ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΟΥ COURNOT

Τῶν κ.κ. ΘΕΟΦΑΝΟΥΣ Ε. ΜΠΕΝΟΥ καὶ WILLIAM B. STRONGE

Καθηγητῶν τῆς Α.Β.Σ.Θ. καὶ τοῦ Πανεπιστημίου Atlantic Florida (Η.Π.Α.)

Τὸ μαθηματικὸν ὑπόδειγμα, τὸ ὁποῖον καθορίζει τὴν μορφὴν τοῦ δυοπωλίου κατὰ τὸν Cournot εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλυθῇ καὶ νὰ ἐξετασθῇ καλλίτερον, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐξισώσεων διαφορῶν ἐν συσχετισμῷ πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Goldberg [1].

Οὕτως, ἡ συνήθης μορφὴ δυοπωλίου κατὰ Cournot, μὲ γραμμικὰς συναρτήσεις ζητήσεως καὶ μηδενικὸν ὁριακὸν κόστος, καθορίζει τὸ κάτωθι σύστημα ἐξισώσεων ἀντιδράσεως δι' ἀμφοτέρους τοὺς ἀνταγωνιστὰς κατὰ δεδομένην χρονικὴν περίοδον t.

$$q_{1_t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{2} q^e_{2_t} \qquad (1)$$

$$q_{2_t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{2} q^e_{1_t} \qquad (2)$$

ἔνθα :

q_{1_t}, q_{2_t} : αἱ παραγόμεναι ποσότητες ὑφ' ἑκάστου τῶν δυοπωλητῶν κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον t,

$q^e_{1_t}$, $q^e_{2_t}$: αἱ προσδοκώμεναι ποσότητες παραγωγῆς ἐκτιμώμεναι ὑφ' ἑκάστου τῶν δυοπωλητῶν, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸν ἕτερον ἀνταγωνιστήν, κατὰ τὴν αὐτὴν χρο-

1. Samuel Goldberg : «Introduction to Difference Equations», σελ. 230. New York Science Editions, John Wiley and Sons, Inc. (1961).

νικὴν περίοδον t καὶ a, b αἱ παράμετροι τῆς συναρτήσεως ζητήσεως.

Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἐκφράζουν ἀντιστοίχως τὴν ποσότητα παραγωγῆς ἑκάστου δυοπωλητοῦ, ἡ ὁποία θὰ μεγιστοποιήσῃ τὰ κέρδη του. Ἡ ποσότης αὕτη ἀποδίδεται ὡς συνάρτησις τοῦ προσδοκωμένου, ὑφ᾽ ἑνὸς ἑκάστου ἀνταγωνιστοῦ, ὕψους παραγωγῆς τοῦ ἑτέρου. Τὰ ἐπίπεδα ἰσορροπίας παραγωγῆς ἐξ ἄλλου δι᾽ ἀμφοτέρους τοὺς δυοπωλητάς, εὑρίσκονται, ἐὰν ἐξισώσωμεν ἕκαστον προσδοκώμενον ἐπίπεδον παραγωγῆς ἐν συσχετισμῷ πρὸς τὸ πράγματι ἐπιτευχθὲν τοιοῦτον, ἤτοι :

$$q_{1E} = q_{2E} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{b} \qquad (3)$$

(ὁ δείκτης Ε ἀναφέρεται εἰς τὰς ποσότητας ἰσορροπίας).

Δέον ὡσαύτως νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα ἰσορροπίας q_{1E} καὶ q_{2E} εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ σταθερά.

Ἔστω, ὅτι θεωροῦμεν τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ προσδοκώμενον ἐπίπεδον παραγωγῆς δι᾽ ἑκάστην ἐπιχείρησιν κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον t, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πραγματοποιηθὲν τοιοῦτον τῆς προηγουμένης περιόδου t - 1.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει αἱ συναρτήσεις ἀντιδράσεως λαμβάνουν τὴν κάτωθι μορφήν :

$$q_{1t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{2} q_{2(t-1)} \qquad (4)$$

$$q_{2t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} - \frac{1}{2} q_{1(t-1)} \qquad (5)$$

Αἱ σχέσεις (4) καὶ (5) συνιστοῦν ἓν σύστημα δύο ἐξισώσεων διαφορῶν πρώτου βαθμοῦ μὴ ὁμογενές.

Πρὸς λύσιν τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος ὁρίζομεν τὰς ἀποκλίσεις ἐκ τῶν ποσοτήτων ἰσορροπίας ὡς κάτωθι :

$$\hat{q}_{1t} = q_{2t} - q_{1E} \qquad (6)$$

$$\hat{q}_{2t} = q_{1t} - q_{2E} \qquad (7)$$

Βάσει τῶν σχέσεων (6) καὶ (7) τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ (5) δύναται νὰ τεθῇ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{bmatrix}\hat{q}_{1t}\\ \hat{q}_{2t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{q}_{1(t-1)}\\ \hat{q}_{2(t-1)}\end{bmatrix} \tag{8}$$

ἤ

$$\hat{q}_t = A^t \hat{q}_0 \tag{9}$$

ἔνθα A^t ἀποτελεῖ τὴν μήτραν τῶν σταθερῶν ὅρων τοῦ συστήματος (8), καὶ $\hat{q}_0$ τὸ διάνυσμα, τὸ ὁποῖον καθορίζει τὰς ἀρχικὰς συνθήκας. Ἡ συμπεριφορὰ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος ἐξαρτᾶται, βεβαίως, ἐκ τῶν τιμῶν τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν, αἱ ὁποῖαι ἐξάγονται ἐκ τῆς κάτωθι χαρακτηριστικῆς ὁριζούσης.

$$\begin{bmatrix}\lambda & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \lambda\end{bmatrix} = 0 \tag{10}$$

Αἱ χαρακτηριστικαὶ ρίζαι τῆς (10) εἶναι $\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{1}{2}$. Ἡ ἀπόλυτος δὲ τιμὴ ἀμφοτέρων εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ ἀνωτέρω σύστημα (9) παρουσιάζει εὐστάθειαν.

Ἐφ᾽ ὅσον αἱ χαρακτηριστικαὶ ρίζαι εἶναι γνωσταὶ καὶ τὸ σύστημα (9) ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἐξισώσεων, δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ θεώρημα τοῦ Goldrerg. Τὸ ἐν λόγῳ θεώρημα καθορίζει, ὅτι ἐὰν δεδομένη μήτρα A ἔχῃ δύο διαφορετικὰς χαρακτηριστικὰς ρίζας, τὰς λ_1 καὶ λ_2, τότε θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ σχέσις

$$A^t = cI + dA \tag{11}$$

ἔνθα c καὶ d εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοὶ καὶ ἀποτελοῦν τὰς λύσεις τῶν κάτωθι ἐξισώσεων

$$\lambda^t_1 = c + d\lambda_1 \tag{12}$$

$$\lambda^t_2 = c + d\lambda_2 \tag{13}$$

Σχετικῶς μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ Cournot αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις προσδιορίζουν τὰς κάτωθι τιμὰς ἀντιστοίχως διὰ τὰ c καὶ d.

$$c = \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} \tag{14}$$

καὶ

$$d = \left(\frac{1}{2}\right)^{t} - \left(\frac{1}{2}\right)^{t} \tag{15}$$

Ἐὰν αἱ ἀνωτέρω τιμαὶ ἀντικατασταθοῦν εἰς τὴν σχέσιν (11) προκύπτει :

$$A^t = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1} & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1} \end{bmatrix} \tag{16}$$

καὶ ἑπομένως καὶ ἡ λύσις δύναται νὰ τεθῇ ὡς ἑξῆς :

$$\hat{q}_{1t} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1}\right]\hat{q}_{10} + \left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1}\right]\hat{q}_{20} \tag{17}$$

$$\hat{q}_{2t} = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1}\right]\hat{q}_{10} + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{t+1}\right]\hat{q}_{20} \tag{18}$$

Ἐν προκειμένῳ δέον νὰ σημειώσωμεν, ὅτι καθόσον τὸ $t \to \infty$, $\hat{q}_{1t} \to 0$ καὶ $\hat{q}_{2t} \to 0$ κατὰ συνέπειαν ὑφίσταται εὐστάθεια τῶν τιμῶν ἰσορροπίας. Ὡσαύτως, ἐὰν θέσωμεν $t = 0$, δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ λύσεις εἶναι συνεπεῖς, ὡς πρὸς τὰς ἀρχικὰς συνθήκας.

Τέλος, ἂν καὶ ἑκάστη ἐκ τῶν ἀνωτέρω λύσεων περιλαμβάνῃ δύο ὅρους δύναται νὰ δειχθῇ, ὅτι καθ' ἑκάστην χρονικὴν περίοδον εἶναι δυνατὸν νὰ ἀπαλείφεται ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν. Εἰδικώτερον, ἐὰν ἡ χρονικὴ περίοδος ἀναφέρεται εἰς περιττὸν ἀριθμὸν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς (17) καὶ ὁ δεύτερος τῆς (18) ἀπαλείφονται, ἐνῷ ἀντιστοίχως, ἐὰν ἡ περίοδος ἀναφέρεται εἰς ἄρτιον ἀριθμόν, ἀπαλείφονται ὁ δεύτερος ὅρος τῆς πρώτης καὶ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς δευτέρας, τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων.

Οὕτως, ἡ διαχρονικὴ πορεία τῶν ἀποκλίσεων ἐκ τῶν τιμῶν ἰσορροπίας διὰ τὸν πρῶτον δυοπωλητήν, δίδεται ὑπὸ τῆς κάτωθι ἀκολουθίας :

$$\hat{q}_{10},\ -\frac{1}{2}\hat{q}_{20},\ \frac{1}{4}\hat{q}_{10},\ \frac{1}{8}\hat{q}_{20},\ \frac{1}{16}\hat{q}_{10},\ \ldots\ldots \tag{19}$$

καὶ διὰ τὸν δεύτερον δὲ δυοπωλητὴν ἀποδίδεται ὑπὸ τῆς

$$\hat{q}_{20},\ -\frac{1}{2}\hat{q}_{10},\ \frac{1}{4}\hat{q}_{20},\ -\frac{1}{8}\hat{q}_{10},\ \frac{1}{16}\hat{q}_{20},\ \ldots\ldots \tag{20}$$

Σημειωτέον, ὅτι, ἐὰν αἱ ἀρχικαὶ ἀποκλίσεις ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον αἱ ἀνωτέρω ἀποκλίσεις θὰ ἐναλλάσονται, ἐνῷ θὰ εἶναι μονοτονικαί, ἐὰν ἔχουν ἀντίθετον πρόσημον. Εἰς τὸ μαθηματικὸν ὑπόδειγμα τοῦ Cournot κατὰ τὴν ἐξέλιξιν ἑνὸς μονοπωλίου εἰς δυοπώλιον ἡ πρώτη ἐπιχείρησις ἀρχίζει ἄνωθεν τῆς ποσότητος ἰσορροπίας, ἐνῷ ἡ δευτέρα κάτωθεν ταύτης. Ἡ ἀρχικὴ ἀπόκλισις διὰ τὴν πρώτην ἐπιχείρησιν ἀνέρχεται οὕτως εἰς $\frac{1}{6} \cdot \frac{a}{b}$ μονάδες, ἐνῷ διὰ τὴν δευτέραν εἰς $-\frac{1}{12} \cdot \frac{a}{b}$. Ἑπομένως, ἡ ἀκολουθία ἡ καθορίζουσα τὴν διαχρονικὴν ἀπόκλισιν ἀπὸ τὰς ποσότητας ἰσορροπίας θὰ εἶναι

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{a}{b}, \frac{1}{24} \cdot \frac{a}{b}, \frac{1}{24} \cdot \frac{a}{b}, \frac{1}{96} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad (21)$$

καὶ

$$-\frac{1}{12} \cdot \frac{a}{b}, -\frac{1}{12} \cdot \frac{a}{b}, -\frac{1}{48} \cdot \frac{a}{b}, -\frac{1}{48} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad (22)$$

Ὁ πρῶτος δυοπωλητὴς θὰ εἶναι πάντοτε ἄνωθεν τῆς ποσότητος ἰσορροπίας, ἐνῷ ὁ δεύτερος κάτωθεν ταύτης, ἂν καὶ αἱ ἀποκλίσεις τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν σχετικῶς ταχέως. Ἐν προκειμένῳ δέον νὰ σημειωθῇ, ὅτι αἱ ἀποκλίσεις δι' ἑκάστην τῶν ἐπιχειρήσεων εἶναι συνεχεῖς διὰ δύο περιόδους. Αὕτη εἶναι ἡ βάσις διὰ τὴν συνήθη γραφικὴν ἀπεικόνισιν, ἡ ὁποία περιλαμβάνει τὰς δύο ἐξισώσεις ἀντιδράσεων τῶν δυοπωλητῶν.