀποκλίσεων ἔκ τινος σημείου ἀναφορᾶς ἢ Κανονικοῦ, διὰ τὴν κατάδειξιν ἑνὸς εὔρους τιμῶν, διὰ τὴν καταγραφὴν σημειουμένων προόδων, διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἀποδόσεως μηχανῶν καὶ τέλος διὰ νὰ δεικνύωσι διακυμάνσεις εἰς τὸ σύνολον δοθείσης Σειρᾶς, εἴτε ἐπὶ ἀπολύτου, εἴτε ἐπὶ ποσοστιαίας βάσεως. Οἴκοθεν νοεῖται ὅτι ἀντενδείκνυνται εἰς Τάσεις χρόνου (Trends) καὶ εἰς Κατανομὰς Συχνοτήτων.

— Οἱ Συνδεδυασμένοι Τύποι Χαρτῶν δέον νὰ χρησιμοποιῶνται διὰ συγκεκριμένον σκοπὸν καὶ νὰ μὴ ἀποτελῶσιν ἁπλῆν ἐπίδειξιν καινοτομίας.

— Οἱ Γραφικοὶ Πίνακες, περιωρισμένου πεδίου ἐφαρμογῆς εἰς τὴν Στατιστικήν, τυγχάνουσιν οὐχ' ἧττον πολύτιμοι εἰς τὴν 'Ανάλυσιν Διοικήσεως (Management Analysis) διὰ τὴν ἀξιολόγησιν τῆς ἀποδόσεως.

— Οἱ Κυκλικοὶ Χάρται εἶναι συνήθους σχήματος, χωριζόμενοι εἰς ὑποδιαιρέσεις. Τὸ μέγεθος ἑκάστου τμήματος προσδιορίζει τὴν ἀναλογίαν τοῦ συνθετικοῦ μέρους ἔναντι τοῦ συνόλου. Τοῦ συνόλου ἀναφερομένου εἰς 100, τὰ μέρη δεικνύονται ὡς συνθετικὰ μέρη τοῦ 100%. Δεδομένου ὅτι 100% ἰσοδυναμεῖ πρὸς 360° ἑνὸς κύκλου, τὸ ἓν ἑκατοστὸν θὰ ἰσοῦται πρὸς 3,60 τοῦ κύκλου, ὁπότε εἶναι εὔκολον νὰ μετατρέψωμεν τὰ ποσοστὰ εἰς βαθμούς. Οἱ Κυκλικοὶ Χάρται μὲ προβολὴν Τομέως τονίζουν ἓν συνθετικὸν μέρος ἔναντι τοῦ συνόλου, ὁσάκις τὸ μέρος αὐτὸ εἶναι οὐσιῶδες καὶ ἔχει καθ' ἑαυτὸ πολλὰς ὑποδιαιρέσεις. Τέλος ὡς πρὸς τὴν χάραξιν ἑνὸς Συγκριτικοῦ Κυκλικοῦ Χάρτου δέον νὰ ὑπολογίσωμεν καλῶς τὸν κύκλον μας κατ' ἐμβαδὸν καὶ οὐχὶ κατὰ μέγεθος τῆς διαμέτρου.

— Οἱ Κυκλικοὶ Χάρται ἰδιαιτέρως ἐνδείκνυνται διὰ νὰ δεικνύωσι τὴν ποσοστιαίαν κατανομὴν καὶ μεταβολὴν τῶν συνθετικῶν μερῶν ἑνὸς συνόλου.

— Οἱ Εἰκονογραφικοὶ Χάρται, ἐὰν σχεδιασθῶσι μετ' ἀκριβείας, δεικνύουσιν ἁπλᾶς συγκρίσεις μεγεθῶν. Τὸ κύριον πρόβλημα κατὰ τὴν σχεδίασιν τῶν Χαρτῶν αὐτῶν εἶναι ἡ ἐπιλογὴ τῶν σχημάτων ἢ συμβόλων, ἐπαρκῶς ἀντιπροσωπευτικῶν τῶν συνθετικῶν μερῶν.

— Τέλος τὰ Χωρογράμματα ἐνδείκνυνται διὰ νὰ δείξωσι τὴν γεωγραφικὴν κατανομὴν τῶν Δεδομένων. 'Εὰν γίνωσι μικροὶ κατὰ τὸ μέγεθος, αἱ γραμμαὶ συνόρων καὶ διαιρέσεως τῶν γεωγραφικῶν μονάδων εἶναι ἔντυποι. Σχεδὸν ὅλοι οἱ Χάρται τοῦ εἴδους αὐτοῦ ἀπαιτοῦσι τὴν προσθήκην κλειδῶν διὰ τὴν ἀναγνώρισιν τῆς σκιάσεως ἢ τῶν χρωμάτων τοῦ Χάρτου, πάντως οὐχὶ περισσοτέρων τῶν πέντε ἢ ἕξ.

— Καὶ αὐτὰ μέν, ὅσα ἀνωτέρω ἐξετέθησαν, ἰσχύουσι κατὰ θεωρίαν. 'Εν τῇ πρακτικῇ ὅμως ἡ ἐπιλογὴ παρὰ τοῦ Στατιστικοῦ ἢ τοῦ Σχεδιαστοῦ τοῦ καταλληλοτέρου κατὰ περίπτωσιν τύπου γραφικῆς ἀπεικονίσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς πείρας, ἐπιδεξιότητος καὶ ὀλίγης δόσεως φαντασίας τούτου.

ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Διάφορα τῶν ἐξετασθέντων ἀνωτέρω Στατιστικῶν Χαρτῶν ἢ Διαγραμμάτων εἶναι τὰ Διοικητικὰ Διαγράμματα, ὡς ἀκολούθως :

1. 'Ο ρ γ α ν ό γ ρ α μ μ α : Παρέχει πιστὴν καὶ σαφῆ εἰκόνα ἐπὶ τῶν συμβαινόντων εἰς μίαν 'Επιχείρησιν ἢ 'Οργανισμόν.

Β ῆ μ α 1: Ἀκατέργαστα Δεδομένα Δείγματος ἐτῶν ὑπηρεσίας 90 Ὑπαξιωματικῶν

10	20	14	10	12	2
2	11	5	12	7	13
9	13	11	10	9	8
15	15	4	7	14	12
11	4	4	1	5	20
3	22	19	18	10	10
8	5	10	9	13	18
5	13	5	14	16	3
9	9	11	8	1	21
14	14	13	3	6	12
10	10	7	17	10	8
18	17	9	8	16	17
15	12	6	13	8	10
6	19	15	10	15	2
11	9	18	16	11	12

Β ῆ μ α 2ον: Κατάστρωσις Ἀριθμητικῆς Διατάξεως κατ' ἀνιοῦσαν τάξιν

1	5	9	11	13	16
1	6	9	11	13	16
2	6	9	11	13	16
2	6	9	11	13	17
2	7	9	11	14	17
3	7	10	11	14	17
3	7	10	12	14	18
3	8	10	12	14	18
4	8	10	12	14	18
4	8	10	12	15	19
4	8	10	12	15	19
5	8	10	12	15	20
5	8	10	12	15	20
5	9	10	13	15	21
5	9	10	13	16	22

2. Διάγραμμα Σωρευτικὸν καὶ Ἐνδεικτικὸν Τάσεων: Παραβάλλει τὰ γεγονότα καὶ συνάγει τὰς σχέσεις μεταξὺ τάξεων φαινομένων.

3. Ὁρμονόγραμμα: Εἶναι κινητὸν Διάγραμμα, τὸ ὁποῖον εἰκονογραφεῖ τὰς Προβλέψεις.

4. Ἐλεγκτικὸν Διάγραμμα: Καθορίζει τὰς σχέσεις μεταξὺ Προβλέψεως καὶ Ἐκτελέσεως.

9. Ἐφαρμογαὶ εἰς Διάφορα Προβλήματα

α) Δίδονται ἀνωτέρω τὰ πραγματικὰ δεδομένα τῶν ἐτῶν ὑπηρεσίας 90 Ὑπαξιωματικῶν, ὡς ἐλήφθησιν ταῦτα ἐκ τῶν τηρουμένων παρὰ τῷ Τμήματι Προσωπικοῦ τῆς Στρατιωτικῆς Μονάδος Ἀτομικῶν Φακέλλων, καὶ ζητεῖται νὰ μετουσιωθῶσι ταῦτα εἰς Κατανομὴν Συχνότητος, ν' ἀναλυθῶσιν αἱ διάφοροι παράμετροι Κεντρικῆς Τάσεως, Διασπορᾶς, Ἀσυμμετρίας καὶ Κυρτώσεως, ν' ἀπεικονισθῆ γραφικῶς ἡ Κατανομή, νὰ ἐξετασθῆ ἂν τὸ Δεῖγμα εἶναι ἐπαρκὲς πρὸς συναγωγὴν βασίμων συμπερασμάτων καὶ τέλος νὰ ἐρευνηθῆ ἂν ἡ εὑρεθησομένη Μέση Τιμὴ τυγχάνει ὄντως ἀντιπροσωπευτικὴ τῆς μάζης τῶν δεδομένων.

Δεδομένα πρὸς καταγραφήν :

$C = 4$ $\overline{Z} = 10$	$\frac{3n}{4} = 67{,}5$	$\nu_1^4 = 0{,}0107$	$\nu_1\nu_3 = 0{,}5313$
$\left.\begin{matrix} L_{me} \\ L_{mo}\end{matrix}\right\} = 8$	$L_{Q3} = 12$	$\nu_2 = 153 : 90 = 1{,}7$	$4(\nu_1\nu_3) = 2{,}1252$
$\frac{n}{2} = 45$	$\sqrt{90} = 9{,}49$	$\nu_1\nu_2 = 0{,}5474$	$2(\nu_1^3) = 0{,}0668$
$d_1 = 15$	$\sqrt{180}\ 13{,}42$	$3(\nu_1\nu_2) = 1{,}6422$	$\nu_4 = 681 : 90 = 7{,}57$
$d_2 = 6$	$\sqrt{2} = 1{,}415$	$6(\nu_1^2\nu_2) = 1{,}0608$	$3(\nu_1^4) = 0{,}0321$
$d_1 + d_2 = 21$	$\nu_1 = \frac{29}{90} = 0{,}322$	$\nu_2 - \nu_1^2 = 1{,}596$	$\frac{1}{12} = 0{,}083$
$\frac{n}{4} = 22{,}5$	$\nu_1^2 = 0{,}104$	$\sqrt{\nu_2 - \nu_1^2} = 1{,}265$	$\frac{7}{240} = 0{,}029$
$L_{Q1} = 8$	$\nu_1^3 = 0{,}0334$	$\nu_3 = 149 : 90 = 1{,}65$	

Βῆμα 3ον. Κατανομὴ Συχνότητος μὲ διάστημα τάξεως τὸ 4, ἐκλεγόμενον αὐθαιρέτως

Τάξεις Ἐτῶν Ὑπηρεσίας C	Ὑπαξιωματικοὶ f (Ἀπόλυτοι Συχνότητες)	Σχετικαὶ Συχνότητες	Ἀποκλίσεις Διαστημάτων Τάξεως d′	f (d′)	f (d′²)	f (d′³)	f (d′⁴)	Ἀπόλυτοι Ἀθροιστικαὶ Συχνότητες	Σχετικαὶ Ἀθροιστικαὶ Συχνότητες	M.P	MP−X̄	f (MP−X̄)
0 – 3	8	0,0888	− 2	− 16	+ 32	− 64	+ 128	8	0,088	2	9,29	74,32
4 – 7	14	0,1555	− 1	− 14	+ 14	− 14	+ 14	22	0,244	6	5,29	74,06
8 – 11	29	0,3222	0	0	0	0	0	51	0,566	10	1,29	37,41
12 – 15	23	0,2555	+ 1	+ 23	+ 23	+ 23	+ 23	74	0,822	14	2,71	62,33
16 – 19	12	0,1333	+ 2	+ 24	+ 38	+ 96	+ 192	86	0,955	18	6,71	80,52
20 – 23	4	0,0444	+ 3	+ 12	+ 36	+ 108	+ 324	90	1,000	22	10,71	42,84
Σύνολα	n = 90 ὁλικὴ Συχνότης	0,9997		Σf (d′) = 29	Σf (d′²) = 153	Σf (d′³) = 149	Σf (d′⁴) = 681					Σf (MP−X̄) = 371,48

Ὑπολογισμοὶ Ροπῶν : $\mu'_2 = 1{,}596 - 0{,}083 = 1{,}513, \quad \mu_2'^2 = 2{,}29,$

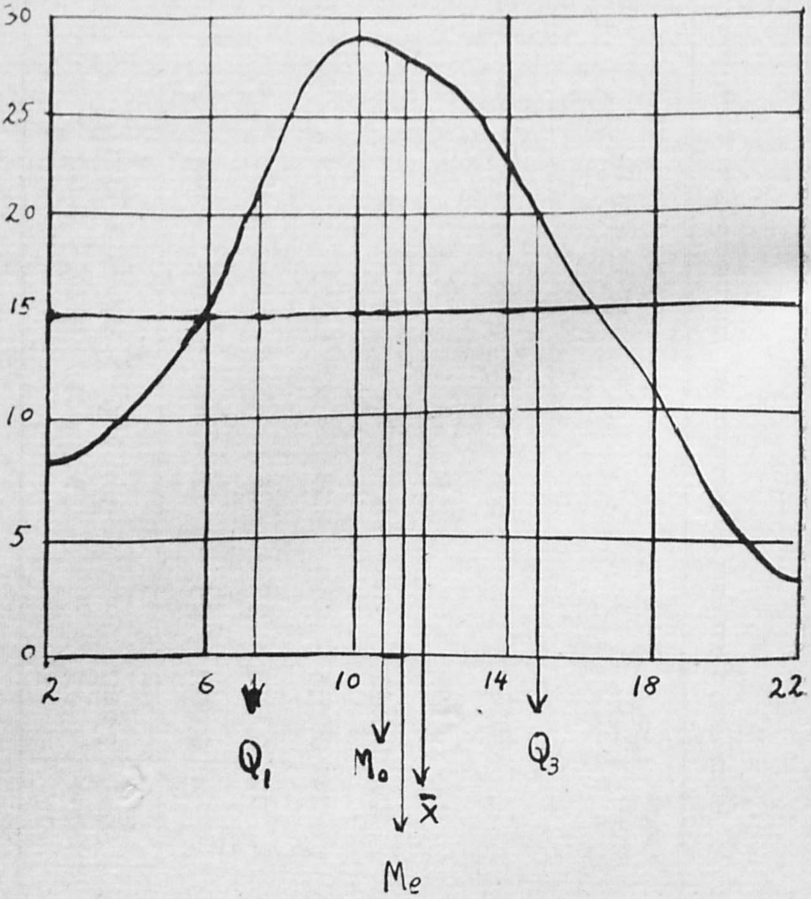
$$\mu_2'^3 = 3{,}463$$

$$\mu_3 = 1{,}65 - 1{,}6472 + 0{,}0668 = 0{,}0746$$

$$\mu'_4 = 7{,}57 - 2{,}1252 + 1{,}0608 - 0{,}0321 - \\ - \frac{1{,}513}{2} + 0{,}029 = 5{,}75$$

Ὑπολογισμοὶ Μέτρων Κεντρ. Τάσεως, Διασπορᾶς, Ἀσυμμετρίας, Κυρτώσεως

$$\bar{X} = 10 + \left(\frac{29}{90} \times 4 \right) = 11{,}29 \qquad Q_1 = 8 + \left(\frac{22{,}5 - 22}{29} \times 4 \right) = 7{,}93$$



$$M_e = 8 + \left(\frac{45 - 22}{29} \times 4 \right) = 11{,}17 \qquad Q_3 = 12 + \left(\frac{67{,}50 - 51}{23} \times 4 \right) = 14{,}87$$

$$M_0 = 8 + \left(\frac{15}{21} \times 4\right) = 10{,}86 \qquad \begin{aligned} \sigma' &= 4 \times 1{,}596 - 0{,}083 = 4{,}98 \\ MD &= 371{,}48 : 90 = 4{,}13 \end{aligned}$$

$$P.D = 4{,}98 \times 0{,}6745 = 3{,}359 \qquad QD = 14{,}87 - 7{,}93 : 2 = 3{,}47$$

$$R = 24, \quad V = 4{,}98 \times 100 : 11{,}29 = 44{,}10\,\%$$

$$\beta_1 = \frac{0{,}0746^2}{1{,}513^3} = \frac{0{,}0056}{3{,}463} = 0, \quad \beta_2 = \frac{5{,}75}{1{,}513^2} + 3 = 5{,}51$$

Ἀναλύοντες τὰς ὡς ἄνω ὑπολογισθείσας τιμὰς παρατηροῦμεν ὅτι ἡ προκειμένη Κατανομὴ εἶναι Συμμετρικὴ καὶ Μεσόκυρτος (ἅτε πλησιάζουσα τὴν τιμὴν $\beta_2 = 6$ καὶ ἐκ παραλλήλου ἔχουσα $\beta_1 = 0$), $\overline{X}$ M_e καὶ M_0 συμπίπτουσι καὶ τὰ Τεταρτημόρια εἶναι ἰσαπέχοντα ἀπὸ τοῦ M_e, πλὴν ὅμως ἔχει ὑψηλὸν Συντελεστὴν Μεταβλητικότητος ($V = 44{,}10\,\%$), πρᾶγμα ὅπερ ἐμβάλλει εἰς σκέψεις κατὰ πόσον τὰ ὑπολογισθέντα Μέσα Ἔτη ὑπηρεσίας 11,29 τυγχάνουν ὄντως ἀντιπροσωπευτικὰ τοῦ ἐξετασθέντος Δείγματος τῶν 90 Ὑπαξιωματικῶν. Πρὸς τοῦτο ἂς χρησιμοποιήσωμεν τὰ ἀκόλουθα κριτήρια:

Διὰ τὴν ἀνεύρεσιν τῆς ἀληθοῦς Μέσης Τιμῆς μ εἰς ἐπίπεδον πιθανότητος 95% θὰ ἔχωμεν $\overline{X} - 1{,}96\,\sigma_{\overline{x}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + 1{,}96\,\sigma_{\overline{x}}$, ὅπου τὸ Κανονικὸν Σφάλμα τοῦ $\overline{X}$ εἶναι κατὰ τὸν τύπον $\sigma_{\overline{x}} = \sigma : \sqrt{n-1} = 0{,}53$.
$11{,}29 - 1{,}96 \times 0{,}53 \leqslant \mu \leqslant 11{,}29 + 1{,}96 \times 0{,}53$ καὶ $10.25 \leqslant \mu \leqslant 12{,}33$. Ἄρα τὰ ὅρια διακυμάνσεως τῆς ἀληθοῦς Μέσης Τιμῆς θὰ εἶναι ἀπὸ 10,25 μέχρι 12,33. Ὁμοίως κατὰ τὸν Δείκτην Συγκεντρώσεως Τιμῶν περὶ τὸν $\overline{X}$

$$h = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2}} = \frac{1}{7{,}05} = 0{,}142.$$

Τέλος διὰ τὴν ἐπάρκειαν ἢ μὴ τοῦ μεγέθους τοῦ Δείγματος τῶν 90 Ὑπαξιωματικῶν πρὸς ἱκανοποιητικὴν περιγραφὴν τῶν δεδομένων καὶ εἰς ἐπίπεδον πιθανότητος 95 % δέον νὰ ἔχωμεν $n = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\overline{x}}} \times 1{,}96\right)^2 = \left(\frac{4{,}98}{0{,}53} \times 1{,}96\right)^2 = 313$, ἤτοι $3^1/_2$ φορὰς περισσοτέρας παρατηρήσεις ἢ συνολικῶς 313 Ὑπαξιωματικούς. Ἀλλὰ καὶ οἱ ἐμπειρικοὶ τύποι τῶν διαφόρων Μέτρων συμπίπτουσι πρὸς τοὺς ἐξ ὑπολογισμοῦ τοιούτους, τὸ δὲ Κανονικὸν Σφάλμα Ὁμάδος Παρατηρήσεων $\frac{1}{\sqrt{n \times \sigma}} < \frac{\sigma}{10}$ εἶναι $0{,}047 < 0{,}498$ ἤτοι ἀμελητέον.

β) Ἔστω ἡ κατωτέρω Κατανομὴ Συχνότητος ἀριθμοῦ ἡμερῶν ἀναλόγως τοῦ βαθμοῦ νεφώσεως

Βαθμοὶ Νεφώσεως 0–19, 20–39, 40–59, 60–79, 80–99, 100–119

– Ἀριθμὸς Ἡμερῶν 449, 139, 90, 120, 218, 676

Ἐξεταστέον ποία ἡ μορφὴ τῆς Κατανομῆς καὶ ἡ σχέσις της πρὸς τὴν Κανονικὴν καὶ νὰ γίνῃ γραφικὴ ἀπεικόνισις ταύτης.

Δεδομένα: $\nu_1 = -2.08$, $\nu_1^2 = 4.33$, $\nu_1^3 = -8.99$, $\nu_1^4 = 18{,}70$, $3(\nu_1^4) = 56.10$

$\nu_2 = 8.83$, $\nu_3 = -40.56$, $\nu_4 = 192.45$

$\nu_1\nu_2 = -18\ 37$, $3(\nu_1\nu_2) = -55.09$, $6(\nu_1^2\nu_2) = 229.40$,

$\nu_2 - \nu_1^2 = 8.83 - 4.33 = 4.50$, $\sqrt{4.50} = 2{,}12$

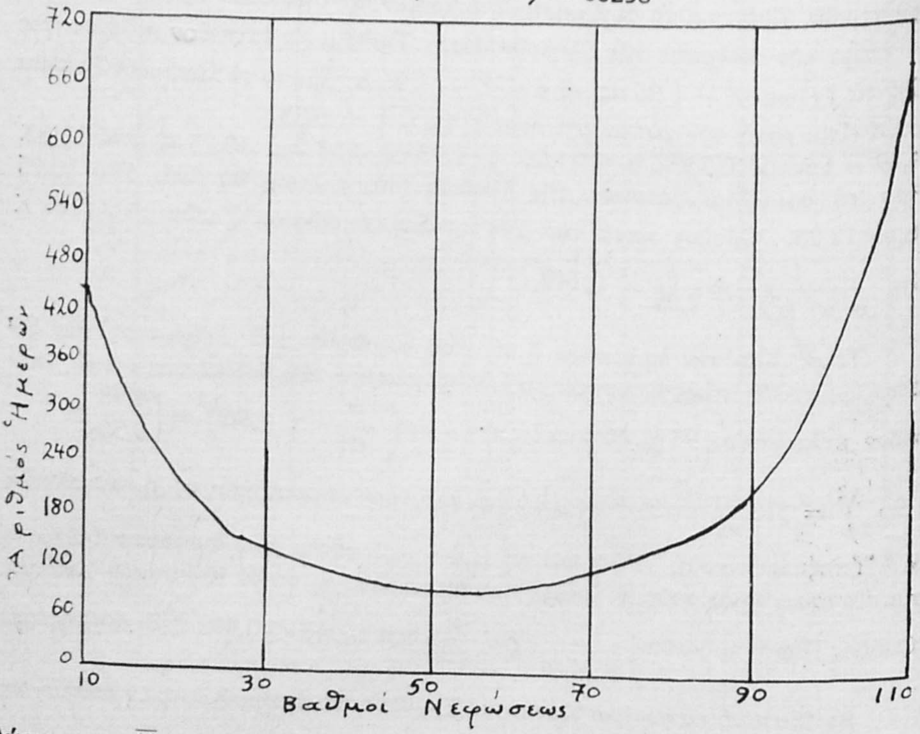
$\nu_1\nu_3 = 84.36$, $2(\nu_1^3) = -17.98$, $4(\nu_1\nu_3) = 337.44$

$\nu_4 = 192.45$

$C = 20$, $\overline{Z} = 110$, L_{me} καὶ $L_{mo} = 100$, $n = 1692$, $\frac{n}{2} = 846$

$d_1 = 458$, $\frac{n}{4} = 423$ $L_{Q_1} = 0{,}1$, $\frac{3n}{4} = 1269$, $L_{Q_3} = 100$,

$\sqrt{1692} = 41.23$, $\Sigma f\,(MP - \overline{X}) = 66238$



Λύσις: $\overline{X} = 110 + (-2.08 \times 20) = 64.80$, $MD = 66238 : 16.92 = 39.14$

$M_e = 100 + \left(\frac{846-1016}{676} \times 20\right) = 105$, $\sigma = 42.20$

$$M_o = 100 + \left(\frac{458}{458} \times 20\right) = 120, \qquad V = 61.69\%$$

$$Q_1 = 0.1 + \left(\frac{846}{449} \times 20\right) = 37.70,$$

$$Q_3 = 100 + \left(\frac{1269-1016}{676} \times 20\right) = 107.40$$

$$QD = 107.40 - 37.70 : 2 = 34.85, \ PD = 28.36$$

$$\mu'_2 = 4.50, \ \mu_3 = -40.56 - 3\,(-2.08 \times 8.83) + 2 \times -8{,}99 = -3.45$$

$$\mu'_4 = 192.45 - 337.44 + 229.40 - 56.10 - 2.25 + 0{,}029 = 26.11$$

$$\beta_1 = \frac{-3{,}45^2}{4.50^3} = 0{,}13 \qquad \beta_2 = \frac{26.11}{4.50^2} + 3 = 4.29$$

Προκύπτει ὅθεν ἡ Κατανομὴ τοῦ σχήματος $\cup$, σαφῶς ἀσυμμετρικὴ καὶ πλατύκυρτος, τῶν δύο μεγίστων αὐτῆς κατὰ τὰ ἄκρα ἐχόντων τὰς μεγαλυτέρας τιμάς. Τέλος ἂν ἐφαρμόσωμεν καὶ τὸν Δείκτην Κανονικότητος παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι κάτω τῆς μονάδος, διὸ καὶ ἀποφαινόμεθα ὅτι ἔχομεν πρὸ ἡμῶν Ἀρνητικὴν Ἀντικανονικὴν Κατανομὴν

$$\left(D = \frac{\overline{X} - M_e}{MD} = \frac{-26.60}{39.14} = -0.93 < 1 \right)$$

γ) Ἐπὶ συνολικῆς παραγωγῆς 10.000 ἐλαστικῶν ἐπισώτρων βάσει δεδομένης τεχνικῆς προδιαγραφῆς ($n = 10.000$, $\sigma = 0{,}0063$. $\overline{X} = 0{,}25$) πόσον δέον νὰ εἶναι τὸ Δεῖγμα διὰ νὰ μᾶς δώσῃ ἀποτελέσματα ἰσχύοντα καὶ διὰ τὸ ἄπειρον πλῆθος τῶν ἐπισώτρων μὲ συντελεστὴν ἀξιοπιστίας 68% καὶ 95%;

Λύσις: $$\sigma_{\overline{x}} = \frac{0{,}0063}{\sqrt{10.000}} = 0{,}000063$$

Διὰ $P = 0{,}68$ $$n = \left(\frac{0{,}0063}{0{,}000063}\right)^2 = 10.000 \text{ τεμάχια}$$

Διὰ $P = 0{,}95$ $$n = \left(\frac{0{,}0063}{0{,}000063} \times 1{,}96\right)^2 = 38.416 \text{ τεμάχια}$$

δ) Τῆς κατωτέρω Κατανομῆς, παριστώσης τῆς ἡλικίας τῶν Μαθητῶν Μέσης Ἐκπαιδεύσεως νὰ ἀναλυθῶσιν αἱ εὑρεθησόμεναι παράμετροι, νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ μορφὴ τῆς καμπύλης:

Τάξις Ἡλικιῶν	10–11,	12–13,	14–15,	16–17,	18–19
Ἀριθμὸς Μαθητῶν	227,	1674,	1049,	93,	1

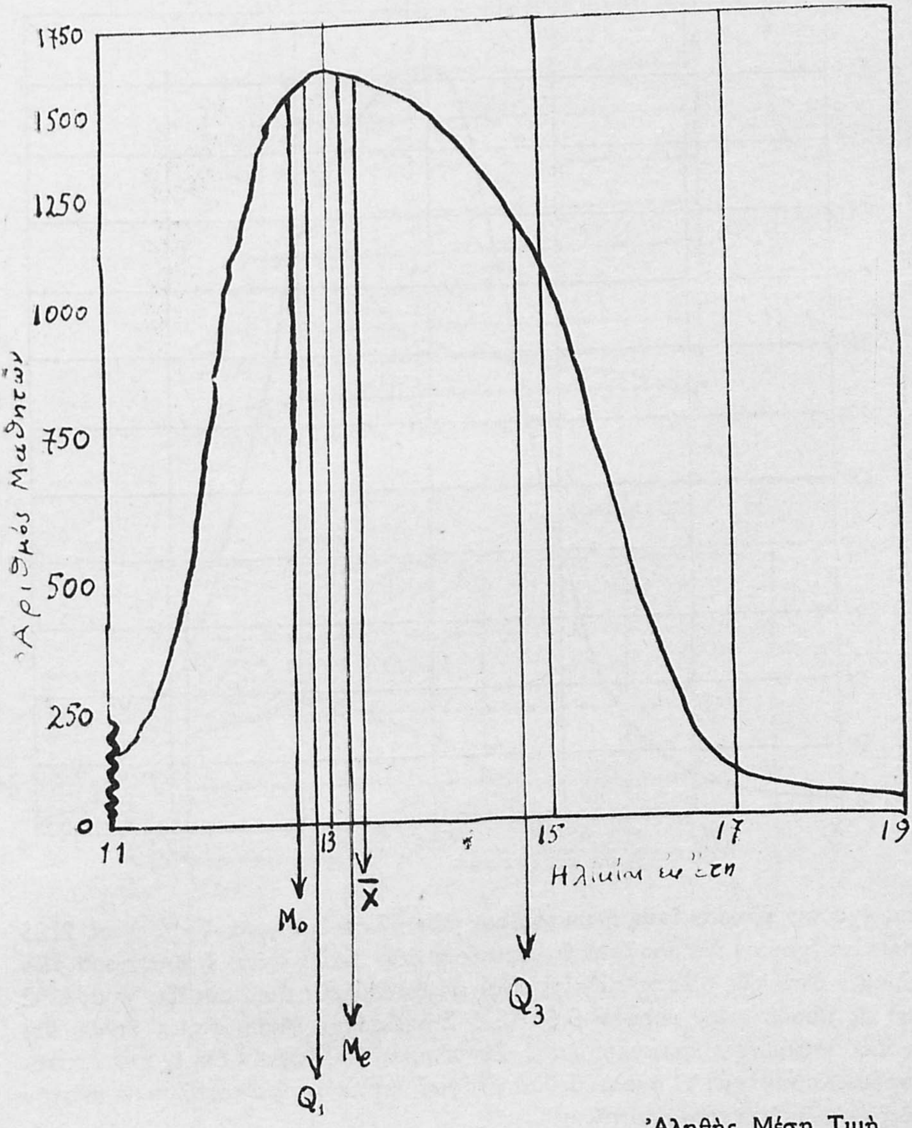
Τάξεις Ἡλικιῶν	Μαθηταὶ f	d′	f (d′)	f (d′²)	f (d′³)	f (d′⁴)	Ἀθροιστικαὶ Συχνότητες Σi	MP	MP − $\overline{X}$	f (MP − $\overline{X}$)
10 − 11	227	− 1	− 227	+ 227	− 227	+ 227	227	11	2,66	$603^{\underline{82}}$
12 − 13	1674	0	0	0	0	0	1901	13	0,66	$1104^{\underline{84}}$
14 − 15	1049	+ 1	1049	1049	1049	1049	2950	15	1,34	$1405^{\underline{66}}$
16 − 17	93	+ 2	186	372	744	1488	3043	17	3,34	$310^{\underline{62}}$
18 − 19	1	+ 3	3	9	27	81	3044	19	5,34	$5^{\underline{34}}$
	n = 3044		Σf (d′) = 1011	Σf (d′³) = 1657	Σf (d′³) = 1593	Σf (′⁴) = 2845				Σf (MP−$\overline{X}$) = 3430,28

$\bar{X} = 13.66$ $\sigma = 1{,}32$ $\beta_2 = 6.43$

$M_e = 13.55$ $V = 9.66\,\%$ $\sigma_{\bar{x}} = 0{,}024$

$M_0 = 12.60$ $MD = 1{,}13$ $n = 11621$ εἰς $P = 0{,}95$

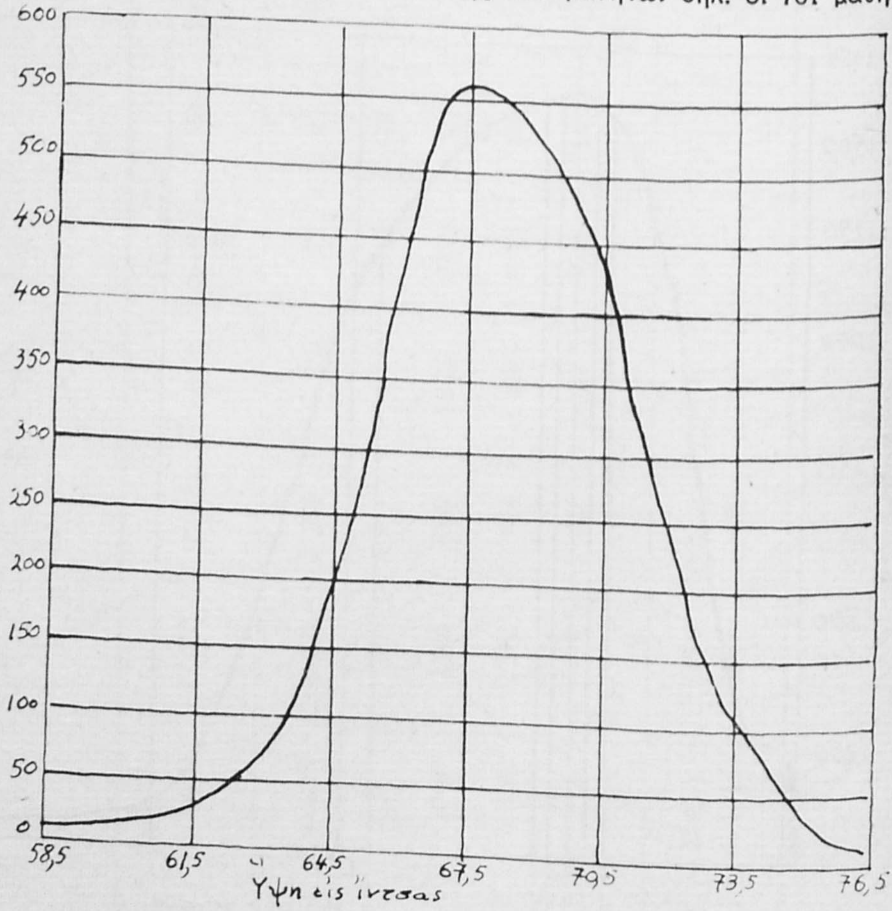
$Q_1 = 12.64$ $QD = 1{,}045$



$Q_3 = 14.73$ $\beta_1 = 0{,}07$

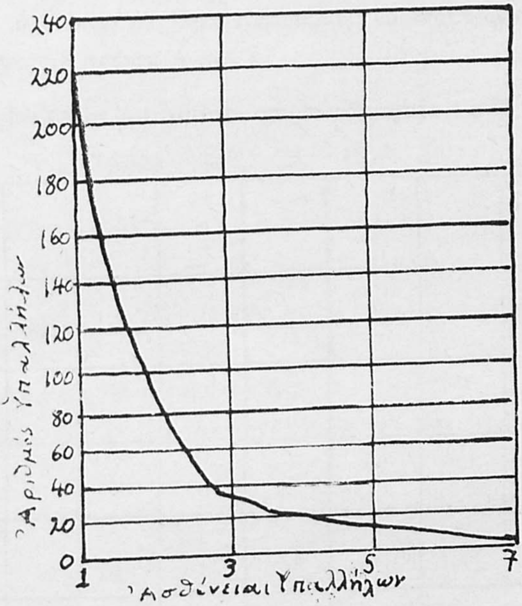
Ἀληθὴς Μέση Τιμὴ
εἰς P=095 $\mu = 13.66 \pm 2{,}59$,
ἤτοι ἀπὸ 11,07 ἕως 16.25

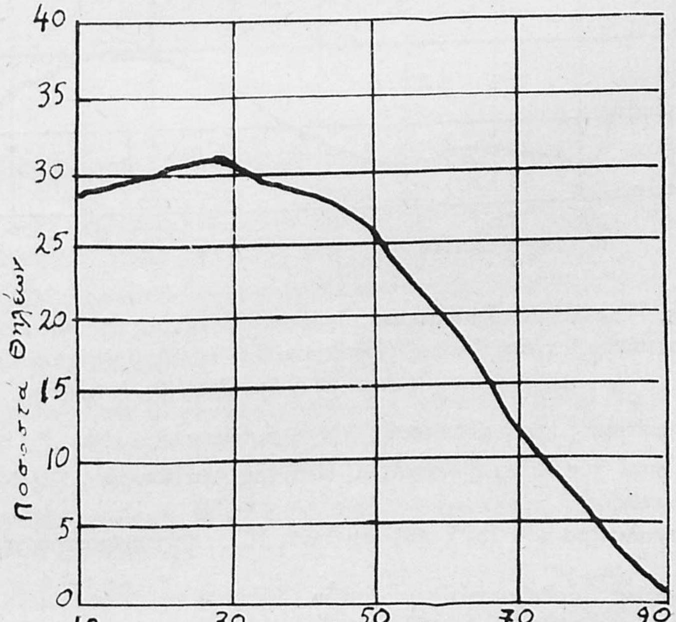
Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἐπιτευχθεισῶν τιμῶν ἀποδεικνύει ὅτι ἡ μέση ἡλικία τῶν 3044 μαθητῶν εἶναι ἔτη 13.66, ἡ διάμεσος ἡλικία κάτω τῆς ὁποίας εἶναι οἱ 1522 μαθηταὶ καὶ ἄνω τῆς ὁποίας οἱ ἕτεροι 1522 εἶναι ἔτη 13,55, ἡ ἐπικρατεστέρα ἡλικία πάσης ἄλλης, ἡ ἐντοπιζομένη εἰς τὴν δευτέραν τάξιν τῆς μεγίστης συχνότητος εἶναι ἔτη 12.60, τὰ 25% τῶν μαθητῶν δηλ. οἱ 761 μαθη-



ταὶ ἔχουσιν ἡλικίαν ἴσην ἢ μικροτέραν τῶν 12.64 ἐτῶν, τὰ 75% ἢ οἱ 2283 μαθηταὶ ἔχουσιν ἡλικίαν ἴσην ἢ μικροτέραν τῶν 14.73 ἐτῶν, ἡ διασπορὰ τῶν ἡλικιῶν ἀπὸ τῆς Μέσης Ἡλικίας εἶναι εἰς ἀπολύτους ἀριθμοὺς ἴση πρὸς 1.32 καὶ εἰς ποσοστιαίαν μορφὴν 9.66%, ὁ Συντελεστὴς Ἀσυμμετρίας δηλοῖ ὅτι ἔχομεν ἀσύμμετρον καμπύλην καὶ ὁ Συντελεστὴς Κυρτώσεως ὅτι ἔχομεν Λεπτόκυρτον Καμπύλην. Ἡ ἀκολουθοῦσα γραφικὴ ἀπεικόνισις ἀποκαλύπτει θετικὴν (Δεξιὰν) Ἀσύμμετρον Καμπύλην.

ε) Δύο Κατανομῶν αἱ στιγμαὶ μ_2 περὶ τὸν $\overline{X}$ εἶναι 9 καὶ 16, ἐνῶ αἱ

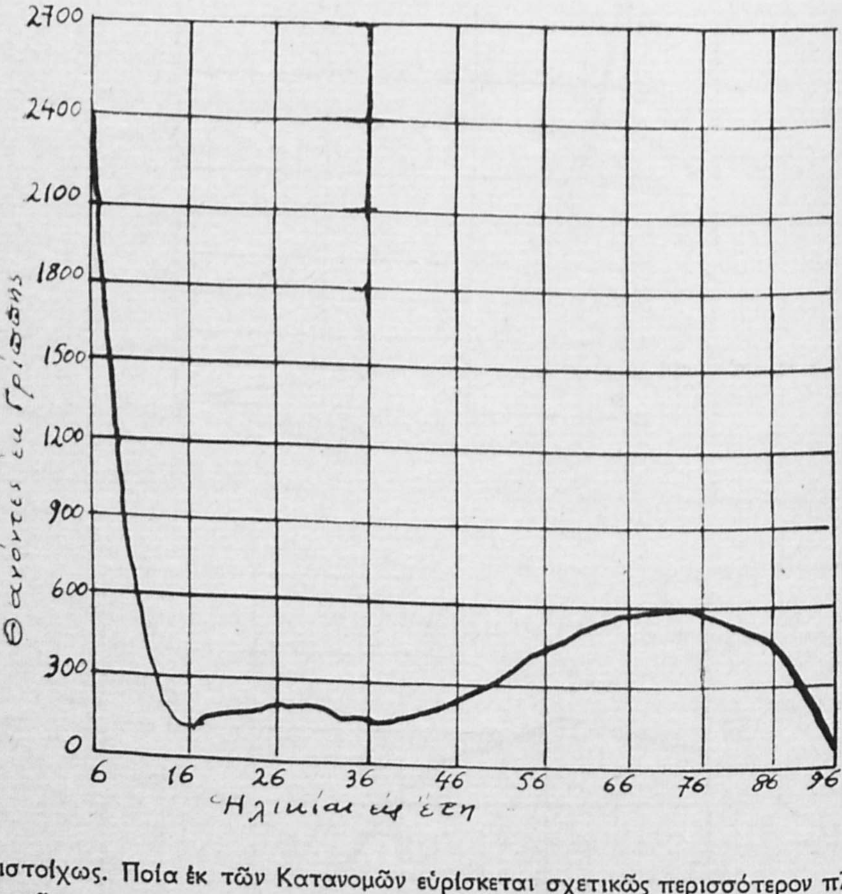

240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
Ἀριθμὸς Ὑπαλλήλων
1
3
5
7
Ἀσθένειαι Ὑπαλλήλων


40
35
30
25
20
15
10
5
0
Ποσοστὰ Θηλέων
10
30
50
70
90
Ἡλικίαι εἰς ἔτη

τοιαῦται μ_3 εἶναι -8.1 καὶ -12.8 ἀντιστοίχως. Ἐρωτᾶται ποία ἐκ τῶν δύο Κατανομῶν εἶναι περισσότερον ἀσύμμετρος πρὸς τὰ ἀριστερά.

(Ἀπ. ἡ πρώτη Κατανομή)

στ) Ὁμοίως δύο Κατανομῶν αἱ στιγμαὶ μ_4 περὶ τὸν $\overline{X}$ εἶναι 230 καὶ 780



ἀντιστοίχως. Ποία ἐκ τῶν Κατανομῶν εὑρίσκεται σχετικῶς περισσότερον πλησίον τῆς κανονικῆς κατανομῆς ἀπὸ τῆς ἀπόψεως (α) αἰχμηρότητος (β) ἀσυμμετρίας;

(Ἀπ. (α) ἡ δευτέρα, (β) ἡ πρώτη)

ζ) Συμμετρικῆς τινος Κατανομῆς ἡ $\sigma = 5$. Ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς στιγμῆς μ_4 περὶ τὸν $\overline{X}$ ἵνα ἡ Κατανομὴ εἶναι (α) Λεπτόκυρτος, (β) Μεσόκυρτος, (γ) Πλατύκυρτος;

(Ἀπ. (α) μεγαλυτέρα τοῦ 1875, (β) ἴση πρὸς 1875, (γ) μικροτέρα τοῦ 1875)

η) Γραφικὰ ὑποδείγματα Κατανομῶν (Συνήθων καὶ Ἀσυνήθων)

1) Ἱστογράμματος

Ύψη εἰς ἴντσας	57–59,	60–62,	63–65,	66–68,	69–71,	72–74,	75–77
Σκῶτοι	1,	13,	175,	559,	435,	110,	11

2) Σχήματος j

Ἀσθένειαι Ὑπαλλήλων	0–1,	2–3,	4–6,	6–7
Ἀριθμὸς Ὑπαλλήλων	225,	38,	15,	5

3) Κολούρου Κατανομῆς

Ἡλικίαι εἰς ἔτη	0–20,	21–40,	41–60,	61–80,	81–100
% Θηλέων	28.69,	31.45,	25.51,	13.48,	0.87

4) Συνθέτου Κατανομῆς

Ἡλικίαι	0–10,	11–20,	21–30,	31–40,	41–50,	51–60,	61–70,	71–80,	81–90,	91–100
Θανόντες	2473,	136,	210,	201,	247,	331,	531,	573,	414,	95

5) Πολυγώνου Συχνότητος (Στηλοειδὴς Χάρτης)

Τάξεις Ἡλικιῶν Πλοίων	6–10,	11–15,	16–20,	21–25,	26–30,	31–35,	36–40,	41–50,	ἄνω τῶν 50
Ἀριθμὸς Πλοίων	8,	22,	127,	121,	94,	76,	34,	14,	10

10. Ἐρωτήσεις καὶ Ἀσκήσεις

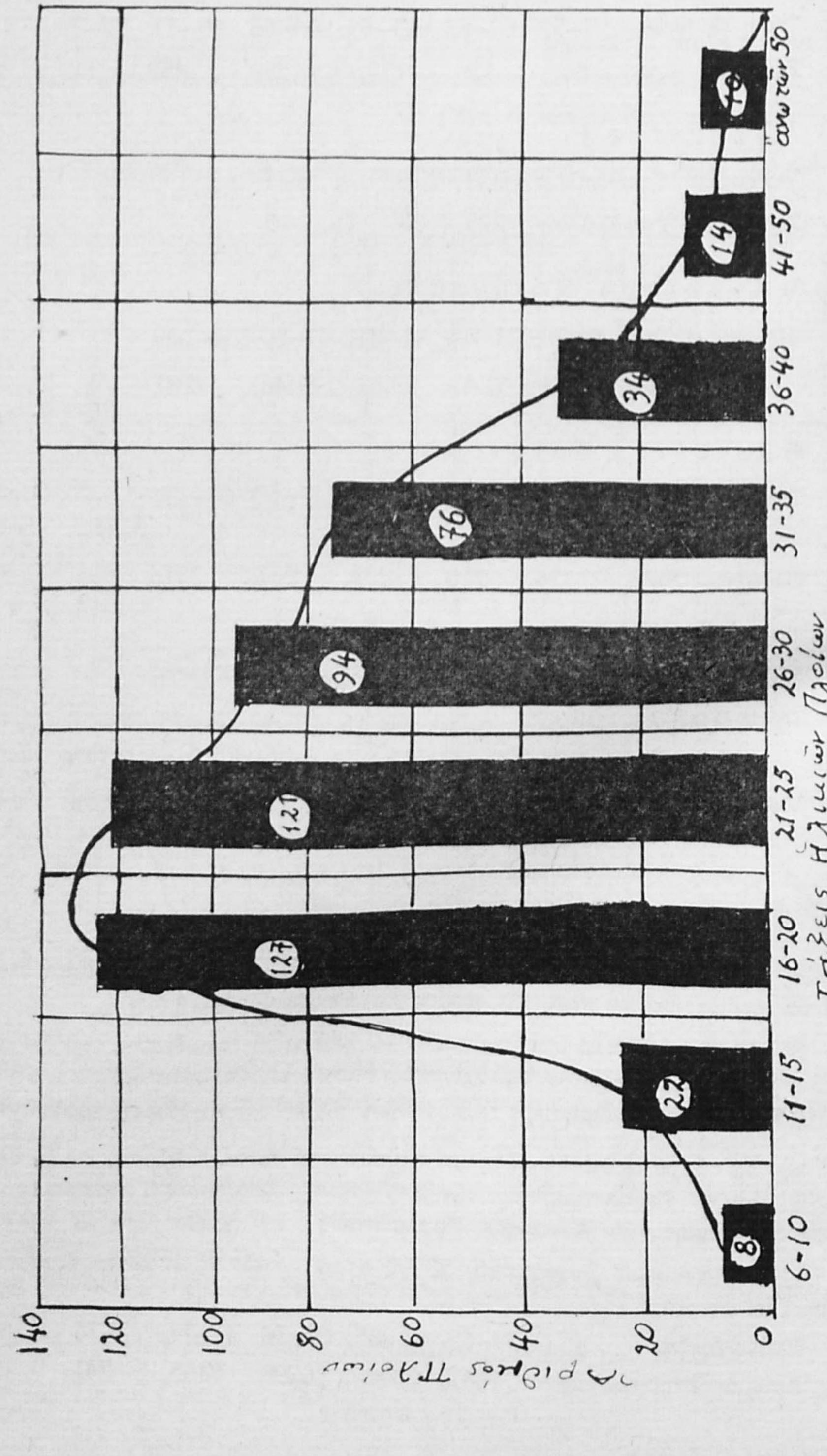
α) Ἐὰν ἔχωμεν $\overline{X} = 68{,}76$, $M_e = 68{,}70$ $M_0 = 68{,}77$ ποίαν ἰδέαν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν περὶ τῆς οἰκείας Κατανομῆς Συχνοτήτων ;

β) Πῶς δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἀπαιτούμενον μέγεθος τοῦ Δείγματος διὰ νὰ ἔχωμεν ἀκρίβειαν Ἀριθμητικοῦ Μέσου εἰς ἐπίπεδα 68% καὶ 95% ; Ταυτίζεται ἄραγε ὁ θεωρητικὸς τύπος πρὸς τὰ ἐν τῇ πρακτικῇ κρατοῦντα ;

γ) Ἐφ' ὅσον αἱ ὑπολογιζόμεναι παράμετροι $\overline{X}$, M_e , M_0, σ, β_1, β_2 δεικνύουσιν ὅλα τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς Στατιστικῆς Σειρᾶς διατί προστρέχομεν εἰς τὴν συνδρομὴν τῶν Κανονικῶν Σφαλμάτων ;

δ) Ἡ Κατανομὴ Συχνότητος 58703 στρατιωτῶν ἐξ ἐπόψεως ὕψους εἰς ἴντσας ἔχει ὡς ἑξῆς :

Τάξις Ὑψῶν	59–62,	63–66,	67–70,	71–74,	75–78
Ἀριθμὸς Στρατιωτῶν	1661,	20040,	30298,	6463,	241



140
120
100
80
60
40
20
0
Ἀριθμὸς Πλοίων
6-10
11-15
16-20
21-25
26-30
31-35
36-40
41-50
ἄνω τῶν 50
Τάξεις Ἡλικιῶν Πλοίων
8
22
127
121
94
76
34
14

Προσδιορίσατε τὰ ὅρια διακυμάνσεως τοῦ ἀληθοῦς Μέσου Ὕψους εἰς ἐπίπεδον 95 % καὶ τὸν ἀπαιτούμενον ἀριθμὸν στρατιωτῶν διὰ τὴν ἀκρίβειαν τοῦ Μέσου Ὕψους εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον πιθανότητος.

ε) Ἡ Κατανομὴ συχνότητος 100 κυτίων ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκεφάλων πυρείων εἶναι ὡς ἑξῆς :

Ἀριθμὸς Ἀκεφάλων Πυρείων ἀνὰ κυτίον	0–1,	2–3,	4–5,	6–7
Ἀριθμὸς Κυτίων	39,	48,	12,	1

Μετὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν διαφόρων τιμῶν νὰ προσδιορισθῇ γραφικῶς ἡ μορφὴ τῆς Καμπύλης καὶ νὰ ἑρμηνευθῶσιν οἱ Συντελεσταὶ V, β_1 καὶ β_2.

στ) Τῆς κατωτέρω Κατανομῆς Συχνοτήτων νὰ ὑπολογισθῶσιν οἱ $\overline{X}, M_e$ M_0, Q_1, Q_3, σ, MD, V, β_1, β_2, τὸ $\sigma_{\overline{x}}$ καὶ ν' ἀπεικονισθῇ γραφικῶς ἡ Κατανομή :

Χρόνος Ζωῆς εἰς ὥρας	300–399,	400–499,	500–599,	600–699,	700–799,
		800–899,	900–999,	1000–1099,	1100–1199
Ἀριθμὸς Σωλήνων	14,	46,	58,	76,	68,
		62,	48,	22,	6

ζ) Τῆς ἀκολούθου Κατανομῆς Συχνότητος Ὡρῶν Πτήσεως 220 Χειριστῶν Ἀεριωθουμένων Ἀεροσκαφῶν νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ Μέτρα Κεντρικῆς Τάσεως— Ἀσυμμετρίας—Κυρτώσεως, τὸ Κανονικὸν Σφάλμα $\overline{X}$, ὁ Δείκτης Κανονικότητος, τὰ ὅρια διακυμάνσεως τῶν ἀληθῶν Μέσων Ὡρῶν Πτήσεως εἰς ἐπίπεδον πιθανότητος 95 %, ὁ ἀναμενόμενος ἀκριβὴς ἀριθμὸς τοῦ μεγέθους τοῦ Δείγματος διὰ νὰ ἔχωμεν ἀκρίβειαν τοῦ $\overline{X}$ εἰς ἐπίπεδον πιθανότητος 95 % καὶ τέλος νὰ προσδιορισθῇ ἡ μορφὴ τῆς Καμπύλης.

Ὧραι Πτήσεως	100–199,	200–299,	300–399,	400–499,	500–599,	600–699,
		700–799,	800–899,	900–999,	1000–1099,	1100–1199
Χειρισταὶ	5,	10,	20,	25,	32,	38,
		31,	25,	18,	12,	4

η) Δύο Ψυγεῖα τύπου Α καὶ τύπου Β πωλοῦνται εἰς τὴν ἀγοράν. Ὁ τύπος Α ἔχει μέσην διάρκειαν ζωῆς 4000 ὥρας καὶ διάμεσον τοιαύτην 3500 ὥρας ἐνῶ ὁ τύπος Β ἔχει $\overline{X} = 3500$ $M_e = 4000$. Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ τιμαὶ πωλήσεως τῶν δύο τύπων Ψυγείων εἶναι αἱ αὐταὶ ὁ ἀγοραστὴς ποῖον τύπον ψυγείου πρέπει νὰ προτιμήσῃ πρὸς ἀγορὰν βάσει τῶν ὡς ἄνω στοιχείων ; Νὰ αἰτιολογηθῇ ἐπαρκῶς τὸ διατί.

(Ἄσκησις δοθεῖσα παρὰ τοῦ Καθηγητοῦ τῆς ΑΣΟΕΕ κ. Κ. Κεβόρκ.).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

α) Δοθέντος ὅτι αἱ τρεῖς τιμαὶ $\overline{X}$, M_e, M_0 συμπίπτουσι ἀποφαινόμεθα ὅτι πρόκειται περὶ Κωδωνοειδοῦς Συμμετρικῆς Κατανομῆς.

β) Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς ἀντιστοίχως τῶν τύπων $n = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\overline{x}}}\right)^2$ καὶ $n = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\overline{x}}} \times 1{,}96\right)^2$. Ὑπάρχει πλήρης ταύτισις ἐφ' ὅσον καὶ ἐν τῇ πράξει λαμβάνομεν τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὑπ' ὄψιν Δείγματος.

γ) Τὰ ὑπολογιζόμενα Κανονικὰ Σφάλματα ὅλων τῶν Μέτρων Κεντρικῆς Τάσεως, Διασπορᾶς, Ἀσυμμετρίας καὶ Κυρτώσεως χρησιμεύουσι διὰ τὸν βαθμὸν προσεγγίσεως τῶν Μέτρων τοῦ Δείγματος πρὸς τὰ ἀντίστοιχα Μέτρα τοῦ Πληθυσμοῦ καὶ κατ' ἀκολουθίαν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ὁρίων, ἐντὸς τῶν ὁποίων ἀναμένεται ὅτι θὰ κεῖνται αἱ ἀληθεῖς τιμαί.

δ) Εἰς ἐπίπεδον πιθανότητος 95 % τὸ ἀληθὲς Μέσον Ὕψος εἰς ἴντσας τῶν 58703 στρατιωτῶν θὰ κυμαίνεται ἀπὸ 62.47 μέχρι 73,29 καὶ ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς στρατιωτῶν διὰ νὰ ἔχωμεν ἀκρίβειαν τοῦ $\overline{X}$ θὰ πρέπει νὰ εἶναι 242025.

ε)

$\overline{X} = 2{,}50$	$\sigma = 1{,}40$	$\beta_2 = 5.98$, $D = 2{,}50–246 : 1.17 = 0{,}03 < 1$
$M_e = 2{,}46$	$MD = 1{,}17$	Πρόκειται περὶ Θετικῆς Ἀσυμμέτρου,
$M_0 = 2{,}40$	$V = 56\%$	Λεπτοκύρτου καὶ μεγάλης διασπορᾶς
$Q_1 = 40{,}28$	$\beta_1 = 2{,}83$	τῶν κατ' ἰδίαν ὑψῶν ἀπὸ τοῦ Μέσου
$Q_3 = 49{,}50$		Ὕψους Καμπύλης.

στ)

$\overline{X} = 715{,}50$	$Q_3 = 861.20$	$\sigma_{\overline{x}} = 9.50$	Καμπύλη Κωδωνοειδής, Συμμετρική καὶ μᾶλλον Μεσόκυρτος.
$M_e = 707{,}80$	$\sigma = 189.92$	$\beta_1 = 0.009$	
$M_0 = 669$	$MD = 159.71$	$\beta_2 = 5.22$	
$Q_1 = 568.90$	$V = 26.54\%$		

ζ)

$\overline{X} = 648.18$	$MD = 187$	$n = 844$	Καμπύλη Κωδωνοειδής, ἐλαφρῶς Ἀσύμμετρος, Πλατύκυρτος, μεγίστης διασπορᾶς τῶν μεμονωμένων ὡρῶν. Πτήσεως ἀπὸ τῶν Μέσων ὡρῶν Πτήσεως
$M_e = 631.50$	$QD = 168$		
$M_0 = 646$	$P.D = 15{,}70$	$\beta_1 = 0.39$	
$Q_1 = 480$	$V = 53.27\%$	$\beta_2 = 4.16$	
$Q_3 = 816$			
$\sigma = 345.22$	$\sigma_{\overline{x}} = 23.32$	$D = 0{,}089 < 1$	

η) Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τῆς Ἐπικρατούσης Τιμῆς τοῦ YAMANE $M_0 = 3\,M_e - 2\,\overline{X}$ θὰ ἔχωμεν:

ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Τάξεις C	Συχνότης f	'Αποκλίσεις d′	f (d′)	f (d′²)	f (d′³)	f (d′⁴)	'Αθροιστικαὶ Συχνότητες Σ_i	Μέσα Σημεῖα Τάξεων MP	$MP-\overline{X}$	$f(MP-\overline{X})$
			Ροπαὶ περὶ τὴν αὐθαίρετον ἀρχὴν							
	n =		$\nu_1=\frac{\Sigma f(d')}{n}$	$\nu_2=\frac{\Sigma f(d'^2)}{n}$	$\nu_3=\frac{\Sigma f(d'^3)}{n}$	$\nu_4=\frac{\Sigma f(d'^4)}{n}$				$\Sigma f(MP-\overline{X})$

Α' Τύπος Ψυγείου $M_0 = 3 \times 3500 - 2 \times 4000 = 2500$

Β' » » $M_0 = 3 \times 4000 - 2 \times 3500 = 5000$

Ἐφ' ὅσον λοιπὸν ὁ Β' Τύπος Ψυγείου ἔχει ὡς ἐπικρατεστέρας ὥρας λειτουργίας τὰς 5000, ἤτοι τὰς διπλὰς τοῦ Α' Τύπου, προφανὲς εἶναι ὅτι θὰ πρέπει νὰ προτιμηθῇ ὁ Β' Τύπος.

Δεδομένα πρὸς καταγραφὴν

$C =$	$L_{Q_3} =$	$4(\nu_1\nu_3) =$
$\overline{Z} =$	$\sqrt{n} =$	$6(\nu_1^2\nu_2) =$
$L_{me} =$	$\sqrt{2n} =$	$\frac{\mu'_2}{2} =$
$L_{mo} =$	$\sqrt{2} = 1{,}415$	$\mu_2'^2 =$
$\frac{n}{2} =$	$\nu_1^2 =$	$\mu_2'^3 =$
$d_1 =$	$\nu_1^3 =$	$\mu^2_3 =$
$d_2 =$	$\nu_1^4 =$	$\frac{1}{12} = 0{,}083$
$d_1 + d_2 =$	$2(\nu_1^3) =$	$\frac{7}{240} = 0{,}029$
$\frac{n}{4} =$	$3(\nu_1^4) =$	$\sqrt{\frac{3}{2n}} =$
$L_{Q_1} =$	$3(\nu_1\nu_2) =$	$\Sigma f\,(MP - \overline{X}) =$
$\frac{3n}{4} =$	$\sqrt{\nu_1 - \nu_1^2} =$	$\frac{MD}{\sigma} =$

Πίναξ Χρησιμοποιητέων Τύπων δι' Ὑπολογισμὸν Στατιστικῶν Παραμέτρων

I. Στιγμαὶ περὶ τὸν Ἀριθμητικὸν Μέσον

$$\mu_1 = \nu_1 = 0$$

$$\overline{\mu_2} = \nu_2 - \nu_1^2 - \frac{1}{12}$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3(\nu_1\nu_2) + 2(\nu_1^3) = 0$$

$$\bar{\mu}_4 = \nu_4 - 4(\nu_1\nu_3) + 6(\nu_1^2\nu_2) - 3(\nu_1^4) - \frac{\bar{\mu}_2}{2} + \frac{7}{240}$$

ἔνθα:

$$\nu_1 = \Sigma f(d') : n$$
$$\nu_2 = \Sigma f(d'^2) : n$$
$$\nu_3 = \Sigma f(d'^3) : n$$
$$\nu_4 = \Sigma f(d'^4) : n$$

II. Κεντρικὴ Τάσις

1. Ὑπολογιζόμενοι Μέσοι Ὅροι

α) Ἀριθμητικὸς Μέσος $\bar{X} = \bar{Z} + (\nu_1 \times c)$

β) Τετραγωνικὸς Μέσος $Q_m = \sqrt{\frac{\Sigma (fd)^2}{n}}$ ἔνθα $d = X - \bar{X}$

γ) Ἁρμονικὸς Μέσος $H_m = \frac{n}{\Sigma\left(f \frac{1}{X}\right)}$

δ) Ἀντιαρμονικὸς Μέσος $A_m = \frac{\Sigma (f \times MP)^2}{\Sigma (MP)}$

ε) Γεωμετρικὸς Μέσος $\text{Λογ}\, G_m = \frac{\Sigma (f\, \text{λογ}\, MP)}{n}$

2. Μέσοι Ὅροι Θέσεως

α) Διάμεσος $M_e = L_{me} + \left(\frac{\frac{n}{2} - \Sigma_i}{f} \times C\right)$

β) Ἐπικρατοῦσα Τιμὴ $M_0 = L_{mo} + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \times C\right)$

ἢ $M_0 = \bar{X} - 3(\bar{X} - M_e)$

γ) Πρῶτον Τεταρτημόριον $Q_1 = L_{Q_1} + \left(\frac{\frac{n}{4} - \Sigma_i}{f} \times C\right)$

ἢ $Q_1 = \bar{X} - 0{,}6745\ \sigma$

δ) Τρίτον Τεταρτημόριον $Q_3 = L_{Q_3} + \left(\dfrac{\frac{3n}{4} - \Sigma_i}{f} \times C \right)$

ἢ $Q_3 = \overline{X} + 0{,}6745\ \sigma$

ε) Δεκατημόριον $D = L_D + \left(\dfrac{\frac{nk}{10} - \Sigma_i}{f} \times C \right)$

στ) Ἑκατοντατημόριον $P = L_P + \left(\dfrac{\frac{nk}{100} - \Sigma_i}{f} \times C \right)$

ἔνθα $k = 1,2,3,4$ κ.ο.κ. οἱ ἀριθμοὶ τῶν αἰτουμένων δεκατημορίων καὶ ἑκατοντατημορίων.

ζ) Βαρυτέρα Τιμὴ ΒΤ = Μέγιστον ΜΡ $\times$ f (G. Fechner)

η) Ὁριακὴ Τιμὴ ΟΤ = Σ (f $\times$ MP) : 2 »

III. Διασπορά

1) Ἀπόλυτα Μέτρα

α) Εὖρος R = Μεγίστη Τιμὴ – Ἐλαχίστη Τιμὴ

β) Ἀπόκλισις Μέσου $MD = \Sigma\,(f \times MP - \overline{X}) : n$ ἢ $MD = 0{,}80\ \sigma$

γ) Πιθανὴ Ἀπόκλισις $PD = \sigma \times 0{,}6745 : \sqrt{n}$

δ) Τεταρτημοριακὴ Ἀπόκλισις $QD = Q_3 - Q_1 : 2$ ἢ $QD = 2\sigma : 3$

ε) Ἐνδοτεταρτημοριακὸν Εὖρος $IR = Q_3 - Q_1$

στ) Μέση Τετραγωνικὴ Ἀπόκλισις $\sigma = \sqrt{\nu_2 - \nu_1^2}$ ἢ $\sigma = 1{,}5\ PD$

ζ) Δείκτης Ἀσυμμετρίας $\beta_1 = \overline{\mu}_3^2 : \overline{\mu}_2^3 = 0$

η) Δείκτης Αἰχμηρότητος $\beta_2 = \overline{\mu}_4 : \overline{\mu}_2^2 + 3 = 6$

θ) Μέση Διαφορὰ Gini

$\Delta_G = 2\,C \times \Sigma_i\,(n - \Sigma_i) : n^2$ ἐπὶ Ἰσοπλατῶν Κατανομῶν

$\Delta_G = 2 \times \Sigma\,(n - \Sigma_i)\,\Sigma_i\,(X_{i+1} - X_1) : n^2$ ἐπὶ Ἀνισοπλατῶν Κατανομῶν

ι) Ἐμβαδὸν Καμπύλης Ἀνισότητος (Συντελεστὴς Gini)

$$g = \frac{\Delta_G : 2\,\overline{X}}{2}$$

2) Σχετικὰ Μέτρα

α) Συντελεστὴς Μεταβλητικότητος Ἀριθμ. Μέσου $V = \sigma \times 100 : \bar{X}$

β) Συντελ. Μεταβλητ. Μέσης Ἀποκλίσεως $V_{MD} = MD \times 100 : \bar{X}$

γ) Συντελ. Μεταβλητ. Τεταρτ. Ἀποκλίσεως $V_Q = Q_3 - Q_1 : Q_3 + Q_1$

IV. Κανονικὰ Σφάλματα

α) Ἀριθμ. Μέσου $\sigma_{\bar{x}} = \sigma : \sqrt{n}$

β) Διαμέσου $\sigma_{me} = 1{,}2533\ \sigma : \sqrt{n}$

γ) Μέσης Τετραγ. Ἀποκλίσεως $\sigma_\sigma = \sigma \sqrt{2n}$

δ) Τεταρτημοριακῆς Ἀποκλίσεως $\sigma_Q = 1{,}3626\ \sigma : \sqrt{n}$

ε) Συντελεστοῦ Μεταβλητικότητος $\sigma_v = \dfrac{V}{\sqrt{2n}} \sqrt{1 + \dfrac{2(v)^2}{(10)^4}}$

στ) Δευτέρας Στιγμῆς περὶ τὸν $\bar{X}$ $\sigma_\mu = \sqrt{\mu_4 - \mu_2^2 : n}$

ζ) Τρίτης Στιγμῆς περὶ τὸν $\bar{X}$ $\sigma_{\mu 3} = \sqrt{\mu_6 - \mu_3^2 : n}$

η) Τετάρτης Στιγμῆς περὶ τὸν $\bar{X}$ $\sigma_{\mu_4} = \sqrt{\mu_8 - \mu_4^2 : n}$

θ) Συντελεστοῦ Ἀσυμμετρίας $\sigma_{\beta_1} = \sqrt{6 : n}$

ι) Συντελεστοῦ Αἰχμηρότητος $\sigma_{\beta_1} = \sqrt{24 : n}$

ια) Μέσον Σφάλμα Παρατηρήσεων $\sigma = \pm \sqrt{\dfrac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{n-1}}$

V. Δείκτης Συγκεντρώσεως περὶ τὸν Ἀριθμητικὸν Μέσον

$$h = 1 : \sigma \sqrt{2}$$

VI. Σφάλμα Ὁμάδος Παρατηρήσεων

$$1 : \sqrt{12\,n} < \frac{\sigma}{10}$$

VII. Ἀριθμὸς Ἀπαιτουμένων Παρατηρήσεων διὰ τὴν Ἐκτίμησιν τοῦ $\overline{X}$

α) Εἰς πιθανότητα 0,68 $$n = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\overline{x}}}\right)^2$$

β) Εἰς πιθανότητα 0,95 $$n = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\overline{x}}} \times 1{,}96\right)^2$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) R. Modley : How to use pictorial statistics (1937)
2) E. Mills : Statistical Methods (1938)
3) J. Riggleman : Graphic Methods (1939)
4) A. Neiswanger : Elementary Statistical Methods (1943)
5) G. Snedecor : Statistical Methods (1946)
6) M. Arkin-R. Colton : Outline of Statistical Methods (1950)
7) V. Tosi : Cenni di Statistica (1952)
8) M. Μπρίκα : Μαθήματα Στατιστικῆς (1953)
9) L. Livi : Principi di Statistica (1953)
10) F. David : A. Statistical Primer (1953)
11) A. Monjallon : Introduction à la Methode Statistique (1954)
12) E. Grow-F. Davis-M. Maxfield : Statistics Manual (1955)
13) A. Aitken : Statistical Mathematics (1957)
14) R. Goodman : Teach Yourself Statistics (1957)
15) K. Ἀθανασιάδη : Στατιστικὴ (1957)
16) K. Μαργαρίτη : Μαθήματα Στατιστικῆς (1959)
17) M. Quenouille : Rapid Statistical Calculations (1959)
18) B. Gnedenko-A. Khintchine : Introduction à la theorie des probabilités (1960)
19) J. Pfanzagl : Allgemeine Methodenlehre der Statistik (1960)
20) M. R. Spiegel : Theory and Problems of Statistics (1961)
21) F. Crowley-M. Cohen : Statistics (1963)