ΔΙΑΣΤΑΣΙΑΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

Τοῦ Καθηγητοῦ κ. ΣΤΥΛΙΑΝΟΥ Α. ΣΑΡΑΝΤΙΔΗ

"Now, if such a theory of dimensions is requisite in dealing with the precise ideas of physical magnitudes, it seems to be still more desirable as regards the quantities with which we are concerned in economics,,.

W. Stanley Jevons, The Theory of Political Economy, Κεφ. *III.*

0. ΠΡΟΛΟΓΟΣ*

Ἡ χρῆσις τῶν μαθηματικῶν εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν κατὰ τὴν τελευταίαν τριακονταετίαν ἀποτελεῖ τὴν σημαντικωτέραν ἐξέλιξιν εἰς τὸν κλάδον αὐτὸν τοῦ ἀνθρωπίνου ἐπιστητοῦ. Ἡ κατασκευὴ τῶν οἰκονομικῶν ὑποδειγμάτων ** εἰς τὴν τοιαύτην ἔκτασιν ἦτο προϊὸν τῆς ἐξελίξεως ταύτης. Οὐχί, ὅμως, μόνον εἰς τὴν μορφοποίησιν τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων (συναρτήσεις), ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῶν παραμετρικῶν σταθερῶν τούτων συνέβαλεν ἡ μαθηματικὴ μέθοδος συνεπικουρουμένη ὑπὸ τῆς στατιστικῆς μεθοδολογίας.

Ἐκ τῶν κυρίων μελημάτων τῆς μαθηματικῆς μεθόδου εἶναι ἡ δημιουργία καὶ ὁ ἔλεγχος συναρτησιακῶν σχέσεων. Πρὸς τὴν κατεύθυνσιν αὐτὴν ἀνεπτύχθη ἡ τεχνικὴ τῆς διαστασιακῆς ἀναλύσεως, ἥτις τὸ πρῶτον ἔτυχεν ἐφαρμογῆς εἰς τὴν Μηχανικὴν καὶ Φυσικὴν μὲ δημιουργοὺς της κυρίως τοὺς Buckingham (1915), Bridgman καὶ Langhaar (1953). Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς τεχνικῆς αὐτῆς εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν καὶ τὴν οἰκονομομετρικὴν ἐγένετο, μετὰ δισταγμοῦ τινος, κατὰ τὴν τελευταίαν μόνον δεκαπενταετίαν ὑπὸ τοῦ Ὀλλανδοῦ F. de Jong καὶ τῆς D. Ryde. Εἶναι δὲ περισσότερον γνωστὴ εἰς τοὺς Εὐρωπαίους οἰκονομολόγους ἢ εἰς τοὺς Ἀγγλοσάξονας.

* Ἐπιθυμοῦμεν νὰ εὐχαριστήσωμεν τὸν Βέλγον καθηγητὴν Jean Paelinck, ὅστις εὑρισκόμενος εἰς τὸ Πανεπιστήμιον Bristol κατὰ τὸ 1968 μᾶς ὑπέδειξε τὴν μελέτην τῆς ἀναλύσεως ταύτης.

** Βλ. Σ. Α. Σαραντίδη, Μαθήματα Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως, Β. Ἀνάλυσις Οἰκονομικῶν Ὑποδειγμάτων, Πειραιεύς, 1972.

Ἡ διαστασιακὴ ἀνάλυσις ἐπιτελεῖ κυρίως δύο λειτουργίας: Πρῶτον, τὸν ἔλεγχον τῶν ὑφισταμένων θεωρητικῶν ἐξισώσεων· καὶ δεύτερον, τὴν ἐξεύρεσιν καὶ δημιουργίαν συναρτησιακῶν σχέσεων μεταξὺ οἰκονομικῶν ποσοτήτων (μεταβλητῶν). Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς δευτέρας λειτουργίας εὑρίσκεται εἰσέτι εἰς νηπιακὸν στάδιον.

Γενικῶς ἡ ἐφαρμογὴ τῆς διαστασιακῆς ἀναλύσεως εἰς θεωρητικὰς συναρτήσεις δὲν παρουσιάζει τὴν δυσκολίαν ἣν αὕτη παρουσιάζει προκειμένου περὶ οἰκονομομετρικῶν συναρτήσεων. Ἡ δυσκολία δὲ αὕτη ἀναφέρεται κυρίως εἰς τὸν καθορισμὸν τῶν διαστασιακῶν σταθερῶν εἰς τὰς συναρτήσεις. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ ἀνάλυσις αὕτη ἀναγκαίως καταφεύγει εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν καὶ εἰς a priori θεωρήσεις πρὸς βοήθειαν. Δεδομένου δὲ ὅτι ἡ τεχνικὴ αὕτη εὑρίσκεται εἰς τὸ στάδιον τῆς ἀναπτύξεως δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν τελεσιδίκως περὶ αὐτῆς.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

1. 0. Εἰσαγωγή

Ἡ ἐφαρμογὴ ποσοτικῶν μεθόδων εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν ἀποτελεῖ τὴν κυριαρχοῦσαν τάσιν σήμερον. Ὡς ἐκ τούτου ἡ προσπάθεια ἀνευρέσεως μορφῶν συσχετίσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν ποσοτήτων (μεταβλητῶν) καὶ ἡ ποσοτικὴ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων, αἱ ὁποῖαι περιγράφουν ἓν οἰκονομικὸν σύστημα, ἁπλοῦν ἢ πεπλεγμένον, ἀποτελεῖ κύριον ἔργον τῶν οἰκονομολόγων.

Ἀφοῦ καθορισθοῦν αἱ μεταβληταί, αἱ ὁποῖαι περιγράφουν ἢ ὑπεισέρχονται, κατὰ τὴν θεώρησιν τοῦ οἰκονομικοῦ ἐρευνητοῦ, εἰς τὸ οἰκονομικὸν σύστημα, τὸ σημαντικώτερον ἔργον εἶναι ὁ καθορισμὸς τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν, ἤτοι ἡ μορφὴ κατὰ τὴν ὁποίαν αὗται συνδέονται μεταξύ των*. Ἡ οἰκονομικὴ θεωρία ἐπιτελεῖ τὸ ἔργον αὐτὸ χρησιμοποιοῦσα τόσον τὴν ἀπαγωγικήν, ὅσον καὶ τὴν ἐπαγωγικὴν μέθοδον. Δι' αὐτῆς τῆς λειτουργίας της ἡ θεωρία μᾶς δίδει τὸν «ἀκριβῆ» τύπον ἢ τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως, ἥτις περιγράφει τὸ οἰκονομικὸν σύστημα. Ἐλλείψει μιᾶς θεωρίας, ἡ ἐμπειρικὴ ἔρευνα δύναται νὰ μᾶς παράσχῃ πρακτικὸν τύπον, ὅστις συνδέει τὰς μεταβλητάς. Τοῦτο δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς ἐκτιμήσεως μιᾶς «ἐμπειρικῆς» συναρτήσεως διὰ τῆς τεχνικῆς τῆς παλινδρομήσεως, ἐφ' ὅσον ἐκ ταύτης προκύπτει ὑψηλὸς συντελεστὴς προσδιορισμοῦ.

Εἰς τὴν διαδικασίαν καθορισμοῦ τῆς σχέσεως μεταξὺ διαφόρων μεταβλητῶν σημαντικὸν ρόλον δύναται νὰ παίξῃ καὶ ἱκανὴν βοήθειαν νὰ παράσχῃ ἡ ἀνάλυσις διαστάσεων ἢ διαστασιακὴ ἀνάλυσις (Dimensional Analysis). Αὕτη εἶναι μαθηματικὴ μέθοδος ἁπλῆς μορφῆς, ἡ ὁποία διὰ

---

* A. Koutsoyiannis, Theory of Econometrics, MacMillan, London, 1973, σελ. 11 - 16.

τῆς χρήσεως τῆς ἐννοίας τῆς διαστάσεως καὶ ἑνὸς βασικοῦ θεωρήματος, περὶ ὧν κατωτέρω, θέτει περιορισμοὺς εἰς τὴν διατύπωσιν μιᾶς ἐξισώσεως ἢ συναρτήσεως περιγραφούσης ἓν οἰκονομικὸν σύστημα.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται εἰς τὴν φυσικὴν ἀπὸ ὀγδοηκονταετίας περίπου, εἶναι δὲ ἰδιαιτέρως χρήσιμος σήμερον εἰς τὴν ὑδραυλικὴν καὶ ἀεροναυτικήν. Εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἡ μέθοδος αὕτη ἔτυχεν ἐφαρμογῆς ὑπὸ τοῦ Γάλλου Maurice Allais * τὸ 1953 καὶ τῆς Dorothy Ryde ** τὸ 1955. Ἡ συμβολὴ τῆς τελευταίας ἀφεώρα εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς διαστασιακῆς ἀναλύσεως εἰς τὰς συναρτήσεις ζητήσεως. Ἡ σημαντικωτέρα ὅμως συμβολὴ προέρχεται ἀπὸ τὸν Ὀλλανδὸν καθηγητὴν Frits J. de Jong, ὅστις ἐδημοσίευσε τὸ 1967 βιβλίον ὑπὸ τὸν τίτλον «Dimensional Analysis for Economists» (North - Holland Publishing Co, Amsterdam). Οὕτως, οὐσιαστικῶς ἡ ἐφαρμογὴ τῆς διαστασιακῆς ἀναλύσεως εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀρχίζει συστηματικῶς ἀπὸ τοῦ ἔτους ἐκείνου καὶ συνεπῶς εὑρίσκεται εἰσέτι εἰς τὰ πρῶτα βήματά της. Χαρακτηριστικὸν εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ διαστασιακὴ ἀνάλυσις οἰκονομικῶν ποσοτήτων εἶναι γνωστὴ κυρίως μεταξὺ τῶν Εὐρωπαίων οἰκονομολόγων, ἐνῶ ἐλάχιστα εἶναι γνωστὴ μεταξὺ τῶν Ἀγγλοσαξόνων.

1. 1. Ἡ ἔννοια τῆς διαστάσεως τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν

Πρὶν ἢ προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ καθορίσωμεν ὡρισμένας ἐννοίας. Καὶ πρῶτον τί ἐννοοῦμεν λέγοντες οἰκονομικὴν διάστασιν ἢ διαστατὴν ποσότητα. Διάστασις εἶναι τὸ σύνολον προσθετικῶν ποσοτήτων τοῦ αὐτοῦ γένους. Οὕτω δολλάρια, δραχμαί, λίραι, κλπ. εἶναι προσθετικαὶ ποσότητες, ἤτοι ποσότητες ἀνήκουσαι εἰς τὴν αὐτὴν διάστασιν, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν, ἐφ' ὅσον δοθῇ ἡ μεταξύ των σχέσις (= συναλλαγματικὴ τιμή). Ἅπασαι αἱ χρηματικαὶ ἀξίαι ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν διάστασιν, ἥτις ὀνομάζεται χρῆμα, συμβολιζομένη ὡς [M]. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν :

$$\text{Δολλάρια, λίραι, δραχμαὶ} \in [M]$$

Τὸ σύμβολον ∈ σημαίνει : ἀνήκει εἰς... ἢ εἶναι στοιχεῖον τῆς διαστάσεως [M].

Δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰ διάφορα νομίσματα εἰς ὅρους ἑνὸς ἐξ αὐτῶν. ἤτοι εἰς δολλάρια, ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$\text{£} = 2.40\ \$$$

$$\text{Δρχ} = 0.033\ \$$$

καὶ

$$\$ = 1.00\ \$$$

---

* Traité d' Economie Pure.

** «Some Applications of Dimensional Analysis to Economic Demand Equations». Πολυγραφημένον κείμενον ὑποβληθὲν εἰς τὸ 17ον Εὐρωπαϊκὸν Συνέδριον τῆς Οἰκονομετρικῆς Ἑταιρίας εἰς Κίελον Γερμανίας τὴν 1 - 3 Σεπτεμβρίου 1955. Τὸ κείμενον τοῦτο δὲν εἶδε τὸ φῶς τῆς δημοσιότητος καὶ συνεπῶς στερούμεθα γνώσεως περὶ τούτου.

Γενικεύοντες ἔχομεν : $A,\ B,\ \Gamma,\ \Delta,\ E,\ \ldots\ldots\ \Omega \in [S]$,

καὶ

$$B = \beta A$$
$$\Gamma = \gamma A$$
$$\Delta = \delta A$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$\Omega = \omega A$$

Ἀνωτέρω ἅπαντα τὰ στοιχεῖα τὰ ἀνήκοντα εἰς τὴν διάστασιν [S] μετετράπησαν εἰς A καὶ συνεπῶς δύνανται νὰ προστεθοῦν. Ἡ διαδικασία αὕτη εἶναι ἡ πρᾶξις τῆς μετρήσεως, ἥτις πρέπει νὰ διαστέλλεται ἐκ τῆς πράξεως τῆς ἀπαριθμήσεως. Ἡ μέτρησις ποσότητος, π.χ. πορτοκαλίων, σημαίνει τὴν ζύγισιν ταύτης (εἰς τόννους, λίβρας, χιλιόγραμμα, κλπ.), ἡ δὲ ἀπαρίθμησις συνίσταται εἰς τὴν ἀναφορὰν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πορτοκαλίων (10, 100, 1000, κ.ο.κ. πορτοκάλια). Ὅταν, λοιπόν, ὁμιλοῦμεν περὶ διαστάσεων πρέπει νὰ ἔχωμεν κατὰ νοῦν τὴν μέτρησιν. Ἡ μέτρησις δὲ αὕτη δύναται νὰ εἶναι πρωτογενὴς (βασικὴ) ἀναφερομένη εἰς ὡρισμένον μέτρον (standard) *, ὅπερ εἶναι προϊὸν φυσικοῦ τινος προσθετικοῦ νόμου, ἢ δευτερογενὴς συντιθεμένη ἐκ πρωτογενῶν τοιούτων. Οὕτως, ὁ χρόνος εἶναι πρωτογενὴς μέτρησις καὶ συνεπῶς πρωτογενὴς ἢ βασικὴ διάστασις. Τὸ αὐτὸ καὶ ἡ ἀπόστασις. Ἡ ταχύτης, ὅμως, εἶναι σύνθετος ἢ δευτερογενὴς μέτρησις καὶ συνεπῶς δευτερογενὴς διάστασις, διότι εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀποστάσεως διὰ τοῦ χρόνου.

Διὰ τὴν ἔρευναν οἱουδήποτε συστήματος, οἰκονομικοῦ ἢ μή, καθορίζομεν πρῶτον τὰς βασικὰς ποσότητας, αἱ ὁποῖαι περιγράφουν τοῦτο καὶ μετροῦμεν αὐτὰς βάσει ἑνὸς συμβατικοῦ συστήματος μετρήσεως.

Ἔστω ὅτι αἱ βασικαὶ ποσότητες εἶναι A, B, Γ. Ἐκ τούτων δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν μίαν δευτερογενῆ ποσότητα ὡς ἡ $\Phi(A, B, \Gamma)$, ὅπου Φ εἶναι ἡ μαθηματικὴ μορφὴ τῆς μεταξὺ τῶν βασικῶν ποσοτήτων σχέσεως. Ἐὰν τώρα μεταβάλωμεν τὰς μονάδας μετρήσεως τοῦ συστήματος κατὰ τὰ μέτρα $1/\alpha$, $1/\beta$, καὶ $1/\gamma$, τότε θὰ ἔχωμεν

$$\Phi(\alpha A,\ \beta B,\ \gamma\Gamma)$$

Ἔστω, περαιτέρω, ὅτι ἔχομεν δύο τιμὰς τῆς ὡς ἄνω συναρτήσεως (δευτερογενοῦς ποσότητος):

$$\Phi(\alpha A_1,\ \beta B_1,\ \gamma\Gamma_1) \quad \text{καὶ} \quad \Phi(\alpha A_2,\ \beta B_2,\ \gamma\Gamma_2)$$

* «Each different sort of quantity is, of course, expressed in terms of its own appropriate unit — .... Surface is measured by the square yard — that is to say, the unit of length is involved twice over.......». W. S. Jevons, The Theory of Political Economy (Ed. R. D. Collison Black) Pelican Classics, σελ. 117.

Ὁ λόγος τῶν δύο ποσοτήτων εἶναι :

$$\frac{\Phi\ (\alpha A_1,\ \beta B_1,\ \gamma \Gamma_1)}{\Phi\ (\alpha A_2,\ \beta B_2,\ \gamma \Gamma_2)} = \frac{\Phi\ (A_1,\ B_1,\ \Gamma_1)}{\Phi\ (A_2,\ B_2,\ \Gamma_2)}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐμφαίνεται ὅτι ὁ λόγος δύο δευτερογενῶν ποσοτήτων εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν μονάδων μετρήσεως. Ὁ λόγος δύο ποσοτήτων μετρουμένων εἰς δολλάρια μένει ὁ αὐτὸς καὶ εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ μέτρησις γίνει εἰς ἕτερον νόμισμα. Ἡ ἀνωτέρω διατύπωσις ἀποτελεῖ τὴν ἀρχὴν τῆς ἀπολύτου σημασίας τῶν σχετικῶν μεγεθῶν. Ἑκάστη δὲ δευτερογενὴς ποσότης, ἥτις ἱκανοποιεῖ τὴν ἀρχὴν ταύτην δύναται νὰ γραφῇ ὡς γινόμενον δυνάμεων τῶν βασικῶν ποσοτήτων.

Ἡ ἔκφρασις τῆς δευτερογενοῦς ποσότητος εἰς ὅρους τῶν βασικῶν αὐτῆς διαστάσεων ἀποτελεῖ τὸν διαστασιακὸν τύπον.

1. 2. Κυριώτεραι οἰκονομικαὶ διαστάσεις

Πᾶσα οἰκονομικὴ μεταβλητὴ ἢ παράμετρος ἀνήκει εἰς κάποιαν διάστασιν εἴτε βασικήν, ἐὰν πρόκειται περὶ πρωτογενοῦς ποσότητος, εἴτε δευτερογενῆ, ἐὰν πρόκειται περὶ συνθέτου ποσότητος. Τὰς κυριωτέρας βασικὰς διαστάσεις δυνάμεθα νὰ συμβολίσωμεν συμβατικῶς ὡς ἑξῆς :

Τὰς χρηματικὰς ἀξίας - ἀποθέματα (stocks)	μὲ τὸ	[M]
Τὰ πράγματα ἢ πραγματικὰς ἀξίας (stocks)	μὲ τὸ	[R]
Τὸν χρόνον	μὲ τὸ	[T]

Πρὶν ἢ προχωρήσωμεν ὅμως θὰ πρέπει νὰ διευκρινήσωμεν τὰς ἀνωτέρω ἐννοίας. Καὶ πρῶτον θὰ πρέπει νὰ διακρίνωμεν μεταξὺ μεταβλητῶν ἀποθέματος (stocks) καὶ ροῆς (flow). Ἡ μεταβλητὴ - ἀπόθεμα ἀναφέρεται εἰς μίαν ὡρισμένην χρονικὴν στιγμὴν καὶ συνεπῶς δὲν ἐνέχει τὴν διάστασιν «χρόνος». Ἡ μεταβλητὴ - ροὴ ἔχει ἔννοιαν μόνον ἐν ἀναφορᾷ πρὸς μίαν χρονικὴν περίοδον καὶ συνεπῶς ἐνέχει τὴν διάστασιν τοῦ χρόνου. Ἡ ποσότης τοῦ χρήματος εἰς τὴν οἰκονομίαν, ἡ ὑφισταμένη ποσότης ὑλικοῦ κεφαλαίου τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1969, κλπ., εἶναι μεταβληταὶ - ἀποθέματα. Ὁ μηνιαῖος μισθός, τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα ἑνὸς ἔτους, κλπ., εἶναι μεταβληταὶ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς ροῆς. Κατὰ συνέπειαν μία χρηματικὴ ἀξία ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀποθέματος ἀνήκει εἰς τὴν διάστασιν [M]· ὑπὸ τὴν ἔννοιαν δὲ τῆς ροῆς, ἀνήκει εἰς τὴν διάστασιν $[\,M/T\,] = [\,M\,T^{-1}\,]$. Τὸ αὐτὸ θὰ πρέπει νὰ λεχθῇ καὶ ὡς πρὸς τὴν διάστασιν [R], ἥτις συμβολίζει διάστασιν πραγματικῶν ἀξιῶν.

Τὴν διάστασιν [R] δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν εἰς περισσοτέρας διαστάσεις, ἀναλόγως τῶν ἀναγκῶν τῆς ἀναλύσεως. Οὕτω, τὰ πρὸς κατανάλωσιν ἀγαθὰ δυνάμεθα νὰ συμβολίσωμεν μὲ $[\,R_E\,]$. Τὰ ἀγαθὰ παγίου κεφαλαίου μὲ $[\,R_K\,]$. Τὴν ποσότητα τῆς ἐργασίας ἢ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀπασχολουμένων μὲ [R_L] *.

Μὲ βάσιν τὰς ἀνωτέρω πρωτογενεῖς διαστάσεις δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν δευτερογενεῖς τοιαύτας. Οὕτως, αἱ τιμαὶ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως χρηματικῆς ἀξίας διὰ πραγματικοῦ τινος μεγέθους, ἤτοι [MR^{-1}]. Ἡ σχετικὴ μεταβολὴ τῶν τιμῶν ἐν τῷ χρόνῳ θὰ εἶναι :

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \cdot \frac{1}{P} \in \left[\frac{MR^{-1}}{T} \right] \left[\frac{1}{MR^{-1}} \right] = [T^{-1}]$$

Οἱ ἀνωτέρω ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν συμβολισμοὶ ἀποτελοῦν τοὺς διαστασιακοὺς τύπους τῶν μεταβλητῶν.

Τὴν ἔννοιαν τῆς διαστάσεως σπανίως συναντῶμεν εἰς τὰ διάφορα ἐγχειρίδια οἰκονομικῆς. Πλὴν ὅμως ὑπάρχουν καὶ ἐξαιρέσεις. Τὴν ἔννοιαν τῆς χρονικῆς διαστάσεως ἀναφέρουν οἱ K. E. Boulding (Economic Analysis, New York, 1966, σελ. 6 - 7), G. Ackley (Macro-Economic Theory, New York, 1961, σελ. 5 - 6), R. G. D. Allen (Macro-Economic Theory, London, 1967, σελ. 2 - 3), καὶ P. A. Samuelson (Foundations of Economic Analysis, Atheneum, New York, 1965, σελ. 125 - 126). Ὁ Carl Christ (Econometric Models and Methods, 1966, σελ. 51 - 55) εἶναι ἴσως ὁ μόνος, ὅστις δημοσιεύει πίνακα διαστάσεων τῶν κυριωτέρων οἰκονομικῶν μεταβλητῶν.

Τὴν χαρακτηριστικωτέραν ἴσως περίπτωσιν, ἐν τούτοις, ἀποτελεῖ τὸ ἔργον τοῦ Ἄγγλου Stanley Jevons (The Theory of Political Economy, 1871), εἰς εἰδικὴν παράγραφον τοῦ ὁποίου ἐκτίθεται ἡ θεωρία τῶν διαστάσεων οἰκονομικῶν ποσοτήτων (Theory of dimensions of Economic Quantities, Κεφ. III). Ὁ Jevons ὑποστηρίζει ὅτι ἐὰν μία θεωρία διαστάσεων εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν ἀκριβῆ ἀνάλυσιν τῶν φυσικῶν ποσοτήτων, εἶναι ἔτι πλέον ἐπιθυμητὴ προκειμένου περὶ τῶν οἰκονομικῶν ποσοτήτων, διότι τὸ δυσχερέστερον ἔργον εἰς τὴν ἐπιστήμην εἶναι ἡ ἀκριβὴς ἀντίληψις καὶ κατανόησις τῆς φύσεως τῶν μεγεθῶν μὲ τὰ ὁποῖα ἀσχολούμεθα. Ἡ ἔννοια τῆς θερμότητος ἀπετέλεσεν ἐπὶ μακρὸν τὸ ἀντικείμενον συζητήσεων καὶ πειραματισμῶν πρὶν ἢ οἱ φυσικοὶ καταλήξουν εἰς τὴν μέτρησιν τῆς ποσότητος ταύτης. Εἰς τὴν ἐπιστήμην μας οἱ οἰκονομολόγοι ἐπὶ ἕνα ἢ δύο αἰῶνας συνεζήτουν περὶ πλούτου, ζητήσεως, προσφορᾶς, ἀξίας, παραγωγῆς, κεφαλαίου, τόκου, κλπ., ἀλλὰ σπανίως ἐλέγετο ἀκριβῶς ποία εἶναι ἡ φύσις τῶν ὑπ' ὄψιν ποσοτήτων **. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἀκριβῶς ὡδήγησε τὸν Jevons εἰς τὴν προσπάθειαν ἀναλύσεως, κατὰ τὸ μέτρον τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, τῶν διαστάσεων οἰκονομικῶν ποσοτήτων. Εἰς τὸ ἐν λόγῳ βιβλίον του ἀναφέρεται εἰς τὰς διαστάσεις διαφόρων οἰκονομικῶν ποσοτήτων τὰς ὁποίας ἀναλύει εἰς ἕκαστον κεφάλαιον. Οὕτως, εἰς τὸ κεφ. IV(σελ. 131) ὁμιλεῖ περὶ τῆς διαστάσεως τῆς ἀξίας, εἰς κεφ. V (σελ.

---

* Ἂς μᾶς ἐπιτραπῆ ἡ διατήρησις τῶν λατινικῶν χαρακτήρων διὰ λόγους ὁμοιομορφίας πρὸς τὴν διεθνῆ βιβλιογραφίαν.

** Ibid., σελ. 118.

195) περὶ διαστάσεως τῆς ἐργασίας καὶ εἰς κεφ. VII περὶ διαστάσεως τοῦ κεφαλαίου (σελ. 232) καὶ τοῦ τόκου (σελ. 241).

Κατωτέρω παραθέτομεν ἐνδεικτικῶς τοὺς διαστασιακοὺς τύπους ὡρισμένων οἰκονομικῶν ποσοτήτων.

Διαστάσεις οἰκονομικῶν ποσοτήτων

Οἰκονομικὴ ποσότης	Διάστασις
Ἀπόθεμα ἀγαθοῦ τινος (ἔννοια stock)	R
Ροὴ ποσότητος ἀγαθοῦ τινος (ἔννοια flow)	RT^{-1}
Χρηματικὴ ἀξία - ἀπόθεμα	M
Χρηματικὴ ἀξία - Ροὴ	MT^{-1}
Πραγματικὸν εἰσόδημα (παραγωγὴ) ὡρισμένης περιόδου	RT^{-1}
Χρηματικὸν εἰσόδημα » » »	MT^{-1}
Μεταβολὴ χρηματικοῦ εἰσοδήματος ἐν τῷ χρόνῳ $\left(\frac{\Delta Y}{\Delta t}\right)$	$\frac{MT^{-1}}{T} = MT^{-2}$
Σχετικὴ μεταβολὴ χρηματικοῦ εἰσοδήματος $\left(\frac{\Delta Y}{\Delta t} : Y\right)$	T^{-1}
Ἀπόλυτος μεταβολὴ χρηματικοῦ μεγέθους	MT^{-1}
Ὑλικὸν κεφάλαιον ἐν τῇ οἰκονομίᾳ	R
Ἐπενδύσεις ὑλικοῦ κεφαλαίου	RT^{-1}
Μεταβολὴ χρόνου (Δt)	T
Τιμαὶ	$\frac{MT^{-1}}{RT^{-1}} = MR^{-1}$
Σχετικὴ μεταβολὴ τιμῶν $\left(\frac{\Delta P}{\Delta t} : P\right)$	T^{-1}
Ἀριθμὸς ἀπασχολουμένων ἐντὸς περιόδου τινὸς	RT^{-1}
Ἡμερομίσθιον	MR^{-1}
Ποσὸν τόκου περιόδου τινὸς	MT^{-1}
Ἐπιτόκιον	$\frac{MT^{-1}}{M} = T^{-1}$

Ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν $\left(\frac{dC}{dY}\right)$.	$\frac{RT^{-1}}{RT^{-1}} = 1$
Ὁριακὴ παραγωγικότης ἐργασίας	$R_E\, R_L^{-1}$
Λόγος κεφαλαίου - εἰσοδήματος	$\frac{R}{RT^{-1}} = T$
Ὁριακὸς λόγος ὑποκαταστάσεως i διὰ j	$R_i\, R_j^{-1}$
Ἐλαστικότης ὑποκαταστάσεως i διὰ j	$\frac{R_i}{R_j} \cdot \frac{R_j}{R_i} = 1$
Ἐλαστικότης συναρτήσεως $y = \varphi(x)$: $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{d\log y}{d\log x}$	1
Κυκλοφορικὴ ταχύτης χρήματος (V)	$\frac{MT^{-1}}{M} = T^{-1}$
Διακρατουμένη ποσότης χρήματος (k, Σχολῆς Cambridge)	T

1. 3. Διαστατὴ καὶ ἀδιάστατος ποσότης

Πᾶσα ποσότης ἔχουσα διάστασιν καλεῖται διαστατὴ ποσότης. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἀδιάστατοι «ποσότητες» *. Τοιαῦται ποσότητες εἶναι ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος ἡ ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν καὶ αἱ ἐλαστικότητες. Ἀδιάστατος ποσότης εἶναι, λοιπόν, ὁ λόγος δύο ποσοτήτων ἀνηκουσῶν εἰς τὴν αὐτὴν διάστασιν. Αἱ ἀδιάστατοι ποσότητες ἀνήκουν εἰς τοὺς καθαροὺς ἀριθμοὺς καὶ δὲν μεταβάλλονται εἰς περίπτωσιν μεταβολῆς τοῦ συστήματος μετρήσεως τῶν ποσοτήτων. Παραδείγματος χάριν, ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς ἢ συντελεστὴς κατευθύνσεως μιᾶς γραμμῆς ἀπεικονιζούσης τὴν σχέσιν δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων ὡς καὶ ἡ ἐλαστικότης εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς γραμμῆς εἶναι ἀριθμοὶ μὴ ἐπηρεαζόμενοι ἐκ τοῦ συστήματος μετρήσεως τῶν μεταβλητῶν.

1. 4. Διαστασιακὴ σταθερὰ

Ὡς διαστασιακὴν σταθερὰν θὰ ὁρίσωμεν τὴν σταθερὰν μιᾶς συναρτήσεως ἢ τὸν συντελεστὴν ἀναλογικότητος, ὅστις μεταβάλλεται εἰς περίπτωσιν μεταβολῆς τοῦ συστήματος μετρήσεως τῶν ποσοτήτων, ἐν ἀντιθέσει πρὸς ὅ,τι συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν καθαρῶν ἀριθμῶν, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω.

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $Y = \alpha + bX$, ἡ σταθερὰ α ἔχει τὴν διάστασιν τῆς Y

* Ἡ ἔννοια τῆς ποσότητος ἐνταῦθα εἶναι σχετική, ὑποδηλοῦσα ἀριθμητικὴν τιμήν.

καὶ συνεπῶς πᾶσα μεταβολὴ τοῦ συστήματος μετρήσεως τῆς τελευταίας θὰ μεταβάλη τὴν σταθεράν. Συνεπεία τούτου, ἐὰν εἰς μίαν συναρτησιακὴν σχέσιν φυσικῶν ποσοτήτων μεταβληθῇ τὸ σύστημα μετρήσεως τούτων, διὰ νὰ διατηρηθῇ ἡ ὀρθότης τῆς σχέσεως θὰ πρέπει νὰ εἰσάγωμεν μίαν διαστασιακὴν σταθεράν. Παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξίσωσις κινήσεως πίπτοντος σώματος δύναται νὰ εἶναι $S = 16t^2$, ὅπου S = ἀπόστασις καὶ t = χρόνος. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ὀρθὴ ἐφ' ὅσον τὸ S μετρεῖται εἰς πόδας καὶ ὁ χρόνος εἰς δευτερόλεπτα, διὸ καὶ ἀ τ ε λ ὴ ς καλεῖται. Ἐὰν τὸ S μετρῆται εἰς μέτρα καὶ τὸ t εἰς πρῶτα λεπτά, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἐσφαλμένη. Διὰ νὰ καταστήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τ ε λ ε ί α ν, ἤτοι ἰσχύουσαν διὰ πᾶσαν μονάδα μετρήσεως θὰ πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἀριθμητικὸν συντελεστὴν 16 διὰ μιᾶς διαστασιακῆς σταθερᾶς, ἥτις εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος (g) καὶ ἡ ἐξίσωσις θὰ γίνῃ : $S = {}^1/_2 gt^2$.

Διὰ νὰ καθορίσωμεν τὰς διαστάσεις μιᾶς ἐξισώσεως δέον νὰ γνωρίζωμεν, πλὴν τῶν διαστάσεων τῶν μεταβλητῶν ταύτης, καὶ τὴν διάστασιν τῆς τυχὸν ὑπαρχούσης σταθερᾶς. Διὰ νὰ κατορθώσωμεν τοῦτο πρέπει νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὴν σταθεράν, δεδομένου ὅτι, πλὴν τῶν περιπτώσεων τῶν θ ε μ ε λ ι ω δ ῶ ν ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ν, δὲν εἶναι γνωστὴ ἡ διάστασις a p r i o r i.

Οὕτως, ὁ καθορισμὸς τῆς διαστάσεως τῆς σταθερᾶς εἰς τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς τύπου Cobb - Douglas : $X = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$ θὰ γίνῃ διὰ τῆς :

$$A = \frac{X}{K^{\alpha} L^{1-\alpha}},$$

ἤτοι
$$A \in \frac{[R_E \, T^{-1}]}{[R_K^{\alpha}]\,[R_L^{1-\alpha} \, T^{\alpha-1}]} = [R_E \, R_K^{-\alpha} \, R_L^{\alpha-1} \, T^{-\alpha}]$$

Ἔστω, ἐπίσης, ὅτι ἔχομεν τὴν κατωτέρω παραλλαγὴν συναρτήσεως παραγωγῆς τύπου σ τ α θ ε ρ ᾶ ς ἐ λ α σ τ ι κ ό τ η τ ο ς ὑ π ο κ α τ α σ τ ά σ ε ω ς (CES - production function) *.

$$X = [\kappa K^{\alpha} + (1 - \kappa) \, L^{\alpha}]^{1/\alpha}$$

ὅπου κ καὶ (1 — κ) εἶναι τεχνολογικαὶ παράμετροι ($0 < \kappa < 1$), N ἡ ἀπασχολουμένη ἐργασία μετρουμένη εἰς ἀνθρωπο - ὥρας, K τὸ πραγματικὸν κεφάλαιον ἐν χρήσει, καὶ X τὸ παραγόμενον προϊόν. Ἡ συνάρτησις εἶναι ὁμογενὴς πρώτου βαθμοῦ μὲ σταθερὰν ἐλαστικότητα ὑποκαταστάσεως, $\sigma = \frac{1}{1-\alpha}$. Ἡ περίπτωσις αὕτη παρουσιάζει μεγαλυτέραν δυσκολίαν προκειμένου νὰ καθορίσωμεν τὴν διάστασιν τῶν κ καὶ (1 — κ).

Δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ταυτολογικῶς :

$$X = (X^{\alpha-1} \cdot X)^{1/\alpha}$$

---

* Βλ. Σ. Α. Σ α ρ α ν τ ί δ η, Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν, Α' Ὁριακὴ Ἀνάλυσις, Σελ. 245-248.

Συμφώνως δὲ πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Euler, καὶ ἐφ' ὅσον ἡ συνάρτησις εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὁμοιογενείας, ἡ παραγωγὴ (X) θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ἐπὶ τὰ ὁριακὰ τούτων προϊόντα, ἤτοι

$$X = \frac{\partial X}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial X}{\partial L} \cdot L$$

Ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$X = \left[X^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial X}{\partial L} \cdot L \right) \right]^{1/\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\partial X}{\partial K} \cdot X^{\alpha-1} \cdot K + \frac{\partial X}{\partial L} X^{\alpha-1} \cdot L \right)^{1/\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\partial X}{\partial K} \cdot \frac{X^{\alpha-1}}{K^{\alpha-1}} \cdot K^{\alpha} + \frac{\partial X}{\partial L} \cdot \frac{X^{\alpha-1}}{L^{\alpha-1}} \cdot L^{\alpha} \right)^{1/\alpha}$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως προκύπτει ὅτι

(α) $$\frac{\partial X}{\partial K} \left(\frac{X}{K} \right)^{\alpha-1} = \kappa, \qquad \text{καὶ}$$

(β) $$\frac{\partial X}{\partial L} \left(\frac{X}{L} \right)^{\alpha-1} = (1-\kappa)$$

Ἡ διάστασις τῆς κ εἶναι :

$$\kappa \in \left[\frac{R_E\, T^{-1}}{R_K} \right] \left[\frac{R_E^{\alpha-1}\, T^{1-\alpha}}{R_K^{\alpha-1}} \right] = R_E^{\alpha}\; R_K^{-\alpha}\; T^{-\alpha}$$

Ἡ διάστασις τῆς (1 — κ) εἶναι :

$$(1-\kappa) \in \left[\frac{R_E\, T^{-1}}{R_L\, T^{-1}} \right] \left[\frac{R_E^{\alpha-1}\, T^{1-\alpha}}{R_L^{\alpha-1}\, T^{1-1}} \right] = R_E^{\alpha}\; R_L^{-\alpha}$$

Ἀνωτέρω ἐγένετο διάκρισις μεταξὺ διαστάσεως κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν (R_K) καὶ προϊόντος παραγωγῆς (R_E). Ἐάν, τώρα, θεωρήσωμεν ὅτι ἀμφότερα ταῦτα ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν διάστασιν τῶν ἑτοίμων ἀγαθῶν, τότε $X \in [R_E]$ καὶ $K \in [R_E]$, καὶ συνεπῶς ἡ κ καθίσταται ἀδιάστατος, ἤτοι $\kappa \in [1]$. Οὕτως, ἡ κ δὲν εἶναι πλέον διαστασιακὴ σταθερά, ἀλλὰ ἀριθμητικὴ σταθερά.

Εἰς τὰς περιπτώσεις εἰς τὰς ὁποίας ἡ διάστασις τῆς σταθερᾶς δὲν εἶναι γνωστὴ a priori ἢ βάσει ἐμπειρικοῦ τινος κανόνος*, ὁ ἀνωτέρω τρόπος καθορισμοῦ τῆς διαστάσεως τῆς σταθερᾶς καταλήγει εἰς τὸ νὰ στερῇ τὴν ἀνάλυσιν διαστάσεων μιᾶς τῶν κυρίων συμβολῶν αὐτῆς, ἤτοι τοῦ ἐλέγχου τῆς ὀρθότητος τῶν ἐξισώσεων.

2. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

2.0. Εἰσαγωγὴ

Ἡ ἀνάλυσις διαστάσεων πρακτικῶς ἔχει διττὸν σκοπόν : ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ ἐλέγξῃ τὴν ὀρθότητα μιᾶς ἐξισώσεως διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀρχῆς τῆς διαστασιακῆς ὁμοιογενείας, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ καθορίσῃ τὴν μορφὴν τῆς σχέσεως μεταξὺ οἰκονομικῶν ποσοτήτων διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Buckingham. Πρέπει νὰ λεχθῇ ἐξ ὑπαρχῆς ὅτι ἡ ἀνάλυσις διαστάσεων εἰς τοὺς σκοποὺς τούτους δὲν δύναται νὰ ὑποκαταστήσῃ τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν· δεδομένου ὅτι δύναται νὰ προχωρήσῃ μέχρις ἑνὸς σημείου πέραν τοῦ ὁποίου τὸ ἔργον ἀναλαμβάνει ἡ θεωρία. Κατωτέρω εἰσερχόμεθα, ἤδη, εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἀναλύσεως διαστάσεων.

2. 1. Ἡ ἀρχὴ τῆς διαστασιακῆς ὁμοιογενείας καὶ ὁ ἔλεγχος ἐξισώσεων

Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὰ ἑκατέρωθεν τῆς ἰσότητος μέλη μιᾶς ἐξισώσεως εἶναι ἴσα. Ἡ μὴ ὕπαρξις ἰσότητος διαπιστουμένης δι' ἐλέγχου καθιστᾶ τὴν ἐξίσωσιν ἐσφαλμένην. Κατὰ τὴν διατύπωσιν ἐξισώσεώς τινος βάσει θεωρητικῶν ἀρχῶν δυνατὸν νὰ παρεισφρύσουν λάθη. Δυνάμεθα, ὅμως, χρησιμοποιοῦντες τὴν ἀνάλυσιν διαστάσεων νὰ ἐλέγξωμεν ἐὰν ἡ ἐξίσωσις εἶναι ὀρθή. Τοῦτο δύναται νὰ κατορθωθῇ διὰ τῆς ἀρχῆς τῆς διαστασιακῆς ὁμοιογενείας. Ἡ ἀρχὴ αὕτη μᾶς λέγει ὅτι μόνον ἐξισώσεις τῶν ὁποίων τὰ δύο σκέλη ἔχουν τὰς αὐτὰς διαστάσεις δύνανται νὰ ἐξισωθοῦν.

Ὡς παράδειγμα ἂς λάβωμεν μίαν κλασσικὴν περίπτωσιν θεωρητικῆς ἐξισώσεως, τὴν ἐξίσωσιν τῶν συναλλαγῶν $MV = PT$. Αἱ διαστάσεις τῶν ἐπὶ μέρους ποσοτήτων ἔχουν ὡς ἀκολούθως :

$$M \in [M]$$
$$P \in [MR^{-1}]$$
$$T \in [RT^{-1}]$$

---

* Ἐμπειρικοὶ κανόνες εἶναι αἱ ψυχολογικῆς, φυσικῆς ἢ τεχνολογικῆς φύσεως σχέσεις, ὡς ὁ νόμος τῶν μεγάλων ἀριθμῶν, ἡ φθίνουσα ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν, ἡ φθίνουσα ὁριακὴ χρησιμότης, ἡ φθίνουσα ὁριακὴ παραγωγικότης, κλπ.

Διὰ νὰ καθορίσωμεν τὴν διάστασιν τοῦ V πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τοῦτο. Τὸ V, ἡ κυκλοφορικὴ ταχύτης τοῦ χρήματος, ὁρίζεται ὡς ὁ ἀριθμὸς τῶν φορῶν κατὰ τὰς ὁποίας ἡ χρηματικὴ μονὰς λαμβάνει μέρος εἰς τὰς συναλλαγάς. Ἐνταῦθα, ὅμως, δὲν ἐνδιαφέρει ὁ ἀριθμὸς ὁ προκύπτων ἐκ τῆς ἀπαριθμήσεως. ἀλλὰ ἡ διάστασις τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ ὄγκου τῆς χρηματικῆς ἀξίας τῶν συναλλαγῶν (MT^{-1}) διὰ τοῦ ἀποθέματος τοῦ χρήματος (M), ἤτοι $V \in [T^{-1}]$. Τελικῶς προκύπτει ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις εἶναι διαστασιακῶς ὁμοιογενής, διότι

$$[M][T^{-1}] = [MR^{-1}][RT^{-1}], \quad \text{καὶ}$$

$$[M][T^{-1}] = [M][T^{-1}]$$

Πρὸς ἀποφυγὴν ὁρισμοῦ μιᾶς ἐξισώσεως ὡς ὁμοιογενοῦς διαστασιακῶς, εἰς ἣν περίπτωσιν αὕτη δὲν εἶναι, πρέπει νὰ δίδωμεν εἰς τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς (δείκτας) τὰς αὐτὰς διαστάσεις ὡς εἰς τὰς ἀντιστοίχους ἀπολύτους ποσότητας ἃς ἀντιπροσωπεύουν. Ὡς γνωστόν, οἱ δεῖκται, αὐτοὶ καθ' ἑαυτοί, εἶναι ἀδιάστατοι ποσότητες καὶ συνεπῶς ἡ ὕπαρξίς των εἰς μίαν ἐξίσωσιν θὰ ἔθετεν ἐν ἀμφιβόλῳ τὴν ὀρθότητα ταύτης, ἐὰν δὲν μεταχειριζώμεθα τούτους διαστασιακῶς ὡς καὶ τὰς ἀπολύτους ποσότητας ἃς ἀντιπροσωπεύουν. Ἐὰν εἰς τὸ παράδειγμα τῆς ἐξισώσεως τοῦ Fisher ἐδεχόμεθα ὅτι $P \in [1]$, τότε ἡ διαστασιακὴ ὁμοιογένεια θὰ ἔπαυε νὰ ἰσχύῃ, καθ' ὅτι $[M][T^{-1}] = [1][RT^{-1}]$ καὶ ἡ ἐξίσωσις θὰ ἐθεωρεῖτο ἐσφαλμένη, πρᾶγμα μὴ ὀρθόν. Τοῦτο ἐξηγεῖ διατὶ εἰς τοὺς δείκτας τιμῶν, ἡμερομισθίων, κλπ. δίδομεν τὴν διάστασιν τοῦ ἀπολύτου μεγέθους, ἤτοι τῆς ἀπολύτου τιμῆς.

Τώρα ἂς ἔλθωμεν εἰς ἓν κρίσιμον σημεῖον τῆς διαστασιακῆς ὁμοιογενείας. Ὁ τρόπος καθορισμοῦ τῆς διαστάσεως μιᾶς σταθερᾶς, ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη, δύναται νὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς τὸ νὰ θεωροῦμεν διαστασιακῶς ὁμοιογενεῖς καὶ ἐξισώσεις αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι καὶ συνεπῶς νὰ μὴ δυνάμεθα ἐν τῇ οὐσίᾳ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἔλεγχον τῆς διαστασιακῆς ὁμοιογενείας. Ἡ ὡς πρὸς τὴν σταθερὰν λύσις τῆς ἐξισώσεως καθιστᾷ τὴν τελευταίαν ἐξ ὁρισμοῦ διαστασιακῶς ὁμοιογενῆ, ὡς ἀκριβῶς συμβαίνει μὲ τὴν εἰς σελίδα 969 ἀναφερθεῖσαν συνάρτησιν παραγωγῆς τύπου Cobb - Douglas.

Πρὸς ἀποφυγὴν τῆς ἀνωτέρω δυσκολίας καὶ διὰ τὴν χρήσιμον ἐφαρμογὴν τῆς διαστασιακῆς ἀναλύσεως, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἑτέραν μέθοδον, ἀντὶ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς τὴν σταθεράν, στηριζομένην εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν δομὴν τῆς διαστασιακῆς ἀναλύσεως. Ἂς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς Cobb - Douglas

$$X = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

Διὰ δεδομένας τιμὰς τῆς $K = K_0$ καὶ $L = L_0$, ἔχομεν

$$X_0 = AK_0^{\alpha} L_0^{1-\alpha}$$

Διὰ διαιρέσεως προκύπτει

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1-\alpha},$$

ἢ
$$X = X_0 \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1-\alpha}$$

Ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι ἡ σταθερὰ A ἐξηλείφθη καὶ ἀντ' αὐτῆς ἔχομεν τὴν X_0, ἥτις ἀντιπροσωπεύει πάλιν τὴν τεχνολογικὴν παράμετρον τῆς συναρτήσεως καὶ τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τὴν διάστασιν χωρὶς νὰ παρίσταται ἀνάγκη νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς ταύτην. Ἡ διάστασις τῆς X_0 εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τῆς X, ἤτοι

$$X \in [R_E T^{-1}]$$
$$X_0 \in [R_E T^{-1}]$$

Ἐπίσης
$$\frac{K}{K_0} \in [1]$$
$$\frac{L}{L_0} \in [1]$$

Καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι διαστασιακῶς ὁμοιογενής, καθ' ὅτι

$$[R_E\ T^{-1}] = [R_E\ T^{-1}]\,[1]\,[1]$$

Τὴν ἀνωτέρω μέθοδον καθορισμοῦ τῆς διαστασιακῆς σταθερᾶς δυνάμεθα νὰ καλέσωμεν μέθοδον ἀλγεβρικοῦ χειρισμοῦ.

2. 2. Ἔλεγχος διαστατότητος οἰκονομομετρικῶν ἐξισώσεων

Ἡ διαστασιακὴ ἀνάλυσις τυγχάνει ἐφαρμογῆς κυρίως εἰς τὰς θεωρητικὰς ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι τὸ προϊὸν τῆς λογικῆς διαδικασίας τῆς ἀπαγωγῆς ἢ τῆς ἐπαγωγῆς. Ἀνάλογος ἐφαρμογὴ καὶ χρησιμότης ταύτης εἰς περίπτωσιν τῶν ἐμπειρικῶν ἢ οἰκονομομετρικῶν ἐξισώσεων στερεῖται καθολικῆς βάσεως, δεδομένου ὅτι αἱ ἐξισώσεις αὗται περιέχουν μετρήσεις καὶ ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι στεροῦνται ἐν πολλοῖς διαστάσεων. Ἐνῶ αἱ θεωρητικαὶ ἐξισώσεις εἶναι ἀκριβεῖς (exact), αἱ ἐμπειρικαὶ τοιαῦται εἶναι στοχαστικαί, ἤτοι περιέχουν στοχαστικὰς μεταβλητάς, ὡς ὁ ὅρος σφάλματος (disturbance term). Ὁ τελευταῖος οὗτος ἀντιπροσωπεύει πλῆθος παραγόντων ἐπηρεαζόντων τὴν ἐξηρτημένην μεταβλητὴν τῆς ἐξισώσεως καὶ μὴ δυναμένων νὰ ταυτοποιηθοῦν ἢ περιληφθοῦν εἰς τὴν ἐξίσωσιν. Ἐκ τοῦ λόγου τούτου καὶ ὁ καθορισμὸς τῆς διαστάσεως θὰ πρέπει νὰ μὴ εἶναι εὔκολος.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀναλύσεως διαστάσεων εἰς τὴν οἰκονομομετρικὴν δὲν ἔχει εἰσέτι ἐρευνηθῆ πλήρως καὶ συνεπῶς τὸ ἔδαφος εἶναι παρθένον ἀπὸ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς. Ἡ πρακτικὴ σημασία τῆς διαστασιακῆς ἀναλύσεως θὰ φανῆ ὅταν αὕτη τύχη εὐρείας ἐφαρμογῆς εἰς τὴν οἰκονομομετρικήν.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὸν καθορισμὸν τῶν διαστάσεων τῶν μεταβλητῶν τῆς κατωτέρω ἐμπειρικῆς ἐξισώσεως.

$$y = \alpha + bx + u$$

Τὸ u ἀντιπροσωπεύει τὸ μέρος ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον δὲν ἑρμηνεύεται ἀπὸ συστηματικοὺς παράγοντας καὶ συνεπῶς δύναται νὰ λάβη τὴν διάστασιν τοῦ $y \in [RT^{-1}]$.

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα ποία ἡ διάστασις τοῦ b. Ἐκ τοῦ τύπου ἐξευρέσεως τοῦ b ἔχομεν :

$$b = \frac{\sum_1^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Ἄρα $b \in [1]$. Τὸ α εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\alpha = \bar{y} - b\bar{x}$$

καὶ ἔχει τὴν διάστασιν τοῦ y.

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις εἶναι τοῦ τύπου

$$y = \alpha x^b u,$$

τότε ὁ ὅρος u δύναται νὰ ἔχη διάστασιν [1], ἤτοι νὰ εἶναι ἀδιάστατος. Τὸ δὲ $\alpha = \frac{y}{x^b u}$,

$$\alpha \in \frac{[RT^{-1}]}{[(RT^{-1})^b]} = [R^{1-b}T^{-(1-b)}]\ *$$

2. 3. Παραδείγματα ἐλέγχου ἐξισώσεων

α) Ἂς λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῶν ἀνταλλαγῶν ὡς αὕτη διετυπώθη ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Smith καὶ τοῦ Senior : $P = \frac{M}{T}$. Ὁ Schumpeter ** ἀναφέρει ὅτι ὁ

* Δέον νὰ σημειωθῆ ὅτι ἡ διάστασις τοῦ X, ὅπερ ἀντιπροσωπεύει τὸ πραγματικὸν εἰσόδημα εἰς τὴν ἐξίσωσιν ζητήσεως, εἶναι

$$[MT^{-1} / MR^{-1}] = RT^{-1}, \quad \text{ὅπου} \quad [MT^{-1}]$$

εἶναι ἡ διάστασις τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος, καὶ $[MR^{-1}]$ ἡ διάστασις τοῦ δείκτου τιμῶν (deflator).

** Histoty of Economic Analysis, Allen and Unwin, London 1955, σελ. 314 - 5.

τὸ πρῶτον διατυπώσας τὴν ἐξίσωσιν τῶν ἀνταλλαγῶν ἦτο ὁ Briscoe τὸ 1694, ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$M = PT,$$

ὅπου

$$M = \text{ποσότης χρήματος}$$
$$P = \text{ἐπίπεδον τιμῶν}$$
$$T = \text{ὄγκος συναλλαγῶν}$$

Ἐκφραζομένη εἰς τὰς διαστάσεις της ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δίδει

$$[M] = [MR^{-1}][RT^{-1}], \qquad \text{ἢ}$$
$$[M] = [MT^{-1}]$$

Προφανῶς ἡ ἐξίσωσις αὕτη δὲν πληροῖ τὴν ἀρχὴν τῆς διαστασιακῆς ὁμοιογενείας καὶ συνεπῶς δὲν εἶναι ὀρθή. Ἐκ τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους ἐλλείπει ἡ διάστασις $[T^{-1}]$, ἥτις εἶναι ἡ διάστασις τοῦ V (κυκλοφοριακὴ ταχύτης χρήματος). Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν μόνον ὅτι $V = 1$, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις εἶναι ὀρθή.

β) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ Pantaleoni (1889), $V = M/QR$, (ὅπου V = ἀξία χρήματος, M = ὄγκος ἐμπορευμάτων, Q = ποσότης χρήματος, R = κυκλοφοριακὴ ταχύτης χρήματος), ἔχει τὰς ἀκολούθους διαστάσεις:

$$Q \in [M]$$
$$M \in [RT^{-1}]$$
$$R \in [T^{-1}]$$
$$V = \frac{1}{P} \in \left[\frac{1}{MR^{-1}}\right] = [M^{-1}R]$$

Συνεπῶς,

$$[M^{-1}R] = \frac{[RT^{-1}]}{[MT^{-1}]} \qquad \text{καὶ}$$
$$[M^{-1}R] = [M^{-1}R]$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι διαστασιακῶς ὁμοιογενής.

γ) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ Cassel (1918) $M = RTP$, (ὅπου M = ποσότης χρήματος, R = ζήτησις χρήματος εἰς ὡρισμένην χρονικὴν περίοδον, T = ὄγκος ἀγαθῶν, καὶ P = γενικὸν ἐπίπεδον τιμῶν), ἔχει τὰς ἀκολούθους διαστάσεις:

$$[M] = [T][RT^{-1}][MR^{-1}] \qquad \text{καὶ}$$
$$[M] = [M]$$

Ἄρα εἶναι διαστασιακῶς ὁμοιογενής.

δ) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ D. Robertson, $P = M/kR$ ἔχει τὰς ἀκολούθους διαστάσεις :

$$[MR^{-1}] = \frac{[M]}{[T][RT^{-1}]}, \qquad \text{καὶ}$$

$$[MR^{-1}] = [M][R^{-1}]$$

Ἄρα εἶναι διαστασιακῶς ὁμοιογενής. Ὁ συντελεστὴς ἀναλογικότητος k εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν μεταβλητὴν R τῆς ἐξισώσεως τοῦ Cassel καὶ ὑποδηλοῖ τὸ ποσοστὸν διακρατήσεως χρήματος (ζήτησις χρήματος). Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ὡς καὶ ἡ ἀνάλογος ἐξίσωσις τοῦ A. Marshall $M = kY$, εἶναι γνωστὴ μὲ τὸ ὄνομα ἐξίσωσις τοῦ Cambridge καὶ ὁμοιάζει πρὸς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Cassel. Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι τὸ k τῆς ἐξισώσεως τοῦ Cambridge εἶναι ὑπὸ μίαν ἔννοιαν τὸ ἀντίστροφον τοῦ V τῆς ἐξισώσεως τοῦ Fisher, διὸ καὶ ἐνῶ ἡ διάστασις τοῦ V εἶναι $[T^{-1}]$, ἡ διάστασις τοῦ k εἶναι $[T]$.

ε) Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὸν ἔλεγχον ἐξισώσεως ἑτέρου τύπου, ἤτοι τῆς συναρτήσεως ἐπενδύσεων

$$I_t = \omega + x\,(C_t - C_{t-1}),$$

ἥτις εὑρίσκεται εἰς τὸ βιβλίον τοῦ G. Ackley, Macroeconomic Theory, (σελ. 486). Ἡ συνάρτησις αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιταχύνσεως καὶ μᾶς λέγει ὅτι αἱ πραγματικαὶ ἐπενδύσεις (I) πρέπει νὰ εἶναι εἰς τὴν περίοδον t τοιαῦται, ὥστε νὰ δύναται νὰ παραχθῇ κατ' αὐτὴν τὴν περίοδον ἡ ἐπιθυμητὴ αὔξησις τῶν ἀγαθῶν μεταξὺ περιόδων $t-1$ καὶ t, πλέον μιᾶς σταθερᾶς ποσότητος ω. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σταθερὰ ποσότης $\omega = 0$ καὶ ὅτι δὲν ὑφίσταται διάκρισις μεταξὺ κεφαλαιουχικῶν καὶ καταναλωτικῶν ἀγαθῶν, καθ' ὅτι ἀμφότερα ἕτοιμα ἀγαθὰ εἶναι, τότε αἱ διαστάσεις τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶναι :

$$I_t \in [RT^{-1}]$$

$$(C_t - C_{t-1}) \in [RT^{-1}]$$

$$x \in [1]\,.$$

Ἡ ἐξίσωσις εἶναι διαστασιακῶς ὁμοιογενὴς καθ' ὅτι

$$[RT^{-1}] = [RT^{-1}]$$

Ἂς λάβωμεν, περαιτέρω, ὁλόκληρον τὸ πρότυπον τὸ περιέχον τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν ἐπενδύσεων, ὅπερ ἀνεπτύχθη ὑπὸ τοῦ P. A. Samuelson *. Τὸ πρότυπον τοῦτο, ἀποτελοῦν ἁπλοῦν πρότυπον οἰκονομικοῦ κύκλου εἰσάγον τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐπιταχυντοῦ εἰς τὸ κεϋνσιανὸν πρότυπον, ἔχει ὡς ἀκολούθως :

---

* Review of Economic Statistics, XXI (Μάϊος 1939), σελ. 75 - 78.

$$(1) \qquad Y_t = C_t + I_t + G_t$$

$$(2) \qquad C_t = \alpha + b\,Y_{t-1}$$

$$(3) \qquad I_t = \omega + x\,(C_t - C_{t-1})$$

Ἡ (1) ἀποτελεῖ τὴν ταυτότητα τοῦ εἰσοδήματος, ἡ (2) τὴν συνάρτησιν καταναλώσεως (συνάρτησις συμπεριφορᾶς, μὲ χρονικὴν ὑστέρησιν μιᾶς περιόδου) καὶ ἡ (3) τὴν συνάρτησιν ἐπενδύσεων.

Ἀντικαθιστῶντες τὴν (2) εἰς τὴν (3) καὶ κατόπιν ἀμφοτέρας εἰς τὴν (1), ἔχομεν:

$$I_t = \omega + xbY_{t-1} - xbY_{t-2}, \qquad \text{καὶ}$$

$$(4) \qquad Y_t = b\,(1+x)\,Y_{t-1} - xbY_{t-2} + \alpha + \omega + G_t$$

Ἡ (4) ὑποδηλοῖ ὅτι τὸ εἰσόδημα τῆς τρεχούσης περιόδου (t) ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἰσοδήματος τῶν δύο προηγουμένων περιόδων σὺν τῇ κυβερνητικῇ δαπάνῃ. Θέτοντες $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y_E$ (ὅπου Y_E = εἰσόδημα ἰσορροπίας) εὑρίσκομεν τὸ εἰσόδημα ἐπιπέδου ἰσορροπίας, ἤτοι

$$(5) \qquad Y_E = b\,(1+x)\,Y_E - xbY_E + \alpha + \omega + G_0$$

(ὅπου G_0 δεδομένον ἐπίπεδον δημοσίας δαπάνης)

Ἡ (5) δι᾽ ἁπλῶν ἀλγεβρικῶν χειρισμῶν γίνεται:

$$(6) \qquad Y_E = \frac{1}{1-b}\,(\alpha + \omega + G_0)$$

Ἡ ἐξίσωσις (6) περιέχει τὸν πολλαπλασιαστήν. Ὡς παρατηροῦμεν, ὁ ἐπιταχυντὴς x ἐξαλείφεται καὶ τοῦτο διότι οὗτος εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα μεταβολῆς τοῦ εἰσοδήματος, ὅπερ ἐθεωρήσαμεν ὡς σταθερὸν ($Y_t = Y_{t-1} = \cdots$).

Ὁ ἔλεγχος τῆς διαστατότητος τῆς (6), ἥτις εἶναι ἐκπεφρασμένη εἰς πραγματικοὺς ὅρους ἔχει ὡς ἀκολούθως:

$Y_E \in [RT^{-1}]$

$G_0 \in [RT^{-1}]$

$\omega \in [RT^{-1}]$, ἤτοι ἡ διάστασις τοῦ I_t, ἢ $\omega = 0$

$\alpha \in [RT^{-1}]$, ἤτοι ἡ διάστασις τοῦ C_t

$b \in [1]$

καὶ $(\alpha + \omega + G_0) \in [RT^{-1}]$.

Συνεπῶς $[RT^{-1}] = [RT^{-1}]$. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (6) εἶναι διαστασιακῶς ὁμοιογενής.

2. 4. Καθορισμὸς συναρτησιακῶν σχέσεων - Θεώρημα τοῦ Buckingham

Ἡ κυριωτέρα καὶ χρησιμωτέρα ἴσως λειτουργία τῆς διαστασιακῆς ἀναλύσεως εἶναι ἡ ἐξεύρεσις συναρτησιακῶν σχέσεων μεταξὺ διαφόρων μεταβλητῶν καὶ παραμέτρων. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀναλύσεως διαστάσεων πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον προκειμένου περὶ οἰκονομικῶν σχέσεων εἶναι εἰσέτι εἰς νηπιακὸν στάδιον. Ἐφ' ὅσον ἡ ἀνάλυσις αὕτη δυνηθῇ καὶ συμβάλῃ εἰς τὴν κατασκευὴν προτύπων εἰς τὴν οἰκονομομετρικήν, τότε ἡ πρακτικὴ ἀξία ταύτης θὰ εἶναι προφανής.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ διατύπωσις μιᾶς συναρτησιακῆς σχέσεως δύναται νὰ γίνῃ: 1) διὰ τῆς ἀπαγωγῆς, ἤτοι βάσει καθαρᾶς θεωρίας, καὶ 2) διὰ πρακτικῶν κανόνων καὶ ἐφαρμογῆς τῆς στασιστικῆς μεθόδου τῆς παλινδρομήσεως. Ἡ νέα μέθοδος διατυπώσεως συναρτησιακῆς σχέσεως στηρίζεται εἰς τὸ θεώρημα τῶν π, ἢ θεώρημα τοῦ Buckingham (1914). Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος καθίσταται ἐνδιαφέρουσα κυρίως εἰς περιπτώσεις ὅπου: 1) εἶναι ἀδύνατος ἡ ἐξεύρεσις συναρτησιακῆς σχέσεως μεταξὺ μεταβλητῶν βάσει καθαρᾶς θεωρίας, καὶ 2) ἡ βάσει καθαρᾶς θεωρίας ἀπαχθεῖσα συνάρτησις εἶναι λίαν πεπλεγμένη.

Κατ' ἀκολουθίαν θὰ πρέπει νὰ ἐκθέσωμεν τὰ περὶ τοῦ θεωρήματος χρησιμοποιοῦντες λίαν ἁπλῆν ἀνάλυσιν. Ἔστω ὅτι ἔχομεν n μεταβλητὰς (x_1, x_2, $x_3, \cdots x_n$) αἱ ὁποῖαι συνδέονται δι' ὡρισμένης σχέσεως, ὡς ἡ $\Phi(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n) = 0$. Ἔνια τῶν x δύναται νὰ εἶναι διαστασιακαὶ σταθεραί. Ἐὰν αἱ n μεταβληταὶ (καὶ διαστασιακαὶ σταθεραὶ) ἔχουν m βασικὰς διαστάσεις, τότε ἡ μοναδικὴ συνάρτησις Φ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ εἰς ὅρους ἑτέρας συμβατικῆς συναρτήσεως ἀποτελουμένης ἐκ $n - m$ ἀδιαστάτων ὅρων (γινομένων), οἵτινες εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, ἤτοι $F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \cdots \pi_{n-m}) = 0$.

Οἱ περιορισμοὶ τοὺς ὁποίους θέτει τὸ θεώρημα εἶναι: 1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν δυνατῶν νὰ προκύψουν ἀδιαστάτων ὅρων εἶναι γενικῶς μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεταβλητῶν, καθ' ὅτι $n - m < n$. Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἐὰν $n - m = 0$, τότε προσθέτομεν μίαν μονάδα ὥστε νὰ λάβωμεν ἓν τουλάχιστον ἀδιάστατον ὅρον, ἤτοι $n - m + 1$. 2) Οἱ ἀδιάστατοι ὅροι πρέπει νὰ εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων. Τὸ τοιοῦτον συμβαίνει ὅταν ἕκαστος ὅρος περιλαμβάνῃ τουλάχιστον μίαν μεταβλητήν, ἥτις δὲν ἐμπεριέχεται εἰς ἕτερον ἀδιάστατον ὅρον τοῦ συστήματος (συνθήκη ἐπαρκὴς ἀλλὰ μὴ ἀπαραίτητος). 3) Μία μόνον συναρτησιακὴ σχέσις μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν εἶναι οὐσιώδης.

Ἡ διαδικασία ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν π ἔχει ἐν συντομίᾳ ὡς ἀκολούθως:

1) Καθορίζομεν τὰς πιθανὰς μεταβλητὰς καὶ σταθερὰς αἱ ὁποῖαι ὑπεισέρχονται εἰς τὴν ὑπὸ θεώρησιν σχέσιν ἢ τὸ οἰκονομικὸν πρότυπον. Ἐὰν δὲ ὑφίσταται θεμελιώδης τις ἐξίσωσις ἢ ἐμπειρικός τις κανὼν διὰ τὴν ὑπὸ θεώρησιν σχέσιν, τότε ἀρχόμεθα ἐκ τούτου. Παραδείγματος χάριν, ὁ καθορισμὸς τῆς μορφῆς τῆς συναρτήσεως ζητήσεως ἀγαθοῦ τινος δύναται νὰ

ἀρχίση ἐκ τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος γνωστῆς a priori. Ἡ συμπερίληψις περισσοτέρων τοῦ κανονικοῦ ἀριθμοῦ ἢ ἡ παράλειψις μεταβλητῶν πρὸς καθορισμὸν τῆς σχέσεως ἢ τοῦ προτύπου θὰ καταστήση ἀδύνατον τὴν ἐξεύρεσιν τῆς σχέσεως ταύτης. Τελικῶς ἀφοῦ ἀποφασίσωμεν περὶ τῶν μεταβλητῶν αἵτινες καθορίζουν τὴν ζητουμένην σχέσιν καταρτίζομεν πίνακα τούτων καὶ ἐκφράζομεν τὴν σχέσιν ὑπὸ μορφὴν μιᾶς πεπλεγμένης συναρτήσεως,

$$\Phi\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$$

2) Προσδιορίζομεν τοὺς διαστασιακοὺς τύπους ἑκάστης μεταβλητῆς ἢ διαστασιακῆς σταθερᾶς. Ὡρισμέναι μεταβληταὶ θὰ ἔχουν βασικὰς διαστάσεις, ἕτεραι δὲ θὰ ἔχουν, ἐνδεχομένως, δευτερογενεῖς τοιαύτας.

3) Χρησιμοποιοῦντες τοὺς διαστασιακοὺς τύπους σχηματίζομεν ἀδιαστάτους ὅρους, ἤτοι ὅρους ἔχοντας ὡς διάστασιν τὸ [1], διὰ τῆς μεθόδου «δοκιμῆς καὶ λάθους» ἢ προσεγγιστικῆς μεθόδου. Τοὺς ἀδιαστάτους ὅρους τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν ἐκφράζομεν ὡς μίαν νέαν συνάρτησιν (συνάρτησις τῶν π) $F(\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_{n-m}) = 0$, ἀντὶ τῆς ἀρχικῶς διατυπωθείσης $\Phi\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Ἑτέρα μέθοδος ἐξευρέσεως τῶν ἀδιαστάτων ὅρων εἶναι ἡ ἑξῆς: Ὑψώνομεν τὰς μεταβλητὰς τοῦ συστήματος εἰς ἐκθέτας α, β, γ, δ, . . . καὶ δεδομένου ὅτι ἀναζητοῦμεν διάστασιν [1], πρέπει κατ' αὐθαίρετον ἀρχὴν οἱ ἐκθέται νὰ τεθοῦν ἴσοι πρὸς μηδέν. Ὁπότε λύομεν ἁπλᾶς ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους ἐκθέτας.

4) Τὴν ὡς ἄνω ληφθεῖσαν συνάρτησιν λύομεν ὡς πρὸς τὴν ἐξηρτημένην μεταβλητήν, ἥτις ἐμπεριέχεται εἰς ἕνα τῶν ἀδιαστάτων ὅρων. Ἐνταῦθα πρέπει νὰ σημειωθῆ ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν οἰκονομομετρικῶν συναρτήσεων ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τῶν π μᾶς ἀφήνει πολλάκις μὲ ἀπροσδιόριστον τὴν μαθηματικὴν μορφὴν τούτων. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δυνάμεθα διὰ σειρᾶς πρακτικῶν σκέψεων νὰ δώσωμεν ἐμπειρικήν τινα μορφὴν καὶ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῆς συναρτήσεως διὰ στατιστικῶν μεθόδων. Συνήθως ὁ ὑψηλὸς συντελεστὴς προσδιορισμοῦ τῆς στατιστικῆς σχέσεως εἶναι ἔνδειξις ὅτι ὁ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης καθορισμὸς τῆς μορφῆς τῆς σχέσεως πλησιάζει τὴν ἀκριβῆ τοιαύτην καὶ συνεπῶς γίνεται δεκτὴ εἰς τὴν οἰκονομομετρικήν.

Τώρα ἂς χωρήσωμεν εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος δι' ἑνὸς παραδείγματος εἰλημμένου ἐκ τῆς Φυσικῆς. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸν χρόνον αἰωρήσεως ἑνὸς ἐκκρεμοῦς καὶ συνεπῶς τὴν ἐξίσωσιν ἥτις συνδέει τὰς διαφόρους διαστάσεις τὰς ἐχούσας σχέσιν πρὸς τοῦτο. Αἱ βασικαὶ διαστάσεις εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ ἐκκρεμοῦς (M), τὸ μῆκος αὐτοῦ (L) καὶ ὁ χρόνος (T). Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ὅτι, δεδομένου ὅτι πρόκειται περὶ κινήσεως, ὑπεισέρχεται εἰς τὴν σχέσιν μία διαστατὴ σταθερὰ ὡς ἡ ἐπιτάχυνσις (g), καί, ἐφ' ὅσον πρόκειται περὶ αἰωρήσεως, ἑτέρα σταθερὰ ὡς ἡ γωνιακὴ κλίσις τῆς αἰωρήσεως (Θ). Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

Μεταβληταὶ — Παράμετροι		Διαστασιακὸς τύπος
m	(μᾶζα)	[M]
l	(μῆκος)	[L]
Θ	(γων. κλίσις)	0
g	(ἐπιτάχυνσις)	$[LT^{-2}]$
τ	(χρόνος)	[T]

Ἡ πεπλεγμένη (implicit) συνάρτησις ἡ συνδέουσα τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι $\Phi\,(m, l, \Theta, g, \tau) = 0$. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα ἔχομεν : $n = 5$, $m = 3$ καὶ δύο ἀδιαστάτους ὅρους. Οἱ τελευταῖοι οὗτοι δύνανται νὰ καθορισθοῦν διὰ τῆς μεθόδου «δοκιμῆς καὶ λάθους» ἢ διὰ θέσεως ἀγνώστων ἐκθετῶν τῶν διαστάσεων ἴσ   πρὸς μηδέν.

Π ρ ώ τ η μ έ θ ο δ ο ς : Τὸ ἓν ἀδιάστατον γινόμενον θὰ εἶναι τὸ Θ (γωνιακὴ κλίσις), δεδομένου ὅτι δὲν κέκτηται διαστάσεως. Ὁπότε ἐκ τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν καὶ παραμέτρων θὰ πρέπει νὰ σχηματίσωμεν γινόμενον (ἢ κλάσμα), ὅπερ θὰ δώσῃ διάστασιν [1]. Μόνον ὁ σχηματισμὸς $\frac{[LT^2]}{[T^2L]}$ δίδει].

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν : $\frac{[L)}{[T^2LT^{-2}]}$, καὶ συνεπῶς τὸ δεύτερον ἀδιάστατον γινόμενον εἶναι τὸ l/g^2. Παρατηροῦμεν, ὅμως, ὅτι τὸ m δὲν ὑπάρχει. Τοῦτο διότι ἡ διάστασίς του δὲν ἐνυπάρχει εἰς ἑτέραν μεταβλητὴν καὶ συνεπῶς δὲν δύναται νὰ συνδυασθῇ διὰ νὰ δώσῃ ἀδιάστατον ὅρον. Κατ' ἀκολουθίαν, τὸ θεώρημα τῶν π δίδει :

$$F\,(\Theta,\ l/\tau^2 g) = 0$$

Λύοντες ὡς πρὸς τ θὰ ἔχωμεν : $\tau = \varphi\,(\Theta)\,\sqrt{l/g}$, ὅπου $\varphi\,(\Theta)$ εἶναι συνάρτησις τοῦ Θ. Ἂν δὲ τοῦτο εἶναι πολὺ μικρόν, τότε $n = 4$ καὶ $n - m = 1$. Συνεπῶς καταλήγομεν εἰς μίαν οὐσιώδη συναρτησιακὴν σχέσιν *, $F(l/\tau^2 g) = 0$ καὶ $\tau \simeq \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις μᾶς λέγει ὅτι ὁ χρόνος αἰωρήσεως ἑνὸς ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μάζης (καθ' ὅτι αὕτη δὲν περιλαμβάνεται τελικῶς εἰς τὴν συνάρτησιν), ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ μήκους καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς ἐπιταχύνσεως.

Δ ε υ τ έ ρ α μ έ θ ο δ ο ς : Ὑψώνομεν τὰς διαστάσεις [M], [L], $[LT^{-2}]$, [T] εἰς τὰς ἀγνώστους δυνάμεις α, β, γ, δ :

$$M^{\alpha} L^{\beta}\ (LT^{-2})^{\gamma}\ T^{\delta} = M^{\alpha}\, L^{(\beta+\gamma)}\ T^{(-2\gamma+\delta)}$$

* Βλέπε περιορισμὸν τοῦ θεωρήματος ὑπ' ἀρ. 3.

Τὸ γινόμενον τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι ἀδιάστατον. Διὰ νὰ εἶναι ὅμως ἀδιάστατον πρέπει οἱ ἐκθέται νὰ τεθοῦν ἴσοι πρὸς μηδέν, ὁπότε λαμβάνομεν τὰς κατωτέρω ἐξισώσεις :

$$\alpha = 0$$
$$\beta + \gamma = 0$$
$$-2\gamma + \delta = 0$$

Ἡ λύσις εἶναι $\alpha = 0$, $\beta = -\dfrac{\delta}{2}$ καὶ $\gamma = \dfrac{\delta}{2}$, τοῦ δ καθοριζομένου αὐθαιρέτως ἐξ ἀνάγκης, δεδομένου ὅτι ἔχομεν 2 ἐξισώσεις καὶ 4 ἀγνώστους. Τὸ ἀδιάστατον γινόμενον εἶναι συνεπῶς :

$$l^{-\frac{\delta}{2}} g^{\frac{\delta}{2}} \tau^{\delta} \quad \text{ἢ} \quad (l^{-1/2} g^{1/2} \tau)^{\delta}.$$

Τὸ m παραλείπεται καθ' ὅτι $m^0 = 1$.

Οὕτω τὸ θεώρημα μᾶς δίδει καὶ πάλιν τὴν συμβατικὴν συνάρτησιν $F[(l^{-1/2} g^{1/2} \tau)^{\delta}, \Theta] = 0$. Ἡ συνάρτησις αὕτη δύναται νὰ γραφῆ ὡς : $l^{-1/2} g^{1/2} \tau = \varphi(\Theta)$. ὅπου ἡ φ εἶναι τελείως ἀπροσδιόριστος. Λύοντες ὡς πρὸς τ ἔχομεν :

$$\tau = l^{1/2} g^{-1/2} \varphi(\Theta), \quad \text{ἢ} \quad \tau = \varphi(\Theta) \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ἡ ἀνάλυσις διαστάσεων δὲν δύναται νὰ καθορίσῃ τὴν συνάρτησιν φ (Θ). Αὕτη θὰ καθορισθῆ δι' ἄλλων μέσων. Εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς 2π.

2. 5. Παραδείγματα καθορισμοῦ συναρτησιακῶν σχέσεων

α) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι κατὰ τὴν διαίσθησίν μας ὑφίσταται σχέσις μεταξὺ ποσότητος χρήματος (M), κυκλοφορικῆς ταχύτητος αὐτοῦ (V), γενικοῦ ἐπιπέδου τιμῶν (P) καὶ ὄγκου παραγωγῆς (T), ἤτοι :

$$\Phi(M, V, P, T) = 0$$

Αἱ διαστάσεις τῶν μεταβλητῶν εἶναι :

$$M \in [M]$$
$$V \in [T^{-1}]$$
$$P \in [MR^{-1}]$$
$$T \in [RT^{-1}]$$

Θὰ ἔχωμεν ἕνα μόνον ἀδιάστατον ὅρον $n - m = 4 - 3 = 1$, καὶ συνεπῶς θὰ πρέπει νὰ συνδυάσωμεν τὰς μεταβλητὰς κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ σχηματίσωμεν τὸν ἀδιάστατον τοῦτον ὅρον. Διὰ τῆς μεθόδου τῆς «δοκιμῆς καὶ λάθους» ἔχομεν :

$$\frac{[\,M\,]\,[\,T^{-1}\,]}{[\,MR^{-1}\,]\,[\,RT^{-1}\,]} = [\,1\,],$$

ἤτοι

$$\frac{MV}{PT} = \alpha \quad \text{ἢ} \quad MV = \alpha PT$$

καὶ

$$F\left(\frac{MV}{PT}\right) = 0$$

$$F = \frac{MV}{PT} - \alpha = 0$$

Ἡ ἐξίσωσις $MV = \alpha PT$ ὁμοιάζει πρὸς ἐκείνην τοῦ Fisher (ἐξίσωσις συναλλαγῶν). Ἡ ἀνάλυσις διαστάσεων δὲν δύναται νὰ καθορίσῃ τὴν τιμὴν τῆς α. Τοῦτο εἶναι ἔργον τῆς οἰκονομικῆς σκέψεως, ἥτις προφανῶς μᾶς ὑποδεικνύει ὅτι $\alpha = 1$, ὁπότε $MV = PT$ καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι διαστασιακῶς ὁμοιογενής.

Κατὰ τὴν δευτέραν μέθοδον θὰ ἔχωμεν :

$$[\,M\,]^{\alpha}\;[\,T^{-1}\,]^{\beta}\;[\,MR^{-1}\,]^{\gamma}\;[\,RT^{-1}\,]^{\delta} \qquad \text{ἢ}$$

$$[\,M\,]^{\alpha+\gamma}\;[\,T\,]^{(-\beta-\delta)}\,[\,R\,]^{(-\gamma+\delta)}$$

$$\alpha + \gamma = 0$$

$$-\beta - \delta = 0$$

$$-\gamma + \delta = 0$$

Λύοντες τὸ ἀνωτέρω σύστημα, ὑποτιθεμένου τοῦ δ ὡς γνωστοῦ, λαμβάνομεν :

$$\alpha = -\delta,\ \beta = -\delta,\ \gamma = \delta$$

Ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$M^{-\delta}\,V^{-\delta}\,P^{\delta}\,T^{\delta} = (\,M^{-1}\,V^{-1}\,PT\,)^{\delta},$$

καὶ

$$PT = MV$$

Ἡ ἀνωτέρω εἶναι ἡ ἐξίσωσις συναλλαγῶν τοῦ Fisher.

β) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑφίσταται συναρτησιακὴ σχέσις μεταξὺ τοῦ πραγματικοῦ εἰσοδήματος (Y), τοῦ πραγματικοῦ ὑλικοῦ κεφαλαίου (K), τῆς ἀπασχολουμένης ἐργασίας (L) καὶ τεχνολογικῆς καταστάσεως (state of arts) (T), ὡς ἀκολούθως :

$$\Phi\,(\,Y,\,K,\,L,\,T\,) = 0$$

Αἱ διαστάσεις τῶν μεταβλητῶν Y, K, L, καὶ τῆς σταθερᾶς **T** εἶναι :

$$Y \in [R_E\ T^{-1}]$$
$$K \in [R_E]$$
$$L \in [R_L\ T^{-1}]$$

Θὰ ἔχωμεν ἕνα μόνον ἀδιάστατον ὅρον καθ' ὅτι n — m = 4 — 3 = 1.

Διὰ τῆς μεθόδου δοκιμῆς καὶ λάθους λαμβάνομεν :

$$\frac{[R_E\ T^{-1}]\,[R_L]}{[R_E]\,[R_L\ T^{-1}]} = [1],$$

καὶ συνεπῶς $$\frac{YT}{KL} = \gamma$$

Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν: $Y = \gamma \dfrac{1}{T} LK$

Τὸ γ δὲν δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐκ τῆς διαστασιακῆς ἀναλύσεως, τοῦτο θὰ καθορίσῃ ἡ οἰκονομικὴ θεωρία.

Κατὰ τὴν δευτέραν μέθοδον θὰ ἔχωμεν :

$$[R_E\ T^{-1}]^{\alpha},\ [R_E]^{\beta},\ [R_L\ T^{-1}]^{\gamma},\ [R_L]^{\delta} \qquad \text{καὶ}$$
$$[R_E]^{\alpha+\beta},\ [T^{-\alpha-\gamma}],\ [R_L]^{\gamma+\delta}$$

Ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha + \beta = 0$$
$$-\alpha - \gamma = 0$$
$$\gamma + \delta = 0$$

Ὑποτιθεμένου τοῦ δ, αὐθαιρέτως, ὡς γνωστοῦ ἔχομεν τὴν λύσιν :

$$\alpha = \delta, \quad \beta = -\delta,\ \gamma = -\delta, \qquad \text{καὶ}$$
$$Y^{\delta}\ K^{-\delta}\ L^{-\delta}\ T^{\delta} = (YK^{-1}\ L^{-1}\,T)^{\delta}$$

Ὁπότε ἡ $$\Phi(Y, K, L, T) = 0 \qquad \text{γίνεται}$$
$$F(YT / KL) = 0$$

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις μᾶς λέγει ὅτι τὸ πραγματικὸν εἰσόδημα ἢ παραγωγὴ (Y) εἶναι συνάρτησις τοῦ κεφαλαίου (K), τῆς ἐργασίας (L), καὶ μιᾶς τεχνολογικῆς παραμέτρου $\left(\dfrac{1}{T}\right)$. Τὸ T δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ὁ κεφαλαιακὸς συντελεστής, καὶ συνεπῶς τὸ ἀντίστροφόν του $\frac{1}{T}$, ὡς ἡ παραγωγικότης τοῦ κεφαλαίου.

Ἡ σχέσις τὴν ὁποίαν ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις περιγράφει δύναται νὰ καθορισθῇ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς στατιστικῆς μεθόδου προσιδιαζούσης καλλίτερον εἰς τὰ δεδομένα.

γ) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑφίσταται σχέσις μεταξὺ εἰσαγομένων ἀγαθῶν (M), χρηματικοῦ εἰσοδήματος (Y) καὶ τιμῶν (λόγος τιμῶν ἐξωτερικοῦ πρὸς τιμὰς ἐσωτερικοῦ, P).

Αἱ διαστάσεις τῶν μεταβλητῶν δύνανται νὰ τεθοῦν ὡς :

$$M \in [RT^{-1}]$$
$$Y \in [MT^{-1}]$$
$$P \in [MR^{-1}]$$

Θὰ ἔχωμεν ἕνα μόνον ἀδιάστατον ὅρον $n - m + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$.

Διὰ τῆς μεθόδου δοκιμῆς καὶ λάθους θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{[RT^{-1}]\ MR^{-1}]}{[MT^{-1}]} = [1]$$

καὶ συνεπῶς :

$$\frac{MP}{Y} = \gamma$$

ἢ

$$M = \gamma \frac{Y}{P}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις μᾶς λέγει ὅτι αἱ εἰσαγωγαὶ εὑρίσκονται εἰς ἀνάλογον σχέσιν μὲ τὸ χρηματικὸν εἰσόδημα καὶ εἰς ἀντίστροφον σχέσιν μὲ τὰς τιμάς.

Διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου θὰ ἔχωμεν :

$$[RT^{-1}]^{\alpha}\ [MT^{-1}]^{\beta}\ [MR^{-1}]^{\gamma}, \qquad \text{καὶ}$$
$$[R]^{(\alpha-\gamma)}\ [T]^{(\alpha-\beta)}\ [M]^{(\beta+\gamma)}.$$

Ὁπότε θέτομεν :

$$\alpha - \gamma = 0$$
$$-\alpha - \beta = 0$$
$$\beta + \gamma = 0$$

Ἡ λύσις εἶναι : $\alpha = \gamma, \quad \beta = -\gamma$

Τὸ ἀδιάστατον γινόμενον θὰ εἶναι :

$$M^{\gamma}\, Y^{-\gamma}\, P^{\gamma} \qquad \text{ἢ} \qquad (MY^{-1})^{\gamma}$$

Ἡ συνάρτησις τελικῶς θὰ εἶναι

$$F\left(\frac{MP}{Y}\right) = 0.$$