ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΚΥΒΕΡΝΗΤΙΚΗΝ

Τοῦ κ. ΚΩΝ/ΤΙΝΟΥ Α. ΡΗΓΑ

1. Εἰσαγωγὴ

Ὁ ὅρος «Κυβερνητικὴ» καθιερώθη ὑπὸ τοῦ διασήμου μαθηματικοῦ Norbert Wiener (1894 - 1964) τὸ 1948, εἰς τὸ βιβλίον του: «Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine» («Κυβερνητικὴ ἢ Ἔλεγχος καὶ Ἐπικοινωνία εἰς τὰ ζῶα καὶ τὰς μηχανάς».

Πρῶτος ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογόν του «Γοργίας»[1] εἶχε χρησιμοποιήσει τὸν ὅρον «Κυβερνητικὴ» μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς τέχνης τῆς ὁδηγήσεως (διακυβέρνησις πλοίου, ὁδήγησις ζώων κλπ.). Συγκεκριμένως ἀναφέρει ὁ Πλάτων: «τὴν Κυβερνητικήν, ἢ οὐ μόνον τὰς ψυχὰς σώζει ἀλλὰ καὶ τὰ σώματα καὶ τὰ χρήματα ἐκ τῶν ἐσχάτων κινδύνων».

Ἡ ἰδία λέξις εἶχε εἰσαχθῆ ὑπὸ τοῦ Γάλλου φυσικοῦ André Ampère (1775-1836) τὸ 1834 κατὰ περιωρισμένον τρόπον εἰς τὴν μελέτην τοῦ ἐλέγχου μηχανικῶν συστημάτων. Ἡ Κυβερνητικὴ ὡς ἐπιστήμη συνδέεται μὲ πολλὰς ἄλλας ἐπιστήμας ὡς τὰ Μαθηματικά, Μηχανικήν, Ἠλεκτρονικήν, Ἰατρικήν, Ψυχολογίαν, Βιολογίαν, Οἰκονομικήν, Κοινωνιολογίαν, Λογικήν, Γλωσσολογίαν, Φιλοσοφίαν κλπ.

Τὸ ἱστορικὸν τῆς δημιουργίας τῆς Κυβερνητικῆς ἔχει ὡς ἑξῆς: Κατὰ τὸν β΄ παγκόσμιον πόλεμον, ἀνετέθη εἰς τὸν Wiener, καθηγητὴν τότε τοῦ Τεχνολογικοῦ Ἰνστιτούτου τῆς Μασσαχουσέτης (ΜΙΤ) καὶ εἰς τὸν ἐπίσης μαθηματικὸν Julian Bigelow, ἡ δημιουργία μηχανισμῶν διὰ τὴν ἀποτελεσματικὴν ἀπόκρουσιν καὶ καταδίωξιν ἀεροσκαφῶν.

Τὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ λυθῆ ἦτο ἀρκετὰ σύνθετον. Τὸ πρῶτον θέμα ποὺ ἔπρεπε νὰ μελετηθῆ ἦτο συγχρόνως μαθηματικὸν καὶ ψυχολογικόν, δεδομένου ὅτι ὅταν τὸ ἀεροσκάφος βάλλεται, ὁ πιλότος ἀλλάζει κατεύθυνσιν. Ἔπρεπε λοιπὸν νὰ μελετηθῆ ἡ προβλεπομένη δυνατὴ πορεία ἐκ τῶν ἀλλαγῶν κατευθύνσεως τοῦ πιλότου. Ἄλλο πρόβλημα ἦτο νὰ κατασκευασθῆ μηχάνημα τὸ ὁποῖον λαμβάνον πληροφορίας περὶ τῆς πορείας τοῦ ἀεροσκάφους νὰ ρυθμίζη καταλλήλως τὸν ἄξονα τοῦ πυροβόλου δι᾽ αὐτόματον βολήν.

Ὁ Wiener ἐσκέφθη ὅτι ὁ μηχανισμὸς ἔπρεπε νὰ κατασκευαθῆ κατ᾽ απο-

1. Κεφ. 511 D.

μίμησιν τοῦ ἀνθρωπίνου ὀργανισμοῦ, δηλαδὴ νὰ δέχεται ὀπτικὰς ἐνδείξεις περὶ τῆς πορείας τοῦ ἀεροσκάφους καὶ νὰ ἐπιτελῆ τὴν ἀνάλογον ρύθμισιν τοῦ πυροβόλου.

Διὰ τοῦτο ὁ Wiener ἐζήτησε τὴν βοήθειαν τοῦ Arturo Rosenblueth, φυσιολόγου εἰς τὸ Ἐθνικὸν Ἰνστιτοῦτον Καρδιολογίας τοῦ Μεξικοῦ.

Οὕτω δημιουργεῖται μία νέα ἐπιστήμη διὰ τῆς συνεργασίας διαφόρων ἐπιστημῶν, ἡ ὁποία δύναται νὰ μελετήση τὰ φαινόμενα αὐτοματισμοῦ, νὰ ρίψη μίαν γέφυραν μεταξὺ ζωῆς καὶ μηχανῶν καὶ νὰ ἐναρμονίση τὰ πορίσματα μαθηματικῶν, φυσιολογίας, ψυχολογίας, τεχνικῆς κλπ.

2. Ἡ ἔννοια τῆς ἀναδράσεως[1]

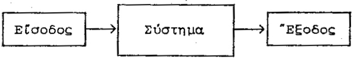
2.1. Παραδείγματα συστημάτων ἀναδράσεως

Ἡ Κυβερνητικὴ συνδέεται στενῶς μὲ τὴν θεωρίαν Συστημάτων. Ὡς «σύστημα» θεωρεῖται μία πολὺ γενικὴ ἔννοια καὶ δύναται νὰ ὁρισθῆ ὡς : «ἕνα σύνολον ἐμψύχων ἢ/καὶ ἀψύχων στοιχείων τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν ὠργανωμένην ἀλληλεπίδρασιν πρὸς ἐκπλήρωσιν συγκεκριμένου σκοποῦ». Π.χ. ἔχομεν ἡλιακὸν σύστημα, οἰκονομικὸν σύστημα, διοικητικὸν σύστημα, νευρικὸν σύστημα κλπ.

Εἰς ἕνα σύστημα ὑπάρχει «εἴσοδος» ὅταν τοῦτο δέχεται ἐρεθισμοὺς (σήματα, ἐνέργειαν κλπ.) ἐκ τοῦ περιβάλλοντός του.

Ἐὰν τοὺς ἐρεθισμοὺς αὐτούς, τοὺς ὁποίους μετασχηματίζει, ἀποστέλλει ἐκ νέου εἰς τὸ περιβάλλον τότε ὑπάρχει «ἔξοδος» εἰς τὸ σύστημα.

Ἕνα σύστημα μὲ εἴσοδον καὶ ἔξοδον εἰς τὸ ὁποῖον οὐδεὶς ἐρεθισμοὺς ἐκ τῆς ἐξόδου ἐπιστρέφει εἰς τὴν εἴσοδον αὐτοῦ (σχ. 2.1) καλεῖται «ἀνοικτὸν σύστημα».



Σχ. 2.1

Ἀντιθέτως κάθε σύστημα μὲ εἴσοδον καὶ ἔξοδον εἰς τὸ ὁποῖον ἐρεθισμοὶ ἐκ τῆς ἐξόδου ἐπιστρέφουν εἰς τὴν εἴσοδον αὐτοῦ, καλεῖται «κλειστὸν σύστημα». Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἰς τὸ σύστημα ὑπάρχει «ἀνάδρασις» ἢ «ἀνατροφοδότησις» (feedback).

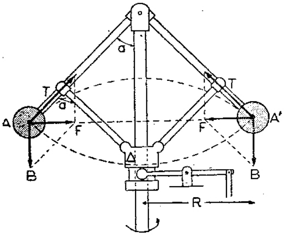
Κατωτέρω περιγράφονται παραδείγματα συστημάτων μὲ ἀνάδρασιν :

1) Ρυθμιστὴς τοῦ Watt

Εἰς τὸν ρυθμιστὴν τοῦ Watt (σχ. 2.2) ἐπὶ ἑνὸς κατακορύφου στελέχους,

1. Βλ. [1, σελ. 281].

τὸ ὁποῖον περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονά του, ἀρθρώνονται δύο βραχίονες οἱ ὁποῖοι ἀπολήγουν εἰς δύο ἴσας μεταλλικὰς σφαίρας.

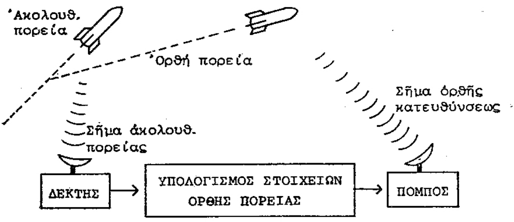


Σχ. 2.2

Εἰς κάθε σφαῖραν ἐνεργοῦν τὸ βάρος τῆς σφαίρας B καὶ ἡ δύναμις T, ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὴν ἀντίστασιν τοῦ βραχίονος. Ὅταν ὁ βραχίων περιστρέφεται, ἡ σφαῖρα διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος R. Ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐπενεργεῖ ἡ κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα κεντρομόλος δύναμις F. Ἡ F εἶναι ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων B καὶ T. Ὅταν αὐξάνεται ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ κατακορύφου στελέχους, ἀνυψώνονται αἱ σφαῖραι καὶ ἀνέρχεται ὁ δρομεὺς Δ. Ἡ διάταξις αὐτὴ δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς αὐτόματος ρυθμιστὴς εἰς τὰς ἀτμομηχανάς, εἰς τὴν αὐτόματον ἔναρξιν λειτουργίας μιᾶς τροχοπέδης, διὰ τὴν εἰσαγωγὴν μιᾶς ἀντιστάσεως εἰς ἓν κύκλωμα κλπ.

2) Διάταξις τηλεκατευθύνσεως

Μία διάταξις τηλεκατευθύνσεως πυραύλου (σχ. 2.3) ἀποτελεῖ σύστημα μὲ ἀνάδρασιν.

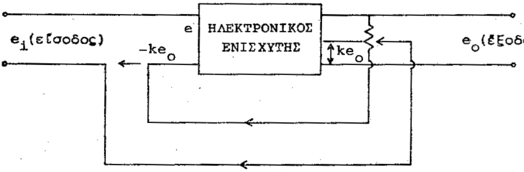


Σχ. 2.3

3) Ἠλεκτρονικὸς ἐνισχυτής

Ἕνας ἠλεκτρονικὸς ἐνισχυτὴς (σχ. 2.4) ἀποτελεῖ ἕν σύστημα μὲ ἀνάδρασιν. Εἰς τὴν εἴσοδον αὐτοῦ ὑπάρχει ἡ τάσις ρεύματος e_i καὶ εἰς τὴν ἔξοδον ἡ τάσις e_0.

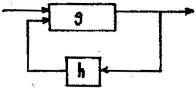
Ἡ e_i δύναται νὰ μετασχηματισθῆ διὰ τοῦ συστήματος εἰς $e_0 = e_i - ke_0$.



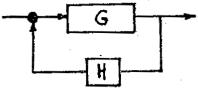
Σχ. 2.4

Εἰς ὅλα τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα ποὺ ἀναφέραμε ὑπάρχει ἡ ἀνάδρασις ποὺ εἶναι τὸ χαρακτηριστικὸν γνώρισμα ποὺ διακρίνει τὰ κλειστὰ συστήματα ἀπὸ τὰ ἀνοικτά.

Σχηματικῶς μπορεῖ νὰ παρασταθῆ ἡ ἰδέα τῆς ἀναδράσεως ὡς εἰς τὸ σχ. 2.5α.



Σχ. 2.5.α



Σχ. 2.5.β

Τὸ μὲν g συμβολίζει τὸ ρυθμιζόμενον (regulated) τμῆμα τοῦ συστήματος τὸ δὲ τὸ h τὸ ρυθμίζον (regulating ἢ governor) τμῆμα τοῦ συστήματος[1]. Τὸ ἐν λόγῳ σχῆμα ὁρίζεται ὡς «λειτουργικὸν διάγραμμα» (Λ.Δ.) ἢ «διάγραμμα βαθμίδος» (block structural diagram) τῆς ἀναδράσεως τοῦ ἐλέγχου τοῦ συστήματος (feedback control system).

Μὲ τὰ λειτουργικὰ διαγράμματα δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν εἰς γενικὰς γραμμὰς τὸ σύστημα. Αἱ διάφοροι βαθμίδες συνδεόμεναι καταλλήλως δίδουν μίαν γενικὴν εἰκόνα τῶν ἀλληλεπιδράσεων ποὺ λαμβάνουν χώραν εἰς τὸ σύστημα.

1. Βλ. [6, σελ. 17].

Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πλαισίου ἀντὶ τοῦ ὀνόματος λειτουργίας ἢ ὀργάνου π.χ. ἐνισχυτής, κινητήρ, εἰσόδημα, συντελεστὴς καταναλώσεως κ.ο.κ., εἶναι δυνατὸν νὰ σημειώνεται ἡ «συνάρτησις μεταφορᾶς» αὐτῆς[1] (transfer function). Τὸ Δ. Δ. ἀποτελεῖ τότε ἕνα μαθηματικὸν ὑπόδειγμα ἢ μοντέλο» (model). Ἐξ ἄλλου τὸ σχ. 2.5.β ἀποτελεῖ τὴν κανονικὴ μορφὴ (canonical form) τοῦ συστήματος ἀναδράσεως.

Εἶναι δυνατὸν τὰ διάφορα Λ.Δ. εἰς τὰ συστήματα ἐλέγχου νὰ εἶναι πολυπλοκώτερα καὶ νὰ μὴ εἶναι εἰς τὴν κανονικήν τους μορφήν. Πρὸς ἁπλοποίησιν αὐτῶν μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσωμε ἐπὶ τῶν Λ.Δ. ὡρισμένον ἀλγεβρικὸν λογισμὸν ποὺ ἰσχύει καὶ τὸν ὁποῖον ἀναπτύσσομεν κατωτέρω.

2.2. Λογισμὸς τῶν Λειτουργικῶν Διαγραμμάτων[2]

Ὁ ρ ι σ μ ο ὶ

Τὰ σύμβολα τῶν Λ.Δ. ποὺ ἑρμηνεύονται εἶναι ποσότητες μετασχηματισμέναι κατὰ Laplace[3]. Θὰ εἶναι :

R : εἴσοδος ἢ ἀναφορὰ (input)

C : ἔξοδος ἢ ἀπόκρισις (output)

B : ἀνάδρασις ἢ ἀνατροφοδότησις (feedback)

E : σφάλμα (error)

G : ἀπ' εὐθείας συνάρτησις μεταφορᾶς (direct transfer function) ἢ συνάρτησις μεταφορᾶς ἀνοικτοῦ συστήματος (forward transfer function).

H : Συνάρτησις μεταφορᾶς τῆς ἀναδράσεως (feedback transfer function).

GH : Συνάρτησις μεταφορᾶς βρόχου (loop transfer function).

$\frac{C}{R}$: Συνάρτησις μεταφορᾶς κλειστοῦ συστήματος (closed loop transfer function) ἢ λόγος ἐλέγχου (control ratio).

$\frac{E}{R}$: Λόγος σφάλματος (error ratio) ἢ δρῶν λόγος σήματος (actuating signal ratio) ἢ πολ/τὴς ἀναδράσεως (feedback multiplier) ἢ τελεστὴς (operator).

$\frac{B}{R}$: πρωτεύων λόγος ἀναδράσεως (primary feedback ratio).

Ἀποδεικνύεται ὅτι $\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH}$, $\frac{E}{R} = \frac{1}{1 \pm GH}$, $\frac{B}{R} = \frac{GH}{1 \pm GH}$.

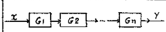
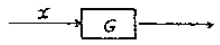
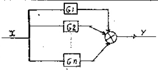
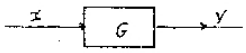
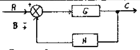
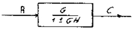
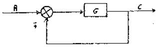
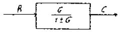
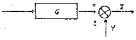
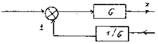
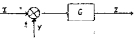
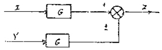
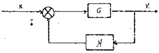
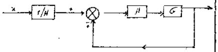
Τὸ ἀρνητικὸν πρόσημον ἀναφέρεται εἰς τὴν θετικὴν ἀνάδρασιν.

---

1. Ἴδε παράρτημα.
2. Βλ. [3, σελ. 122].
3. Ἴδε παράρτημα.

Κατωτέρω δίδεται πίναξ τῶν κυριωτέρων μετασχηματισμῶν τῶν Λ.Δ. οἱ ὁποῖοι εἶναι χρήσιμοι διὰ τὴν ἁπλοποίησιν αὐτῶν (σχ. 2.6).

Πίναξ Μετασχηματισμῶν Λειτουργικῶν Διαγραμμάτων

Περιπτώσεις	Ἀρχικὸν Λ.Δ.	Ἰσοδύναμον Λ.Δ.
1) Σύνδεσις Λ.Δ. ἐν σειρᾷ	 $Y=G_1G_2\dots G_nX$	 $G=G_1G_2\dots G_nX$
2) Σύνδεσις Λ.Δ. ἐν παραλλήλῳ	 $Y=G_1X+G_2X+\dots+G_nX$	 $G=G_1+G_2+\dots+G_n$
3) Συστήματα μέ ἀνάδρασιν H≠1	 $\frac{C}{R}=\frac{1}{1\pm GH}$	
4) Συστήματα μέ ἀνάδρασιν H=1	 $\frac{C}{R}=\frac{1}{1\pm G}$	
5) Μετακίνησις σημείου ἀθροίσεως ἔμπροσθεν τοῦ Λ.Δ.	 $Z=XG\pm Y$	
6) Μετακίνησις σημείου ἀθροίσεως ὄπισθεν τοῦ Λ.Δ.	 $Z=(X\pm Y)G$	
7) Ἀπομάκρυνσις βαθμίδος ἐκ τοῦ κλάδου ἀναδράσεως	 $Y=(X\mp YH)G$	

Σχ. 2.6

3. Οἰκονομικὴ Κυβερνητικὴ

3.1 Ὁ Κεϋνσιανὸς πολλαπλασιαστὴς[1]

Ἔστω τὸ ἁπλὸ οἰκονομικὸ ὑπόδειγμα :

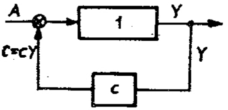
$$Y = C + A \qquad (1)$$

$$C = cY \qquad (2)$$

ὅπου Y : τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα, A : δαπάναι δι' ἐπενδύσεις, C : δαπάναι διὰ κατανάλωσιν ἀγαθῶν, c : ἡ ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν, μὲ $0 < c < 1$, δηλαδὴ τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα δὲν δαπανᾶται ὁλόκληρον εἰς τὴν κατανάλωσιν.

Ἐκ τῶν (1), (2) $Y = cY + A$ ἢ $Y = \frac{1}{1-c} A \qquad (3)$

Ὁ συντελεστὴς $\frac{1}{1-c}$ (4) ὁρίζεται ὡς κεϋνσιανὸς πολλαπλασιαστής. (Keynesian multiplier). Ὁ τύπος (3) εἶναι ὅμοιος μὲ τὸν τύπον $C = \frac{G}{1-GH} R$ (διὰ θετικὴν ἀνάδρασιν) καὶ δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ τὸ ἀκόλουθον λειτουργικὸν διάγραμμα :



Σχ. 3.1.1

Ἡ οἰκονομικὴ ἑρμηνεία τοῦ (3) εἶναι ἡ ἀκόλουθος: Ἔχομεν π.χ. τὸ οἰκονομικὸν σύστημα μιᾶς χώρας μὲ ἀρχικὰς δαπάνας διὰ τὰς ἐπενδύσεις A. Τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα θὰ εἶναι $Y=A$ διότι οὐδεμία μεταβολὴ θὰ γίνῃ λόγω τῆς μονάδος ποὺ ὑπάρχει εἰς τὸ πλαίσιον. Ὑπάρχει ὅμως ἡ ἀνάδρασις ἡ ὁποία εἶναι cY, θὰ προστεθῇ εἰς τὸ A καὶ θὰ δώσῃ τὸ $Y = A + cY$ ἢ $Y = \frac{1}{1-c} A$ κ.ο.κ.

3.2. Τὸ ὑπόδειγμα ἁπλῆς ἀναπαραγωγῆς

Εἰς τὸ κεφάλαιον αὐτὸ μελετῶνται τὰ ὑποδείγματα ἢ ἄλλως σχήματα ἀναπαραγωγῆς[2] κατὰ Marx. Τὸ ἀκαθάριστον ἐθνικὸν προϊὸν X, δοθέντος ἔτους,

1. Βλ. [6, σελ. 23].
2. Βλ. [5, σελ. 199].

ἐκφραζόμενον εἰς μονάδας ἀξίας, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἄθροισμα :

$$X = c + v + m \qquad (1)$$

ὅπου c : εἶναι ἡ ἀξία τῶν ἀγαθῶν ὑλικοῦ κεφαλαίου τὰ ὁποῖα καταναλίσκονται, χρησιμοποιούμενα εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους.

v : εἶναι ἡ ἀξία τῆς χρησιμοποιουμένης ἐργατικῆς δυνάμεως ἐντὸς τοῦ ἔτους.

m: ἡ ὑπεραξία, ἡ ὁποία εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀτομικιστικῆς συναλλακτικῆς οἰκονομίας συμπίπτει μὲ τὸ κέρδος.

Εἰς τὴν ἀνάλυσιν ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ, ἡ διάκρισις τοῦ v καὶ m δὲν ἔχει σημασίαν, διὰ τὸν λόγον αὐτὸν θὰ γράφωμε :

$$X = c + (v + m) \qquad (1')$$

ὅπου $v + m$ θεωρεῖται ἕνα μέγεθος.

Ἤδη εἰσάγομεν τοὺς συντελεστὰς $\alpha_c = \frac{c}{X}$ καὶ $\alpha_{v+m} = \frac{v+m}{X}$ (ὅπου $\alpha_c + \alpha_{v+m} = 1$) ὁπότε ἡ (1′) γράφεται :

$$X = \alpha_c X + (v + m)$$

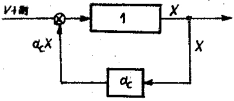
ἢ

$$(1 - \alpha_c)\, X = v + m$$

ἢ

$$X = \frac{1}{1 - \alpha_c}\,(v + m) \qquad (2)$$

Ἡ μορφὴ τοῦ τύπου (2) δεικνύει ὅτι ὑπάρχει μία σχέσις ἀναδράσεως εἰς τὴν διαδικασίαν (Σχ. 3.2.1).



Σχ. 3.2.1

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐθνικὴ οἰκονομία διαιρεῖται εἰς δύο τομεῖς : τὸν τομέα 1 ὁ ὁποῖος παράγει κεφαλαιακὰ ἀγαθὰ καὶ εἰς τὸν τομέα 2 ὁ ὁποῖος παράγει καταναλωτικὰ ἀγαθά. Τότε οἱ τύποι οἱ ὁποῖοι προσδιορίζουν τὴν ἀξίαν τοῦ προϊόντος κάθε τομέως τῆς ἐθνικῆς οἰκονομίας, εἶναι οἱ ἀκόλουθοι :

$$X_1 = c_1 + (v_1 + m_1) = \alpha_{1c}\, X_1 + (v_1 + m_1)$$
$$X_2 = c_2 + (v_2 + m_2) = c_2 + \alpha_{(2v+m)}\, X_2 \qquad (3)$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ α_{1c}, $\alpha_{2(v+m)}$ δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων :

$$\alpha_{1c} = \frac{c_1}{X_1},\ \alpha_{2(v+m)} = \frac{v_2 + m_2}{X_2} \qquad (4)$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀξιῶν τῶν δύο τομέων θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ προϊόντος, δηλ.

$$X = X_1 + X_2 = c_1 + (v_1 + m_1) + c_2 + (v_2 + m_2) =$$
$$= c + (v + m) \text{ ὅπου}$$
$$c = c_1 + c_2,\ v = v_1 + v_2,\ m = m_1 + m_2 \qquad (5)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τῆς ἁπλῆς ἀναπαραγωγῆς εἶναι :

$$c_1 + c_2 = c_1 + v_1 + m_1 \qquad (6)$$

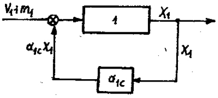
δηλαδὴ ἡ συνολικὴ ζήτησις ἀγαθῶν ὑλικοῦ κεφαλαίου ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ζητήσεων τῶν δύο τομέων, ἔχει ἀξίαν ἴσην πρὸς τὴν ἀξίαν τῆς παραγωγῆς τοῦ τομέως 1. Ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν :

$$c_2 = v_1 + m_1 \qquad (7)$$

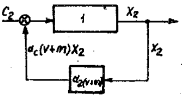
Ἀπὸ τοὺς τύπους (3) προκύπτουν οἱ τύποι :

$$X_1 = \frac{1}{1 - \alpha_{1c}}\,(v_1 + m_1)$$
$$X_2 = \frac{1}{1 - \alpha_{2(v+m)}}\,c_2 \qquad (8)$$

οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ λειτουργικὰ διαγράμματα :



Σχ. 3.2.2



Σχ. 3.2.3

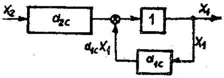
Ἀπὸ τοὺς τύπους (8) ὑπολογίζεται ὁ λόγος τῶν ἀξιῶν τῶν ἀκαθαρίστων ἐθνικῶν προϊόντων τῶν δύο τομέων.

Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\alpha_{2c} + \alpha_{2(v+m)} = \frac{c_2}{X_2} + \frac{v_2 + m_2}{X_2} = 1$ καὶ ἀπὸ τὴν συνθήκην ἰσορροπίας (7) θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{1-\alpha_{1c}}(v_1 + m_1) : \frac{1}{1-\alpha_{2(v+m)}} c_2 = \frac{1-\alpha_{2(v+m)}}{1-\alpha_{1c}} = \frac{\alpha_{2c}}{1-\alpha_{1c}}$$

ἢ $$X_1 = \frac{\alpha_{2c}}{1-\alpha_{1c}} X_2 \qquad (9)$$

Ὁ τύπος (9) δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τοῦ λειτουργικοῦ διαγράμματος τοῦ σχ. 3.2.4.



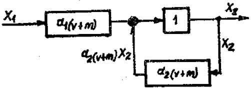
Σχ. 3.2.4

Μὲ παρόμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὸν λόγον $\frac{X_2}{X_1}$.

Εἶναι

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{\alpha_{1(v+m)}}{1-\alpha_{2(v+m)}} \text{ ἢ } X_2 = \frac{\alpha_{1(v+m)}}{1-\alpha_{2(v+m)}} X_1 \qquad (10)$$

μὲ ἀντίστοιχον λειτουργικὸν διάγραμμα τοῦ σχ. 3.2.5.



Σχ. 3.2.5

3.3.1. Ὑπόδειγμα διευρυνομένης παραγωγῆς

Εἰς τὴν παράγραφον αὐτὴν μελετᾶται ἡ κυβερνητικὴ ἀνάλυσις τοῦ ὑποδείγματος τῆς διευρυνομένης παραγωγῆς[1].

Ὡς καὶ προηγουμένως θεωροῦμεν ὅτι ἡ ἐθνικὴ οἰκονομία διαιρεῖται εἰς δύο τομεῖς. Ἕνα μέρος τῆς ὑπεραξίας m, ἔστω τὸ m_0, χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν

1. Βλ. [6, σελ. 53].

κατανάλωσιν ἐνῶ τὸ ὑπόλοιπον μέρος $m-m_0$ διατίθεται κατὰ ἕνα μέρος m_c διὰ τὴν αὔξησιν τοῦ ὑλικοῦ κεφαλαίου καὶ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον m_v διὰ τὴν χρησιμοποίησιν περισσοτέρων ἐργατικῶν δυνάμεων. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον διὰ τοὺς δύο τομεῖς θὰ ἔχωμεν :

$$X_1 = c_1 + v_1 + m_{1c} + m_{1v} + m_{10}$$

$$X_2 = c_2 + v_2 + m_{2c} + m_{2v} + m_{20} \qquad (1)$$

ἢ

$$X_1 = c_1 + m_{1c} + (v_1 + m_{1v} + m_{10})$$

$$X_2 = (c_2 + m_2) + v_2 + m_{2v} + m_{20} \qquad (1')$$

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας ἐπιτυγχάνεται ὅταν ἡ συνολικὴ ζήτησις ἀγαθῶν ὑλικοῦ κεφαλαίου $c_1 + c_2 + m_{1c} + m_{2c}$ θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀξίαν τῆς παραγωγῆς τοῦ τομέως 1, ποὺ εἶναι $c_1 + v_1 + m_{1c} + m_{1v} + m_{10}$, ὁπότε θὰ ἰσχύῃ :

$$c_1 + c_2 + m_{1c} + m_{2c} = c_1 + v_1 + m_{1c} + m_{1v} + m_{10} \qquad (2)$$

ἢ

$$c_2 + m_{2c} = v_1 + m_{1v} + m_{10} \qquad (3)$$

Εἰσάγοντες τοὺς συντελεστὰς $\alpha_{1c} = \frac{c_1}{X_1}$, $\alpha^{*}_{1c} = \frac{m_{1c}}{X_1}$, $\alpha_{2c} = \frac{v_2}{X_2}$, $\alpha^{*}_{2c} = \frac{m_{2v}}{X_2}$ καὶ $\alpha_{20} = \frac{m_{20}}{X_2}$ τότε οἱ τύποι (1') γράφονται :

$$\alpha_{1c} X_1 + \alpha^{*}_{1c} X_1 + v_1 + m_{1v} + m_{10} = X_1$$

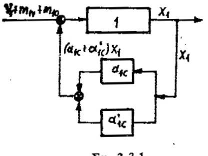
$$c_2 + m_{2c} + \alpha_{2v} X_2 + \alpha^{*}_{2v} X_2 + \alpha_{20} X_2 = X_2 \qquad (4)$$

ἢ

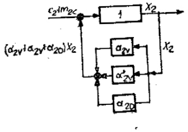
$$X_1 = \frac{1}{1-(\alpha_{1c} + \alpha^{*}_{1c})} (v_1 + m_{1v} + m_{10})$$

$$X_2 = \frac{1}{1-(\alpha_{2c} + \alpha^{*}_{2v} + d_{20})} (c_2 + m_{2c}) \qquad (5)$$

μὲ ἀντίστοιχα λειτουργικὰ διαγράμματα ὡς εἰς σχ. 3.3.1. σχ. 3.3.2.



Σχ. 3.3.1



Σχ. 3.3.2

᾿Απὸ τὰς (5) δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸν λόγον $\frac{X_1}{X_2}$ ἐὰν λάβωμεν ὑπ᾿ ὄψιν μας τὴν συνθήκην ἰσορροπίας (3) καὶ ἐπὶ πλέον ὅτι :

$$1-(\alpha_{2v} + \alpha^*_{2v} + \alpha_{20}) = \alpha_{2c} + \alpha^*_{2c} \tag{6}$$

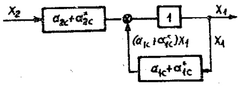
Θὰ εἶναι

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha_{2c} + \alpha^*_{2c}}{1-(\alpha_{1c} + \alpha^*_{1c})} \tag{7}$$

ἢ

$$X_1 = \frac{\alpha_{2c} + \alpha^*_{2c}}{1-(\alpha_{1c} + \alpha^*_{1c})} X_2 \tag{8}$$

μὲ ἀντίστοιχον λειτουργικὸν διάγραμμα τὸ σχ. 3.3.3.



Σχ. 3.3.3

Κατὰ τὴν ἰδίαν μέθοδον θὰ ἔχωμεν :

$$X_2 = \frac{\alpha_{1v} + \alpha^*_{1v} + \alpha_{10}}{1-(\alpha_{2v} + \alpha^*_{2v} + \alpha_{20})} X_1 \tag{9}$$

3.4. Τὸ πολυτομεακὸν ὑπόδειγμα παραγωγῆς

῎Εστω τώρα ὅτι ἡ ἐθνικὴ οἰκονομία διαιρεῖται εἰς n τομεῖς, μὲ πίνακα εἰσροῶν - ἐκροῶν τὸν ἀκόλουθον :

	X_1	X_2	. . . . .	X_n	
X_1	c_{11}	c_{12}	. . . . .	c_{1n}	Y_1
X_2	c_{21}	c_{22}	. . . . .	c_{2n}	Y_2
.	.	.	. . . . .	.	.
.	.	.	. . . . .	.	.
.	.	.	. . . . .	.	.
X_n	c_{n1}	c_{n2}	. . . . .	c_{nn}	Y_n
V	v_1	v_2	. . . . .	v_n	
M	m_1	m_2	. . . . .	m_n	

Πίναξ 1

Εἰς τὸν πίνακα αὐτὸν τὰ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ συμβολίζουν τὰς ἀξίας τῶν ὁλικῶν προϊόντων εἰς τοὺς ἐπὶ μέρους τομεῖς. Τὰ c_{ij} $(i, j, = 1,2, \ldots, n)$ συμβολίζουν τὰς ἀξίας τῶν διακλαδικῶν ροῶν τῶν ἀγαθῶν ἀπὸ τὸν κλάδον i εἰς τὸν κλάδον j. Τὰ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ εἶναι αἱ ἀξίαι τῶν τελικῶν προϊόντων εἰς τοὺς ἐπὶ μέρους κλάδους.

Τὰ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ εἶναι αἱ ἀξίαι τῶν χρησιμοποιουμένων ἐργατικῶν δυνάμεων, ἐνῶ τὰ $m_1, m_2, \ldots, m_n$ αἱ ὑπεραξίαι τῶν διαφόρων κλάδων τῆς ἐθνικῆς οἰκονομίας. Ὡς γνωστὸν ἰσχύουν :

$$X_i = c_{i1} + c_{i2} + \cdots + c_{in} + Y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

καὶ

$$X_i = c_{i1} + c_{i2} + \cdots + c_{ni} + v_i + m_i \quad (i = 1,2, \ldots, n) \qquad (2)$$

ἢ ἐὰν θέσωμεν $c_i = c_{1i} + c_{2i} + \cdots + c_{ni}$ τότε

$$X_i = c_i + v_i + m_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2')$$

Δι' ἐξισώσεως τῶν (1) καὶ (2') προκύπτει ἡ συνθήκη ἰσορροπίας. Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{X_i}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ τότε ἡ (2) γράφεται :

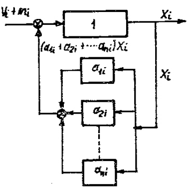
$$X_i = \alpha_{1i} X_i + \alpha_{2i} X_i + \cdots + \alpha_{ni} X_i + v_i + m_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (3)$$

Ἐκ τῆς τελευταίας $X_i = \dfrac{1}{1-(\alpha_{1i}+\alpha_{2i}+\cdots+\alpha_{ni})}(v_i + m_i), \; (i=1,2,\ldots n) \quad (4)$

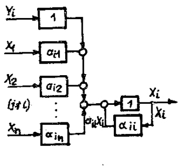
Ἐὰν τὸ ἄθροισμα $\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \cdots + \alpha_{ni}$ συμβολισθῇ μὲ α_i τότε ὁ τύπος (4) γράφεται :

$$X_i = \frac{1}{1-\alpha_i}(v_i + m_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5)$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν λογισμὸν τῶν λειτουργικῶν διαγραμμάτων θὰ ἔχωμεν τὸ σχ. 3.4.1 τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν τύπον (5) :



Σχ. 3.4.1



3.4.2

Ἄς γράψωμεν ἐκ νέου τὸν τύπον (1) ὡς :

$$X_i = \alpha_{i1} X_1 + \alpha_{i2} X_2 + \cdots \alpha_{ii} X_i + \cdots + \alpha_{in} X_n + Y_i \qquad (6)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

ἢ $X_i (1-\alpha_{ii}) = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} X_j + Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

ἢ $$X_i = \frac{1}{1-\alpha_{ii}} \left(\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} X_j + Y_i\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (7)$$

Τὸ σχ. 3.4.2 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν τύπον (7).

Ὁ πίναξ 1 δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

	X_1	X_2	$\cdots\cdots$	X_n	
X_1	$\alpha_{11}X_1$	$\alpha_{12}X_2$	$\cdots\cdots$	$\alpha_{1n}X_n$	Y_1
X_2	$\alpha_{21}X_1$	$\alpha_{22}X_2$	$\cdots\cdots$	$\alpha_{2n}X_n$	Y_2
.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	. . .	.	.
X_n	$\alpha_{n1}X_1$	$\alpha_{n2}X_2$	$\cdots\cdots$	$\alpha_{nn}X_n$	Y_n
V	v_1	v_2	$\cdots\cdots$	v_n	
M	m_1	m_2	$\cdots\cdots$	m_n	

Πίναξ 2

Ὁ τύπος (6) ὑπὸ μορφὴν μητρῶν γράφεται καὶ ὡς

$$X = Ax + y \qquad (8)$$

ὅπου A εἶναι ἡ μήτρα εἰσροῶν, x τὸ διάνυσμα τῶν ὁλικῶν προϊόντων καὶ y τὸ διάνυσμα τῶν τελικῶν προϊόντων.

Θὰ εἶναι

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots\cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots\cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Ἡ ἐξίσωσις (8) γράφεται :

$$x - Ax = y \quad \text{καὶ} \quad x = (I - A)^{-1}\, y \ \text{ἢ} \ x = \frac{1}{I - A}\, y \tag{9}$$

ὅπου

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & 1-\alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & 1-\alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

εἶναι ἡ μήτρα Leontief.

3.5. Τὸ δυναμικὸν ὑπόδειγμα κεϋνσιανοῦ πολλαπλασιαστοῦ

Τὸ δυναμικὸν ὑπόδειγμα κεϋνσιανοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὁρίζεται ἀπὸ τάς:

$$Y_t = C_t + A_t \tag{1}$$

$$C_t = c\, Y_{t-1} \tag{2}$$

ἢ

$$Y_t = c\, Y_{t-1} + A_t \tag{3}$$

Χρησιμοποιοῦντες τοὺς τελεστὰς $Ex_i = x_{i+1}$ καὶ $E^{-1} x_i = x_{i-1}$ ἡ (3) γράφεται :

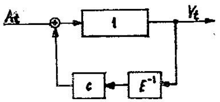
$$Y_t = c\, E^{-1}\, Y_t + A_t$$

ἢ

$$(1 - c\, E^{-1})\, Y_t = A_t \quad \text{ἢ}$$

$$Y_t = \frac{1}{1 - c\, E^{-1}}\, A_t \tag{4}$$

ὁπότε τὸ λειτουργικὸν διάγραμμα τοῦ τύπου (4) εἶναι τὸ σχ. 3.5.1



Σχ. 3.5.1

Ὁ τύπος (4) εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ ἄλλην μορφήν.

Ἀπὸ τὴν (3) θὰ ἔχωμεν :

$$E\,Y_t = c\,Y_t + A_t \text{ ὁπότε } Y_t = \frac{1}{E-c} A_t \qquad (5)$$

Ἡ δυναμικὴ διαδικασία τῆς ἀναπαραγωγῆς δίδεται ὑπὸ τῆς ἀκολούθου ἐξισώσεως διαφορῶν :

$$x_t = \alpha_c\, x_{t-1} + (v_t + m_t) \qquad (6), \qquad (0 < \alpha_c < 1).$$

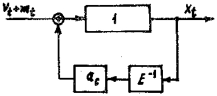
Ἡ (6) γράφεται :

$$x_t = \alpha_c\, E^{-1}\, x_t + (v_t + m_t)$$

ἢ

$$x_t = \frac{1}{1-\alpha_c\, E^{-1}} (v_t + m_t) \qquad (7)$$

μὲ λειτουργικὸν διάγραμμα τὸ σχ. 3.5.2.



Σχ. 3.5.2

3.6. Τὸ ὑπόδειγμα τῶν Harrod - Domar

Ἔστω τὸ ὑπόδειγμα Harrod - Domar :

$$Y = C + I + A \qquad (1)$$

$$C = cY \qquad (2)$$

$$I = v\frac{dY}{dt} \qquad (3) \qquad (v > 0)$$

ὅπου I : ἡ ἐνδογενὴς ἐπένδυσις, δηλ. ἡ ἐπένδυσις προσδιοριζομένη ἐντὸς τοῦ ὑποδείγματος συναρτήσει τοῦ εἰσοδήματος Y.

v = συντελεστὴς καλούμενος ἐπιταχυντής.

Ἐκ τῶν (1), (2), (3) λαμβάνομεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν :

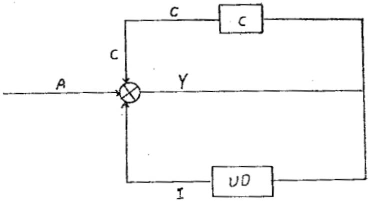
$$v\frac{dY}{dt} = (1-c)\,Y - A \qquad (4)$$

ἢ

$$v\,DY = (1-c)\,Y - A \qquad (4')$$

ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸν τελεστὴν $D \equiv \frac{d}{dt}$.

Τὸ ἐν λόγῳ ὑπόδειγμα δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τοῦ λειτουργικοῦ διαγράμματος 3.6.1.



Σχ. 3.6.1

Εἰς τὸ σχῆμα ὑπάρχουν δύο βρόγχοι ἀναδράσεως. Ἕνας βρόγχος ἀπαιτεῖται διὰ τὸν πολλαπλασιαστὴν ($Y \to C \to Y$) καὶ ὁ ἄλλος διὰ τὸν ἐπιταχυντὴν ($Y \to I \to Y$).

3.7. Τὸ ὑπόδειγμα Phillips

Τὸ ὑπόδειγμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ - ἐπιταχυντοῦ τοῦ Phillips [1] εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἀνάδρασις μετὰ χρονικῶν ὑστερήσεων εἶναι τὸ ἀκόλουθον :

$$Z = C + I + A \qquad (1)$$

$$C = c\,Y = (1-s)\,Y \qquad (2)$$

$$I = \frac{\kappa}{D+\kappa}\,v\,D\,Y \quad (3) \quad \text{ἢ} \quad I = L_\kappa DY \quad (3')$$

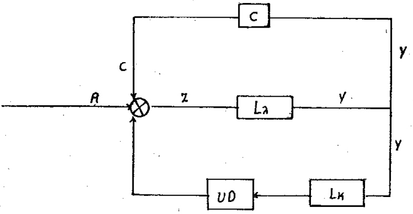
$$Y = \frac{\lambda}{D+\lambda}\,Z \quad (4) \quad \text{ἢ} \quad Y = L_\lambda\,Z \quad (4')$$

ὅπου Z : ἡ ὁλικὴ ζήτησις, C : ἡ κατανάλωσις, A : ἡ αὐτόνομος ἐπένδυσις **I** : ἡ ἐνδογενὴς ἐπένδυσις, c : ἡ ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν, s : ἡ ὁριακὴ

1. Βλ. [6, σελ. 53].

ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν, D : ὁ τελεστὴς $\frac{d}{dt}$, v : ὁ ἐπιταχυντὴς καὶ κ, λ : παράμετροι αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὡς αἱ ταχύτητες ἀποκρίσεως τῶν δύο ἐκθετικῶν ὑστερήσεων.

Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο παρίσταται διὰ τοῦ λειτουργικοῦ διαγράμματος τοῦ σχ. 3.7.1.



Σχ. 3.7.1

Ἀπό τὰς (1), (2), (3'), (4') λαμβάνομεν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τοῦ ὑποδείγματος :

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + d\,\frac{dY}{dt} + bY = \kappa\,\lambda\,A \qquad (5)$$

ὅπου $d = \lambda s + \kappa - \kappa \lambda v$ καὶ $b = \kappa \lambda s$. Ἐὰν $\kappa = 0$ ἐξαφανίζεται ὁ ἐπιταχυντής.

3.8. Τὸ ὑπόδειγμα τῶν Samuelson - Hicks

Τὸ ὑπόδειγμα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ - ἐπιταχυντοῦ τῶν Samuelson - Hicks[1] δίδεται ὑπὸ τῶν :

$$Y_t = C_t + I_t + A_t \qquad (1)$$

$$C_t = cY_{t-1} \qquad (2)$$

$$I_t = v\,(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \qquad (3)$$

1. Βλ. [1, σελ. 284].

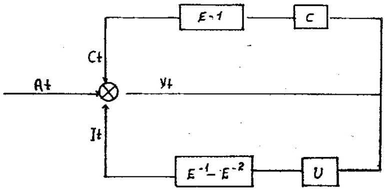
ἢ ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τελεστὰς τότε :

$$Y_t = C_t + I_t + A_t \qquad (1')$$

$$C_t = c\,E^{-1}\,Y_t \qquad (2)'$$

$$I_t = v\,(E^{-1} - E^{-2})Y_t \qquad (3')$$

Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο παρίσταται διὰ τοῦ λειτουργικοῦ διαγράμματος τοῦ σχ. 3.8.1.



Σχ. 3.8.1

Αἱ (1), (2), (3), δίδουν μίαν ἐξίσωσιν διαφορῶν δευτέρας τάξεως :

$$y_t - (c+v)\,y_{t-1} + v\,y_{t-2} = 0 \qquad (4)$$

ὅπου $y_t = Y_t - \bar{Y}$ μὲ $\bar{Y}$: σταθερὰ ἡ ὁποία προκύπτει ἐὰν $A_t = A$ (σταθερὰ) καὶ $\bar{Y} = A\,/\,(1-c)$.

3.9. Τὸ ὑπόδειγμα Kalecki

Ἔστω τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Kalecki τὸ ὁποῖον περιγράφεται διὰ τῶν τύπων (1)—(6).

$$\frac{dk(t)}{dt} = L(t) \qquad (1)$$

$$L(t+\theta) = B(t) \qquad (2)$$

$$B(t) = d\,[\,Y(t) - C(t)\,] - bk(t),\ a > 0,\ b > 0 \qquad (3)$$

$$Y(t) = C(t) + I\,(t) \qquad (4)$$

$$C(t) = c\,Y(t),\ 0 < c < 1 \qquad (5)$$

$$I\,(t) = \frac{1}{\theta}\int_{t-\theta}^{t} B(t)\,dt \qquad (6)$$

ὅπου $k(t)$: τὸ ἀπόθεμα κεφαλαίου (ἀγαθῶν) πρὸς ἐπένδυσιν κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t.

$B(t)$: αἱ σχεδιασθεῖσαι ἐπενδύσεις κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t.

$I(t)$: αἱ πραγματοποιηθεῖσαι ἐπενδύσεις κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t.

θ : ἡ χρονικὴ περίοδος ἡ ὁποία μεσολαβεῖ ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἀποφάσεως δι' ἐπένδυσιν μέχρι τῆς συμπληρώσεως τῆς παραγωγῆς τῶν ἀγαθῶν πρὸς ἐπένδυσιν.

Ὁ τύπος (1) δεικνύει ὅτι μία μεταβολὴ τοῦ ἀποθέματος ἀγαθῶν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν καθαρὰν παραγωγὴν τῶν ἀγαθῶν πρὸς ἐπένδυσιν $L(t)$. Ὁ τύπος (2) δεικνύει ὅτι ἡ καθαρὰ παραγωγὴ τῶν ἀγαθῶν πρὸς ἐπένδυσιν κατὰ τὴν στιγμὴν $t+\theta$, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὰς σχεδιασθείσας ἐπενδύσεις κατὰ τὴν στιγμὴν t. Ὁ τύπος (3) δεικνύει ὅτι ὁ ὄγκος τῶν σχεδιασθεισῶν ἐπενδύσεων εἶναι ἀνάλογος τοῦ μὴ καταναλωθέντος τμήματος τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, καθὼς ἐπίσης καὶ τοῦ ἀποθέματος τῶν ἀγαθῶν πρὸς ἐπένδυσιν.

Ὁ τύπος (6) δεικνύει ὅτι αἱ πραγματοποιηθεῖσαι ἐπενδύσεις κατὰ τὴν στιγμὴν t εἶναι ἴσαι μὲ τὴν μέσην τιμὴ τῶν σχεδιασθεισῶν ἐπενδύσεων κατὰ τὴν περίοδον $[\,t-\theta,\ t]$.

Οἱ τύποι (1)—(6) γράφονται μὲ τὴν βοήθειαν τῶν τελεστῶν ὡς ἀκολούθως.

$$Dk(t) = L(t) \qquad (1')$$

$$E^{\theta} L(t) = B(t) \qquad (2')$$

$$B(t) = \alpha\,[\,Y(t) - C(t)\,] - b\,k(t) \quad \alpha > 0,\ b > 0 \qquad (3)$$

$$Y(t) = C(t) + I(t) \qquad (4)$$

$$C(t) = c\,Y(t),\ 0 < c < 1 \qquad (5)$$

$$I(t) = \frac{1}{\theta} D^{-1}\,(1 - E^{-\theta})\ B(t) \qquad (6')$$

Τὸ σύστημα (1'), (2'), (3), (4), (5), (6') παριστάνεται μὲ τὸ λειτουργικὸν διάγραμμα τοῦ σχ. 3.9.1 καὶ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς μία ἐξίσωσις. Διὰ τῶν ἐξισώσεων (1'), (2') (3) λαμβάνομεν :

$$D\,E^{\theta} k(t) = \alpha\,[\,Y(t) - C(t)\,] - bk(t) \qquad (7)$$

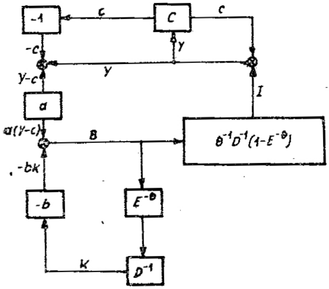
καὶ λόγῳ τῆς (6)

$$D\,E^{\theta} k(t) = \alpha\,(1 - c)\ Y(t) - bk(t) \qquad (8)$$

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν (5) καὶ (6) θὰ ἔχωμεν :

$$Y(t) = \frac{1}{1-c}\, I(t) \qquad (9)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν (9) εἰς τὴν (8) θὰ ἔχωμεν:



Σχ. 3.9.1

$$D\,E^{\theta}\,k(t) = a\,I(t) - b\,k(t) \tag{10}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ I(t) ἀπὸ τὴν (6′) θὰ εἶναι

$$D\,E^{\theta}\,k(t) = a\,\frac{1}{\theta}\,D^{-1}\,(1 - E^{-\theta})\,B(t) - b\,k(t) \tag{11}$$

ἀλλὰ εἶναι

$B(t) = E^{\theta}\,L\,(t) = E^{\theta}\,D\,k(t)$ ὁπότε ἡ (11) γίνεται

$$D\,E^{\theta}\,k(t) = a\,\frac{1}{\theta}\,D^{-1}\,(1 - E^{-\theta})\,E^{\theta}\,D\,k(t) - b\,k\,(t) \tag{12}$$

καὶ τελικῶς $$D\,E^{\theta}\,k(t) = \frac{a}{\theta}\,(E^{\theta} - 1)\,k(t) - b\,k(t) \tag{13}$$

Ἡ (13) εἶναι μία γραμμικὴ διαφορο - διαφορικὴ ἐξίσωσις μὲ σταθεροὺς συντελεστάς. Ἐπειδὴ ἡ χρονικὴ περίοδος θ, μεταξὺ μιᾶς ἀποφάσεως πρὸς ἐπένδυσιν καὶ τῆς συμπληρώσεως τῆς ἐπενδύσεως, εἶναι μία σταθερὰ ποσότης δύναται τὸ θ νὰ ληφθῇ ὡς μία μονὰς χρόνου, δηλ. $\theta = 1$.

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι $E = e^{D}$ ἡ διαφορο-διαφορικὴ ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ:

$$[\,De^{D} + a\,(\,1 - e^{D}\,)\,]\;k(t) = b\,k(t) \qquad \text{ἢ}$$

$$[\,(D - a)\,e^{D} + a + b\,]\;k(t) = 0 \tag{14}$$

Ἡ διαφορο-διαφορικὴ ἐξίσωσις (14) εἶναι ἡ «ἐξίσωσις ἀποκρίσεως» (response equation) τοῦ συστήματος, μὲ συνάρτησιν ἐξόδου τὴν k(t).

3.10. Ρυθμίσεις καὶ πολιτικὴ οἰκονομικῆς σταθεροποιήσεως

Εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἐμφανίζεται συχνὰ ἡ ἀνάγκη τῆς «ρυθμίσεως» (regulation) ὡρισμένων οἰκονομικῶν μεγεθῶν καὶ ἡ «σταθεροποίησις» (stabilization) αὐτῶν εἰς ὡρισμένας τιμάς. Π.χ. ἐὰν ἐξ αἰτίας μιᾶς ἀλλαγῆς εἰς τὴν ζήτησιν, τὸ ἐπίπεδον τοῦ εἰσοδήματος κατέλθῃ ἀρκετά, τότε καθίσταται ἀναγκαία ἡ ἐπάνοδός του εἰς ἓν ἐπιθυμητὸν ὕψος.

Κατωτέρω ἀναπτύσσεται ἡ πολιτικὴ οἰκονομικῆς σταθεροποιήσεως κατὰ τὸν Phillips. Οὗτος διακρίνει τρεῖς τύπους πολιτικῆς οἰκονομικῆς σταθεροποιήσεως:

i) Ἀναλογικὴν πολιτικὴν σταθεροποιήσεως (Proportional Stabilization Policy). Κατ' αὐτὴν ἡ δαπάνη μιᾶς κυβερνήσεως, εἶναι ἀνάλογος καὶ ἀντιθέτου σημείου τῆς ἀποκλίσεως, μεταξὺ τῆς πραγματοποιηθείσης καὶ ἐπιθυμητῆς τιμῆς τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, ἤτοι $P = -f_p Y$, ὅπου $f_p > 0$ εἶναι ὁ συντελεστὴς ἀναλογίας.

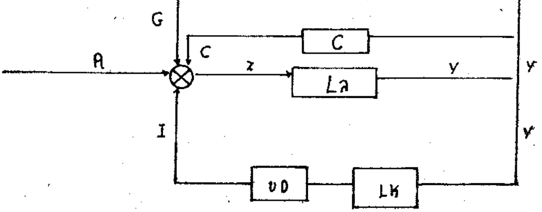
ii) Πολιτικὴ σταθεροποιήσεως παραγώγου (Derivative stabilization policy). Κατ' αὐτὴν εἶναι $P = -f_d Y'$ ὅπου $f_d > 0$ σταθερά.

iii) Πολιτικὴ σταθεροποιήσεως ὁλοκληρώματος (Integral stabilization policy). Εἶναι $P = -f_i \int_0^t Y dt$, ὅπου εἰς αὐτὴν λαμβάνεται $f_i > 0$ σταθερά.

Ὑπάρχει μία ὑστέρησις σταθεροῦ χρόνου τ μεταξὺ ἀποφάσεως καὶ πολιτικῆς P, ὅπου $P = -(f_d Y + f_d DY + f_i \int_0^t Y dt)$, καὶ τῆς ἐπιδράσεως αὐτῆς εἰς τὴν ζήτησιν G.

Ἔστω δὲ ὅτι ἰσχύει μεταξὺ αὐτῶν ἡ ἁπλῆ σχέσις $G = \frac{1}{\tau D + 1} P = L_g P$.

Ἡ πολιτικὴ σταθεροποιήσεως P τοῦ ὑποδείγματος Phillips τοῦ 3.7 δεικνύεται μὲ τὸ λειτουργικὸν διάγραμμα τοῦ σχ. 3.10.1.



Σχ. 3.10.1

Ἂς ἁπλοποιήσωμεν τὸ ὑπόδειγμα 3.7 πολλαπλασιαστοῦ - ἐπιταχυντοῦ θεωροῦντες ὅτι, ὅλαι αἱ ἐπενδύσεις περιλαμβάνονται εἰς τὸν παράγοντα A λαμβανομένου μὲ πρόσημον πλήν. Τὸ ὑπόδειγμα περιλαμβάνει τὸν πολλαπλασιαστὴν ἀλλὰ ὄχι τὸν ἐπιταχυντὴν ἐπενδύσεων. Τὸ ὑπόδειγμα θὰ εἶναι :

$$Z = C - A + G$$

$$C = cY$$

$$Y = \frac{1}{TD + 1} Z \qquad \text{ὅπου } T = \frac{1}{\lambda},$$

G εἶναι ἡ δημοσία ζήτησις.

Διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.

i) Ὅταν $G = 0$ τὸ ὑπόδειγμα γίνεται :

$$(TD + 1)\, Y = cY - A$$

ἢ

$$TDY + (1 - c)\, Y + A = 0$$

ἢ

$$DY + \frac{s}{T}\, Y + \frac{A}{T} = 0$$

Ἡ λύσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶναι $Y = -\frac{A}{s}\left(1 - e^{-\frac{s}{T}t}\right)$.

Ἐπειδὴ ὅταν $t = 0$ τὸ ἐπίπεδον τοῦ εἶναι πολὺ χαμηλὸν $\left(Y = -\frac{A}{s}\right)$, ἀπαιτεῖται διόρθωσις αὐτοῦ οὕτως ὥστε ἀπὸ τὴν τιμὴν $Y = -\frac{A}{s}$ νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν τιμὴν $Y = 0$.

ii) Ὅταν $G = \frac{1}{\tau D + 1} P$ καὶ $P = -f_p\, Y$, (ἀναλογικὴ πολιτικὴ σταθεροποιήσεως).

Τότε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις γίνεται :

$$(TD + 1)\, Y = cY - A - \frac{f_p}{\tau D + 1} Y$$

ἢ

$$(\tau D + 1)\,(TD + 1)\, Y = c\,(\tau D + 1)\, Y - A - f_p\, Y$$

ἢ

$$\tau T D^2\, Y + (T + s\tau)\, DY + (s + f_p)\, Y + A = 0$$

Διὰ τὴν μελέτην αὐτῆς τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως θέτομεν ὡς ἀριθμητικὸν παράδειγμα : $s = \frac{1}{4}$, $T = \frac{1}{4}$, $\tau = \frac{1}{2}$, $f_p = 2$ ὁπότε ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται :

$$D^2\, Y + 3\, DY + 18\, Y + 8A = 0.$$

Μὲ $t = 0$, $Y = 0$ καὶ $\frac{dY}{dt} = -\frac{A}{T} = -4A.$

Ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις εἶναι ἡ :

$$\lambda^2 + 3\lambda + 18 = 0 \quad \text{μὲ ρίζας τὰς}$$

$$\lambda = -1{,}5 \pm 3{,}9i.$$

Ἡ πλήρης λύσις εἶναι ἡ $Y = -\frac{4A}{9} + Be^{-1,5t}\cos(3{,}97\,t - \varepsilon)$

ἢ τελικῶς $Y = -\frac{4A}{9}\,[1 - 2{,}14e^{-1,5t}\cos(3{,}97t + 1{,}08)]$.

Ἡ λύσις αὐτῆς ταλαντοῦται πέριξ τοῦ $-\frac{4A}{9}$. Ἔχει ἐπιτευχθῆ βελτίωσις τῆς λύσεως ἀπὸ $-4A$ εἰς $\frac{-4A}{9}$ ἀλλὰ δὲν ἔχει ἐπιτευχθῆ ἡ ἐπιθυμητὴ λύσις διὰ τὸ Y.

iii) Γενικὴ περίπτωσις. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν καὶ τὰς τρεῖς πολιτικὰς σταθεροποιήσεως, δηλαδὴ $P = -(f_p P + f_d DY + f_i \int_0^t Y\,dt)$

μὲ $G = \frac{1}{\tau D + 1} P$ τότε

$$(TD + 1)Y = Z = cY - A - \frac{1}{\tau D + 1}(f_p Y + f_d DY + f_i \int_0^t Y dt)$$

ἢ $(\tau D + 1)(TD + 1)Y - c(\tau D + 1)Y + f_p Y + f_d DY + A = -f_i \int_0^t Y dt.$

Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα, διαφορίζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη ὁπότε :

$$D(\tau D + 1)(TD + 1)Y - cD(\tau D + 1)Y + f_p DY + f_d D^2 Y = -f_i Y.$$

ἢ $$\tau T D^3 Y + (T + s\tau + f_d) D^2 Y + (s + f_p) DY + f_i Y = 0.$$

Ὅταν ἡ A δὲν εἶναι σταθερὰ ἀλλὰ $A = A(t)$ τότε ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις θὰ γίνῃ :

$$\tau T D^3 Y + (T + s\tau + f_d) D^2 Y + (s + f_p) DY + f_i Y = -D(\tau D + 1)A(t)$$

Ἐὰν θέσωμεν ὡς παράδειγμα $s = \frac{1}{4}$, $T = \frac{1}{4}$, $\tau = \frac{1}{2}$, $f_p = f_i = 2$, $f_d = 0$ τότε θὰ ἔχωμεν :

$D^3Y + 3D^2Y + 18DY + 16Y = -4D(D+2)A$. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace θὰ λάβωμεν τὴν λύσιν :

$$Y(t) = -\frac{4A}{15}\left(e^{-t} - e^{-t}\cos 3{,}87\,t + 3{,}87\,e^{-t}\sin 3{,}87\,t\right) \quad \text{μὲ } Y(0) = \bar{Y} = 0$$

ἡ ἐπιθυμητὴ λύσις τοῦ Y (t) διὰ $t = 0$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE[1]

1. Ὁρισμοὶ

Ἔστω f μία πραγματικὴ συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς $t > 0$. Τότε ὁ μετασχηματισμὸς Laplace ὁ ὁποῖος συμβολίζεται μὲ $L[f(t)] = F$ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ ὁλοκληρώματος :

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \quad (1)$$

ὅπου s μία παράμετρος.

2. Βασικαὶ ἰδιότητες μετασχηματισμῶν Laplace

i) **Γραμμική.** Ἐὰν C_1 καὶ C_2 εἶναι δύο οἱαιδήποτε σταθεραὶ καὶ αἱ $f_1(t)$, $f_2(t)$ εἶναι συναρτήσεις μὲ μετασχηματισμοὺς Laplace $F_1(s)$ καὶ $F_2(s)$ ἀντιστοίχως, τότε :

$$L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 L[f_1(t)] + C_2 L[f_2(t)] =$$
$$= C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s) \quad \text{(Γραμμικὴ ἰδιότης)}$$

ii) **Μετατοπίσεως** (Shifting)

Ἐὰν $L[f(t)] = F(s)$ τότε $L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

iii) **Μετασχηματισμὸς** Laplace **παραγώγων**

Ἐὰν $L[f(t)] = F(s)$ τότε

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

ὅπου $f(t)$, $f'(t)$, . . . , $f^{(n-1)}(t)$ εἶναι συνεχεῖς.

1. [7, σελ. 1].

3. Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς Laplace

Ἡ μετάβασις ἐκ τῆς συναρτήσεως $F(s)$ εἰς τὴν ἀρχικὴν συνάρτησιν $f(t)$ γράφεται συμβολικῶς $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ καὶ ὁρίζεται ὡς ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς Laplace.

4. Βασικαὶ ἰδιότητες ἀντιστρόφου μετασχηματισμοῦ Laplace

i) **Γραμμική**

Ἐὰν C_1 καὶ C_2 εἶναι δύο οἱαιδήποτε σταθεραὶ καὶ αἱ $F_1(s)$, $F_2(s)$ εἶναι οἱ μετασχηματισμοὶ Laplace τῶν $f_1(t)$, $f_2(t)$ ἀντιστοίχως, τότε :

$$L^{-1}[C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s)] = C_1 L^{-1}[F_1(s)] + C_2 L^{-1}[F_2(s)] =$$
$$= C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$$

ii) **Μετατοπίσεως** (Shifting)

Ἐὰν $L^{-1}[(F(s)] = f(t)$ τότε $L^{-1}[F(s = a)] = e^{at} f(t)$

iii) **Ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς** Laplace **παραγώγων**

Ἐὰν $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ τότε $L^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n f(t)$.

5. Ἐφαρμογαὶ τοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace εἰς τὰς διαφορικὰς ἐξισώσεις

Οἱ μετασχηματισμοὶ Laplace ἐφαρμόζονται διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων καθὼς καὶ τῶν ἐξισώσεων διαφορῶν. Διὰ τῶν μετασχηματισμῶν αὐτῶν ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις μετατρέπεται εἰς μίαν ἄλλην ἡ ὁποία δύναται νὰ λυθῆ δι' ἀλγεβρικῶν μεθόδων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Νὰ λυθῆ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις: $y'' + y = t$ μὲ $y(0) = 1$ καὶ $y'(0) = -2$. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace θὰ ἔχωμεν :

$$L[y''] + L[y] = L[t]$$

ἢ $s^2F(s) - s\,y(0) - y'(0) + F(s) = \dfrac{1}{s^2}$

ἢ $s^2F(s) + F(s)\,s + 2 = \dfrac{1}{s^2}$

$$\text{ἢ} \quad F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} -$$

$$- \frac{2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

$$\text{καὶ} \quad y = y(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\right] =$$

$$= t + \cos t - 3s\ \text{int}.$$

6. Ἡ συνάρτησις Μεταφορᾶς

Ἓν σύστημα ὁρίζεται γραμμικὸν ὅταν ἡ ἔξοδος μεταβάλλεται ἀναλόγως τῆς εἰσόδου δηλαδὴ πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ k τῆς εἰσόδου πολλαπλασιάζεται ἐπὶ k ἡ ἔξοδος.

Ἕνα γραμμικὸν σύστημα περιγράφεται ἐν γένει ὑπὸ τῆς ἀκολούθου γραμμικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \frac{d^j x}{dt^j} \qquad (1)$$

ὅπου $a_n = 1$ καὶ $m \leqslant n$, δηλαδὴ

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a^{n-1} \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + \alpha_0 y =$$

$$= \beta_m \frac{d^m x}{dt^m} + \beta_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + \beta_1 \frac{dx}{dt} + \beta_0 x \qquad (2)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἅπασαι αἱ ἀρχικαὶ τιμαὶ τῶν συναρτήσεων x (t) καὶ y (t) μὲ $t \geqslant 0$ εἶναι μηδενικαί. Λαμβάνομεν τὸν μετασχηματισμὸν Laplace τῆς (2) ὁπότε:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) Y(s) = (\beta^m s^m \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0) X(s)$$

ὅπου $X(s) = L[X(t)]$ καὶ $Y(s) = L[y(t)]$.

Ἀπὸ τὴν (3) θὰ ἔχωμεν :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\beta_m s^m \pm \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad (4)$$

Ἡ G (s) εἶναι ἡ **συνάρτησις μεταφορᾶς** (transfer function) τοῦ συστήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Allen, R. G.D. : Mathematical Economics, MacMillan, 1970.

2. Allen, R. G.D. : Macro—Economic Theory, MacMillan, 1970.

3. Distefano, J. : Feedback and Control Systems, Mc Graw—Hill, 1967.

4. Kwakernaak Huihert : Linear Optimal Control Sustems, J. Willy, 1972.

5. Λάζαρη, Α., Οἰκονομικὸς Προγραμματισμός, 1975.

6. Lange, O., Introduction to Economic Cybernetics, Pergamon Press, 1970.

7. Spiegel, M., Laplace Transforms, Mc Graw—Hill, 1965.

8. Ρήγα Κ., Ἀρχαὶ προγραμματισμοῦ Ἠλεκτρονικῶν Ὑπολογιστῶν, 1972.