ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ:

ΝΕΩΤΕΡΑΙ ΣΚΕΨΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΟΓΡΑΦΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΠΙ ΤΟΥΤΟΥ

Τοῦ κ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ε. ΧΑΡΑΜΗ
Ἀναλυτοῦ Συστημάτων

1. Γενικαὶ Παρατηρήσεις

Αἱ πολλαὶ ὧραι τῆς διὰ χειρὸς ἐργασίας, ὁσάκις δὲν εἶναι προσιτὸς ὁ Ἠλεκτρονικὸς Ὑπολογιστής, πρὸς ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ διὰ τῆς μεθόδου Simplex, ὑπῆρξαν ἐκ τῶν κυρίων περιοριστικῶν παραγόντων τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς μεθόδου. Οὕτω, προέκυψεν ἡ ἀνάγκη δημιουργίας μεθόδων περικλειουσῶν ὀλίγους καὶ ἁπλοῦς ὑπολογισμοὺς πρὸς ἐπίλυσιν προβλημάτων Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἰδικῶν περιπτώσεων. Ἡ πλέον γνωστὴ τῶν μεθόδων τούτων εἶναι ἡ Μέθοδος Μεταφορᾶς ἢ Διανομῆς (Transportation or Distribution Method). Ὑπάρχουν πολλαὶ ἐφαρμογαὶ τῆς μεθόδου εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας καταβάλλεται προσπάθεια ἐξευρέσεως τοῦ ἐλαχίστου κόστους μεταφορᾶς ἀγαθῶν μεταξὺ διαφόρων περιοχῶν. Δέον νὰ διευκρινισθῇ ὅτι ἡ Μέθοδος Μεταφορᾶς ἐκτὸς τῆς ἰδιαιτέρας ἐφαρμογῆς, τὴν ὁποίαν εὑρίσκει εἰς προβλήματα μεταφορᾶς ἢ διανομῆς δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑτέρων προβλημάτων ἐφ' ὅσον αἱ συνθῆκαι εἶναι κατάλληλοι.

Ἡ μέθοδος εἶναι ἁπλῆ· προέκυψεν ἐκ τῆς Simplex ὡς ἁπλοποιημένη μέθοδος δι' ἐπίλυσιν εἰδικῶν προβλημάτων· θὰ ἠδύνατο νὰ λεχθῇ ὅτι εἶναι μία προσαρμογὴ τῆς Simplex εἰς τὴν εἰδικὴν μορφὴν τοῦ προβλήματος καὶ χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων μεταφορᾶς (ἢ διανομῆς) διαφόρων ἀντικειμένων ἐκ τῶν τόπων ἀποστολῆς (πηγαὶ) πρὸς τοὺς τόπους παραλαβῆς (προορισμοί), οὕτως ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται ἡ ἐλάττωσις τοῦ κόστους μεταφορᾶς εἰς τὸ ἐλάχιστον.

Ἀπαραίτητος προϋπόθεσις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου εἶναι ἡ ἰσότης μεταξὺ προσφορᾶς καὶ ζητήσεως τῶν πρὸς μεταφορὰν ἀγαθῶν. Ἡ ἰσότης αὐτὴ δὲν συναντᾶται βεβαίως πάντοτε εἰς τὴν πραγματικότητα· τοῦτο ὅμως δὲν ἀποτελεῖ ἐμπόδιον διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου. Μαθηματικῶς τὸ προκῦπτον θέμα τῆς ἀνισότητος ἀντιμετωπίζεται, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς Simplex, διὰ τῶν προσθέτων μεταβλητῶν. Δι' οἰκονομικῆς ἐκφράσεως ὡσαύτως δυνάμεθα νὰ ἐπεξηγήσωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ προσφορᾶς καὶ ζητήσεως δύναται ν' ἀντιμετωπισθῇ καὶ νὰ ἐκληφθῇ ὡς ἰσότης κατὰ τὴν ἀκόλουθον ἔννοιαν :

α) Ζήτησις μεγαλυτέρα Προσφορᾶς

Ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ ἐφοδιασθῇ ὑπὸ ἑτέρων ὁμοειδῶν ἐπιχειρήσεων τὴν διαφορὰν ζητήσεως—προσφορᾶς· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὡς κέρδος κατὰ μονάδα δύναται νὰ θεωρηθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τιμῆς πωλήσεως καὶ τιμῆς ἀγορᾶς.

β) Προσφορὰ μεγαλυτέρα Ζητήσεως

Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἢ θὰ παραμείνουν ἀδιάθετοι ποσότητες τῆς παραγωγῆς καὶ θὰ ἐπιβαρύνουν τὴν τιμὴν πωλήσεως τῶν μεταφερομένων ἢ θὰ ἐμφανίζεται ἀργοῦσα παραγωγικὴ δυναμικότης ὁπότε πάλιν θὰ ἔχωμεν αὐξητικὴν ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς τιμῆς τῶν (παραγομένων) μεταφερομένων ποσοτήτων.

Ἡ ἐφαρμογὴ εἰς τὴν πρᾶξιν ὑπηγόρευσε μετατροπὰς καὶ ἁπλοποιήσεις τῆς μεθόδου καὶ ἀποτέλεσμα τούτων ὑπῆρξεν ἡ δημιουργία τῆς μεθόδου «MODI» (Modified Distribution Method — Τροποποιημένη Μέθοδος Διανομῆς), ἡ ὁποία βασίζεται ὡς καὶ ἡ Μέθοδος Μεταφορᾶς ἐπὶ τῆς μεθόδου Simplex.

Ἡ Μέθοδος τῆς Μεταφορᾶς χρησιμοποιεῖται ἐπιτυχῶς καὶ διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων κατανομῆς (Assignment Problem), καθὼς καὶ εἰς προβλήματα μεταφορτώσεων (Transhipment Problem) διὰ τὰ ὁποῖα ὅμως ἕκαστος τόπος ἀποστολῆς δύναται νὰ ἀποστέλλῃ ἀγαθὰ ὄχι μόνον εἰς τοὺς τόπους παραλαβῆς, ἀλλὰ καὶ εἰς τοὺς ὑπολοίπους τόπους ἀποστολῆς.

Τὸ Πρόβλημα Μεταφορᾶς θεωρεῖται τὸ πρῶτον πρόβλημα Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ· ἡ λύσις του ὀφείλεται εἰς τὸν F.L. Hitchcock (1941) καὶ περιγράφεται εἰς τὴν ἐργασίαν του «The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities». Ἡ λύσις τοῦ Προβλήματος Μεταφορᾶς ἐπετεύχθη κατὰ μερικὰ ἔτη ἐνωρίτερον τῆς γενικῆς διατυπώσεως τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἐνωρίτερον τοῦ Hitchcock (τὸ 1939) ὅμοιαι ἰδέαι ἀνεπτύχθησαν ὑπὸ τοῦ Kantorovich. Μετὰ τὸν Hitchcock τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἐτέθη ὑπὸ τοῦ T. C. Koopmans (1945), ἐφηρμόσθη δὲ κατὰ πρῶτον ὑπὸ βιομηχανιῶν πετρελαιοειδῶν πρὸς ἐξεύρεσιν τοῦ πλέον οἰκονομικοῦ τρόπου διανομῆς τῶν προϊόντων των ἀπὸ τὰ διϋλιστήριά των εἰς τοὺς τόπους καταναλώσεως.

1.1. Θέσις τοῦ Προβλήματος

Μαθηματικῶς τὸ πρόβλημα τίθεται ὡς ἀκολούθως καὶ ἀμέσως γίνεται ἀντιληπτόν, ὅτι ἰσχύουν αἱ ἀρχαὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων ἑδράζεται ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμός, ἤτοι αἱ ἀρχαὶ τῆς ἀναλογικότητος, τῆς ἀθροιστικότητος, τῆς διαιρετότητος καὶ τῆς κυρτότητος. Κατὰ τὸ πρόβλημα τῆς Μεταφορᾶς δίδεται ὡρισμένη ποσότης εἴδους τινὸς διαθέσιμος εἰς τινα κέντρα παραγωγῆς ἢ ἀποστολῆς (πηγαί) πρὸς ἱκανοποίησιν ἀπαιτήσεων κέντρων τινῶν παραλαβῆς (προορισμοί), γνωστοῦ ὄντος τοῦ κόστους μεταφορᾶς δι' ἑκάστην διαδρομὴν καὶ δεδομένου ὅτι ἡ συνολικῶς διαθέσιμος ποσότης ἰσοῦται πρὸς τὴν συνολικῶς αἰτουμένην τοιαύτην. Ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον κόστος μεταφορᾶς.

Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω σημειοῦμεν ἰδιαιτέρως:

α) Ὅτι αἱ πρὸς ἀποστολὴν καὶ παραλαβὴν ποσότητες εἶναι γνωσταί.

β) Δὲν ὑπάρχουν ἀπώλειαι κατὰ τὰς διαδρομὰς καὶ

γ) Τὸ κόστος τῆς μεταφορᾶς κατὰ διαδρομὴν εἶναι γνωστόν.

Ἐπειδὴ πιστεύεται ὅτι ἡ ἔννοια καὶ ἡ λειτουργία τῆς μεθόδου δύνανται νὰ περιγραφοῦν καὶ κατανοηθοῦν κάλύτερον διὰ τῆς ἐπιλύσεως ἑνὸς παραδείγματος καὶ ὄχι διὰ τῆς λεπτομεροῦς ἀπαριθμήσεως κανόνων, οἱ ὁποῖοι θὰ πρέπει νὰ τηρηθοῦν, παρατίθεται κατωτέρω ἀριθμητικὸν παράδειγμα γενικῆς μορφῆς: Ἔστω ὅτι ἀπὸ δύο κέντρα ἀποστολῆς (πηγαὶ) τὸ Υ καὶ τὸ Φ ἔχομεν νὰ ἀποστείλωμεν ἐμπόρευμά τι εἰς πέντε κέντρα παραλαβῆς (προορισμοὶ) τὰ Α, Β, Γ, Δ καὶ Ε. Εἰς τὴν πηγὴν Υ ὑπάρχουν πρὸς ἀποστολὴν 200 τόννοι τοῦ ἐμπορεύματος καὶ εἰς τὴν Φ 300 τόννοι.

Βασικὴ προϋπόθεσις, ὡς ἤδη ἐτονίσθη, εἶναι ἡ ἰσότης μεταξὺ τῶν συνολικῶς προσφερομένων καὶ αἰτουμένων ποσοτήτων· ἔστω λοιπὸν ὅτι ὁ προορισμὸς Α χρειάζεται 50 τόννους, ὁ Β 100, ὁ Γ 80, ὁ Δ 150 καὶ ὁ Ε 120. (Σύνολον Ἀποστελλομένων ἢ Παραλαμβανομένων ποσοτήτων ἴσον πρὸς 500 τόννους).

Τὸ συνολικὸν κόστος μεταφορᾶς τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ ἐλαχιστοποίησις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐκλογῆς τῶν διαδρομῶν ἐκ τῶν πηγῶν πρὸς τοὺς προορισμούς.

Τὸ κόστος ἑκάστης διαδρομῆς, εἰς χιλιάδας δραχμῶν κατὰ τόννον, δίδεται ὑπὸ τοῦ Πίνακος 1.

Πίναξ 1

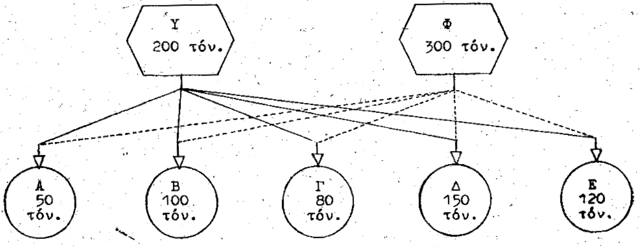
Πηγαί \ Προορισμοί	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Υ	4	2	5	8	10
Φ	1	4	9	3	9

Δηλαδὴ τὸ κόστος μεταφορᾶς 1 τόννου ἐμπορεύματος ἐκ τῆς πηγῆς Υ εἰς τὸν προορισμὸν Α ἰσοῦται πρὸς 4 χιλ. δρχ.

Ἐκ τῆς Φ πρὸς τὴν Γ εἶναι 9 χιλ. δρχ. κ.ο.κ.

Ζητεῖται ὁ καθορισμὸς τοῦ Προγράμματος Μεταφορᾶς, οὕτως ὥστε τὸ κόστος διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν 500 τόννων νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ γράμματος Χ καὶ δύο δεικτῶν (ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος θὰ δεικνύῃ τὸ κέντρον ἀποστολῆς καὶ ὁ δεύτερος τὸ κέντρον παραλαβῆς) τὰς ποσότητας, αἱ ὁποῖαι θὰ μεταφερθοῦν ἐξ ἑκάστης πηγῆς πρὸς ἕκαστον προορισμόν, διατυποῦμεν τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος διὰ τοῦ ἀκολούθου συστήματος, βοηθούμενοι ὑπὸ τοῦ Σχήματος 1:



Σχῆμα 1

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 200$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 300$$

$$X_{11} + X_{21} = 50$$

$$X_{12} + X_{22} = 100$$

$$X_{13} + X_{23} = 80$$

$$X_{14} + X_{24} = 150$$

$$X_{15} + X_{25} = 120$$

ἡ δὲ Οἰκονομικὴ (Ἀντικειμενικὴ) Συνάρτησις τῇ βοηθείᾳ τοῦ Πίνακος 1 διατυποῦται ὡς:

$$Z = 4X_{11} + 2X_{12} + 5X_{13} + 8X_{14} + 10X_{15} + X_{21} + 4X_{22} + 9X_{23} + 3X_{24} + 9X_{25}.$$

1.2. Τυποποίησις τῶν προβλημάτων Μεταφορᾶς

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ πρόβλημα Μεταφορᾶς ὑπὸ τὴν τεχνικὴν ταύτην ἔννοιαν δὲν καλύπτει ὅλας τὰς περιπτώσεις προβλημάτων διανομῆς. Συχνὰ τοιαῦτα προβλήματα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τυποποιηθοῦν κατὰ τοὺς κανόνας τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ὁπωσδήποτε ὅμως αἱ περιπτώσεις ἐφαρμογῆς τῆς Μεθόδου Μεταφορᾶς εἶναι περισσότεραι ἀπ᾿ ὅτι κατ᾿ ἀρχὴν δυνάμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν.

Ἐπὶ παραδείγματι:

—Ὑπάρχει περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι ἀδύνατος ἡ ἐπικοινωνία μεταξὺ ὡρισμένων πηγῶν καὶ ὡρισμένων προορισμῶν· τότε δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς κόστος μεταφορᾶς ἓν πραγματικῶς ἄπειρον ποσὸν δι' αὐτὰς τὰς διαδρομάς, τὰς ὁποίας καλοῦμεν Ἀπροσδιορίστους.

— Περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ὑπάρχουν ἐνδιάμεσοι προορισμοί. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τούτους καὶ ὡς τόπους ἀποστολῆς καὶ ὡς τόπους παραλαβῆς· ἐννοεῖται ὅτι ἡ ποσότης ἡ διαθέσιμος εἰς τὸν τόπον ἀποστολῆς καὶ ἡ ποσότης ἡ ἀπαιτουμένη εἰς τὸν τόπον παραλαβῆς ἰσοῦνται πρὸς τὴν ποσότητα, ἡ ὁποία δύναται ν' ἀποθηκευθῇ εἰς τὸν ἐνδιάμεσον προορισμόν. Ἐπίσης ἐννοεῖται, ὅτι τὸ κόστος μεταφορᾶς ἐκ τοῦ ἐνδιαμέσου σταθμοῦ πρὸς αὐτὸν τοῦτον τὸν σταθμὸν θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι μηδέν.

— Μερικὰ προβλήματα ἐξικνούμενα πολλῶν χρονικῶν περιόδων δύνανται νὰ ἀντιμετωπισθοῦν ὡς προβλήματα μεταφορᾶς. Ἔστω, ὅτι ἐκ τοῦ τόπου ἀποστολῆς Α πρέπει νὰ μεταφερθοῦν εἴς τινα τόπον παραλαβῆς ποσότητες α διὰ τὴν πρώτην περίοδον, β διὰ τὴν δευτέραν καὶ γ διὰ τὴν τρίτην. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸν τόπον Α ὡς τρεῖς τόπους ἀποστολῆς τοὺς A_1, A_2, A_3. Ὁμοίως δυνάμεθα ν' ἀντιμετωπίσωμεν τὴν περίπτωσιν, ἐὰν αὕτη συμβαίνῃ εἴς τινα τόπον παραλαβῆς.

Συνεχίζοντες εἰς τὸ θέμα τῆς τυποποιήσεως ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ σύστημα ἐξισώσεων τοῦ παραδείγματος τοῦ κεφαλαίου 1.1, τὸ ὁποῖον (σύστημα) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὡς ἀκολούθως:

$$
\begin{array}{lllllllllllr}
X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} & & & & & & & & & & = 200 & (1)\\
& & & & & X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} & & & & & = 300 & (2)\\
X_{11} & & & & & + X_{21} & & & & & = 50 & (3)\\
& X_{12} & & & & & + X_{22} & & & & = 100 & (4)\\
& & X_{13} & & & & & X_{23} & & & = 80 & (5)\\
& & & X_{14} & & & & & + X_{24} & & = 150 & (6)\\
& & & & X_{15} & & & & & + X_{25} & = 120 & (7)
\end{array}
$$

Τὸ πρόβλημά μας ὡς καὶ οἱονδήποτε πρόβλημα, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν ταύτην τῶν ἐξισώσεων (1) ἕως (7) εἶναι «Πρόβλημα Μεταφορᾶς».

Ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων τούτων δυνάμεθα εὐκόλως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις (3) ἕως (7) καὶ ἀφαιροῦντες τὴν (2) ἔχομεν ὡς διαφορὰν τὴν (1). Ἐκ τούτου συμπεραίνεται ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) ἕως (7) σχετίζονται γραμμικῶς καὶ ἑπομένως μία ἐκ τούτων δύναται νὰ παραλειφθῇ ὡς πλεονάζουσα. Παραλείπομεν τὴν (1) καὶ ἡ μήτρα τοῦ συστήματος εἶναι:

$$A = \begin{bmatrix} & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & 1 & \\ & & & & 1 & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ἡ μήτρα A περιλαμβάνει τιμὰς μόνον «0» καὶ «1» (ἔχομεν παραλείψει τὴν ἀναγραφὴν τῶν μηδενικῶν). Ἑπομένως ὁρίζουσα τῆς A θὰ ἔχῃ τιμὴν $\pm$ 1 ἢ 0. Εἰς αὐτὴν τὴν ἰδιότητα τοῦ Προβλήματος τῆς Μεταφορᾶς βασίζονται ἀλγόριθμοι ἐπιλύσεώς του ἁπλοποιητικοὶ τῆς Simplex ὡς καὶ μέθοδοι ἐπιλύσεώς του δι' Ἠλεκτρονικῶν Ὑπολογιστῶν.

Περαιτέρω διαπιστοῦται ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς Μεταφορᾶς ἔχει $\mu + \nu - 1$ διαδρομὰς ὅπου μ = ὁ ἀριθμὸς τῶν πηγῶν καὶ ν = ὁ ἀριθμὸς τῶν προορισμῶν. Ἐὰν παραδεκτὴ λύσις τοῦ προβλήματος ἔχῃ ὀλιγωτέρας μεταβλητὰς (διαδρομὰς) τῶν $\mu + \nu - 1$ τότε ἡ λύσις αὐτὴ καλεῖται ἐκφυλισμένη. Δεχόμεθα ἑπομένως ὅτι μία μὴ ἐκφυλισμένη βασικὴ λύσις ἔχει $\mu + \nu - 1$ βασικὰς (θετικὰς) μεταβλητὰς διαφόρους τοῦ μηδενός.

2. Γενίκευσις τοῦ προβλήματος

Γενικεύοντες τὸ πρόβλημα Μεταφορᾶς ἐκφράζομεν τοῦτο ὡς ἀκολούθως:

Σύνολον μ Κέντρων Ἀποστολῆς ἀποστέλλει πρὸς ν Κέντρα Παραλαβῆς ποσότητα εἴδους τινός.

Αἱ πρὸς ἀποστολὴν ποσότητες A_i $(i = 1,2,3,\ldots\ldots\mu)$ ἰσοῦνται πρὸς τὰς πρὸς παραλαβὴν ποσότητας Π_j $(j = 1,2,3,\ldots\nu)$.

Δεχόμεθα ὅτι αἱ πρὸς ἀποστολὴν ποσότητες ἐκ τῶν τόπων A_i εἶναι αἱ α_i, αἱ δὲ πρὸς παραλαβὴν ὑπὸ τῶν τόπων Π_j εἶναι π_j.

Ἡ ἰσότης μεταξὺ προσφερομένων καὶ ζητουμένων εἶναι:

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \alpha_i = \sum_{j=1}^{j=\nu} \pi_j \qquad \alpha_i > 0, \quad \pi_j > 0$$

Αἱ ἐξισώσεις δεσμῶν θὰ εἶναι:

$$\sum_{j=1}^{j=\nu} X_{ij} = \alpha_i$$

ὅπου X_{ij} δεικνύει τὴν πρὸς μεταφορὰν ποσότητα ἐκ τοῦ τόπου i εἰς τὸν j καὶ ὅπου $X_{ij} > 0$.

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} X_{ij} = \pi_j$$

καὶ ἡ Οἰκονομικὴ Συνάρτησις θὰ εἶναι:

$$Z = \sum_{i=1}^{i=\mu} \sum_{j=1}^{j=\nu} t_{ij} X_{ij}$$ ὅπου t_{ij} δεικνύει τὸ κατὰ μονάδα ἐμπορεύματος κόστος μεταφορᾶς ἐκ τοῦ τόπου i εἰς τὸν τόπον j.

3. ’Αρχικὴ (Βασικὴ) Λύσις

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ’Αρίστης Λύσεως Προβλήματος Μεταφορᾶς ἀπαιτεῖται προηγουμένως ἡ εὕρεσις μιᾶς ἀρχικῆς (βασικῆς) τοιαύτης. ’Αφοῦ ἐπιτευχθῆ αὐτὴ τότε ἐπιχειρεῖται ἡ εὕρεσις μιᾶς καλυτέρας καὶ τοῦτο ἐπαναλαμβάνεται ἕως ὅτου εὑρεθῆ ἡ ἀρίστη. Πρὸς τοῦτο ὑπάρχουν ἀρκεταὶ μέθοδοι· ἡ πλέον γνωστὴ ἐκ τούτων καὶ ἡ ὁποία συνιστᾶται ὑπὸ τῶν περισσοτέρων σχετικῶν συγγραμμάτων εἶναι ἡ Μέθοδος τῆς Βορειοδυτικῆς Γωνίας (Northwest Corner Rule) προταθεῖσα ὑπὸ τῶν Charnes - Cooper. Ἄλλαι γνωσταὶ μέθοδοι εἶναι ἡ τοῦ Vogel, ἡ τοῦ ’Ελαχίστου Γραμμῶν καὶ ἡ τοῦ ’Ελαχίστου Στηλῶν.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ’Αρχικῆς Λύσεως τοῦ ἀμέσως προηγουμένως περιγραφέντος προβλήματος προβαίνομεν εἰς τὰς ἀκολούθους ἐνεργείας:

Εἰς πίνακα διπλῆς εἰσόδου (πίναξ 2) ἔχοντα 5 στήλας (ὅσα τὰ κέντρα παραλαβῆς) καὶ 2 σειρὰς (ὅσα τὰ κέντρα ἀποστολῆς) τοποθετοῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν ὁποίων ἐκφράζονται αἱ πρὸς ἀποστολὴν καὶ πρὸς παραλαβὴν ποσότητες κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ διασταύρωσις ἑκάστης σειρᾶς μὲ ἑκάστην στήλην νὰ δεικνύῃ μίαν πιθανὴν μεταφορὰν τοῦ ἐμπορεύματος· εἰς τὸ δεξιὸν ἑκάστης σειρᾶς ἐμφανίζεται ἡ πρὸς μεταφορὰν ποσότης τοῦ κέντρου ἀποστολῆς καὶ εἰς τὸ κάτω ἑκάστης στήλης ἡ ἀπαιτουμένη ποσότης ἑκάστου κέντρου παραλαβῆς. Πρὸς εὐκολίαν σημειοῦμεν εἰς τὸ ἄνω ἀριστερὸν τμῆμα ἑκάστου σχηματισθέντος τετραγωνιδίου (πιθανῆς διαδρομῆς) τὸ κόστος μεταφορᾶς 1 τόννου ἐμπορεύματος ἑκάστης διαδρομῆς, ὡς τοῦτο ἐμφαίνηται ὑπὸ τοῦ πίνακος 2.

Πίναξ 2

Κέντρα Παραλ. / Κέντρα ’Αποστολ.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Σύνολ. ’Αποστ.
Υ	4	2	5	8	10	200
Φ	1	4	9	3	9	300
Σύνολ. Παραλαβ.	50	100	80	150	120	500

Περαιτέρω θὰ δημιουργήσωμεν τὴν ’Αρχικὴν Λύσιν τοῦ προβλήματος διὰ τῆς μεθόδου τῆς Βορειοδυτικῆς Γωνίας. Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν εἰς τὸ ἄνω ἀριστερὰ τετραγωνίδιον (Βορειοδυτικὴ Γωνία τοῦ Πίνακος) τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ἐκ τῶν ἐκφραζόντων τὰς ἀπαιτουμένας ποσότητας ὑπὸ τῶν κέντρων παραλαβῆς· ἐν προκειμένῳ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ὁ «50».

Ἐν συνεχείᾳ συμπληροῦμεν τὴν πρώτην σειρὰν προσέχοντες ὅπως αἱ ποσότητες μὴ ὑπερβοῦν κατὰ προορισμὸν (κέντρον παραλαβῆς) τὰς ποσότητας 50, 100, 80, 150, 120 ἀντιστοίχως, καὶ ἕως ὅτου συμπληρωθῇ ἡ ποσότης ἡ ἀποστελλομένη ἐκ τῆς πηγῆς «1» (κέντρον ἀποστολῆς)· εἰς τὴν περίπτωσιν τὸν ἀριθμὸν «200». Συμπληροῦμεν, κατόπιν καὶ τὴν δευτέραν σειρὰν (ἢ τὰς ὑπολοίπους ἐὰν ὑπάρχουν) κατὰ τὴν ἰδίαν ἔννοιαν καὶ ἐπιτυγχάνομεν τὴν λύσιν τὴν δεικνυομένην ὑπὸ τοῦ πίνακος 3.

Πίναξ 3

Πηγαί \ Προορισ	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Σύνολ. Αποστ.
Υ	50	100	50			200
Φ			30	150	120	300
Σύνολ. Παραλαβ.	50	100	80	150	120	500

Ἤτοι ἐπετεύχθη ἡ ἀρχικὴ λύσις:

$X_{11} = 50$, $X_{12} = 100$, $X_{13} = 50$, $X_{14} = 0$, $X_{15} = 0$, $X_{21} = 0$, $X_{22} = 0$, $X_{23} = 30$, $X_{24} = 150$, $X_{25} = 120$

καὶ ἡ οἰκονομικὴ συνάρτησις λαμβάνει τὴν τιμὴν

$$Z = 4.50 + 2.100 + 5.50 + 9.30 + 3.150 + 9.120 = 2450 \text{ χιλ. δρχ.}$$

Ἡ λύσις αὐτὴ πιθανὸν νὰ ἀπέχῃ πολὺ τῆς ἀρίστης λύσεως καὶ τοῦτο κυρίως λόγῳ τοῦ ὅτι δὲν ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν τὸ κόστος δι' ἑκάστην μεταφορὰν κατὰ τὴν πιθανὴν πραγματοποίησίν της.

Δὲν ἀμφισβητεῖται ὅμως ἡ ἁπλότης καὶ τὸ τυποποιημένον τῆς μεθόδου, τὸ ὁποῖον ἀπαλλάσσει ἀπὸ πολυπλόκους ὑπολογισμοὺς καὶ οὕτω δίδει τὴν εὐχέρειαν δι' εὔκολον λύσιν.

Εἶναι ὅμως ἀπαραίτητον ἡ ἀρχικὴ λύσις νὰ γειτνιάζῃ μετὰ τῆς ἀρίστης καὶ τοῦτο διὰ τὴν εὔκολον καὶ ταχεῖαν μετάβασιν ἐκ τῆς μιᾶς εἰς τὴν ἄλλην διὰ τῆς ὑπάρξεως ὅσο τὸ δυνατὸν ὀλιγωτέρων ἐνδιαμέσως βασικῶν λύσεων.

Αἱ σκέψεις αὐταὶ κυρίως καὶ ὁ τρόπος λειτουργίας καὶ τῶν ἑτέρων προαναφερθέντων μεθόδων (Vogel, Ἐλαχίστου Γραμμῶν, Ἐλαχίστου Στηλῶν) εἰς τὰς ὁποίας λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ κόστος δι' ἑκάστην μεταφορὰν κατὰ τὴν πιθανὴν πραγματοποίησίν της, πλὴν ὅμως ὄχι κατὰ τρόπον ἁπλοῦν, γενικὸν καὶ κυρίως ὄχι τυποποιημένον, ὁδηγεῖ εἰς τὴν πρότασιν τριῶν μεθόδων εὑρέσεως τῆς ἀρχικῆς λύσεως, αἱ ὁποῖαι περιγράφονται ἀκολούθως εἰς τὰ κεφάλαια 3.1, 3.2 καὶ 3.3. Εἰς τὴν πρώτην καὶ τὴν δευτέραν ἐκ τούτων λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ κόστος δι' ἑκάστην μεταφοράν, εἰς δὲ τὴν τρίτην ὄχι· εἰς ἁπάσας ὅμως ἀκολουθεῖται τυποποιημένη διαδικασία ἀποβλέπουσα ὄχι μόνον εἰς τὴν ἁπλούστευσιν τῶν ὑπολογισμῶν, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν δυνατότητα παραδοχῆς των ὑπὸ Ἠλεκτρονικοῦ Ὑπολογιστοῦ. Πρὸς τοῦτο κατὰ τὴν τυποποίησιν τῶν μεθόδων ἀποφασιστικὴ ὑπῆρξεν ἡ συμβολὴ τῆς μηχανογραφικῆς λογικῆς, ἡ ὁποία συνήθως ἐπιβάλλει, ὡρισμένην κατὰ περίπτωσιν, ἐπεξεργασίαν τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος πρὶν ἢ ὁ Ἠλεκτρονικὸς Ὑπολογιστὴς δεχθῇ ταῦτα διὰ τὴν τελικὴν ἐπεξεργασίαν (π.χ. ταξινόμησις κατὰ ἐπιθυμητὴν σειρὰν τῶν στοιχείων, κ.λ.π.).

3.1 Μέθοδος Αὐξούσης Σειρᾶς τῶν Τιμῶν

Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, τοῦ Πίνακος 2, ταξινομοῦμεν κατ' αὔξουσαν σειρὰν τὰς τιμὰς κόστους τοῦ Πίνακος 1.

Οὕτως ἔχομεν:

1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 8 | 9 | 9 | 10

αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τετραγωνίδια

ΦΑ | ΥΒ | ΦΔ | ΥΑ | ΦΒ | ΥΓ | ΥΔ | ΦΓ | ΦΕ | ΥΕ

Συμπληροῦμεν τὸν πίνακα 3α ἱκανοποιοῦντες τὰς ἀπαιτήσεις τῶν κέντρων παραλαβῆς διὰ τῆς ἀποστολῆς ποσοτήτων ἐκ τῶν κέντρων παραλαβῆς καὶ συγχρόνως προσέχομεν διὰ τυχὸν ὑπέρβασιν τῶν ἐκτὸς τοῦ πλαισίου ἀριθμῶν.

Πίναξ 3α

	Α	Β	Γ	Δ	Ε	
Υ	(4) 0	(2) 100	(5) 80	(8) 0	(10) 20	200
Φ	(1) 50	(4) 0	(9) 0	(3) 150	(9) 100	300
	50	100	80	150	120	

Οὕτως ἐκκινοῦντες ἐκ τοῦ τετραγωνιδίου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἡ μικροτέρα τιμὴ συμπληροῦμεν τὸ τετραγωνίδιον ΦΑ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 50. Εἰς τὴν αὔξουσαν τάξιν τῶν τιμῶν τὴν δευτέραν θέσιν ἔχει ἡ τιμὴ 2 καὶ συμπληροῦμεν τὸ ἀντίστοιχον τετραγωνίδιόν της ΥΒ διὰ τοῦ 100. Ἐκ τῆς συμπληρώσεως τούτων τῶν δύο τετραγωνιδίων καθίσταται κατανοητὸν ὅτι τὰ ΥΑ, ΦΒ συμπληροῦνται διὰ τοῦ μηδενός. Κατὰ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν συνεχίζομεν τὴν συμπλήρωσιν τοῦ πίνακος τοποθετοῦντες τὸν ἀριθμὸν 150 εἰς τὸ ΦΔ τετραγωνίδιον καὶ τὸν ἀριθμὸν 80 εἰς τὸ ΥΓ· ἐν συνεχείᾳ ἐπιλέγομεν τὸ τετραγωνίδιον ΦΕ, εἰς τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 100 [300 — (50 + 150)], ὁπότε διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς στήλης Ε καὶ τῆς σειρᾶς Υ τοποθετοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 20 εἰς τὸ τετραγωνίδιον ΥΕ.

Οὕτως ἔχομεν ἐπιτύχει τὴν βασικὴν λύσιν:

$X_{11} = 0,\ X_{12} = 100,\ X_{13} = 80,\ X_{14} = 0,\ X_{15} = 20,\ X_{21} = 50,\ X_{22} = 0,$
$X_{23} = 0,\ X_{24} = 150,\ X_{25} = 100$

καὶ ἡ οἰκονομικὴ συνάρτησις λαμβάνει τιμὴν

$$Z = 2.100 + 5.80 + 10.20 + 1.50 + 3.150 + 9.100 = 2200 \text{ χιλ. δρχ.}$$

ἤτοι κατὰ 250 χιλ. δρχ. ὀλιγώτερον τῆς τιμῆς, τὴν ὁποίαν ἔλαβεν ἐκ τῆς ἀρχικῆς λύσεως τῆς εὑρεθείσης διὰ τῆς μεθόδου τῆς βορειοδυτικῆς γωνίας, καὶ ὡς θὰ ἀποδείξωμεν ἀργότερον ἡ λύσις αὐτὴ συμπίπτει μετὰ τῆς ἀρίστης. Θὰ ἠμποροῦσε νὰ παρατηρηθῇ ὅτι τοῦτο συνέβη τυχαίως· καθίσταται ὅμως ἀντιληπτὸν ὅτι εἴς τινας περιπτώσεις δὲν θὰ ἦτο τυχαῖον· Γενικῶς δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι εἰς προβλήματα μὲ μικρὸν ἀριθμὸν κέντρων ἀποστολῆς καὶ παραλαβῆς, ἡ μέθοδος αὐτὴ δυνατὸν νὰ ὁδηγῇ κατ' εὐθεῖαν εἰς τὴν ἀρίστην λύσιν· διὰ προβλήματα μὲ μεγάλον ἀριθμὸν κέντρων ἀποστολῆς καὶ παραλαβῆς ὁπωσδήποτε εἶναι εὐχερεστέρα πολλῶν ἐκ τῶν προαναφερθεισῶν ἐν χρήσει μεθόδων.

3.2 Μέθοδος Φθινούσης Τάξεως Ποσοτήτων Σειρῶν - Στηλῶν

Ἔστω τὸ Πρόβλημα Μεταφορᾶς τοῦ Πίνακος 4. Εἰς αὐτὸ οἱ ἀριθμοὶ εἰς τὴν ἄνω ἀριστερὰν γωνίαν τῶν τετραγωνιδίων ὑποδηλοῦν τὸ κόστος μεταφορᾶς κατὰ διαδρομὴν καὶ εἰς χιλιάδας δραχμῶν κατὰ τόννον. Ταξινομοῦμεν τὰς ποσότητας τῶν Σειρῶν (Δυνατότητας τῶν Πηγῶν) κατὰ φθίνουσαν τάξιν καὶ ἔχομεν:

120, 100, 80, 60, 40 αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς σειράς:

Ε΄, Δ΄, Β΄, Γ΄, Α.

Κατὰ τὴν ὡς ἄνω τάξιν (προτεραιότητα) τῶν σειρῶν σχηματίζομεν τὰς (πιθανὰς) διαδρομὰς φροντίζοντες συγχρόνως διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν περιορισμῶν τοῦ προβλήματος (δυνατότητες τῶν πηγῶν, ἀπαιτήσεις τῶν προορισμῶν).

Ἐντὸς ἑκάστης σειρᾶς ἐπιδιώκεται τὸ ἐλάχιστον κόστος· οὕτως ἐκκινοῦντες ἐκ τῆς Ε΄ σειρᾶς (πίναξ 5) τοποθετοῦμεν εἰς τὸ τετραγωνίδιον Ε2 (ἔχει τὸ μικρότερον κόστος μεταφορᾶς ἐντὸς τῆς σειρᾶς) τὴν ποσότητα 100, ὅση δηλ. ἀπαιτεῖται ὑπὸ τοῦ προορισμοῦ 2. Ἐν συνεχείᾳ τοποθετοῦμεν τὴν ποσότητα 20 εἰς τὸ τετραγωνίδιον Ε5 ὁπότε ἔχομεν ἤδη ἐξαντλήσει τὴν δυνατότητα τῆς πηγῆς Ε. Κατὰ τὴν ἰδίαν ἔννοιαν ἐργαζόμενοι ἐπὶ τῆς Δ΄ σειρᾶς τοποθετοῦμεν τὰς ποσότητας 30 καὶ 70 εἰς τὰ τετραγωνίδια Δ1 καὶ Δ3 ἀντιστοίχως. Ἀκολούθως ἐπὶ τῆς Β΄ σειρᾶς τοποθετοῦμεν τὴν ποσότητα 80 εἰς τὸ τετραγωνίδιον Β5· βεβαίως τὸ τετραγωνίδιον Β2 ἔχει μικρότερον κόστος μεταφορᾶς πλὴν ὅμως ἔχει ἤδη ἱκανοποιηθῆ ἡ ἀπαίτησις τοῦ προορισμοῦ 2.

Συνεχίζοντες καταλήγομεν εἰς τὴν ἀρχικὴν λύσιν τοῦ Πίνακος 5, ἡ ὁποία δίδει συνολικὸν κόστος μεταφορᾶς (Οἰκονομικὴ Συνάρτησις) Ζ = 970 χιλ. δρχ.

Ἐπιχειροῦντες τὴν εὕρεσιν τῆς ἀρχικῆς λύσεως τοῦ αὐτοῦ προβλήματος διὰ τῆς Μεθόδου Ἐλαχίστου τῶν Σειρῶν ἔχομεν τὴν λύσιν τοῦ Πίνακος 6, ἡ ὁποία δίδει συνολικὸν κόστος μεταφορᾶς Ζ = 1100 χιλ. δρχ.

Δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ προηγουμένως περιγραφεῖσα μέθοδος (Ἂς ὀνομασθῆ αὕτη Μέθοδος Φθινούσης Τάξεως Ποσοτήτων τῶν Σειρῶν) βελτιώνει τὴν Μέθοδον Ἐλαχίστου τῶν Σειρῶν καθ᾽ ὅσον ὑπερέχει αὐτῆς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἱκανοποιοῦνται ἐνωρίτερον, ἑπομένως καὶ εὐθηνότερον, αἱ μεγαλύτεραι ποσότητες (κατὰ σειρὰν) καὶ ὁπωσδήποτε εἶναι περισσότερον τυποποιημένη ὅσον ἀφορᾷ τὴν διαδικασίαν τῶν ὑπολογισμῶν.

Ἐὰν ἐν συνεχείᾳ ἐπιχειρήσωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν σκέψιν τῆς φθινούσης τάξεως τῶν ποσοτήτων ἐργαζόμενοι ὅμως ἐπὶ τῶν στηλῶν πλέον, ταξινομοῦμεν τὰς ποσότητας τῶν στηλῶν (Ἀπαιτήσεις τῶν προορισμῶν) κατὰ φθίνουσαν τάξιν καὶ ἔχομεν:

110, 100, 90, 70, 30 αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς στήλας :

5η, 2α, 4η, 3η, 1η.

Κατὰ τὴν ὡς ἄνω τάξιν (προτεραιότητα) τῶν στηλῶν σχηματίζομεν τὰς (πιθανὰς) διαδρομὰς φροντίζοντες συγχρόνως διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν περιορισμῶν τοῦ προβλήματος. Ἐντὸς ἑκάστης στήλης ἐπιδιώκεται τὸ ἐλάχιστον κόστος· οὕτως ἐκκινοῦντες ἐκ τῆς 5ης στήλης τοποθετοῦμεν εἰς τὸ τετραγωνίδιον ποὺ ἔχει τὸ μικρότερον κόστος ἐντὸς τῆς στήλης, ἤτοι τὸ Ε5, τὴν ποσότητα 110 διὰ τῆς ὁποίας ἱκανοποιεῖται ὁλοσχερῶς ὁ προορισμὸς 5. Μεταβαίνομεν ἀκολούθως εἰς τὴν 2αν στήλην· ἐντὸς αὐτῆς τὸ μικρότερον κόστος εὑρίσκεται εἰς τὸ τετραγωνίδιον Ε2· ἡ δυνατότης ὅμως τῆς πηγῆς Ε μᾶς ἐπιτρέπει νὰ τοποθετήσωμεν εἰς τὸ τετραγωνίδιον αὐτὸ τὴν ποσότητα τῶν 10 τόννων μόνον· τὸ τετραγωνίδιον μὲ τὸ ἀμέσως (μετὰ τοῦ Ε2) εὐθηνότερον κόστος μεταφορᾶς εἶναι τὸ Β2· τοποθετοῦμεν εἰς τοῦτο τὴν ποσότητα 80 ὅση δηλ. εἶναι ἡ δυνατότης τῆς πηγῆς Β καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ποσότητος (10 τόννοι) διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς 2ας στήλης τὸ τοποθετοῦμεν εἰς τὸ τετραγωνίδιον Α2 εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τὸ ἀμέσως εὐθηνότερον (μετὰ τοῦ Β2) κόστος μεταφορᾶς. Συνεχίζοντες κατὰ τὴν ἰδίαν ἔννοιαν καὶ εἰς τὰς ἑπομένας στήλας καταλήγομεν εἰς τὴν ἀρχικὴν λύσιν τοῦ Πίνακος 7, ἡ ὁποία δίδει συνολικὸν κόστος μεταφορᾶς 920 χιλ. δρχ.

Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τὴν ἀρχικὴν λύσιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος διὰ τῆς μεθόδου Ἐλαχίστου τῶν Στηλῶν καὶ ἔχομεν τὴν λύσιν τοῦ Πίνακος 8, ἡ ὁποία δίδει συνολικὸν κόστος μεταφορᾶς 1010 χιλ. δρχ.

Συμπεραίνωμεν οὕτως ὅτι ἡ ἀνωτέρω περιγραφεῖσα μέθοδος (Ἂς ὀνομασθῆ αὐτη Μέθοδος Φθινούσης Τάξεως Ποσοτήτων τῶν Στηλῶν) βελτιώνει τὴν Μέθοδον 'Ελαχίστου τῶν Στηλῶν καθ' ὅσον ὑπερέχει αὐτῆς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἱκανοποιοῦνται ἐνωρίτερον, ἑπομένως καὶ εὐθηνότερον, αἱ μεγαλύτεραι ποσότητες (κατὰ στήλην) καὶ ὁπωσδήποτε εἶναι περισσότερον τυποποιημένη ὅσον ἀφορᾷ τὴν διαδικασίαν τῶν ὑπολογισμῶν.

Εἰς τὸ ἐρώτημα ποία ἐκ τῶν δύο περιγραφεισῶν μεθόδων εὑρέσεως ἀρχικῆς λύσεως εἶναι προτιμοτέρα, δυνάμεθα νὰ ἀπαντήσωμεν ὅτι τοῦτο ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μορφῆς τοῦ προβλήματος. Συγκεκριμένα θὰ προτιμήσωμεν τὴν μέθοδον τῆς φθινούσης τάξεως ποσοτήτων τῶν σειρῶν ὅταν ὁ πίναξ τοῦ προβλήματος ἔχει στήλας περισσοτέρας τῶν σειρῶν, ὁπότε εἰς τὰ ἀθροίσματα τῶν σειρῶν θὰ ἀντιστοιχοῦν μεγάλαι ποσότητες. 'Αντίστροφος θὰ εἶναι ἡ προτίμησις ἐὰν ὁ πίναξ τοῦ προβλήματος ἔχει σειρὰς περισσοτέρας ἀπὸ στήλας.

Ἡ σκέψις ὅμως ὅτι ὑπάρχουν προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσον ἀριθμὸν σειρῶν καὶ στηλῶν ἢ τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τοῦ ἀριθμοῦ σειρῶν, στηλῶν εἶναι μικρὰ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν πρότασιν μιᾶς τρίτης μεθόδου, τὴν ὁποίαν τελικῶς καὶ εἰσηγούμεθα.

Ἡ μέθοδος αὐτή, Μέθοδος Φθινούσης Τάξεως Ποσοτήτων τῶν Σειρῶν καὶ Στηλῶν, ἀποτελεῖ συνδυασμὸν τῶν δύο ἄλλων, ἐξομαλύνει τὰς μεταξὺ ἐκείνων διαφορὰς καὶ διατηρεῖ τὸ «τυποποιημένον» τῆς διαδικασίας τῶν ὑπολογισμῶν.

Κατὰ τὴν μέθοδον αὐτὴν καὶ διὰ τὸ πρόβλημα τοῦ Πίνακος 4 ταξινομοῦμεν κατὰ φθίνουσαν τάξιν τὰς ποσότητας τῶν σειρῶν καὶ τῶν στηλῶν καὶ ἔχομεν:

120,	110,	100,	100,	90,	80,	70,	60,	40,	30	ἀντιστοιχούσας εἰς:
Ε΄	5η	Δ΄	2α	4η	Β΄	3η	Γ΄	Α΄	1η	σειρὰς καὶ στήλας

Κατὰ τὴν ὡς ἄνω τάξιν (προτεραιότητα) σχηματίζομεν τὰς (πιθανὰς) διαδρομὰς φροντίζοντες διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν περιορισμῶν τοῦ προβλήματος.

'Εντὸς ἑκάστης σειρᾶς ἢ στήλης ἐπιδιώκεται τὸ ἐλάχιστον κόστος· ἐὰν ἐντὸς τῆς σειρᾶς ὑπάρχουν τετραγωνίδια μὲ ἴσας τιμὰς (κόστος μεταφορᾶς) προτιμῶμεν τὸ τετραγωνίδιον ἐκεῖνον διὰ τὸ ὁποῖον τὰ τετραγωνίδια ἐντὸς τῆς ἀντιστοίχου στήλης ἔχουν μεγαλυτέρας τιμάς. 'Αντιστρόφως σκεπτόμεθα ἐὰν ἐντὸς τῆς στήλης ὑπάρχουν τετραγωνίδια μὲ ἴσας τιμάς.

Οὕτως ἐκκινοῦντες ἐκ τῆς Ε΄ σειρᾶς τοποθετοῦμεν τὴν ποσότητα 100 εἰς τὸ τετραγωνίδιον Ε2 καὶ τὴν ποσότητα 20 εἰς τὸ Ε5. 'Ακολουθεῖ ἡ ἱκανοποίησις τῆς 5ης στήλης καὶ τοποθετοῦμεν τὴν ποσότητα 20 εἰς τὸ τετραγωνίδιον Ε5, τὴν ποσότητα 80 εἰς τὸ Β5 καὶ τὴν ποσότητα 10 εἰς τὸ Δ5.

Συνεχίζοντες κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καταλήγομεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ Πίνακος 9, ἡ ὁποία δίδει συνολικὸν κόστος μεταφορᾶς 900 χιλ. δρχ.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἐὰν ἀρχίσωμεν μὲ μίαν καλὴν κατανομὴν (ἀρχικὴν λύσιν) τότε θὰ ἔχωμεν νὰ πραγματοποιήσωμεν ὀλίγας μόνον βελτιώσεις αὐτῆς μέχρι νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν ἀρίστην.

Ἡ προτεινομένη μέθοδος δίδει λύσιν προσεγγίζουσαν τὴν ἀρίστην· εἴς τινας δὲ περιπτώσεις προβλημάτων μικροῦ ἀριθμοῦ σειρῶν - στηλῶν δίδει αὐτὴν ταύτην τὴν ἀρίστην, ὡς συμβαίνει μὲ τὰ προβλήματα τῶν Πινάκων 10 (11, 12) καὶ 13 (14, 15) τὰ ὁποῖα ἐδανείσθημεν:

Πίναξ 4 (τὸ Πρόβλημα)

Πηγαί \ Προορ.	1	2	3	4	5	Σύνολ. Προσφ.
Α	4	3	3	6	7	40
Β	4	2	4	5	3	80
Γ	2	7	5	2	6	60
Δ	1	4	2	4	4	100
Ε	5	1	4	8	2	120
Σύν. Ζητήσ.	30	100	70	90	110	400

Πίναξ 5 (Μέθοδος Φθινούσης Τάξεως Ποσοτήτων τῶν Σειρῶν)

Πηγαί \ Προορ.	1	2	3	4	5	Σύνολ. Προσφ.
Α	4	3	3	6 / 30	7 / 10	40
Β	4	2	4	5	3 / 80	80
Γ	2	7	5	2 / 60	6	60
Δ	1 / 30	4	2 / 70	4	4	100
Ε	5	1 / 100	4	8	2 / 20	120
Σύν. Ζητήσ.	30	100	70	90	110	400

Ζ = 970 χιλ.δρχ.

Πίναξ 6 (Μέθοδος Ἐλαχίστου τῶν Σειρῶν)

Πηγαί \ Προορ.	1	2	3	4	5	Σύνολ. Προσφ.
Α	4	3 / 40	3	6	7	40
Β	4	2 / 60	4	5	3 / 20	80
Γ	2 / 30	7	5	2 / 30	6	60
Δ	1	4	2 / 70	4 / 30	4	100
Ε	5	1	4	8 / 30	2 / 90	120
Σύν. Ζητήσ.	30	100	70	90	110	400

Ζ=1100 χιλ.δρχ.

Πίναξ 7 (Μέθοδος Φθινούσας Τάξεως Ποσοτήτων τῶν Στηλῶν)

Πηγαί \ Προορ.	1	2	3	4	5	Σύνολ. Προσφ.
Α	(4) 30	(3) 10	(3)	(6)	(7)	40
Β	(4)	(2) 80	(4)	(5)	(3)	80
Γ	(2)	(7)	(5)	(2) 60	(6)	60
Δ	(1)	(4)	(2) 70	(4) 30	(4)	100
Ε	(5)	(1) 10	(4)	(8)	(2) 110	120
Σύνολ.Ζητήσ.	30	100	70	90	110	400

Ζ= 920 χιλ.δρχ.

Πίναξ 8 (Μέθοδος Ἐλαχίστου τῶν Στηλῶν)

Πηγαί \ Προορ.	1	2	3	4	5	Σύνολ. Προσφ.
Α	(4)	(3)	(3)	(6)	(7) 40	40
Β	(4)	(2)	(4)	(5) 30	(3) 50	80
Γ	(2)	(7)	(5)	(2) 60	(6)	60
Δ	(1) 30	(4)	(2) 70	(4)	(4)	100
Ε	(5)	(1) 100	(4)	(8)	(2) 20	120
Σύνολ. Ζητήσ.	30	100	70	90	110	400

Ζ=Ι.ΟΙΟ χιλ.δρχ.

Πίναξ 9 (Μέθοδος Φθινούσης Τάξεως Ποσοτήτων τῶν Σειρῶν - Στηλῶν)

Πηγαί \ Προορ.	1	2	3	4	5	Σύνολ. Προσφ.
Α	(4)	(3)	(3) 10	(6) 30	(7)	40
Β	(4)	(2)	(4)	(5)	(3) 80	80
Γ	(2)	(7)	(5)	(2) 60	(6)	60
Δ	(1) 30	(4)	(2) 60	(4)	(4) 10	100
Ε	(5)	(1) 100	(4)	(8)	(2) 20	120
Σύνολ. Ζητήσ.	30	100	70	90	110	400

Ζ= 900 χιλ.δρχ.

α) Ἐκ τῆς ἐργασίας τοῦ Δ.Θ. Κουλουριάνου «Δύο Μέθοδοι Λύσεως Γραμμικῶν Προβλημάτων» περιεχομένης εἰς τὴν ἔκδοσιν τῆς Α.Β.Σ.Π. «Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις», σελ. 212 καὶ

β) Ἐκ τοῦ συγγράμματος τῶν Churchman - Ackoff - Arnoff «Introduction to Operations Research», σελ. 286 - 291.

Πίναξ 10 (Πρόβλημα Συγγράμματος Δ. Θ. Κουλουριανου)

Καταν. / Παραγ.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Σύνολ. Προσφ.
Θεσ/κη	300	400	200	100	500	400	80
Πειραιεύς	200	200	300	400	400	100	92
Καλαμάτα	300	200	400	400	100	300	68
Χανιά	400	100	400	500	100	200	50
Σύνολ.'Απαιτ.	35	70	30	40	48	67	290

Οἱ ἀριθμοί εἰς τό ἄνω ἀριστερόν τμῆμα τῶν τετραγωνιδίων παριστοῦν τό ἀντίστοιχον κατά διαδρομήν μεταφορικόν κόστος κατά τόννον εἰς Δρχ.

Πίναξ 11 (Ἀρχικὴ Λύσις Συγγράμματος, σελ. 200)

Καταν. / Παραγ.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Σύνολ. Προσφ.
Θεσ/κη	35	45					80
Πειραιεύς		25	30	37			92
Καλαμάτα				3	48	17	68
Χανιά						50	50
Σύνολ.'Απαιτ.	35	70	30	40	48	67	290

Σύν.Κόστος Μεταφ.

Ζ= 78.400 Δρχ.

Πίναξ 12 (Ἀρχικὴ Λύσις διὰ τῆς προτεινομένης μεθόδου Φθινούσης Τάξεως Ποσοτήτων τῶν Σειρῶν - Στηλῶν)

Καταν. / Παραγ.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Σύνολ. Προσφ.
Θεσ/κη	10		30	40			80
Πειραιεύς	25					67	92
Καλαμάτα		20			48		68
Χανιά		50					50
Σύνολ.'Απαιτ.	35	70	30	40	48	67	290

Συν.Κόστ.Μεταφ.

Ζ = 38.500

('Η λύσις αὐτή ταυτίζεται μέ τήν ἀρίστην)

Σημειωτέον ὅτι εἰς τὴν α΄ περίπτωσιν μεταξὺ τῆς ἀρχικῆς καὶ τῆς ἀρίστης λύσεως μεσολαβοῦν ἕξ βασικαὶ (παραδεκταὶ) λύσεις, εἰς δὲ τὴν β΄... μεσολαβοῦν τρεῖς.

Π ί ν α ξ 13 Πρόβλημα Συγγράμματος Churchman - Ackoff - Arnoff

Πηγαί \ Προορ.	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Σύν. Προσφ.
S_1	10	20	5	9	10	9
S_2	2	10	8	30	6	4
S_3	1	20	7	10	4	8
Σύν. Ἀπαιτ.	3	5	4	6	3	21

Οἱ ἀριθμοὶ εἰς τὸ ἄνω ἀριστερὸν τμῆμα τῶν τετραγωνιδίων παριστοῦν τὸ ἀντίστοιχον κατὰ διαδρομὴν μεταφορικὸν κόστος κατὰ τόννον εἰς $

Π ί ν α ξ 14 (Ἀρχικὴ Λύσις Συγγράμματος, σελ. 286)

Πηγαί \ Προορ.	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Σύν. Προσφ.
S_1	3	5	1			9
S_2			3	1		4
S_3				5	3	8
Σύν. Ἀπαιτ.	3	5	4	6	3	21

Συν. Κόστος Μεταφορᾶς

Z = $ 251

Π ί ν α ξ 15 (Ἀρχικὴ Λύσις διὰ τῆς προτεινομένης μεθόδου Φθινούσης Τάξεως Ποσοτήτων τῶν Σειρῶν - Στηλῶν)

Πηγαί \ Προορ.	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Σύν. Προσφ.
S_1			4	5		9
S_2		4				4
S_3	3	1		1	3	8
Σύν. Ἀπαιτ.	3	5	4	6	3	21

Συν. Κόστος Μεταφορᾶς

Z = $ 150

(Ἡ λύσις αὐτὴ ταυτίζεται μὲ τὴν ἀρίστην)

3.3 Μέθοδος τῆς Διαγωνίου

Οἱ πλεῖστοι τῶν μελετητῶν συνιστοῦν τὴν μέθοδον τῆς Βορειοδυτικῆς Γωνίας διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀρχικῆς λύσεως. Τοῦτο δικαιολογεῖται λόγω τῆς ἁπλότητος τῆς μεθόδου, ἡ ὁποία ἀγνοεῖ τὸ κατὰ διαδρομὴν κόστος.

Βεβαίως ἡ λύσις πιθανὸν νὰ ἀπέχῃ κατὰ πολὺ τῆς ἀρίστης πλὴν ὅμως διὰ προβλήματα μεγάλου ἀριθμοῦ Σειρῶν - Στηλῶν εἶναι προτιμητέα.

Περαιτέρω προτείνομεν ἑτέραν μέθοδον εὑρέσεως τῆς ἀρχικῆς λύσεως ἡ ὁποία εἶναι ἐξ ἴσου ἁπλῆ ὡς πρὸς τοὺς ὑπολογισμοὺς καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι περισσότερον τυποποιημένη, πλεονέκτημα τὸ ὁποῖον τὴν καθιστᾶ εὐκόλως προσιτὴν εἰς τὸν Ἠλεκτρονικὸν Ὑπολογιστήν. Ἔστω τὸ πρόβλημα τοῦ πίνακος 16.

Πίναξ 16 (Πρόβλημα ἴσου ἀριθμοῦ σειρῶν καὶ στηλῶν)

Πηγ. \ Πρ.	1	2	3	4	5	6	7	Σύνολ. Προσφ.
Α								30
Β								50
Γ								70
Δ								130
Ε								100
Ζ								140
Η								180
Σύνολον Ζητήσεως	200	150	100	100	70	50	30	700

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀρχικῆς λύσεως ἐκκινοῦμεν ἐκ τοῦ ἄνω ἀριστερὰ τετραγωνιδίου (ἢ ἐκ τοῦ ἄνω δεξιά), συγκρίνομεν τὰς ποσότητας τῆς στήλης καὶ τῆς σειρᾶς καὶ τοποθετοῦμεν εἰς τὸ ἐξεταζόμενον τετραγωνίδιον τὴν μικροτέραν τούτων. Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μικροτέρα ποσότης ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν στήλην σημειοῦμεν ὅτι ἱκανοποιήθη ὁ περιορισμὸς τῆς στήλης καὶ ἐγγράφομεν παραπλεύρως τῆς σειρᾶς τὴν ποσότητα, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τοῦ περιορισμοῦ (της). Ἀντιθέτως πράττομεν ἐὰν ἡ μικροτέρα ποσότης ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν σειράν. Συνεχίζομεν δίκην διαγωνίου διὰ τοῦ τετραγωνιδίου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν β′ στήλην καὶ τὴν β′ σειράν, κατόπιν διὰ τοῦ τετραγωνιδίου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν γ′ στήλην καὶ τὴν γ′ σειράν, κ.ο.κ.

Ἐπανερχόμενοι εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ Πίνακος 16 δημιουργοῦμεν τὴν ἀρχικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος εἰς τὸν Πίνακα 17 ὡς ἀκολούθως: Συγκρίνομεν τὰς ποσότητας (περιορισμοὺς) τῆς σειρᾶς Α (30) καὶ τῆς στήλης 1 (200). Ἡ μικροτέρα τούτων εἶναι ἡ ποσότης 30. Τοποθετοῦμεν αὐτὴν εἰς τὸ τετραγωνίδιον Α1, σημειοῦμεν ὅτι ἱκανοποιήθη ὁ περιορισμὸς τῆς σειρᾶς Α′ καὶ ὅτι ἀπομένει ὑπόλοιπον 170 διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς στήλης 1.

Συνεχίζομεν καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ εἰς τὸ τετραγωνίδιον Β2 τοποθετοῦμεν τὴν ποσότητα 50, σημειοῦμεν ὅτι ἱκανοποιήθη ὁ περιορισμὸς τῆς Β′ σειρᾶς καὶ ὅτι ἀπομένει ὑπόλοιπον 100 διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς στήλης 2. Εἰς τὸ Γ3 τοποθετοῦμεν τὴν ποσότητα 70, σημειοῦμεν ὅτι ἱκανοποιήθη ὁ περιορισμὸς τῆς Γ′ σειρᾶς καὶ ὅτι ἀπομένει ὑπόλοιπον 30 διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς στήλης 3.

Πίναξ 17

Πηγ. \ Πρ.	1	2	3	4	5	6	7	Σύνολον Προσφορ.	
Α	30							30	✓
Β		50						50	✓
Γ			70					70	✓
Δ	30	4		100				130	30 ✓
Ε	30				70			100	30 ✓
Ζ	90					50		140	90 ✓
Η	20	100	30				30	180	150 ✓
Σύνολον Ζητήσεως	200	150	100	100	70	50	30	700	
	~~170~~ 20	100 ✓	30 ✓	✓	✓	✓	✓		

Εἰς τὸ Δ4 τοποθετοῦμεν τὴν ποσότητα 100, σημειοῦμεν ὅτι ἱκανοποιήθη ὁ περιορισμὸς τῆς στήλης 4 καὶ ὅτι ἀπομένει ὑπόλοιπον 30 διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς σειρᾶς Δ.

Εἰς τὸ Ε5 τοποθετοῦμεν τὴν ποσότητα 70, σημειοῦμεν ὅτι ἱκανοποιήθη ὁ περιορισμὸς τῆς στήλης 5 καὶ ὅτι ἀπομένει ὑπόλοιπον 30 διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς σειρᾶς Ε. Εἰς τὸ Ζ6 τοποθετοῦμεν τὴν ποσότητα 50, σημειοῦμεν ὅτι ἱκανοποιήθη ὁ περιορισμὸς τῆς στήλης 6 καὶ ὅτι ἀπομένει ὑπόλοιπον 90 διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς σειρᾶς Ζ.

Εἰς τὸ Η7 τοποθετοῦμεν τὴν ποσότητα 30, σημειοῦμεν ὅτι ἱκανοποήθη ὁ περιορισμὸς τῆς στήλης 7 καὶ ὅτι ἀπομένει ὑπόλοιπον 150 διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς σειρᾶς Η.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν σημειωθεισῶν ποσοτήτων διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν περιορισμῶν τῶν στηλῶν εἶναι (170 + 100 + 30) ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα (30 + 30 + 90 + 150) τῶν σημειωθεισῶν ποσοτήτων διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν περιορισμῶν τῶν σειρῶν· ἤτοι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν 300.

Ἡ ἀντιστοιχία τῶν ἐναπομενουσῶν ποσοτήτων διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν περιορισμῶν τῶν στηλῶν - σειρῶν εἶναι ἐμφανής· οὕτω τοποθετοῦμεν τὰς ποσότητας 30, 30, 90 εἰς τὰ τετραγωνίδια Δ1, Ε1, Ζ1 ἀντιστοίχως καὶ σημειοῦμεν ὅτι ἱκανοποιήθησαν οἱ περιορισμοὶ τῶν σειρῶν Δ, Ε, Ζ καὶ ὅτι ἀπομένει ὑπόλοιπον 20 διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς στήλης 1.

Εὐκόλως πλέον παρατηροῦμεν ὅτι δέον νὰ τοποθετηθοῦν αἱ ποσότητες 20, 100, 30 εἰς τὰ τετραγωνίδια Η1, Η2 καὶ Η3 ἀντιστοίχως καὶ ἔχομεν ἤδη ἱκανοποιήσει τοὺς περιορισμοὺς ὅλων τῶν σειρῶν καὶ ὅλων τῶν στηλῶν, ἐπιτυγχάνοντες τελικῶς τὴν ἀρχικὴν λύσιν τοῦ Πίνακος 17.

Τέλος πρὸς εὐκολίαν ἐξευρέσεως τῶν ἀντιστοιχιῶν τῶν ἐναπομενουσῶν ποσοτήτων διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν περιορισμῶν τῶν σειρῶν καὶ τῶν στηλῶν, συνιστᾶται ὅπως διαμορφοῦμεν τὸν πίνακα τοῦ προβλήματος καταλλήλως οὕτως ὥστε ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν ποσοτήτων των διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῶν προορισμῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πρώτην στήλην τοῦ πίνακος καὶ ἡ μικροτέρα ἐκ τῶν προσφερομένων ποσοτήτων ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πρώτην σειράν. Μία τοιαύτη διαμόρφωσις ἐπιτρέπει ὅπως αἱ ἐκτὸς τῆς Διαγωνίου ποσότητες τοποθετηθοῦν εὐκόλως εἰς τετραγωνίδια μιᾶς στήλης (τῆς πρώτης) καὶ μιᾶς σειρᾶς (τῆς τελευταίας). Τοῦτο γίνεται εὐκόλως ἀντιληπτὸν εἰς τὴν λύσιν τοῦ Πίνακος 17. Ἡ μέθοδος δίδει τὴν ἀρχικὴν λύσιν καὶ διὰ προβλήματα ἔχοντα πίνακα μὲ διαφορετικὸν ἀριθμὸν σειρῶν καὶ στηλῶν (Πίναξ 18) μὲ μόνην διαφορὰν ὅτι σχηματίζομεν δευτέραν (τρί-

Πίναξ 18 (Πρόβλημα μὲ διάφορον ἀριθμὸν σειρῶν καὶ στηλῶν)

Προορ. / Πηγαί	1	2	3	4	5	6	7	Σύνολον Προσφορ
Α								200
Β								100
Γ								200
Σύνολον Ζητήσεως	100	80	160	30	70	20	40	500

Πίναξ 19

Προορ. / Πηγαί	1	2	3	4	5	6	7	Σύνολον Προσφορ	
Α	100			30	30		40	200	~~100~~ ~~70~~ 30 ✓
Β		80			20			100	20 ✓
Γ			160		20	20		200	~~40~~ 20 ✓
Σύνολον Ζητήσεως	100	80	160	30	70	20	40	500	
	✓	✓	✓	✓	50 ✓	✓	✓		

την ἢ τετάρτην κ.λ.π.) διαγώνιον ἐκκινοῦντες ἐκ τοῦ ἄνω τετραγωνιδίου τῆς στήλης, ἡ ὁποία κεῖται παραπλεύρως ἐκείνης (τῆς στήλης) εἰς τὴν ὁποίαν κατέληξεν ἡ προηγουμένη διαγώνιος· κατὰ τὰ λοιπὰ ἰσχύουν τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα καὶ ὁ Πίναξ 19 δίδει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ Πίνακος 18.

4. Ἐκφυλισμέναι Λύσεις

Ἑκάστη παραδεκτὴ λύσις ὡς ἔχομεν ἤδη ἀναφέρει εἰς τὸ κεφάλαιον 1.2 ἔχει $\mu + \nu - 1$ θετικὰς μεταβλητάς. Ἐν τούτοις ὑπάρχει περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ θετικαὶ μεταβληταὶ μιᾶς λύσεως νὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τοῦ ἀριθμοῦ $\mu + \nu - 1$, ὁπότε πρόκειται περὶ ἐκφυλισμένης λύσεως (Degenerate Solution). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅμως ὑπάρχει πιθανότης νὰ προκληθῇ ἀνωμαλία εἰς τὴν συνέχισιν τῆς προσπαθείας διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀρίστης λύσεως.

Πρὸς ἀντιμετώπισιν τοῦ θέματος προσφέρεται ὁ ἀκόλουθος ἁπλοῦς κανών. Δεχόμεθα ὡς μίαν ἀκόμη βασικὴν μεταβλητὴν μίαν πολὺ μικρὰν ποσότητα «ε» ($\varepsilon > o$), ἡ ὁποία συμβολικῶς εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ κυκλώματος· σημειωτέον ὅτι δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ εἰσέλθῃ ὡρισμένος ἀριθμός. Τὸ συμβολικὸν «ε» ἢ οἱονδήποτε ἄλλον σύμβολον εἶναι ἐπαρκές. Τοῦτο ἐπιτρέπει εἰς τὸν μελετητὴν νὰ ὁλοκληρώσῃ τὸ κύκλωμα, κατὰ τὴν ἀξιολόγησιν τῶν κενῶν τετραγωνιδίων.

Ἡ λύσις, ἡ ὁποία ἐν συνεχείᾳ θὰ προκύψῃ δὲν θὰ εἶναι ἐκφυλισμένη· ἑπομένως θὰ δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὴν ποσότητα «ε» καὶ νὰ συνεχίσωμεν ἀπροσκόπτως τὴν ἀναζήτησιν τῆς ἀρίστης λύσεως.

Ὑπάρχει πιθανότης ὅπως μία ἀρχικὴ λύσις εἶναι ἐκφυλισμένη. Συνήθως τοῦτο συμβαίνει ὅταν αἱ ποσότητες μιᾶς πηγῆς καὶ ἑνὸς προορισμοῦ ἰσοῦνται καὶ ὁ προορισμὸς ἱκανοποιεῖται ὁλοσχερῶς ὑπὸ τῆς ἀντιστοίχου πηγῆς.

Ἡ σκέψις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν παραδοχὴν τῆς προταθείσης εἰς τὸ κεφάλαιον 3.3 «Διαγωνίου Μεθόδου» εὑρέσεως ἀρχικῆς λύσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς τὰς περισσοτέρας τῶν περιπτώσεων ἀποφεύγεται ὁ ἐκφυλισμὸς τῆς λύσεως λόγῳ τοῦ ὅτι κατὰ τὴν μέθοδον αὐτὴν ἀποκλείεται ὁλοσχερὴς ἱκανοποίησις ἑνὸς προορισμοῦ ὑπὸ μιᾶς πηγῆς, καθ' ὅσον καὶ ἐὰν ἀκόμη εἰς τὸν πίνακα τοῦ προβλήματος ὑπάρχει μία τοιαύτη ἀντιστοιχία, δυνάμεθα νὰ τὴν ἐξουδετερώσωμεν ἀρχίζοντες ἐκ τῆς β' στήλης.

Ἐνδεικτικῶς παρατίθεται τὸ κατωτέρω παράδειγμα (Πρόβλημα Πίνακος 20):

Ἡ λύσις τοῦ πίνακος 21 ἔχει 7 θετικὰς μεταβλητὰς ἀντὶ τῶν 8, τὰς ὁποίας ἔπρεπε νὰ εἶχε ($\mu + \nu - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$).

Ἡ ἱκανοποίησις τοῦ προορισμοῦ «4» ὁλοσχερῶς ὑπὸ τῆς πηγῆς «3» καὶ τοῦ προορισμοῦ «5» ὑπὸ τῆς πηγῆς «4» δημιουργεῖ τὸν ἐκφυλισμὸν τῆς λύσεως.

Ἡ λύσις τοῦ πίνακος 22 ἔχει 8 θετικὰς μεταβλητὰς ἑπομένως εἶναι μὴ ἐκφυλισμένη.

Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι καὶ εἰς τὰ παραδείγματα τοῦ κεφαλαίου 3.3 (Πίνακες 16, 17 καὶ 18, 19) ἡ Μέθοδος τῆς Διαγωνίου δίδει λύσεις μὴ ἐκφυλισμένας.

Πίναξ 20 Τὸ Πρόβλημα

Προορ. / Πηγαί	1	2	3	4	5	Σύνολ. Πηγῶν
1						100
2						20
3						50
4						80
Σύνολον Προορ.	30	70	20	50	80	250

Πίναξ 21 Ἀρχικὴ λύσις εὑρεθεῖσα διὰ τῆς μεθόδου τῆς Β.Δ. γωνίας

Προορ. / Πηγαί	1	2	3	4	5	Σύνολ. Πηγῶν
1	20	70	10			100
2	10		10			20
3				50		50
4					80	80
Σύνολον Προορ.	30	70	20	50	80	250

Πίναξ 22 Ἀρχικὴ λύσις εὑρεθεῖσα διὰ τῆς μεθόδου τῆς Διαγωνίου

Προορ. / Πηγαί	1	2	3	4	5	Σύνολ. Πηγῶν
1	30	50			20	100
2		20				20
3			20		30	50
4				50	30	80
Σύνολον Προορ.	30	70	20	50	80	250

5. Μέθοδος Διαπεραιώσεως (Stepping - Stone)

Ἡ εὕρεσις τῆς ἀρίστης λύσεως ἐπιτυγχάνεται διὰ διαφόρων μεθόδων· (Μέθοδος Simplex, Μέθοδος τοῦ Houthaker, Μέθοδος τοῦ Vidale, Μέθοδος τοῦ Zimmern).

Ἡ πλέον διάσημος καὶ ἁπλῆ εἶναι ἡ Μέθοδος Διαπεραιώσεως (Stepping - Stone) καὶ ὀφείλεται εἰς τοὺς Dantzig, Charnes - Cooper.

Ἡ μέθοδος εἶναι κατὰ πολὺ ἁπλουστέρα καὶ συντομωτέρα τῆς Simplex διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τῆς Μεταφορᾶς. Ἐκκινοῦμεν ἐκ μιᾶς ἀρχικῆς λύσεως καὶ διὰ συνεχῶν βελτιώσεων αὐτῆς καταλήγομεν εἰς τὴν ἀρίστην.

Πρὸς ἐπεξήγησιν τῆς μεθόδου θὰ ἀναζητήσωμεν τὴν ἀρίστην λύσιν ἐκκινοῦντες ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ κεφαλαίου 3 τὴν εὑρεθεῖσαν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ΒΔ γωνίας.

Πρὸς τοῦτο εἰς ἓν κενὸν τετραγωνίδιον (δηλ. εἰς μίαν μὴ χρησιμοποιηθεῖσαν διαδρομὴν) τοῦ Πίνακος 3 προσθέτομεν μίαν μονάδα. Εὐνόητον εἶναι ὅτι ἡ μονὰς αὐτὴ θὰ πρέπῃ νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἓν (χρησιμοποιηθὲν) τετραγωνίδιον τῆς αὐτῆς σειρᾶς· ὡσαύτως θὰ πρέπῃ ν' ἀφαιρεθῇ καὶ προστεθῇ (ἀπὸ καὶ) εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια ἄλλης σειρᾶς.

Εἰς τὸν Πίνακα 23 (ὁ ὁποῖος παρουσιάζει τὸν Πίνακα 3) ἔστω ὅτι προσθέτομεν μίαν μονάδα εἰς τὸ τετραγωνίδιον ΦΑ, ὁπότε ἀπαιτεῖται ἡ μονὰς νὰ προστεθῇ καὶ ἀφαιρεθῇ (ἀπὸ εἰς) τῶν ἀντιστοίχων τετραγωνιδίων (ΥΑ, ΥΓ, ΦΓ) ὡς προηγουμένως ἐπεξεγήθη.

Ἡ σχετικὴ μεταβολὴ τοῦ ὁλικοῦ κόστους θὰ εἶναι: $1 - 4 + 5 - 9 = -7$, ἤτοι μείωσις τοῦ κόστους μεταφορᾶς 1 τόννου κατὰ 7 χιλ. δρχ.

Πίναξ 23

Πηγαί \ Προορ.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Σύνολ. Πηγῶν
Υ	(4) −1 50	(2) 100	(5) +1 50	(8)	(10)	200
Φ	(1) +1	(4)	(9) −1 30	(3) 150	(9) 120	300
Σύνολον Προορ.	50	100	80	150	120	500

Μὲ τὴν σκέψιν ὅτι σκοπός μας εἶναι ἡ ὅσον τὸ δυνατὸν ἐλάττωσις τοῦ συνολικοῦ κόστους καὶ παρατηροῦντες εἰς τὸν Πίνακα 23 τὰ ἀμέσως προαναφερθέντα τετραγωνίδια, ἀντιλαμβανόμεθα εὐκόλως ὅτι δυνάμεθα νὰ μετακινήσωμεν 30 τόννους καὶ οὐχὶ ἕνα μόνον.

Οὕτω προβαίνομεν εἰς τὸν σχηματισμὸν τοῦ πίνακος 24.

Πίναξ 24

Πηγαί \ Προορ.	A	B	Γ	Δ	E	Σύνολ. Πηγών
Y	4 −1 20	2 100	5 80	8	10 +1	200
Φ	1 +1 30	4	9	3 150	9 −1 120	300
Σύνολον Προορ.	50	100	80	150	120	500

Ὁ Πίναξ 24 δίδει τὴν λύσιν:

$X_{11} = 20, X_{12} = 100, X_{13} = 80, X_{14} = 0, X_{15} = 0, X_{21} = 30, X_{22} = 0,$
$X_{23} = 0, X_{24} = 150, X_{25} = 120$

καὶ ἡ Οἰκονομικὴ Συνάρτησις (δηλ. τὸ συνολικὸν κόστος μεταφορᾶς) θὰ εἶναι:

$$Z = 4.20 + 2.100 + 5.80 + 30 + 3.150 + 9.120 = 2240 \text{ χιλ. δρχ.}$$

Ἡ ἐργασία αὐτὴ ἐπαναλαμβάνεται δι' ἑκάστην μὴ χρησιμοποιηθεῖσαν διαδρομὴν (κενὸν τετραγωνίδιον) μὲ σκοπὸν τὴν ἐξακρίβωσιν τοῦ ἐὰν ἡ εὑρεθεῖσα λύσις εἶναι ἡ ἀρίστη. Συνεχίζοντες οὕτως ἐπὶ τοῦ Πίνακος 24 προσθέτομεν μίαν μονάδα εἰς τὸ τετραγωνίδιον ΥΕ καὶ δημιουργοῦντες κύκλωμα, κατὰ τὰ προηγουμένως περιγραφέντα, μεταξὺ τούτου καὶ τῶν ΦΕ, ΦΑ, ΥΑ δημιουργοῦμεν τὴν λύσιν τοῦ Πίνακος 25.

Πίναξ 25

Πηγαί \ Προορ.	A	B	Γ	Δ	E	Σύνολ. Πηγών
Y	4	2 100	5 80	8	10 20	200
Φ	1 50	4	9	3 150	9 100	300
Σύνολον Προορ.	50	100	80	150	120	500

Οὕτως ἔχομεν:

$X_{11} = 0, X_{12} = 100, X_{13} = 80, X_{14} = 0, X_{15} = 20, X_{21} = 50,$
$X_{22} = 0, X_{23} = 0, X_{24} = 150, X_{25} = 100$

καὶ ἡ Οἰκονομικὴ Συνάρτησις εἶναι:

$Z = 2.100 + 5.80 + 10.20 + 50 + 3.150 + 9.100 = 2200$ χιλ. δρχ.

Ἐὰν ἐπιχειρήσωμεν τὴν συνέχισιν τῆς ἐργασίας ἐπὶ τοῦ Πίνακος 25 πρὸς εὕρεσιν καλυτέρας λύσεως, θὰ ἀντιληφθῶμεν ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν· συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἡ προηγουμένως εὑρεθεῖσα λύσις εἶναι ἡ ἀρίστη καὶ ὅτι διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ τὸ ἐλάχιστον κόστος, τὸ ὁποῖον εἶναι 2.200 χιλ. δρχ. θὰ πρέπῃ ἐκ τῆς πηγῆς Υ νὰ μεταφερθοῦν 100 τόννοι πρὸς τὸν προορισμὸν Β, 80 τόννοι πρὸς τὸν Γ καὶ 20 πρὸς τὸν Ε· ὡσαύτως ἐκ τῆς πηγῆς Φ θὰ πρέπῃ νὰ μεταφερθοῦν 50 τόννοι πρὸς τὸν προορισμὸν Α, 150 τόννοι πρὸς τὸν Δ καὶ 100 τόννοι πρὸς τὸν Ε.

6. Διερεύνησις Βασικῆς Λύσεως

Εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον παράδειγμα λόγῳ τοῦ μικροῦ τοῦ μεγέθους, εἶναι ἐμφανὲς ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα τελικὴ λύσις εἶναι ἡ ἀρίστη.

Εἰς περίπτωσιν ὅμως προβλήματος περισσοτέρων στηλῶν καὶ σειρῶν θὰ πρέπῃ νὰ καταβληθῇ σοβαρὰ προσπάθεια διὰ νὰ ἀπαντήσωμεν ὅτι ἡ καλυτέρα τῶν λύσεών μας εἰς τινα στιγμὴν εἶναι ἡ ἀρίστη· ὁπωσδήποτε θὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀμφιβολία διὰ τὴν ὕπαρξιν καλυτέρας λύσεως. Διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν τοῦ θέματος τούτου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἔννοιαν τῶν Ἀκολουθουσῶν Τιμῶν (Shadow Prices), αἱ ὁποῖαι κατὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλήματος Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ διὰ τῆς μεθόδου Simplex ἐκτὸς τῆς ἐπιλύσεως τοῦ κυρίου προβλήματος ὁδηγοῦν εἰς τὴν ἐξεύρεσιν τοῦ κατὰ πόσον ἐπὶ πλέον κοστίζουν πρόσθετοι ποσότητες ἑκάστης μονάδος τῶν χρησιμοποιουμένων (κατασκευαζομένων ἢ μεταφερομένων) ἀγαθῶν.

Ἐπανερχόμενοι εἰς τὸ Πρόβλημα τῆς Μεταφορᾶς καὶ προσαρμόζοντες τὴν τεχνικὴν τῶν ἀκολουθουσῶν τιμῶν εἰς τὰ δεδομένα του, περιγράφομεν τὴν Τεχνικὴν τοῦ Ἀκολουθοῦντος Κόστους (Shadow Cost), ἤτοι τῆς Ἀναλύσεως τοῦ Κόστους Μεταφορᾶς δι' ἑκάστην διαδρομήν.

Κατὰ τὴν τεχνικὴν ταύτην δεχόμεθα ὅτι τὸ κόστος παραδόσεως μιᾶς μετρικῆς μονάδος εἰς ἕνα προορισμόν, συνίσταται ἐκ τοῦ κόστους τῆς μετρικῆς μονάδος εἰς τὴν πηγήν του σὺν τὸ κόστος τῆς μεταφορᾶς.

Οὕτως ἐκ τοῦ Πίνακος 24 ἔχομεν διὰ τὰς χρησιμοποιηθείσας διαδρομάς:

$$\begin{array}{lll}
\text{Κόστος Διαδρομῆς} & ΥΑ = κΥΑ = Υ + Α = 4 & \\
\text{»} \quad \text{»} & ΥΒ = κΥΒ = Υ + Β = 2 & \\
\text{»} \quad \text{»} & ΥΓ = κΥΓ = Υ + Γ = 5 & (1) \\
\text{»} \quad \text{»} & ΦΑ = κΦΑ = Φ + Α = 1 & \\
\text{»} \quad \text{»} & ΦΔ = κΦΔ = Φ + Δ = 3 & \\
\text{»} \quad \text{»} & ΦΕ = κΦΕ = Φ + Ε = 9 &
\end{array}$$

Ὁρίζομεν αὐθαιρέτως ὅτι $Α = 0$ καὶ ἔχομεν:

$$Υ = 4,\ Φ = 1,\ Β = -2,\ Γ = 1,\ Δ = 2,\ Ε = 8$$

Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον (3.5) κατὰ τὴν πορείαν μας ἐκ τοῦ Πίνακος 24 πρὸς τὸν Πίνακα 25 ἐπελέξαμεν τὸ τετραγωνίδιον ΥΕ δι' ἐκκίνησιν πρὸς αναζήτησιν καλυτέρας λύσεως· τὸ κύκλωμα, τὸ ὁποῖον ἐδημιουργήθη ἦτο:

ΥΕ → ΦΕ → ΦΑ → ΥΑ, καὶ ἡ ὠφέλεια, ἡ ὁποία προέκυψεν ἐκ τῆς μετακινήσεως 1 τόννου ἐντὸς τοῦ κυκλώματος ἦτο:

$10 - 9 + 1 - 4 = -2$ (α), ἤτοι 2 χιλ. δρχ. Ἂς ἀντικαταστήσωμεν τώρα τὰς τιμὰς αὐτὰς διὰ τῶν συμβόλων, τὰ ὁποῖα ἀμέσως προηγουμένως υἱοθετήσαμεν· οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$\kappa\text{ΥΕ} - \kappa\text{ΦΕ} + \kappa\text{ΦΑ} - \kappa\text{ΥΑ}$$

$$\kappa\text{ΥΕ} - (\Phi + \text{Ε}) + (\Phi + \text{Α}) - (\Upsilon + \text{Α})$$

$$\kappa\text{ΥΕ} - \Phi - \text{Ε} + \Phi + \text{Α} - \Upsilon - \text{Α}$$

$$\kappa\text{ΥΕ} - (\Upsilon + \text{Ε}) \qquad (\beta)$$

Τὸ ἄθροισμα Υ + Ε παριστᾷ τὸ «Ἀκολουθοῦν Κόστος» (Shadow Cost) τῆς διαδρομῆς ΥΕ ἤτοι τῆς διαδρομῆς, ἡ ὁποία ἐχρησιμοποιήθη εἰς τὴν προσπάθειαν εὑρέσεως καλυτέρας λύσεως. Ἡ (β) δεικνύει ὅτι ἡ ἀποστολὴ μιᾶς μονάδος εἰς τὴν μὴ προηγουμένως χρησιμοποιηθεῖσαν διαδρομὴν αὐξάνει τὸ συνολικὸν κόστος κατὰ τὸ ποσὸν τοῦ κόστους τῆς νέας διαδρομῆς πλὴν τὸ ποσὸν τοῦ ἀκολουθοῦντος κόστους (Shadow Cost) διὰ τὴν διαδρομὴν ταύτην.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (β) τὰ γράμματα διὰ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν των ἔχομεν:

$10 - (4 + 8) = -2$ δηλ. ἀποτέλεσμα ἀρνητικὸν ὡς καὶ τῆς (α).

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἐὰν ἡ σχέσις (β) δι' ἑκάστην μὴ χρησιμοποιηθεῖσαν διαδρομὴν εἶναι ἀρνητική, τότε δέον νὰ συνεχίζωμεν τὴν προσπάθειαν δι' εὕρεσιν καλυτέρας λύσεως.

Νοητὸν ὅτι εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαφορὰ εἶναι θετικὴ τότε ἐγκαταλείπεται ἡ προσπάθεια χρησιμοποιήσεως τῆς ἀντιστοίχου διαδρομῆς.

Ἐὰν ἡ διαφορὰ εἶναι μηδέν, τότε ἐὰν ἡ διαδρομὴ εἰσέλθῃ εἰς τὸ κύκλωμα θὰ συντελέσῃ εἰς τὴν εὕρεσιν μιᾶς ἄλλης λύσεως πλὴν ὅμως «ἰσοτίμου» τῆς προηγουμένης.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς τὸ Σύστημα (1) οἱανδήποτε ἄλλην μεταβλητὴν (ἀντὶ τῆς Α) θέσωμεν ἴσην μὲ τὸ μηδέν, θὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ αὐτὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα.

Εἰς τὸν πίνακα 25 ἔχομεν διὰ τὰς χρησιμοποιηθείσας διαδρομάς:

Κόστος Διαδρομῆς ΥΒ = κΥΒ = Υ + Β = 2

» » ΥΓ = κΥΓ = Υ + Γ = 5

» » ΥΕ = κΥΕ = Υ + Ε = 10

» » ΦΑ = κΦΑ = Φ + Α = 1

» » ΦΔ = κΦΔ = Φ + Δ = 3

» » ΦΕ = κΦΕ = Φ + Ε = 9

Ἐργαζόμεθα ὡς προηγουμένως καὶ ἔχομεν:

Α = 0, Β = 0, Γ = 3, Δ = 2, Ε = 8, Υ = 2, Φ = 1

καὶ διὰ τὰς μὴ χρησιμοποιηθείσας διαδρομὰς ἔχομεν :

κΥΑ — (Υ + Α) = 4 — (2) = 2

κΥΔ — (Υ + Δ) = 8 — (2 + 2) = 4

κΦΒ — (Φ + Β) = 4 — (1) = 3

κΦΓ — (Φ + Γ) = 9 — (1 + 3) = 5

ἤτοι ὅλαι αἱ διαφοραὶ εἶναι θετικαὶ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ λύσις τοῦ Πίνακος 25 εἶναι ἡ ἀρίστη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Απ. Ἀνυφαντῆ, Γραμμικὸς Προγραμματισμός, Ἐκδ. Α.Σ.Μ.Ε., Ἀθῆναι, 1972.

2. Δ.Θ. Κουλουριάνου, Δύο Μέθοδοι Λύσεως Γραμμικῶν Προβλημάτων, Ἐκδ. Γραφείου Οἰκονομικῶν Ἐρευνῶν τῆς Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς Πειραιῶς, «Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις», 1960.

3. Μ. Παυλίδου, Γραμμικὸς Προγραμματισμός, Μέρος Ι, Θεσσαλονίκη, 1972.

4. Π. Στεριώτη, Ἰνστιτοῦτον Ἐπιμορφώσεως εἰς τὴν Διοικητικὴν τῶν Ἐπιχειρήσεων (Α.Σ.Ο.Ε.Ε.), Σημειώσεις Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

5. Ackoff-Sasieni, Fundamentals of Operations Research, Ἐκδ. John Wiley and Sons, Inc., 1968.

6. American Airlines, Inc., Operations Research and Data Processing Administration Manual.

7. Arbabi-Fisher-Horowitz-Kocher (IBM Corporation, USA), Appli-

cations of Linear Programming and Transportation Problem to Strategic Mobility Problems, Έκδ. The English Universities Press Limited, London, 1970.

8. A. S. Barsov, What is Linear Programming, Έκδ. University of Chicago, 1965.

9. W. J. Baumol, Economic Theory and Operations Analysis, Sec. Edition, Έκδ. Prentice - Hall, Inc., 1965.

10. Charnes - Cooper, Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, volume I, Έκδ. John Wiley and Sons, Inc.

11. Churchman - Ackoff - Arnoff, Introduction to Operations Research, Second Printing, Sep. 1966, John Wiley of Sons, Inc.

12. Dorfman - Samuelson - Solow, Linear Programming and Economic Analysis, Έκδ. McGraw - Hill Book Company, 1958.

13. Dorn - Greenberg, Mathematics and Computing, Έκδ. John Wiley and Sons, Inc., 1967.

14. S. I. Gass, Linear Programming, Third Edition, Έκδ. McGraw - Hill Book Company.

15. D. Hertz - R. Eddison, Progress in Operations Research, Volume II, Έκδ. John Wiley and Sons, Inc.

16. I. B. M., Transportation Problem, 360 D, 15.2.002.

17. I. B. M., Linear Programming System/360, Application Description, Form GH20-0513 - 1.

18. I. B. M., Linear Programming System/360, Program Description Manual, Form H20 - 0607 - 0.

19. I. B. M., Data Processing Application, An Introduction to Linear Programming.

20. I. B. M., A Preface to Linear Programming and its Applications, Form GE20 - 0350 - 0.

21. I. B. M, Problem Solving by Linear Programming, Form 520 - 1499 - 0.

22. M. Macower — E. Williamson, Operational Research, Έκδ. The English Universities Press, Ltd, 1972.

23. Theil - Boot - Kloek (Econometric Institute Netherlands School of Economics), Operations Research and Quantitative Econimics, Έκδ. McGraw - Hill Book Company, Rotterdam, 1965.

24. K. Trustrum, Linear Programming, Έκδ. Walter Ledermann, London, 1971.

25. C. S. Wolfe, Linear Programming with FORTRAN, Έκδ. Scott - Foresman and Company, 1973.