ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΟΤΗΤΟΣ ΑΠΟ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΠΟΨΕΩΣ

Τοῦ κ. ΘΕΟΔΩΡΟΥ Γ. ΓΚΑΜΑΛΕΤΣΟΥ
Καθηγητοῦ τῆς Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς Πειραιῶς

Ἡ παροῦσα ἐργασία ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν παρουσίασιν τοῦ προβλήματος τῆς ἀθροιστικότητος ἀπὸ οἰκονομετρικῆς ἀπόψεως. Εἶναι γνωστὸν εἰς τὴν ἐφηρμοσμένην οἰκονομετρίαν ὅτι ἡ πρόβλεψις μιᾶς οἰκονομικῆς μεταβλητῆς δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ κατὰ δύο τρόπους: εἴτε νὰ χρησιμοποιήσωμεν μίαν συνάρτησιν τῆς ὁποίας αἱ μεταβληταὶ ἐκφράζονται εἰς συνολικὰ μεγέθη «μακρομεταβληταὶ» (Macrovariables) τῆς οἰκονομίας, εἴτε νὰ χρησιμοποιήσωμεν περισσοτέρας τῆς μιᾶς συναρτήσεις, τῶν ὁποίων αἱ μεταβληταὶ ἐκφράζονται εἰς ἐπὶ μέρους μεγέθη «μικρομεταβληταὶ» (Microvariables), ἡ δὲ συνολικὴ μεταβλητὴ ἐπιτυγχάνεται δι' ἀθροίσεως τῶν ἐπὶ μέρους αὐτῶν μεταβλητῶν.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ ἐκτιμήσωμεν (καὶ νὰ προβλέψωμεν) μίαν οἰκονομικὴν μεταβλητήν, ἔστω y, ἡ ὁποία ἀναλύεται εἰς τὰς ἐπὶ μέρους κατηγορίας $y_1, y_2, \ldots, y_K$, τότε ἡ ἐκτίμησις αὐτῆς δύναται νὰ γίνῃ κατὰ δύο τρόπους: εἴτε νὰ ἐκτιμήσωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν μεταβλητὴν αὐτὴν χρησιμοποιοῦντες τὴν ἐκτίμησιν, ἡ ὁποία προέρχεται ἀπὸ μίαν γενικὴν συνάρτησιν, εἴτε νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰς μεταβλητὰς $y_1, \ldots, y_K$ καὶ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν $\tilde{y} = \Sigma_{i=1}^{K} \hat{y}_i$ ὡς ἐκτίμησιν τῆς y. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον θὰ ἐξετάσωμεν ἐν προκειμένῳ εἶναι ποία ἐκ τῶν δύο αὐτῶν μεθόδων ἐκτιμήσεως τῆς μεταβλητῆς y δίδει καλύτερα ἀποτελέσματα.

Προτοῦ ὅμως παρουσιάσωμεν ποία ἐκ τῶν μεθόδων εἶναι καλυτέρα, ἀπαραίτητος καθίσταται ἡ διερεύνησις τῶν ὑφισταμένων σχέσεων μεταξὺ τῶν οἰκονομετρικῶν ὑποδειγμάτων, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰς δύο αὐτὰς μεθόδους ἐκτιμήσεως. Πρὸς ἁπλούστευσιν τῆς ἀναλύσεως ὑποθέτομεν ὅτι τὸ κλασικὸν γραμμικὸν ὑπόδειγμα δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὰς κατωτέρω χρησιμοποιουμένας συναρτήσεις (1).

---

1) Σχετικῶς πρὸς τὰς ὑποθέσεις τοῦ κλασικοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος βλέπε Θεοδώρου Γκαμαλέτσου, Οἰκονομετρία, Ἀθῆναι, 1973, σελ. 102 - 104.

Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$(1) \qquad y_i = X_i\, b_i + e_i \qquad (i = 1, \ldots, K)$$

ὅπου y_i εἶναι ἓν TX1 διάνυσμα - στήλη τῆς ἐξηρτημένης μικρομεταβλητῆς — ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς τὸ i ἄτομον ($i = 1, \ldots, K$) — X_i εἶναι μία T×N μήτρα τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, b_i εἶναι τὸ NX1 διάνυσμα - στήλη τῶν συντελεστῶν, καὶ e_i εἶναι ἓν TX1 διάνυσμα - στήλη τῶν ἀποκλίσεων (ὑπολοίπων), ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι T εἶναι αἱ παρατηρήσεις τοῦ χρησιμοποιουμένου δείγματος. Σημειωτέον ὅτι ἡ συνάρτησις (1) ἰσχύει δι' ἕκαστον ἄτομον κεχωρισμένως, χωρὶς τοῦτο νὰ σημαίνῃ ἀπαραιτήτως ὅτι αἱ N ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἶναι αἱ ἴδιαι δι' ἕκαστον ἄτομον (ἢ κατηγορίαν).

Ἡ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐκτίμησις b_i, ὡς γνωστόν, δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως.

$$(2) \qquad b_i = (X_i'\, X_i)^{-1}\, X_i'\, y_i \qquad (i = 1, \ldots, K),$$

ἐνῷ ἡ σχέσις

$$(3) \qquad e_i = M_i y_i \qquad (i = 1, \ldots, K)$$

δίδει τὰ ὑπόλοιπα τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως (1), καὶ ὅπου

$$(4) \qquad M_i = I - X_i\, (X_i'\, X_i)^{-1}\, X_i' \qquad (i = 1, \ldots, K)$$

εἶναι μία ἐκθετικῶς ἀναλλοίωτος (idenpotent) μήτρα.

Ἔστω ὅτι αἱ μακρομεταβληταὶ y καὶ X ἰσοῦνται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μικρομεταβλητῶν y_i καὶ X_i, ἤτοι

$$(5) \qquad y = \Sigma^{K}_{i=1}\, y_i,$$

καὶ

$$(6) \qquad X = \Sigma^{K}_{i=1}\, X_i,$$

ὅπου y εἶναι ἓν T×1 διάνυσμα — στήλη καὶ X εἶναι μία T×K μήτρα.

Ἐπὶ πλέον ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ μακρομεταβληταὶ y καὶ X συνδέονται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$(7) \qquad y = Xb + e,$$

ὅπου αἱ ἐκτιμήσεις b ἰσοῦνται πρὸς

$$(8) \qquad b = (X'X)^{-1}\, X'y,$$

καὶ

$$(9) \qquad e = My$$

εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῆς συναρτήσεως (7), καὶ ὅπου ἡ ἐκθετικῶς ἀναλλοίωτος μήτρα M δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

(10) $$M = I - X\,(X'X)^{-1}\,X'.$$

Τὸ ἐρώτημα τὸ ὁποῖον τίθεται ἐν προκειμένῳ εἶναι ἡ $\hat{y}$, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς (7), ἢ ἡ $\tilde{y} = \Sigma_{i=1}^{K}\hat{y}$, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν $\hat{y}_i$, ὡς προκύπτουν αὗται ἐκ τῶν (1), εἶναι ἡ καλυτέρα ἐκτίμησις τῆς μεταβλητῆς y; Ἢ διὰ νὰ θέσωμεν τὸ ἐρώτημα διαφορετικά, τὸ σφάλμα προβλέψεως e, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (7) ἢ τὸ σφάλμα προβλέψεως $\tilde{e} = \Sigma_{i=1}^{K} e_i$, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν (1) (διὰ τὴν πρόβλεψιν τῆς μεταβλητῆς y) εἶναι μικρότερον;

Διὰ νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ ἀπαραίτητος καθίσταται ἡ χρησιμοποίησις μιᾶς «βοηθητικῆς» συναρτήσεως, ἡ ὁποία συνδέει ἑκάστην μικρομεταβλητὴν X_i πρὸς τὴν μακρομεταβλητὴν X. Ἔστω

(11) $$X_i = Xc_i + u_i$$

ἡ «βοηθητική» συνάρτησις μεταξὺ ἑκάστης τῶν X_i καὶ τῆς X, τῆς ὁποίας αἱ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐκτιμήσεις c_i δίδονται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τῆς σχέσεως

(12) $$c_i = (X'X)^{-1}\,X'X_i,$$

ὅπου ἡ c_i εἶναι ἡ K×K μήτρα τῶν ἐκτιμήσεων. Τὰ ὑπόλοιπα u_i, συμφώνως πρὸς τὰς (3) καὶ (9), δίδονται ὑπὸ τῆς σχέσεως

(13) $$u_i = MX_i,$$

ὅπου u_i εἶναι μία T×K διαστάσεων μήτρα. Εὐκόλως προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (11) ὅτι

(14) $$\Sigma_{i=1}^{K}\, c_i = I,$$

καὶ

(15) $$\Sigma_{i=1}^{K}\, u_i = 0.$$

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον θέλομεν ἐν συνεχείᾳ νὰ εὕρωμεν εἶναι ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἐκτιμήσεων b_i καὶ b. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐξ ἀριστερῶν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) ἐπὶ c_i θὰ ἔχωμεν

(16) $$\begin{aligned} c_i b_i &= (X'X)^{-1}\,X'X_i \;.\; (X_i'X_i)^{-1}\,X'_i y_i \\ &= (X'X)^{-1}\,X'\,[\,I - M_i\,]\,y_i. \end{aligned}$$

Ἀθροίζοντες δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (16) ὡς πρὸς τὸ i ἔχομεν

$$(17)\qquad \Sigma_{i=1}^{K} c_i\, b_i = \Sigma_{i=1}^{K} (X'X)^{-1} X' \,[\,I - M_i\,]\, y_i$$
$$= (X'X)^{-1} X' \Sigma_{i=1}^{K} [\,I - M_i\,]\, y_i$$
$$= (X'X)^{-1} X' \,[\,\Sigma_{i=1}^{K} y_i - \Sigma_{i=1}^{K} M_i y_i\,]$$
$$= (X'X)^{-1} X'y - (X'X)^{-1} X' \,\Sigma_{i=1}^{K} e_i$$
$$= b - (X'X)^{-1} X' \,\Sigma_{i=1}^{K} e_i \,,$$

ἢ

$$(18)\qquad b = \Sigma_{i=1}^{K} c_i\, b_i + (X'\,X)^{-1} X' \,(\Sigma_{i=1}^{K} e_i),$$

ἡ ὁποία δίδει τὴν ὑφισταμένην σχέσιν μεταξὺ τῶν ἐκτιμήσεων b καὶ b_i.

Ἐκ τῆς σχέσεως (18) παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ ἐκτίμησις b διαφέρει γενικῶς τῆς ἐκτιμήσεως $\Sigma_{i=1}^{K} c_i\, b_i$, διότι ὁ ὅρος $(X'X)^{-1} X'\, (\Sigma_{i=1}^{K} e_i\,)$ δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἴσος πρὸς τὸ μηδέν. Σημειωτέον ὅτι ὁ ὅρος οὗτος μεταφράζεται ὡς ἡ τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐκτίμησις τῆς παλινδρομήσεως μεταξὺ τῶν $\Sigma_{i=1}^{K} e_i$ (ἐξηρτημένη μεταβλητὴ) καὶ τῆς X (ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς). Πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ἐν προκειμένῳ ὅτι, ἐνῷ ἰσχύει ἡ σχέσις $X'_i\, e_i = 0$, ὡς προκύπτει αὕτη ἐκ τῆς (1), δὲν σημαίνει τοῦτο ὅτι πρέπει νὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ σχέσις $X'e_i = 0$. Γενικῶς ἔχομεν $X'e_i \neq 0$. Τοῦτο δὲ διότι εἰς τὴν μακρομεταβλητὴν X ἐκτὸς τῶν X_i περιλαμβάνονται καὶ αἱ μικρομεταβληταὶ X_j (ὅπου $j \neq i$). Ἐνῷ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑποθέσεων τοῦ κλασικοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος προκύπτει ὅτι οὐδεμία συσχέτισις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν X_i καὶ e_i, εἶναι πιθανὸν νὰ ὑπάρχῃ κάποια συσχέτισις μεταξὺ τῶν X_j ($j \neq i$) καὶ e_i, ὅπερ ἐν συνεχείᾳ σημαίνει ὅτι εἶναι πιθανὸν νὰ ὑπάρχῃ κάποια συσχέτισις μεταξὺ τῆς μακρομεταβλητῆς X (ἡ ὁποία περιλαμβάνει τὰς X_i καὶ X_j) καὶ τῆς $\Sigma_{i=1}^{K} e_i$. Ἑπομένως ἡ X γενικῶς δὲν εἶναι ὀρθογώνιος τῆς $\Sigma_{i=1}^{K} e_i$ (1).

Ἐὰν θελήσωμεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν ἁπλοῦν ἀριθμητικὸν μέσον, ἔστω $\bar{b}$, τῶν b_i ὡς ἐκτίμησιν τῆς παραμέτρου β, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν συνάρτησιν (7), τότε πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ἐκτίμησις αὕτη $\bar{b}$ εἶναι (γενικῶς) μεροληπτικὴ (ἀκόμη δὲ καὶ ἀσυνεπὴς) ἐκτίμησις τῆς β. Ἀλλὰ ἂς εἴδωμεν διατί τοῦτο συμβαίνει.

Ἡ ἐκτίμησις $\bar{b}$ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$(19)\qquad \bar{b} = K^{-1}\, \Sigma_{i=1}^{K} b_i = K^{-1}\, (\Sigma_{i=1}^{K} c_i)\, (\Sigma_{i=1}^{K} b_i),$$

---

1) Ἓν παράδειγμα ἐν προκειμένῳ εἶναι τὸ ἑξῆς: Εἶναι δυνατὸν ἡ κατανάλωσις ἑνὸς ἀτόμου (y_i) νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἰσοδήματός του, τῶν ρευστῶν διαθεσίμων αὐτοῦ κ.ἄ. (X_i), ἀλλὰ ἐπὶ πλέον νὰ ἐξαρτᾶται καὶ ἐξ ἄλλων γενικωτέρων συνθηκῶν τῆς ἀγορᾶς (αἱ ὁποῖαι ἐνσωματώνονται εἰς τὴν μακρομεταβλητὴν X).

ἐφ' ὅσον ἔχομεν $\Sigma_{i=1}^{K} c_i = I$. Ἐὰν δὲ χρησιμοποιήσωμεν ταύτην εἰς τὴν (18), τότε αὕτη λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$b = \Sigma_{i=1}^{K} c_i b_i - K^{-1} (\Sigma_{i=1}^{K} c_i)(\Sigma_{i=1}^{K} b_i) + \bar{b} + (X'X)^{-1} X' (\Sigma_{i=1}^{K} e_i) \tag{20}$$

ἤ

$$b = \bar{b} + KD\iota + (X'X)^{-1} X' (\Sigma_{i=1}^{K} e_i), \tag{21}$$

ὅπου ἡ ἐκτίμησις $D\iota$ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$D\iota = K^{-1} [\Sigma_{i=1}^{K} c_i b_i - K^{-1} (\Sigma_{i=1}^{K} e_i)(\Sigma_{i=1}^{K} b_i)], \tag{22}$$

ὅπου ι εἶναι τὸ $K \times 1$ «ἀθροιστικὸν» διάνυσμα («Summer» Vector) [1]. Ἐκ τοῦ δευτέρου μέρους τῆς ἐξισώσεως (22), παρατηροῦμεν ὅτι ἡ D εἶναι ἡ μήτρα τῶν διακυμάνσεων — συνδιακυμάνσεων (εἰς τὸ δεῖγμα) μεταξὺ τῶν ἐκτιμήσεων b_i καὶ c_i.

Αἱ μέχρι τοῦδε σχέσεις συνδέουν τὰς ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων τῶν μικρο - καὶ μακρομεταβλητῶν. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐναπόκειται νὰ ἐξετάσωμεν, πρὶν ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ τεθὲν ἐρώτημα ἐὰν ἡ $\hat{y}$ ἢ ἡ $\tilde{y}$ εἶναι ἡ καλυτέρα ἐκτίμησις τῆς y, εἶναι νὰ εὕρωμεν τὴν ὑφισταμένην σχέσιν μεταξὺ τῶν ὑπολοίπων e καὶ $\Sigma_{i=1}^{K} e_i$.

Κατ' ἀρχὴν ἐκ τῶν σχέσεων (9), (5) καὶ (1) ἔχομεν

$$e = My = M\, \Sigma_{i=1}^{K} y_i = M\, \Sigma_{i=1}^{K} (X_i b_i + e_i), \tag{23}$$

ἡ ὁποία χρησιμοποιοῦντες τὴν (13) γίνεται

$$\begin{aligned} e &= \Sigma_{i=1}^{K} (MX_i)\, b_i + \Sigma_{i=1}^{K} Me_i \\ &= \Sigma_{i=1}^{K} u_i b_i + \Sigma_{i=1}^{K} e_i + \Sigma_{i=1}^{K} (M-I)\, e_i . \end{aligned} \tag{24}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ὑπόλοιπα τῆς συναρτήσεως (7) δὲν ἰσοῦνται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων τῶν συναρτήσεων (1). Ἐὰν συνέβαινε τοῦτο τότε οὐδὲν πρόβλημα ἀθροιστικότητος ὑφίσταται. Αἱ ἐκτιμήσεις $\hat{y}$ καὶ $\tilde{y}$ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν διαφέρουν. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ σχέσις (23)

---

1) Σημειωτέον ὅτι ἡ σχέσις (21) ἀναφέρεται εἰς τὸ δεῖγμα. Ἡ ἀντίστοιχος σχέσις εἰς τὸν πληθυσμόν, ἡ συνδέουσα δηλαδὴ τὰς παραμέτρους β, β_i καὶ γ_i τῶν ἀντιστοίχων ἐκτιμήσεων b, b_i καὶ c, εὑρίσκεται ἐὰν λάβωμεν τὴν μέσην τιμὴν (μαθηματικὴν ἐλπίδα) ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (21) καὶ ἡ ὁποία εἶναι

(21α) $\beta = \bar{\beta} + K\Delta\iota$,

ἐφ' ὅσον $E[(X'X)' X' (\Sigma_{i=t}^{K} e_i)] = (X'X)^{-1} X' \Sigma_{i=1}^{K} (Ee_i) = 0$, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ κλασικὸν γραμμικὸν ὑπόδειγμα ἰσχύει ἐν προκειμένῳ. Ἡ $\Delta\iota$ εἶναι ἡ μήτρα τῶν διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων εἰς τὸν πληθυσμὸν τῶν b_i καὶ c_i.

ἢ (24) ἰσχύει γενικῶς, θὰ πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὴν ὑφισταμένην σχέσιν μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ὑπολοίπων e καὶ $\Sigma_{i=1}^{K} e_i$.

Ἐκ τῆς (24) προκύπτει ἡ σχέσις

$$(25) \qquad e'e = \Sigma_{i=1}^{K} \Sigma_{j=1}^{K} b_i' u_i' u_j b_j + \Sigma_{i=1}^{K} \Sigma_{j=1}^{K} e_i' M e_j + 2 \Sigma_{i=1}^{K} \Sigma_{j=1}^{K} e'_i u_j b_j ,$$

λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ M εἶναι μία ἐκθετικῶς ἀναλλοίωτος μήτρα καὶ ὅτι $Mu_i = u_i$ (διότι $Mu_i = MMX_i = MX_i = u_i$) [1].

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως προκύπτει ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὑπολοίπων e διαφέρει (γενικῶς) τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ὑπολοίπων ($\Sigma_{i=1}^{K} e_i$)

$$(26) \qquad (\Sigma_{i=1}^{K} e_i)' (\Sigma_{j=1}^{K} e_j) = \Sigma_{i=1}^{K} e_i' e_i + \Sigma_{i=1}^{K} \Sigma_{j=1}^{K} e_i' e_j ,$$

καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ὑπολοίπων e_i

$$(27) \qquad \Sigma_{i=1}^{K} e_i' e_i .$$

Γενικῶς, δηλαδή, ἰσχύει ἡ σχέσις

$$(28) \qquad e'e \neq (\Sigma_{i=1}^{K} e_i)' (\Sigma_{j=1}^{K} e_j) \neq \Sigma_{i=1}^{K} e_i' e_i \ ^{(2)}.$$

Διὰ νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα ἐὰν ἡ $\hat{y}$ ἢ ἡ $\tilde{y}$ εἶναι καλυτέρα ἐκτίμησις τῆς y, θὰ πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων e'e εἶναι μικρότερον ἢ ὄχι τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων $(\Sigma_{i=1}^{K} e_i)' (\Sigma_{j=1}^{K} e_j)$.

Ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται ὅτι ἡ ἀθροιστικότης δὲν εἶναι ὀρθὸν νὰ χρησιμοποιῆται διὰ τὴν πρόβλεψιν μιᾶς μακρομεταβλητῆς, διότι κατ' αὐτὴν ἀπώλυνται ὡρισμέναι πληροφορίαι, τὰς ὁποίας ἔχομεν ὅταν χρησιμοποιοῦμεν τὰς μικρομεταβλητάς. Ἀλλὰ οἱ Grunfeld καὶ Griliches δὲν συμφωνοῦν πρὸς τὴν ἄποψιν αὐτήν. «Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐξηγήσωμεν (ἐκτιμήσωμεν) τὸ σύνολον τῶν ἐπενδύσεων ὀκτὼ ἐπιχειρήσεων, θὰ ἐπιτύχωμεν καλύτερα ἀποτελέσματα ἐὰν πρῶτον ἀθροίσωμεν ὅλας τὰς μεταβλητὰς (ἐξηρτημένας καὶ ἀνεξαρτήτους) καὶ κατόπιν χρησιμοποιήσωμεν μίαν μόνον παλινδρόμησιν, ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα ἐπιτυγχάνομεν ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν χωριστὰς παλινδρομήσεις δι' ἑκάστην ἐπιχείρησιν καὶ κατόπιν ἀθροίσωμεν τὰς ἐκτιμήσεις αὐτάς. Ἐὰν σκοπός μας εἶναι νὰ ἐπεξηγήσωμεν (ἐκτιμήσωμεν) τὸ σύνολον μόνον τῶν ἐπενδύσεων (τῶν ἐπιχειρήσεων) οὐδὲν ἐπιτυγχάνομεν ἐκτιμῶντες αὐτὰς κεχωρισμένως δι' ἑκάστην ἐπιχείρησιν» (μετάφρασις ἐλευθέρα) - Grunfeld and Gri-

---

1) Βλέπε σχετικῶς Boot J. C. G. and G. M. de Wit (1960) σελ. 21 - 25.

2) Σημειωτέον ὅτι ἡ σχέσις αὕτη ἀναφερομένη εἰς τὸν πληθυσμὸν καὶ οὐχὶ εἰς τὸ δεῖγμα, δίδεται ὑπὸ τῶν H. Theil (1960), σελ. 111) καὶ H. A. J. Green (1964, σελ. 101). Οἱ συγγραφεῖς οὗτοι χρησιμοποιοῦν τὰς συνδιακυμάνσεις τῶν τυχαίων ἀποκλίσεων ἀντὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ὑπολοίπων.

liches (1960, σελ. 3). Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ὅτι χρειάζεται κάποια διευκρίνισις εἰς τὸ θέμα τοῦτο.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν (26) ἀπὸ τὴν (25) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$(29) \quad e'e - (\Sigma_{i=1}^{K} e_i)' (\Sigma_{j=1}^{K} e_j) = \Sigma_{i=1}^{K} \Sigma_{j=1}^{K} b_i' u_i' u_j b_j + \\ + 2 \Sigma_{i=1}^{K} \Sigma_{j=1}^{K} e_i' u_j b_j - \Sigma_{i=1}^{K} \Sigma_{j=1}^{K} e_i' X (X'X)^{-1} X' e_j$$

χρησιμοποιοῦντες τὴν ἐξίσωσιν $M = I - X (X'X)^{-1} X'$. Ἐὰν ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἀρνητική, τότε ἡ ἀθροιστικότης ἐπιτυγχάνει καλύτερα ἀποτελέσματα (ἀπὸ πλευρᾶς ἐκτιμήσεως τῆς μακρομεταβλητῆς y). Τὸ ἀντίθετον συμβαίνει ἐὰν ἡ (29) εἶναι θετική. Ἀλλὰ τὸ ἐρώτημα τίθεται πότε ἡ (29) εἶναι θετικὴ καὶ πότε ἀρνητική; Διὰ νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τοῦτο θὰ πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόσημον τῶν ὅρων τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς σχέσεως ταύτης.

Κατ' ἀρχὴν ὁ πρῶτος ὅρος δὲν εἶναι ποτὲ ἀρνητικός, καὶ τοῦτο διότι ἡ μήτρα αὕτη εἶναι τῆς μορφῆς A'A, ὅπου $A = \Sigma_{i=1}^{K} u_i b_i$, καὶ ἑπομένως εἶναι μία «μὴ ἀρνητική» μήτρα (Nonnegative definite). Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ ὅρος αὐτὸς συμβάλλει εἰς τὴν θετικότητα τῆς σχέσεως (29). Τί δύναται ὅμως νὰ λεχθῇ διὰ τοὺς ὑπολοίπους δύο ὅρους ;

Κατὰ τοὺς Grunfeld καὶ Griliches (1960, σελ. 7) ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς σχέσεως (29) εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἀρνητικὸν πρόσημον, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἐνισχύει τὴν ἄποψιν αὐτῶν ὅτι ἡ ἀθροιστικότης δίδει καλύτερα ἀποτελέσματα. Ἡ ἄποψις αὐτὴ βασίζεται εἰς τὴν ἀρνητικὴν συσχέτισιν μεταξὺ τῶν ὑπολοίπων u_j (t) καὶ e_i (t) διὰ t=1, . . . , T. Εἰς τὴν προκειμένην ὅμως περίπτωσιν ὑπάρχει καὶ ἡ ἀντίθετος ἄποψις, ἡ ὁποία ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ Green (1964, σελ. 105). Κατ' αὐτὸν ὁ δεύτερος οὗτος ὅρος τῆς (29) δὲν μετρεῖ τὴν συσχέτισιν μεταξὺ τῶν ὑπολοίπων u_j καὶ e_i, τὰ ὁποῖα δυνατὸν νὰ συσχετίζωνται ἀρνητικῶς, οὔτε ἀκόμη τὴν συσχέτισιν μεταξὺ τῶν e_i καὶ u_j b_j διαχρονικῶς, ἀλλὰ μᾶλλον μετρεῖ τὴν συσχέτισιν μεταξὺ τῶν $\Sigma_{i=1}^{K} u_i b_i$ καὶ $\Sigma_{i=1}^{K} e_i$ διαχρονικῶς. Ἑπομένως, κατὰ τὸν Green, ἀκόμη καὶ ἐὰν δεχθῶμεν τὴν ἄποψιν τῶν Grunfeld καὶ Griliches, ὅτι διαχρονικῶς ὑφίσταται μία ἀρνητικὴ συσχέτισις μεταξὺ τῶν u_j καὶ e_i, τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι θὰ πρέπει νὰ συσχετίζωνται ἀρνητικῶς μεταξύ των αἱ ἐκτιμήσεις $\Sigma_{i=1}^{K} u_i b_i$ καὶ $\Sigma_{i=1}^{K} e_i$.

Ἓν δεύτερον ἐπιχείρημα τῶν Grunfeld καὶ Griliches ὑπὲρ τῆς ἀπόψεως ὅτι ἡ ἀθροιστικότης δίδει καλύτερα ἀποτελέσματα (ἀπὸ πλευρᾶς πάντοτε ἐκτιμήσεως τῆς μακρομεταβλητῆς y) εἶναι ὅτι, ὁ τρίτος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς σχέσεως (29) εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἀρνητικός. Ὁ ὅρος αὐτός, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ $(X'X)^{-1} X'$ εἶναι μία μήτρα ἐκθετικῶς ἀναλλοίωτος, δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(30) \quad \Sigma_{i=1}^{K} \Sigma_{j=1}^{K} e_i' X (X'X)^{-1} X' e_j = [\Sigma_{i=1}^{K} X (X'X)^{-1} X' e_i]. \\ [\Sigma_{i=1}^{K} X (X'X)^{-1} X' e_j].$$

Ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς σχέσεως ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὅρος οὗτος εἶναι μία μήτρα τῆς μορφῆς A'A, ὅπου $A = \Sigma_{i=1}^{K} X(X'X)^{-1} X'e_i$, καὶ ἑπομένως εἶναι μὴ ἀρνητική (1). Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ ὅρος οὗτος δὲν εἶναι θετικός, ὅπερ ἐνισχύει τὴν ἄποψιν τῶν Grunfeld καὶ Griliches ὅτι ἡ ἀθροιστικότης ὁδηγεῖ εἰς καλύτερα ἀποτελέσματα. Σημειωτέον ὅτι, ἐνῷ τὰ ὑπόλοιπα e_i εἶναι ὀρθογώνια τῶν X_i, δηλαδὴ $X'_i e_i = 0$, τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι $X'e_i = 0$, ἑπομένως ἀποκλείομεν μᾶλλον τὴν περίπτωσιν ὁ ὅρος οὗτος νὰ μηδενίζεται.

Θὰ πρέπει ὅμως νὰ ὑπάρχῃ κάποια ἐπιφύλαξις ὡς πρὸς τὴν ἄποψιν τῶν Grunfeld καὶ Griliches, οἱ ὁποῖοι τάσσονται ὑπὲρ τῆς ἀθροιστικότητος. Ἀκόμη καὶ ἐὰν δεχθῶμεν τὰ ἐπιχειρήματά των, ὅτι ὁ δεύτερος καὶ τρίτος ὅρος τῆς σχέσεως (29) εἶναι ἀρνητικοί, τοῦτο δὲν σημαίνει κατ' ἀνάγκην ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις $e'e < (\Sigma_{i=1}^{K} e_i)(\Sigma_{j=1}^{K} e_j)$. Εἶναι δυνατὸν οἱ (ἀρνητικοὶ) οὗτοι ὅροι νὰ ἀντισταθμίζωνται ὑπὸ τοῦ (ὁπωσδήποτε) θετικοῦ πρώτου ὅρου.

Δὲν εἶναι δυνατόν, ἑπομένως, νὰ ἐξάγωμεν ἓν γενικὸν συμπέρασμα ὑπὲρ ἢ κατὰ τῆς ἀθροιστικότητος εἰς τὴν οἰκονομετρίαν. Κατὰ πόσον ἐκ τῆς ἀθροιστικότητος ἐπιτυγχάνομεν καλύτερα ἀποτελέσματα διὰ τὴν ἐκτίμησιν μιᾶς μακρομεταβλητῆς ἐξαρτᾶται, ὡς εἴδομεν, ἐκ τῆς συγκεκριμένης περιπτώσεως.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Boot, J.C.G. and G.M. De Wit, «Investment Demand: An Empirical Contribution to the Aggregation Problem», International Economic Review, Vol. 1, January 1960, σελ. 3-30.
2. Γκαμαλέτσος Θεόδωρος, Οἰκονομετρία, Ἀθῆναι 1972, σελ. 102-104.
3. Green H.A.J. Aggregation in Economic Analysis: An Introductory Survey, Princeton: Princeton University, 1964.
4. Grunfeld, Y. and Z. Griliches, «Is Aggregation Necessarily Bad?» Review of Economics and Statistics, Vol. 42, February 1960, σελ. 1-13.
5. Theil, H., Linear Aggregation of Economic Relations, Amsterdam: North-Holland, 1954.
6. Zellner, A., «On the Questionable Virtue of Aggregation», Systems Formulation and Methodology Workshop, Social Systems Research Institute, University of Wisconsin: Paper 6202, February 1962.
7. Zellner, A. «On the Aggregation Problem: A New Approach to a Troublesome Problem», Center for Mathematical Studies in Business and Economics, University of Chicago: Report 6628, October 1966.

---

1) Σημειωτέον ὅτι ἡ μήτρα $A = X[(X'X)^{-1} X'(\Sigma_i e_i)]$ ὁμοιάζει πρὸς τὸν γνωστὸν τύπον $Xb = \hat{y}$, ὅπου ἐν προκειμένῳ $b = (X'X)^{-1} X'(\Sigma_i e_i)$, καὶ ἑπομένως δύναται νὰ μεταφρασθῇ ὡς ἡ ἐκτίμησις τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς εἰς τὴν παλινδρόμησιν μεταξὺ τῶν $(\Sigma_i e_i)$ καὶ X.