ΕΚΤΙΜΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Τοῦ κ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΣΤΑΥΡΙΝΟΥ, M. Sc. (London).

1. Εἰσαγωγή

Τὰ συστήματα ἐξισώσεων τῶν ὁποίων αἱ παράμετροι προσδιωρίζονται στατιστικῶς εἶναι συνήθως διακριτὰ (ἀσυνεχῆ). Ἑκάστη ἐξίσωσις αὐτῶν ἐκφράζει μίαν ἐνδογενῆ μεταβλητὴν ὡς ἀσυνεχῆ συνάρτησιν ἐνδογενῶν καὶ ἐξωγενῶν μεταβλητῶν. Ὑπάρχουν, ἐν τούτοις, πολλοὶ λόγοι οἱ ὁποῖοι συνηγοροῦν ὑπὲρ τοῦ ὅτι ὡρισμένη οἰκονομικὴ δομὴ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδοθῇ μὲ μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν δι' ἑνὸς συστήματος τοῦ ὁποίου αἱ μεταβληταὶ ἐκφράζονται ὡς συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ χρόνου (γραμμικαὶ ἢ μή).

Ἓν τοιοῦτον στοχαστικὸν σύστημα δύναται, ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας, νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ λύσις ἑνὸς συστήματος γραμμικῶν στοχαστικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων r - τάξεως :

$$D^r\, y(t) = \sum_{k=1}^{r} A_k\, D^{k-1}\, y(t) + B\, z(t) + u(t) \tag{1.1}$$

ὅπου D εἶναι μία μορφὴ διαφορικοῦ τελεστοῦ (στοχαστικῆς παραγωγήσεως), y (t) καὶ z (t) διανύσματα ἐνδογενῶν καὶ ἐξωγενῶν μεταβλητῶν ἀντιστοίχως, u (t) διάνυσμα σφαλμάτων καὶ A,B πίνακες προσδιοριστέων συντελεστῶν.

Οἰκονομικαὶ ἀποφάσεις λαμβάνονται συνεχῶς κατὰ τακτὰ ἢ ἀκανόνιστα χρονικὰ διαστήματα. Τὰ παρατηρούμενα ὅμως οἰκονομικὰ μεγέθη παρουσιάζουν συνεχῆ μεταβολήν, διότι εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα διαφορετικῶν ἀποφάσεων λαμβανομένων εἰς διαφόρους χρονικὰς στιγμάς. Τὰ χρονικὰ διαστήματα τὰ μεσολαβοῦντα μεταξὺ διαδοχικῶν ἀποφάσεων δὲν ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ χρονικὰ διαστήματα τὰ μεσολαβοῦντα μεταξὺ διαδοχικῶν παρατηρήσεων, ἐπειδὴ δὲ εἰς τὰς ἀλληλοεξαρτήσεις τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν ὑπεισέρχονται διάφοροι χρονικαὶ ὑστερήσεις εἶναι προτιμοτέρα ἡ ἔκφρασις ἑνὸς οἰκονομικοῦ μεγέθους τῇ βοηθείᾳ μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως τοῦ χρόνου.

Εἰς τὰ ἀσυνεχῆ συστήματα ὑποθέτομεν, κατὰ κανόνα, ὅτι $E(u_t\, u'_s) = 0$,

$t \neq s$, ἤτοι, ὅτι τὰ σφάλματα εἰς τὰς παρατηρήσεις κατὰ διαφόρους χρονικὰς στιγμὰς εἶναι ἀσυσχέτιστα, τοῦτο δὲ ἀνεξαρτήτως τῆς χρονικῆς ἀποστάσεως ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν παρατηρήσεων. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι χρησιμοποιοῦμεν ἐτησίας παρατηρήσεις τῶν ἐνδογενῶν καὶ ἐξωγενῶν μεταβλητῶν καὶ ὅτι προσδιορίζομεν τὰς παραμέτρους τοῦ διακριτοῦ συστήματος, χρησιμοποιοῦντες τὴν ὑπόθεσιν $E(u_t \; u'_s) = 0$, $t \neq s$. Ἐὰν λάβωμεν ἑξαμηνιαίας ἢ τριμηνιαίας παρατηρήσεις πρὸς προσδιορισμὸν τῶν παραμέτρων τοῦ ἰδίου συστήματος, τότε, ἡ ὑπόθεσις περὶ τῶν σφαλμάτων θὰ παύσῃ νὰ ἰσχύῃ, διότι, διὰ δύο παρατηρήσεις ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ἔτους θὰ εἶναι $E(u_t \; u'_s) = \Sigma \neq 0$ ἤτοι θὰ ἔχωμεν αὐτοσυσχέτισιν εἰς τὰ σφάλματα, μὲ ὅλας τὰς ἐντεῦθεν γνωστὰς συνεπείας διὰ τὰς ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων. Συνεπῶς, ἡ ὑπόθεσις περὶ τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν σφαλμάτων συνεπάγεται τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς κατωτέρου φράγματος εἰς τὸ διάστημα μεταξὺ διαδοχικῶν παρατηρήσεων, τὸ ὁποῖον ὅμως, ἀποτελεῖ σοβαρὸν ἐμπόδιον εἰς τὸν ἀκριβῆ προσδιορισμὸν τῶν ἐξαρτήσεων μεταξὺ τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν. Τὸ μειονέκτημα τοῦτο δὲν ὑπάρχει εἰς τὰ συνεχῆ συστήματα διότι δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἀνεξαρτήτους στοιχειώδεις προσαυξήσεις εἰς συνεχῆ χρόνον.

Ἡ χρησιμοποίησις, ὡς ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν, τῶν ἐνδογενῶν μεταβλητῶν μὲ χρονικὴν ὑστέρησιν παρουσιάζει, ἐπίσης, πρόβλημα εἰς τὰ διακριτὰ συστήματα. Ἡ διάκρισις μεταξὺ μιᾶς ἐνδογενοῦς μεταβλητῆς καὶ τῆς τιμῆς αὐτῆς μὲ χρονικὴν ὑστέρησιν μιᾶς ἢ περισσοτέρων περιόδων εἶναι ἀπόλυτος συνάρτησις τοῦ χρόνου μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν παρατηρήσεων. Ἡ διάκρισις μεταξὺ τῶν Y_t καὶ Y_{t-1} παύει νὰ ἰσχύῃ, ἐὰν ἀντὶ ἐτησίων παρατηρήσεων χρησιμοποιηθοῦν τριμηνιαῖαι.

Τὸ πρόβλημα παρουσιάζεται ἐντονώτερον εἰς τὰ συστήματα τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς οἰκονομίας μὴ εὑρισκομένας εἰς ἰσορροπίαν. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας εἶναι, πολλάκις, ἀναγκαῖον νὰ λαμβάνωμεν χρονικὰς ὑστερήσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν συνεχῆ κατανομήν. Τοῦτο δὲν ἀποτελεῖ πρόβλημα, ἐὰν αἱ μεταβληταὶ τοῦ συστήματος εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις χρόνου. Οὕτω, ἐὰν $X(t)$ καὶ $Y(t)$ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις, ἡ ἁπλουστέρα περίπτωσις γραμμικῆς ἐξαρτήσεως τῆς Y ἐκ τῆς X μὲ χρονικὴν ὑστέρησιν T, δίδεται ὑπὸ τῆς :

$$Y(t) = \alpha + \beta X(t - T), \quad T > 0$$

Ἡ πλέον γενικὴ περίπτωσις μὲ συνεχῆ κατανομὴν ὑστερήσεων, ἀντίστοιχος τῆς

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots$$

$$\text{ὅπου} \quad \beta_1 + \beta_2 + \dots = 1.$$

δίδεται ὑπὸ τῆς

$$(1.2) \qquad Y(t) = \alpha + \beta \int_0^\infty f(s) X(t - s) \, ds = \int_0^\infty f(s) Z(t - s) \, ds$$

όπου $\int_0^\infty f(s)\,ds = 1$ καὶ $Z(t) = \alpha + \beta X(t)$

εἰς τὴν ὁποίαν ἡ $Y(t)$ ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἐξ ἑνὸς ἀριθμησίμου συνόλου διακριτῶν ἐν τῷ χρόνῳ τιμῶν τῆς X, ἀλλ' ἐξ ὁλοκλήρου τοῦ συνεχοῦς φάσματος τῶν τιμῶν τῆς X εἰς τὸ παρελθόν. Δύναται νὰ ἀποδειχθῇ [15, Appendix A], ὅτι, ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας, ἡ (1.2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς μίαν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς :

$$Y(t) = \frac{F(D)}{G(D)}[\alpha + \beta X(t)] = \frac{F(D)}{G(D)} Z(t) \tag{1.3}$$

ὅπου F καὶ G εἶναι πολυώνυμα τοῦ τελεστοῦ D μὲ βαθμὸν τοῦ F μικρότερον τοῦ βαθμοῦ τοῦ G. Σημαντικὴν ἐφαρμογὴν συνεχοῦς προσαρμογῆς ἀποτελεῖ ἡ ἐκθετικὴ ὑστέρησις, τὸ συνεχὲς ἀντίστοιχον τῆς γεωμετρικῆς ὑστερήσεως, εἰς τὴν ὁποίαν

$$f(s) = \lambda e^{-\lambda s}\ , \quad \lambda > 0$$

καὶ

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s}\,ds = \Big[-e^{-\lambda s}\Big]_0^\infty = 1$$

Ἡ (1.2) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$Y(t) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} Z(t-s)\,ds$$

καὶ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἡ ἀντίστοιχος διαφορικὴ ἐξίσωσις (1.3) λαμβάνεται εὐκόλως. Εἰσάγοντες τὸν μετασχηματισμὸν $x = t - s$ εὑρίσκομεν:

$$Y(t) = \lambda \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-x)} Z(x)\,dx = \lambda e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda x} Z(x)\,dx$$

Οὕτω :

$$Y(t)\, e^{\lambda t} = \lambda \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda x} Z(x)\,dx \tag{1.5}$$

ἐκ τῆς ὁποίας κατόπιν παραγωγίσεως λαμβάνομεν :

$$\lambda Y(t)\, e^{\lambda t} + \frac{dY(t)}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} Z(t)$$

ἢ

(1.6) $$DY(t) = \lambda [Z(t) - Y(t)]$$

ἢ

(1.7) $$Y(t) = \frac{\lambda}{D + \lambda} Z(t)$$

Ἐὰν ἡ $Z(t)$ εἰς τὴν (1.6) ἑρμηνευθῇ ὡς ἐπιθυμητὴ τιμὴ $Y^d(t)$ τῆς Y κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t, τότε ἡ (1.6) δίδει τὸ συνεχὲς ἀνάλογον τοῦ προτύπου τῆς μερικῆς προσαρμογῆς:

$$\Delta Y_t = \alpha (Y_t^d - Y_{t-1})$$

καὶ ἡ διάκρισις ἐν προκειμένῳ μεταξὺ Y_t καὶ Y_{t-1} παύει νὰ ἐνδιαφέρῃ. Τὸ πρότυπον (1.6) εἶναι ἰδιαιτέρως χρήσιμον διὰ τὴν μελέτην τῶν χρηματαγορῶν εἰς τὰς ὁποίας αἱ μεταβολαὶ τῶν τιμῶν καὶ αἱ προσαρμογαὶ τῶν τίτλων εἶναι συνεχεῖς [18].

Τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας ἀποδίδεται διὰ συνεχῶν συναρτήσεων καὶ τὰ ἀποτελέσματα ταύτης ἰσχύουν, ἐν γένει, μόνον διὰ συστήματα εἰς τὰ ὁποῖα αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν ἐκφράζονται ὑπὸ συνεχῶν συναρτήσεων.

Προβλέψεις διὰ τὴν συνεχῆ πορείαν τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν δὲν εἶναι δυναταὶ εἰς τὰ πλαίσια ἀσυνεχῶν συστημάτων. Ἐὰν διαθέτωμεν ἐτησίας παρατηρήσεις δυνάμεθα, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ δομὴ τοῦ συστήματος, νὰ ἔχωμεν προβλέψεις μόνον ἐπὶ ἐτησίας βάσεως, Ἐν τούτοις, εἰς τὰ πλαίσια ἑνὸς συνεχοῦς συστήματος, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν προβλέψεις αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς οἱανδήποτε χρονικὴν στιγμήν.

Σοβαρόν, ἐπίσης, πρόβλημα διὰ τὰ διακριτὰ συστήματα — τὸ ὁποῖον παραμένει καὶ διὰ τὰ συνεχῆ συστήματα, ἐφ' ὅσον πρὸς ἐκτίμησιν τῶν παραμέτρων των χρησιμοποιοῦνται ἀσυνεχεῖς παρατηρήσεις — εἶναι τὸ ὅτι οὐδεμία πληροφορία ὑπάρχει περὶ τῶν βραχυχρονίων διακυμάνσεων τῶν μεταβλητῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν περίοδον μικροτέραν τοῦ χρονικοῦ διαστήματος τοῦ μεσολαβοῦντος μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν παρατηρήσεων.

Εἰς τὴν πραγματικότητα, μία οἰκονομία ἐκφράζεται ὑφ' ἑνὸς μικτοῦ συστήματος διαφορικῶν ἐξισώσεων καὶ ἐξισώσεων διαφορῶν, ἀλλὰ ὁ προσδιορισμὸς τῶν παραμέτρων ἑνὸς συστήματος τῆς μορφῆς αὐτῆς παρουσιάζει πολλὰς μαθηματικὰς δυσχερείας.

2. Συστήματα γραμμικῶν στοχαστικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως

Ἓν περιοδικὸν (recursive) σύστημα γραμμικῶν στοχαστικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως ἀποδίδεται, γενικῶς, ὑπὸ τῆς :

$$(1.2) \qquad D\,y(t) = A\,y(t) + B\,z(t) + u(t)$$

ὅπου :

A : εἷς nxn πίναξ πραγματικῶν ἀριθμῶν, μὲ διακεκριμένας χαρακτηριστικὰς ρίζας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀρνητικὸν πραγματικὸν μέρος,

B : εἷς nxm πίναξ τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί,

y (t) : n x 1 διάνυσμα συνεχῶν συναρτήσεων αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν τὰς ἐνδογενεῖς μεταβλητὰς συναρτήσει τοῦ χρόνου,

z (t) : m x 1 διάνυσμα ἐξωγενῶν μεταβλητῶν, συνεχῶν συναρτήσεων τοῦ χρόνου, αἱ ὁποῖαι ὑποθέτομεν ὅτι δὲν εἶναι στοχαστικαὶ καὶ ἔχουν συνεχεῖς παραγώγους τρίτης τάξεως (*),

u (t) : n x 1 διάνυσμα τυχαίων στοχαστικῶν ἀνελίξεων (pure noise processes) τῶν ὁποίων ὁ πίναξ συνδιακυμάνσεων τῶν ὁλοκληρωμάτων τῶν u_{it}, $i = 1, 2, \ldots n$ εἰς τὴν μοναδιαίαν χρονικὴν περίοδον εἶναι ὁ ὡρισμένος θετικὸς (positive definite) πίναξ Σ.

Αἱ y (t) καὶ z (t) εἶναι μεταβληταὶ ἀποθέματος (stock variables), ἤτοι, ὁρίζονται καθ' ἑκάστην χρονικὴν στιγμήν.

Τὰ στοιχεῖα τῶν πινάκων A καὶ B ἀποτελοῦν τὰς παραμέτρους τοῦ συστήματος καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπόκεινται εἰς ὡρισμένους περιορισμούς, ἤτοι νὰ ἔχωμεν :

$$A = A(s) \ , \ B = B(s)$$

ὅπου s τὸ διάνυσμα τῶς παραμέτρων αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτιμηθοῦν,

Μαθηματικὴ δυσχέρεια ἀνακύπτει ἐνταῦθα ἐκ τοῦ ὅτι αἱ στοχαστικαὶ ἀνελίξεις u (t) δὲν εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα ἀνελίξεις δευτέρας τάξεως. Ἐπειδὴ ἡ φασματικὴ πυκνότης εἶναι σταθερὰ (white noise) ὁ πίναξ συνδιακυμάνσεων τῶν u (t) δὲν ὑπάρχει καὶ συνεπῶς αἱ παράγωγοι D y (t) δὲν ὁρίζονται κατὰ μέσον τετραγώνου. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν τὸ (2.1) γράφεται συνήθως ὑπὸ τὴν μορφήν.

$$(2.2) \qquad d\,y(t) = A\,y(t)\,dt + B\,z(t)\,dt + d\zeta(t)$$

ὅπου αἱ ζ (t) θεωροῦνται τυχαῖαι στοχαστικαὶ ἀνελίξεις ὁμογενεῖς ὡς πρὸς τὸν χρόνον μὲ ἀνεξαρτήτους προσαυξήσεις.

Εἰς τὸ σύστημα (2.2) ὑποθέτομεν ὅτι οἱ οἰκονομικοὶ παράγοντες δὲν ἀντιδροῦν ἀκαριαίως εἰς τὰς ἐπερχομένας μεταβολάς, οὕτως, ὥστε τὸ σύστημα

(*) Ἡ ὕπαρξις τῶν παραγώγων τρίτης τάξεως τῶν z (t) εἶναι ἀρκετὰ ἰσχυρὴ ὑπόθεσις ἀλλὰ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν εἰς τὴν παράγραφον 4 ἀναφερομένην προσέγγισιν τοῦ συνεχοῦς συστήματος. Δι' ἀσθενεστέρας ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν z (t) ἰδὲ [12] καὶ [10, Appendix].

νὰ εἶναι περιοδικὸν (recursive) καὶ νὰ ὁρίζεται σχέσις αἰτίου καὶ ἀποτελέσματος. Ὑποθέτομεν, ἐπίσης, ὅτι τὸ σύστημα εἶναι σταθερὸν (stable).

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος (2.2) δίδεται ὑπὸ τῆς :

$$y(t) = e^{At}\, y(0) + \int_0^t e^{A(t-\theta)} B\, z(\theta)\, d\theta + \int_0^t e^{A(t-\theta)}\, d\zeta(\theta) \tag{2.3}$$

ὅπου

$$y(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-A\theta} B\, z(\theta)\, d\theta + \int_{-\infty}^{0} e^{-A\theta}\, d\zeta(\theta) \tag{2.4}$$

Ἐὰν συμβολίσωμεν :

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A\theta}\, d\zeta(\theta)$$

θὰ ἔχωμεν λόγῳ τῶν ἀνεξαρτήτων προσαυξήσεων :

$$E\,[\,\xi(t)\,\xi'(t')] = \int_{-\infty}^{t} e^{-A\theta}\, \Sigma\, e^{-A'\theta}\, d\theta\,, \quad t \leqslant t'$$

καὶ

$$E\,[\,d\,\xi(t)\, d\xi'(t')\,] = \begin{cases} e^{-At}\, \Sigma\, e^{-A't}\,, & t = t' \\ 0 & t \neq t' \end{cases}$$

Ὁ προσδιορισμὸς τῶν παραμέτρων τοῦ συστήματος εἶναι ἀπόλυτος συνάρτησις τοῦ χρόνου μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν παρατηρήσεων. Μεταβολὴ εἰς τὸ μῆκος τῆς περιόδου μεταξὺ διαδοχικῶν παρατηρήσεων συνεπάγεται, ὡς θὰ ἴδωμεν, διαφορετικὸν διακριτὸν σύστημα καὶ συνεπῶς διαφορετικὴν δομὴν διὰ τὴν οἰκονομίαν.

Ὡς γνωστόν, τὰ διατιθέμενα στοιχεῖα εἶναι πάντοτε διακριτά. Συνεπῶς θὰ πρέπει τὸ ἀνωτέρω σύστημα συνεχῶν ἐξισώσεων (2.3) νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἓν ἰσοδύναμον διακριτὸν σύστημα.

3. Ἀκριβὲς διακριτὸν σύστημα ἰσοδύναμον τοῦ συνεχοῦς

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων (2.3) ἐπὶ $e^{A\delta}$ καὶ θεωροῦμεν τὴν τιμὴν αὐτῶν διὰ $t-\delta$:

$$(3.1)\qquad e^{A\delta} y(t-\delta) = e^{A\delta} e^{A(t-\delta)} y(0) + e^{A\delta} \int_0^{t-\delta} e^{A(t-\delta-\theta)} B z(\theta)\, d\theta + $$
$$+ e^{A\delta} \int_0^{t-\delta} e^{A(t-\delta-\theta)} d\zeta(\theta)$$

Ἀφαιροῦντες τὰς (3.1) ἀπὸ τὰς (2.3) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν :

$$y(t) - e^{A\delta} y(t-\delta) = \int_{t-\delta}^{t} e^{A(t-\theta)} B z(\theta)\, d\theta + \int_{t-\delta}^{t} e^{A(t-\theta)} d\underset{\sim}{\zeta}(\theta)$$

ἢ

$$(3.2)\qquad y(t) - e^{A\delta} y(t-\delta) = \int_0^{\delta} e^{A\theta} B z(t-\theta)\, d\theta - \int_0^{\delta} e^{A\theta} \zeta(t-\theta)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι δ εἶναι ἡ μονὰς χρόνου καὶ θέτομεν $\tau\delta = t$.

Θέτομεν ἐπίσης :

$$y(t) = y(\tau\delta) = y_\tau$$
$$z(t) = z(\tau\delta) = z_\tau$$

καὶ

$$\int_0^{\delta} e^{A\theta} B\, z(t-\theta)\, d\theta = \int_0^{\delta} e^{A\theta} B\, z(\tau\delta-\theta)\, d\theta = \psi_\tau$$

$$-\int_0^{\delta} e^{A\theta}\, d\zeta(t-\theta) = -\int_0^{\delta} e^{A\theta}\, d\zeta(\tau\delta-\theta) = w_\tau$$

Κατόπιν τούτων αἱ (3.2) γράφονται :

$$(3.3)\qquad y_t - e^{A\delta} y_{\tau-1} = \psi_\tau + w_\tau$$

ἤ, ἐν γένει :

$$(3.4)\qquad y_t = e^{A\delta} y_{t-1} + \psi_t + w_t$$

τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἀκριβὲς διακριτὸν σύστημα τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ συνεχοῦς συστήματος (2.3) καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2.3) ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι παρατηρήσεις ἰσαπέχουσαι χρονικῶς, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὸ δεύτερον, ἱκανοποιοῦν ἐπίσης καὶ τὸ πρῶτον. Τὰ δύο συστήματα ἐκφράζουν τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς δομὴν διὰ τὴν οἰκονομίαν. Ἐξ αὐτῶν, τὸ μὲν (2.3) εἰς συνεχῆ χρόνον, τὸ δὲ (3.4) εἰς διακριτὸν χρόνον. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς παραμέτρους τοῦ συστήματος, χρησιμοποιοῦντες διακριτὰς παρατηρήσεις, πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ ὁλοκληρώματα ψ_t, τὰ περιέχοντα τὰ ἐξωγενεῖς μεταβλητάς. Ἐὰν αἱ z (t) εἶναι ἁπλαῖ συναρτήσεις χρόνου (πολυώνυμα, τριγωνομετρικαὶ ἢ ἐκθετικαὶ συναρτήσεις), δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἐκφράσεις διὰ τὰς ψ_t, ὁπότε τὸ (3.4) καθίσταται ἓν σύστημα, τοῦ ὁποίου αἱ παράμετροι δύνανται νὰ ἐκτιμηθοῦν διὰ τῶν συνήθων οἰκονομετρικῶν μεθόδων. Ἐν γένει, ὅμως, πρέπει νὰ ἀναζητήσωμεν κάποιαν προσέγγισιν τῶν ὁλοκληρωμάτων τῶν περιεχόντων τὰς ἐξωγενεῖς μεταβλητάς.

4. Προσέγγισις τοῦ ἀκριβοῦς διακριτοῦ συστήματος

Εἷς πρῶτος τρόπος διὰ νὰ προσεγγίσωμεν τὰ ὁλοκληρώματα ψ_τ εἶναι ὁ ἑξῆς: Ἄς θεωρήσωμεν τὰ ἀναπτύγματα κατὰ Taylor τῶν συναρτήσεων $z(\tau\delta - \theta)$ περὶ τὴν τιμὴν $\theta = 0$. Χρησιμοποιοῦντες τὸν συμβολισμὸν $z_\tau = z(\tau\delta)$, εὑρίσκομεν:

$$z(\tau\delta - \theta) = z_\tau - \theta\, z_\tau^{(1)}(t) + \frac{\theta^2}{2!} z_\tau^{(2)}(t) - \frac{\theta^3}{3!} z_\tau^{(3)}(t) + \dots$$

ὅπου

$$\tau\delta - \theta < t < \tau\delta.$$

Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τοὺς τρεῖς πρώτους ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος καὶ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς προσεγγίσεις:

$$z_\tau^{(1)} = \frac{z_\tau - z_{\tau-1}}{\delta}, \quad \text{ὅπου } z_{\tau-1} = z(\tau\delta - \delta)$$

$$z_\tau^{(2)} = \frac{z_\tau - 2\, z_{\tau-1} + z_{\tau-2}}{\delta^2}, \quad \text{ὅπου } z_{\tau-2} = z(\tau\delta - 2\delta)$$

Μία τοιαύτη, ὅμως, προσέγγισις θὰ ἦτο ἐν γένει πολὺ χονδρική.

Εἷς δεύτερος τρόπος [12] θὰ ἦτο ἡ προσέγγισις τῶν συναρτήσεων $z(t-\theta) = z(\tau\delta - \theta)$ νὰ γίνῃ διὰ καμπύλων δευτέρου βαθμοῦ, ἤτοι:

$$\widehat{z}(\tau\delta - \theta) = \alpha + \beta\,\theta + \gamma\,\theta^2. \quad 0 < \theta \leqslant \delta \tag{4.1}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λαμβάνομεν ὡς προσέγγισιν τῶν ψ_τ τάς:

$$\widehat{\psi}_\tau = \int_0^\delta e^{A\theta}\, B\, \widehat{z}(\tau\delta - \theta)\, d\theta = \int_0^\delta e^{A\theta}\, B\, (\alpha + \beta\,\theta + \gamma\,\theta^2)\, d\theta$$

$$= \left[A^{-1} e^{A\theta} B (\alpha + \beta\theta + \gamma\theta^2) \right]_0^\delta - \int_0^\delta A^{-1} e^{A\theta} B (\beta + 2\gamma\theta)\, d\theta$$

$$= A^{-1} e^{A\delta} B (\alpha + \beta\delta + \gamma\delta^2) - A^{-1} B \alpha - A^{-2} e^{A\theta} B (\beta + 2\gamma\theta) \Big]_0^\delta +$$

$$+ \int_0^\delta A^{-2} e^{A\theta} B (2\gamma)\, d\theta$$

ἢ τελικῶς :

$$(4.3) \qquad \widehat{\psi}_\tau = A^{-1} e^{A\delta} B (\alpha + \beta\delta + \gamma\delta^2) - A^{-1} B \alpha - A^{-2} e^{A\delta} B (\beta + 2\gamma\delta) +$$

$$+ A^{-2} B \beta + 2 A^{-3} e^{A\delta} B \gamma - 2 A^{-3} B \gamma.$$

Ἐκ τῆς (4.1) λαμβάνομεν :

$$(4.4) \qquad \left[\begin{array}{llll} \text{διὰ} & \theta = 0 & : & z_\tau = \alpha \\ & \theta = \delta & : & z_{\tau-1} = \alpha + \beta\delta + \gamma\delta^2 \\ & \theta = 2\delta & : & z_{\tau-2} = \alpha + 2\beta\delta + 4\gamma\delta^2 \end{array} \right.$$

Ἐὰν λύσωμεν τὰ συστήματα (4.4) ὡς πρὸς α, β, γ συναρτήσει τῶν z_τ, $z_{\tau-1}$, $z_{\tau-2}$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (4.3), λαμβάνομεν μίαν ἔκφρασιν τῶν $\widehat{\psi}_\tau$ συναρτήσει τῶν z_τ, $z_{\tau-1}$, $z_{\tau-2}$, ἤτοι :

$$\widehat{\psi}_\tau = \delta \left[\left\{ (\delta A)^{-3} + \frac{1}{2} (\delta A)^{-2} \right\} e^{\delta A} - (\delta A)^{-3} - \frac{3}{2} (\delta A)^{-2} - (\delta A)^{-1} \right] B\, z_\tau$$

$$+ \delta \left[\left\{ - 2 (\delta A)^{-3} + (\delta A)^{-1} \right\} e^{\delta A} - 2 (\delta A)^{-3} + 2 (\delta A)^{-2} \right] B\, z_{\tau-1}$$

$$+ \delta \left[\left\{ (\delta A)^{-3} - \frac{1}{2} (\delta A)^{-2} \right\} e^{\delta A} - (\delta A)^{-3} - \frac{1}{2} (\delta A)^{-2} \right] B\, z_{\tau-2}$$

ἢ

$$(4.5) \qquad \widehat{\psi}_\tau = \Delta_2 z_\tau + \Delta_3 z_{\tau-1} + \Delta_4 z_{\tau-2}, \quad \Delta_i = \Delta_i (\delta, A, B),\ i = 2, 3, 4.$$

ὁπότε τὸ σύστημα (3.4) λαμβάνει, ἐν γένει, τὴν μορφήν :

(4.6) $y_t = \Delta_1 y_{t-1} + \Delta_2 z_t + \Delta_3 z_{t-1} + \Delta_4 z_{t-2} + \eta_t$

Τὸ σύστημα (4.6) εἶναι μία προσέγγισις τοῦ ἀκριβοῦς διακριτοῦ συστήματος (3.4), αἱ δὲ παράμετροί του δύνανται νὰ ἐκτιμηθοῦν διὰ τῆς μεθόδου τῆς Μεγίστης Πιθανοφανείας, ἐὰν χρησιμοποιηθοῦν διακριταὶ παρατηρήσεις :

$$\{ y_t, \ z_t, \ t = 1, 2 \ldots T \}$$

Αἱ ἐκτιμήσεις αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τοῦ συστήματος (4.6) δὲν θὰ εἶναι συνεπεῖς, διότι τὸ σύστημα δὲν εἶναι ἀκριβές, ἤτοι δὲν ἀποδίδει ἀκριβῶς τὴν δομὴν τὴν ὁποίαν ἐκφράζει τὸ ἀρχικὸν συνεχὲς σύστημα καὶ τὸ ἀκριβὲς διακριτὸν σύστημα (3.4). Βεβαίως, ἡ ἀσυνέπεια θὰ εἶναι μικρά, ἐὰν αἱ προσεγγίσεις $\hat{z}$ (τδ — θ) εἶναι καλαὶ εἰς τὸ διάστημα (0,δ). Ἐπίσης εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ προσέγγισις εἶναι πιθανότερον νὰ εἶναι καλλιτέρα, ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ διάστημα (0,δ).

Τὰ σφάλματα g (τδ — θ) τῆς προσεγγίσεως θὰ εἶναι :

$$g(\tau\delta - \theta) = z(\tau\delta - \theta) - \hat{z}(\tau\delta - \theta)$$

Ἡ ἀνωτέρω περιγραφεῖσα μέθοδος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν χρησιμοποίησιν τῆς κάτωθι μεθόδου ἀριθμητικῆς παραγωγήσεως, ἡ ὁποία εἶναι πλέον ἀκριβὴς τῆς ἀναφερθείσης εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς παραγράφου : Προσεγγίζομεν τὰς z (τδ — θ) ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον παρεμβολῆς διὰ τριῶν σημείων τοῦ Lagrange καί, ἐν συνεχείᾳ παραγωγίζομεν μίαν φορὰν διὰ νὰ λάβωμεν [10] :

$$z_\tau^{(1)} \simeq \frac{z_{\tau-2} - 4\, z_{\tau-1} + 3\, z_\tau}{2\delta}$$

καὶ δευτέραν φορὰν διὰ νὰ λάβωμεν :

$$z_\tau^{(2)} \simeq (z_\tau - 2\, z_{\tau-1} + z_{\tau-2}) \,/\, \delta^2$$

καί, συνεπῶς, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν προσέγγισιν ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\hat{z}(\tau\delta - \theta) = z_\tau - \frac{\theta}{2\delta}(z_{\tau-2} - 4\, z_{\tau-1} + 3\, z_\tau) + $$
$$+ \frac{\theta^2}{2\delta^2}(z_\tau - 2 z_{\tau-1} + z_{\tau-2})$$

Τὰ σφάλματα g (τδ — θ) εἶναι γνωστὸν ὅτι θὰ εἶναι :

(4.7) $g(\tau\delta - \theta) = -\theta(-\theta + \delta)(-\theta + 2\delta)\, z^{(3)}(t)/3!$

ὅπου $\tau\delta - 2\delta < t < \tau\delta$.

Ἐκ τῆς (4.7) διὰ $\theta \varepsilon (0,\delta)$ προκύπτει ὅτι τὰ σφάλματα $g(\tau\delta - \theta)$ εἶναι τῆς τάξεως τοῦ δ^3 διὰ $\delta \to 0$, [$g(\tau\delta - \theta) = 0(\delta^3)$].

Ἡ συνθήκη ὑπὸ τὴν ὁποίαν τὰ συστήματα (4.6) καὶ (3.4) εἶναι ἰσοδύναμα, περιέχεται εἰς τὴν ἰσότητα:

$$\eta_\tau = w_\tau + \int_0^\delta e^{A\theta} B\, g(\tau\delta - \theta)\, d\theta = w_\tau + 0(\delta^4)$$

ἐὰν βεβαίως τὰ στοιχεῖα τῶν $e^{A\delta}$ καὶ B παραμένουν φραγμένα, τοῦ $\delta \to 0$. Ἄρα, ἡ ἀσυνέπεια ἐκ τῆς θεωρήσεως τοῦ ὅρου η_τ ὡς τυχαίου σφάλματος εἶναι τῆς τάξεως τοῦ δ^4.

Βεβαίως, τὸ σύστημα (4,6) θὰ ἀποδίδῃ τὴν ἀκριβῆ δομὴν τῆς οἰκονομίας, τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὅτι ἐκφράζει τὸ ἀρχικὸν καί, βεβαίως, τὸ ἐξ αὐτοῦ διακριτὸν σύστημα (3.4), ἐὰν αἱ z (t) εἶναι πολυώνυμα τὸ πολὺ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς t.

Ὁ P. C. B. Philips [10] ἀπέδειξεν ὅτι, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸ σύστημα (4.6) διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν A καὶ B, τότε ἡ μεροληπτικότης τῶν ἐκτιμήσεων $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B}$ θὰ εἶναι τῆς τάξεως τοῦ δ^3, ἤτοι:

$$\widehat{A} - A = 0(\delta^3), \qquad \widehat{B} - B = 0(\delta^3)$$

Ἡ ἀπόδειξις ἐγένετο διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μιᾶς ἀσυμπτωτικῆς θεωρίας ($T \to \infty$) μὲ δ σταθερόν, προέκυψε δὲ ὅτι αἱ οὕτω λαμβανόμεναι ἐκτιμήσεις ἀκολουθοῦν, ὁριακῶς, κανονικὴν κατανομὴν μὲ μὴ ἀμερολήπτους μέσους καὶ συνδιακυμάνσεις. Ἡ τοιαύτη μεροληπτικότης τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἐὰν τὸ διάστημα μεταξὺ διαδοχικῶν παρατηρήσεων τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν παραμέτρων ἐκ τοῦ (4.6) εἶναι σχετικῶς πολυδάπανος. Κατωτέρω, ἐκτίθεται μία ἁπλουστέρα προσέγγισις μὲ πολὺ ὀλιγωτέρους ὑπολογισμούς. Ἐν τούτοις, ἡ μέθοδος τῆς προσεγγίσεως δι᾽ ἑνὸς πολυωνύμου δευτέρου βαθμοῦ δίδει τυπικὰ σφάλματα συγκριτικῶς πολὺ χαμηλότερα ἐκείνων τῆς μεθόδου ἡ ὁποία περιγράφεται κατωτέρω.

5. Διακριτὴ προσέγγισις τοῦ συνεχοῦς συστήματος ἀπ᾽ εὐθείας

Ἄς θεωρήσωμεν τὸ ἀρχικὸν σύστημα.

(5.1) $\quad d\,y(t) = A\,y(t)\,dt + B\,z(t)\,dt + d\,\zeta(t)$.

Ὁλοκληροῦμεν εἰς τὸ διάστημα [t — δ, t] καὶ θεωροῦμεν τὰς προσεγγίσεις:

$$(5.2) \qquad \int_{t-\delta}^{t} dx(s) = \Delta x_t \,, \qquad \int_{t-\delta}^{t} x(s)\, ds = M x_t$$

ὅπου

$$\Delta = \frac{1}{\delta}(1 - L) \,, \qquad M = \frac{1}{2}(1 + L) \,, \qquad L x_t = x_{t-1}$$

Εὐκόλως λαμβάνομεν τὸ διακριτὸν σύστημα :

$$(5.3) \qquad \Delta y_t = AM y_t + BM z_t + u_t \,, \quad u_t = \int_{t\delta}^{\delta} d\zeta(t) \,.$$

Ἐὰν ἔχωμεν περιορισμοὺς ἐπὶ τῶν στοιχείων τῶν πινάκων A καὶ B, τὸ σύστημα (5.3) γράφεται :

$$(5.4) \qquad \Delta y_t = A(s) M y_t + B(s) M z_t + u_t$$

καὶ αἱ παραμετροί του προσδιορίζονται μὲ μίαν ἐκ τῶν κλασσικῶν οἰκονομομετρικῶν μεθόδων.

Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν προσέγγισιν (5.4) ὑποθέτομεν, βεβαίως, ὅτι ἡ τιμὴ τῶν μεταβλητῶν y (t) καὶ z (t) ὁρίζεται εἰς κάθε χρονικὴν στιγμήν. Εἶναι δυνατὸν ἐν τούτοις, νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν μέθοδον καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν μεταβλητὰς ροῆς (flow variables) ἢ μεταβλητὰς ἀμφοτέρων τῶν εἰδῶν (mixed stock flow/variables).

Διὰ τὸ σύστημα (5.4) πρέπει νὰ σημειώσωμεν τὰ ἑξῆς :

(α) Τὸ σύστημα (5.4) δὲν εἶναι πλέον περιοδικὸν (recursive), ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ (5.1) τὸ ὁποῖον εἶναι περιοδικόν.

(β) Εἰς τὸ σύστημα (5.4) ἔχομεν εἰδικοὺς περιορισμοὺς ἐπὶ τῶν συντελεστῶν τῶν μεταβλητῶν y_t, οἱ ὁποῖοι ὀφείλονται εἰς τὴν συστηματικὴν σχέσιν ἡ ὁποία προκύπτει μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν y_t καὶ y_{t-1}. Αὐτὸ εἶναι φανερὸν ἐὰν γράψωμεν τὸ σύστημα ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$(5.5) \qquad \frac{1}{\delta}\left[I - \frac{\delta}{2} A(s)\right] y_t = \frac{1}{\delta}\left[I + \frac{\delta}{2} A(s)\right] y_{t-1} + BM z_t + u_t$$

(γ) Αἱ ἐξωγενεῖς μεταβληταὶ z (t) εἰσέρχονται εἰς τὸ σύστημα (5.4) πάντοτε μὲ χρονικὴν ὑστέρισιν μιᾶς περιόδου λόγῳ τῆς παρουσίας τοῦ τελεστοῦ M.

Ἂς ἐξετάσωμεν, τώρα, τὴν ποιότητα τῶν ἐκτιμήσεων, αἱ ὁποῖαι λαμβάνονται ἐκ τοῦ συστήματος (5.4).

Ἔστω καὶ πάλιν τὸ ἀκριβὲς διακριτὸν σύστημα (3.4). Ἂς πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη του ἐπὶ $\frac{1}{\delta}\left[I - \frac{\delta}{2} A(s) \right]$:

$$(5.6) \quad \frac{1}{\delta}\left[I - \frac{\delta}{2} A(s) \right] y_t = \frac{1}{\delta} e^{A\delta}\left[I - \frac{\delta}{2} A(s) \right] y_{t-1} + $$
$$+ \frac{1}{\delta}\left[I - \frac{\delta}{2} A(s) \right](\psi_t + w_t)$$

Τὸ σύστημα (5.6) ἔχει τοὺς ἰδίους συντελεστὰς διὰ τὰς ἐνδογενεῖς μεταβλητὰς ὡς καὶ τὸ σύστημα (5.5). Τὸ σφάλμα ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς προσεγγίσεως (5.5) διὰ τοὺς συντελεστὰς τῶν y_{t-1} εὑρίσκεται ἴσον πρὸς [12]:

$$\frac{1}{\delta}\left[I + \frac{\delta}{2} A(s) \right] - \frac{1}{\delta} e^{A\delta}\left[I - \frac{\delta}{2} A(s) \right] = \frac{1}{12}\delta^2 A^3 + 0(\delta^3)$$

Τὸ σφάλμα διὰ τὰς ἐξωγενεῖς μεταβλητὰς εὑρίσκεται ἴσον πρὸς

$$B\left(\frac{z_t + z_{t-1}}{2}\right) - \frac{1}{\delta}\left[I - \frac{\delta}{2} A(s) \right]\psi_t =$$

$$= \frac{1}{12}\delta^2\left[A^2B\, z(\delta) + AB\, z^{(1)}(\delta) + B\, z^{(2)}(\delta) + 0(\delta^3) \right]$$

Ὁ πίναξ συνδιακυμάνσεων τῶν σφαλμάτων εἰς τὸ σύστημα (5.5) εἶναι:

$$\Sigma u = \frac{1}{\delta}\left[I - \frac{\delta}{2} A(s) \right] \left\{ \int_0^\delta e^{\theta A}\, \Sigma\, e^{\theta A'} \right\} \frac{1}{\delta}\left[I - \frac{\delta}{2} A' \right]$$

Ἐὰν A εἶναι ἡ ἐκτίμησις τοῦ A διὰ χρησιμοποιήσεως τῆς περιγραφείσης προσεγγίσεως, ὁ καθηγητὴς Sargan [12] ἔδειξε ὅτι:

$$\widehat{A} - A = 0(\delta^2)$$

Ὅσα ἀνεφέρθησαν ἀνωτέρω καθιστοῦν φανερὸν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν διακριτῶν συστημάτων, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν οἰκονομετρίαν, ἀπὸ τὰ συνεχῆ συστήματα συνίσταται [εἰς τὸ ὅτι τὰ πρῶτα ἐνσωματώνουν περισσοτέρους περιορισμούς — λόγω τῶν ἀναφερθεισῶν συστηματικῶν σχέσεων αἵτινες ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν — οἱ ὁποῖοί βοηθοῦν εἰς τὴν ταυτοποίησιν τοῦ συστήματος καὶ δίδουν πλέον ἀποτελεσματικὰς ἐκτιμήσεις [9].

Δυνάμεθα, ἐπίσης εὐκόλως νὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν τῶν Strotz-Wold ([3], [4]) ἡ ὁποία ἀναφέρει ὅτι ὅλα τὰ συστήματα εἶναι περιοδικά: Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν ἓν σύστημα συνεχῶν ἐξισώσεων, τότε θὰ ἔχωμεν ἓν περιοδικὸν σύστημα, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸ ἀκριβὲς διακριτὸν σύστημα τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ συνεχές. Ἀλλά, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν προσέγγισιν διὰ νὰ λάβωμεν τὸ διακριτὸν σύστημα, τοῦτο δὲν θὰ εἶναι πλέον περιοδικόν.

6. Συνεχῆ συστήματα μετὰ ταυτοτήτων

Τὰ γραμμικὰ συστήματα τὰ ὁποῖα ἐξετάζομεν εἰς τὴν οἰκονομομετρίαν περιέχουν συνήθως πλὴν τῶν στοχαστικῶν ἐξισώσεων καὶ ταυτότητας.

Ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς γραμμικοῦ συστήματος πρώτης τάξεως μὲ ταυτότητας εἶναι:

$$(6.1) \qquad dy(t) = A\,y(t)\,dt + B\,z(t)\,dt + H\,d\zeta(t)$$

ὅπου ὁ πίναξ H εἶναι τάξεως $n x r$ $(r < n)$ μὲ στοιχεῖα πραγματικοὺς ἀριθμούς. Ἐὰν αἱ τελευταῖαι $n - r$ ἐξισώσεις εἶναι ταυτότητες τότε ὁ πίναξ H ἔχει τὴν μορφήν:

$$H' = [H_r \vdots 0]$$

Τὸ ἀκριβὲς διακριτὸν σύστημα, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς (6.1) εἶναι

$$y_t = e^{\delta A}\, y_{t-1} + \psi_t + w_t\,, \qquad w_t = -\int_0^{\delta} e^{\theta A}\; H\,d\zeta(\tau\delta - \theta)$$

καὶ ὁ πίναξ συνδιακυμάνσεων τῶν σφαλμάτων δίδεται ὑπὸ τοῦ

$$\Omega = \int_0^{\delta} e^{\theta A}\; H\,\Sigma\,H'\,e^{\theta A'}\;d\theta$$

ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι ἀπαραιτήτως ὡρισμένος θετικὸς (positive — definite). Ἐν τούτοις, εἰς τὰς περισσοτέρας, ἐκ τῶν σημαντικῶν, περιπτώσεις, ὁ πίναξ **Ω** εἶναι ὡρισμένος θετικὸς [10].

Ἐὰν γράψωμεν τοὺς πίνακας A καὶ H ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\;, \qquad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

ὅπου οἱ πίνακες A_{11} καὶ A_{22} εἶναι τάξεως r καὶ $n - r$ ἀντιστοίχως, ὡς ἀπέδειξεν ὁ Philips [10], ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ὁ πίναξ Ω ὡρισμένος — θετικὸς εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ πίνακος A_{21} νὰ εἶναι n — r. Ἐὰν ἡ συνθήκη αὐτὴ πληροῦται, τότε ἡ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων τοῦ (6.1) δύναται νὰ γίνη διὰ χρησιμοποιήσεως τῆς προσεγγίσεως (4.6) ἢ τῆς (5.4) χωρὶς περαιτέρω δυσχερείας.

7. Συνεχῆ συστήματα μὲ μεταβλητὰς ροῆς καὶ μικτὰ μὲ μεταβλητὰς ροῆς καὶ ἀποθέματος

Αἱ προσεγγίσεις τοῦ συνεχοῦς συστήματος αἱ ὁποῖαι ἀνεφέρθησαν προηγουμένως ἔγιναν μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὅλαι αἱ μεταβληταὶ εἶναι μεταβληταὶ ἀποθέματος (stock variables). Ἡ ἀνάλυσις αὐτὴ δύναται νὰ ἐπεκταθῆ εἰς συστήματα τῶν ὁποίων αἱ μεταβληταὶ εἶναι μεταβληταὶ ροῆς (flow variables) ἢ εἰς μικτὰ συστήματα (mixed stock/flow).

Μία μεταβλητὴ ροῆς y (t) δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθῆ ἀνὰ πᾶσαν χρονικὴν στιγμήν. Ἐν τούτοις, τὸ ὁλοκλήρωμα :

$$y^0(t) = \int_{t\,\delta}^{\delta} y(\tau)\, d\tau$$

δύναται νὰ μετρηθῆ. Συνεπῶς, εἰς ἓν ὑπόδειγμα μεταβλητῶν ροῆς, κάθε ἐξίσωσις πρέπει νὰ ὁλοκληρωθῆ εἰς τὸ διάστημα (t — δ, t) δύο φοράς: μία διὰ νὰ λάβωμεν ἓν σύστημα μεταβλητῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι μετρήσιμοι, καὶ μία διά νὰ λάμβωμεν τὸ διακριτὸν σύστημα τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ συνεχές.

Ἡ προσέγγισις, εἰς τὸ διακριτὸν σύστημα, τῶν μεταβλητῶν y^0 (t) θὰ εἶναι :

$$\int_{t\text{-}\delta}^{t} dy^0(s) = \Delta y_t^0\,, \qquad \int_{t\text{-}\delta}^{t} y^{\bullet}(s)\, ds = My_t^0$$

ὅπου τὰ σύμβολα Δ καὶ M ἔχουν ὁρισθῆ προηγουμένως.

Ἐὰν τὸ συνεχὲς σύστημα εἶναι πρώτης τάξεως ἡ διπλῆ ὁλοκλήρωσις ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὸ σφάλμα εἰς τὸ διακριτὸν σύστημα νὰ εἶναι μία ἀνέλιξις κινητοῦ μέσου, ἡ ὁποία δύναται νὰ ἀντιμετωπισθῆ, ὡς συνήθως, διὰ μετασχηματισμοῦ τῶν μεταβλητῶν.

Ἐὰν τὸ σύστημα περιέχει μεταβλητὰς ἀποθέματος καὶ μεταβλητὰς ροῆς χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἰδίαν προσέγγισιν διὰ τὰς μεταβλητὰς ροῆς y(t), ἐνῶ διὰ τὰς μεταβλητὰς ἀποθέματος x (t) λαμβάνομεν :

$$\int_{t\text{-}\delta}^{t} \left\{ \int_{\tau\text{-}\delta}^{\tau} dx(s) \right\} d\theta = M\Delta x_t$$

καὶ

$$\int_{t\text{-}\delta}^{t} \left\{ \int_{\tau\text{-}\delta}^{\tau} x(s)\, ds \right\} d\theta = M^2 x_t$$

ὅπου x_t εἶναι ἡ τιμὴ τῆς $x(t)$ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t. Ἐὰν $x_t^o = Mx_t$, αἱ ἀνωτέρω προσεγγίσεις τῶν μεταβλητῶν ἀποθέματος γίνονται :

$$\Delta x_t^o \quad \text{καὶ} \quad Mx_t^o$$

ἀντιστοίχως.

Συνεπῶς, ἓν μικτὸν σύστημα πρώτης τάξεως, ὅπου $y(t)$ εἶναι αἱ μεταβληταὶ ροῆς καὶ $x(t)$ αἱ μεταβληταὶ ἀποθέματος, δύναται νὰ προσεγγισθῇ ὑπὸ τοῦ διακριτοῦ συστήματος ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὰς μεταβλητὰς y_t^o καὶ x_t^o.

Ἀλλὰ τὸ σύστημα τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ θὰ ἔχῃ σφάλματα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀνελίξεις κινητοῦ μέσου πρώτης τάξεως [13], [14].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Koopmans, T.C. «Models involving a Continous time Variable». in T.C. Koopmans (ed), «Statistical Inference in Dynamic Economic Models», Wiley, 1950, , σελ. 384 — 39?.

2. Philips, A.W. «The estimation of Parameters in Systems of Stochastic Differential equations», Biometrica 1959, σελ. 67 — 76.

3. Strotz, R.H. «Interdependence as a specification Error» Econometrica 1960, σελ. 428 — 442.

4. Strotz, R.H. and Wold, H.O.A «Recursive V. Non Recursive Systems», Econometrica 1960., σελ. 417 — 427.

5. Bergstrom, A.R., «Non-recursive Models as Discrete Approximations to systems of stochastic Dif. Equations» Ecometrica 1966, σελ. 173 — 182.

6. Bergstrom, A.R., «The construction and use of Economic Models», English Universities Press 1967.

7. Erickson, R.V «Linear Differential Equations Driven by White Noise», Annals of Mathematical Statistics, 1971, σελ. 820 — 823.

8. Philips, P.C.B. «The Structural estimation of a stochastic Differential equation system» Econometrica 1972, σελ. 1021 — 1041.

9. Philips, P.C.B. «The problem of Identification in Finite Parameter Continous Time models» Journal of Econometrics, 1973, σελ. 351 —62.

10. Philips. P.C.B., «The estimation of Some Coutinous Time models» University of Essex Discussion paper N,o. 49, 1973.

11. Robinson, P.M. «The Estimation of Continous Time System Using Discrete data», Ph. D. Thesis, Australian National University, 1972. (Spectral approach).

12. Sargan, T.D. «Some Discrete Approximations to Contiuons time Stochastic Models» Journal of Royal Statistical Society (forthcoming)

13. Wymer, C.R. «Estimation of General Linear Differential Equation Systems» (mimeograph (1971) L.S.E.

14. Wymer, C.R. «Econometric Estimation of Stochastic Diff. Equation Systems». Econometrica 1972, σελ. 565—577.

15. R.G.D. Allen, «Mathematical Economics» Macmillan Press, 1972.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ :

16. Bergstrom, A.R. «A Model of Disequilibrium Neo-Classical Crowth» (momeograph).

17. Knight, M.D. «A continous Disequilibrium Econometric Model of the Domestic and International Portfolio Behaviour of the U.K. Banking System» in «Essays in Modern Economics» edited gy J.M. Partin, Longmans 1973.

18. Wymer C.R. "A continous Disequilibrium Adjustment Model of U.K. Financial Markets», in «Econonetric Studies of Macro and Monetary relations» edited by A.A. Powell and R.A. Williams, North-Holland, 1972.

19. Wymer, C.R. «Estimation of Continous Time models with an Application of the world Sugar Market». (mimeograph) L.S.E.