ΒΡΑΧΥΧΡΟΝΙΟΙ ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ ΠΩΛΗΣΕΩΝ ΔΙ' ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΕΩΣ

Τοῦ κ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ Σ. ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ
Δρος τοῦ Πανεπιστημίου Manchester

1. Εἰσαγωγὴ

Ἡ κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη χρησιμοποίησις τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν εἰς συστήματα ἐλέγχου ἀποθεμάτων καὶ προγραμματισμοῦ παραγωγῆς εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν εὐρεῖαν ἐφαρμογὴν τῆς τεχνικῆς τῆς ἐκθετικῆς ἐξομαλύνσεως (exponential smoothing) εἰς τὴν πρόβλεψιν τῆς ζητήσεως προϊόντων. Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἔχει ἐπιτυχῶς χρησιμοποιηθῆ εἰς τὴν ἀλλοδαπὴν εἰς πολλὰς περιπτώσεις βραχυχρονίων προβλέψεων, τόσον εἰς τὸ ἐμπόριον καὶ τὴν βιομηχανίαν, ὅσον καὶ εἰς τοὺς δημοσίους ὀργανισμούς.

Ἡ γενικὴ ἰδέα διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς τεχνικῆς τῆς ἐκθετικῆς ἐξομαλύνσεως συνίσταται εἰς τὴν στατιστικὴν ἀνάλυσιν «ἀσυνεχῶν» χρονολογικῶν σειρῶν πρὸς εὕρεσιν ἑνὸς σταθεροῦ προτύπου καὶ ὑπολογισμὸν τῆς κατανομῆς τῶν τυχαίων μεταβολῶν περὶ τὸ πρότυπον αὐτό. Αἱ ἀπαιτούμεναι πληροφορίαι διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν μελλοντικῶν τιμῶν τῆς πρὸς πρόβλεψιν μεταβλητῆς εἶναι αἱ τῶν ἱστορικῶν δεδομένων, ἐνῶ ἕτεραι πληροφορίαι, ὡς ἐπιχειρηματικαὶ καὶ οἰκονομικαὶ συνθῆκαι, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθοῦν ἄμεσα ὑπ' ὄψιν.

Ἐκ τῶν ἱστορικῶν δεδομένων αἱ πλέον πρόσφατοι παρατηρήσεις εἶναι μεγαλυτέρας σημασίας διὰ τὴν πρόβλεψιν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, ἐνῶ αἱ ἀπώτεραι παρατηρήσεις περιλαμβάνουν μικροτέραν πληροφοριακὴν δύναμιν (information power). Ἡ τεχνικὴ αὐτὴ εἶναι μία ἀρκετὰ εὔχρηστος μέθοδος ἀπαιτοῦσα ὀλίγας πληροφορίας διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν προβλέψεων καὶ παρέχουσα ταχεῖαν καὶ σταθερὰν ἀνταπόκρισιν (response) εἰς πραγματικὰς μεταβολὰς τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν συστήματος. Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἐξετάζονται ὑποδείγματα ἐκθετικῆς ἐξομαλύνσεως μὲ ἐποχικοὺς συντελεστὰς ὡς καὶ ὑποδείγματα μὲ ἐποχικοὺς συντελεστὰς καὶ τάσιν, διὰ τῶν ὁποίων καθίσταται δυνατὴ ἡ πρόβλεψις τῶν μελλοντικῶν τιμῶν μιᾶς οἱασδήποτε χρονολογικῆς σειρᾶς ὑποκειμένης εἰς ἐποχικὰς ἐπιδράσεις.

2. Ἁπλῆ Ἐκθετικὴ Ἐξομάλυνσις

Εἰς τὴν ἁπλουστέραν της μορφὴν ἡ μέθοδος τῆς ἐκθετικῆς ἐξομαλύνσεως ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῆς τιμῆς μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς ἐκ τῆς προσφάτου παρατηρήσεως τῆς σειρᾶς καὶ τῆς προηγουμένης ἐκτιμήσεως τῆς τιμῆς. Οὕτως ἡ ἐκ παρατηρήσεως χρονολογικὴ σειρὰ Y_t (ἔστω πωλήσεις τῆς t περιόδου) εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξομαλυνθῇ ὑπὸ τῆς

$$\overline{Y}_t = A\,Y_t + (1-A)\,\overline{Y}_{t-1}, \quad 0 \leqslant A \leqslant 1 \tag{2.1}$$

ὅπου $\overline{Y}_t$ ἡ ἐξομαλυνθεῖσα τιμὴ τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς τῆς t περιόδου καὶ A ἡ παράμετρος τῆς ἐξισώσεως γνωστὴ ὡς «σταθερὰ ἐξομαλύνσεως» (smoothing constant). Ἐὰν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2.1) ληφθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι ἐξισώσεις διὰ τὰς $\overline{Y}_{t-1}$, $\overline{Y}_{t-2}$, $\overline{Y}_{t-3}, \ldots$ καὶ ἀντικατασταθοῦν διαδοχικῶς εἰς τὴν (2.1), ἔχομεν :

$$\overline{Y}_t = A \sum_{j=0}^{M} (1-A)^j\, Y_{t-j} + (1-A)^{M+1}\, \overline{Y}_{t-(M+1)} \tag{2.2}$$

ὅπου M ὁ ἀριθμὸς τῶν τιμῶν τῆς ἐκ παρατηρήσεως σειρᾶς. Διὰ μεγάλας τιμὰς τοῦ M ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς (2.2) καθίσταται μηδαμινὸς καὶ ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\overline{Y}_t = A \sum_{j=0}^{M} (1-A)^j\, Y_{t-j}\,, \tag{2.3}$$

ἤτοι, ἡ $\overline{Y}_t$ εἶναι εἷς σταθμικὸς μέσος τῆς τελευταίας καὶ τῶν παρελθουσῶν τιμῶν τῆς ἐκ παρατηρήσεως σειρᾶς μὲ ἐκθετικῶς φθίνοντα βάρη (weights). Ἡ ἐξομαλυνθεῖσα τιμὴ τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς, λαμβανομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2.1), δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν πρόβλεψιν τῶν μελλοντικῶν τιμῶν τῆς σειρᾶς· ἐὰν $\hat{Y}_t$ (h) δηλοῖ τὴν πρόβλεψιν τῆς Y_{t+h} τὴν γενομένην εἰς τὸ τέλος τῆς t περιόδου διὰ τὴν h μελλοντικὴν περίοδον, ἔχομεν

$$\hat{Y}_t\,(h) = \overline{Y}_t\,, \quad h = 1,2,3,\ldots\ldots \tag{2.4}$$

Ἡ τιμὴ τῆς παραμέτρου A τῆς ἐξισώσεως (2.1) προσδιορίζει τὴν ἔμφασιν τὴν διδομένην εἰς τὰς τελευταίας παρατηρήσεις ἔναντι τῶν περισσότερον ἀπομεμακρυσμένων τοιούτων. Αὐξανομένης δὲ τῆς τιμῆς τῆς παραμέτρου, αὐξάνει καὶ ἡ ἐπὶ τῶν προβλέψεων ἐπίδρασις ἡ προερχομένη ἀπὸ τὰς τελευταίας παρατηρήσεις π.χ. διὰ A = 0.1 τὸ συνολικὸν βάρος τὸ ἀποδιδόμενον εἰς τὰς τελευταίας τέσσερας παρατηρήσεις εἶναι 0.3439, ἐνῶ διὰ A = 0.8 τὸ βάρος εἶναι 0.9984. Ὡς ἐκ τούτου αἱ μικραὶ τιμαὶ τῆς παραμέτρου A ἔχουν μεγαλυτέραν ἐξομαλυντικὴν ἐπίδρασιν τῶν μεγάλων. Ἀντιστρόφως διὰ μεγάλας τιμὰς τῆς A τὸ ὑπόδειγμα ἀντενεργεῖ ταχύτερον εἰς τὰς πραγματικὰς ἀλλαγὰς τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν συστήματος, μὲ ἀποτέλεσμα αἱ προβλέψεις νὰ γίνωνται περισσότερον ἀσταθεῖς. Οὕτω τὸ προκῦπτον πρόβλημα τὸ προερχόμενον ἐκ τῶν τιμῶν τῆς παραμέτρου Α εἶναι κατὰ πόσον τὸ ὑπόδειγμα πρέπει νὰ εἶναι σταθερὸν εἰς τυχαίας μεταβολὰς ἢ νὰ «ἀντιδρᾷ» ταχέως εἰς πραγματικὰς μεταβολάς. Ἡ ἐπιλογὴ τῆς καταλλήλου τιμῆς τῆς σταθερᾶς Α γίνεται κατωτέρω διὰ πολυπλοκώτερα ὑποδείγματα ἐκθετικῆς ἐξομαλύνσεως.

3. Ἐκθετικὴ Ἐξομάλυνσις μὲ Ἐποχικοὺς Συντελεστὰς

Πολλαὶ οἰκονομικαὶ χρονολογικαὶ σειραὶ ἀναπαρίστανται καλλίτερον ὑπὸ μαθηματικῶν ὑποδειγμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα λαμβάνονται ὑπ᾿ ὄψιν αἱ ἐποχικαὶ κινήσεις. Τὸ πρότερον παρουσιασθὲν ὑπόδειγμα τῆς ἁπλῆς ἐκθετικῆς ἐξομαλύνσεως δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ, εἴτε μετὰ μιᾶς προσθετικῆς ἐποχικῆς ἐπιδράσεως, εἴτε μετὰ μιᾶς πολλαπλασιαστικῆς τοιαύτης. Ἡ ἐπιλογὴ τοῦ ὑποδείγματος μὲ προσθετικὴν ἢ πολλαπλασιαστικὴν ἐπίδρασιν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σχέσεως ἐξαρτήσεως μεταξὺ τοῦ εὔρους τῆς ἐποχικότητος καὶ τοῦ ὕψους τῶν πωλήσεων, δηλ. τῆς Y_t. Ὡς ἀναφέρεται εἰς [6] τὸ προσθετικῆς ἐπιδράσεως ὑπόδειγμα χρησιμοποιεῖται εἰς τὰς περιπτώσεις ἐκείνας, εἰς τὰς ὁποίας τὸ εὖρος τῆς ἐποχικότητος εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ὕψους τῶν πωλήσεων· ὡστόσον εἰς τὰς περισσοτέρας χρονολογικὰς σειρὰς τὸ εὖρος τοῦτο εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ ὕψος τῶν πωλήσεων καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ πολλαπλασιαστικῆς ἐπιδράσεως ὑπόδειγμα εἶναι πλέον σύνηθες εἰς τὴν πρᾶξιν. Σημειοῦται ὅτι τὸ προσθετικὸν ὑπόδειγμα εἶναι γενικωτέρας μορφῆς τοῦ πολλαπλασιαστικοῦ τοιούτου, καθότι τὸ τελευταῖον δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς προσθετικὸν δι᾿ ἀντικαταστάσεως τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τῆς Y_t διὰ τῶν λογαρίθμων των, ὡς ἀναλύεται εἰς [5].

3.1. Προσθετικὸν Ἐποχικὸν Ὑπόδειγμα

Εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο ἡ ἐξομαλυνθεῖσα σειρὰ $\overline{Y}_t$ ὁρίζεται ὡς

$$\overline{Y}_t = A\,(Y_t - S_{t-L}) + (1-A)\,\overline{Y}_{t-1}, \quad 0 \leqslant A \leqslant 1 \qquad (3.1)$$

ὅπου S_t εἶναι ὁ ἐποχικὸς συντελεστὴς τῆς t περιόδου καὶ L ἡ περιοδικότης τῆς ἐποχικῆς ἐπιδράσεως. Διὰ μηνιαίας ἢ τριμηνιαίας παρατηρήσεις ἐτησίου κύκλου τὸ L εἶναι 12 μῆνες ἢ 4 τρίμηνα ἀντιστοίχως. Ὁ ἐποχικὸς συντελεστὴς S_t δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$S_t = B\,(Y_t - \overline{Y}_t) + (1-B)\,S_{t-L}, \quad 0 \leqslant B \leqslant 1 \qquad (3.2)$$

εἰς τὴν ὁποίαν τὸ Β εἶναι ἡ παράμετρος τῆς ἐξισώσεως, ὡς ἀκριβῶς τὸ Α εἰς τὴν

(2.1) καὶ τὴν (3.1). Ἡ πρόβλεψις τῆς h περιόδου εἰς τὸ προσθετικῆς ἐπιδράσεως ἐποχικὸν ὑπόδειγμα ὁρίζεται ὡς

$$\hat{Y}_t(h) = \bar{Y}_t + S_{t-L+h} \quad , \quad \text{διὰ} \quad h=1,2,3,\ldots,L \qquad (3.3)$$
$$= \bar{Y}_t + S_{t-2L+h} \quad , \quad \text{διὰ} \quad h=L+1,\ L+2,\ldots,2L.$$

ὅπου $\hat{Y}_t(h)$ εἶναι ἡ πρόβλεψις ἡ γενομένη εἰς τὸ τέλος τῆς t περιόδου διὰ τὴν h μελλοντικὴν περίοδον.

3.2. Πολλαπλασιαστικὸν Ἐποχικὸν Ὑπόδειγμα

Ἡ ἐξομαλυνθεῖσα σειρὰ τοῦ ἐκθετικοῦ ὑποδείγματος μὲ πολλαπλασιαστικὴν ἐποχικὴν ἐπίδρασιν $\bar{Y}_t$, ὁρίζεται ὡς

$$\bar{Y}_t = A\frac{Y_t}{S_{t-L}} + (1-A)\,\bar{Y}_{t-1} \quad , \quad 0 \leqslant A \leqslant 1 \qquad (3.4)$$

ὁ ἐποχικὸς συντελεστὴς ἔχει τὴν μορφὴν

$$S_t = B\frac{Y_t}{\bar{Y}_t} + (1-B)\,S_{t-L} \quad , \quad 0 \leqslant B \leqslant 1 \qquad (3.5)$$

ἡ δὲ πρόβλεψις τῆς h μελλοντικῆς περιόδου ἡ γενομένη εἰς τὸ τέλος τῆς t περιόδου δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\hat{Y}_t(h) = \bar{Y}_t\,S_{t-L+h} \quad , \quad \text{διὰ} \quad h = 1,2,3,\ldots,L \qquad (3.6)$$
$$= \bar{Y}_t\,S_{t-2L+h} \quad , \quad \text{διὰ} \quad h = L+1,\ L+2,\ldots,2L$$

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι τόσον εἰς τὸ προσθετικὸν ὅσον καὶ εἰς τὸ πολλαπλασιαστικὸν ὑπόδειγμα μὲ ἐποχικοὺς συντελεστὰς ἡ ἐξομαλυνθεῖσα σειρὰ $\bar{Y}_t$ ἀναπροσαρμόζεται εὐθὺς ὡς ἀποκτηθῇ μία νέα παρατήρησις, ὁ δὲ ἐποχικὸς συντελεστὴς S_t ἀναπροσαρμόζεται ἅπαξ τοῦ ἔτους (κύκλου). Εἰς ἀμφότερα τὰ ὑποδείγματα ἡ πρόβλεψις $\hat{Y}_t(h)$ εἶναι συνάρτησις τῆς τελευταίας τιμῆς τῆς σειρᾶς Y_t, τῶν παραμέτρων A καὶ B καὶ τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τοῦ $\bar{Y}$ καὶ S.

4. Ἐκθετικὴ Ἐξομάλυνσις μὲ Ἐποχικοὺς Συντελεστὰς καὶ Τάσιν

Τὸ ὑπόδειγμα τῆς ἐκθετικῆς ἐξομαλύνσεως δύναται περαιτέρω νὰ συμπεριλάβῃ προσθετικὴν τάσιν πρὸς ἑρμηνείαν οἰκονομικῶν χρονολογικῶν σειρῶν, εἰς τὰς ὁποίας παρουσιάζονται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐποχικαὶ κινήσεις, ἀφ' ἑτέρου δὲ τάσις. Οἱ ἐποχικοὶ συντελεσταὶ λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν εἴτε προσθετικῶς εἴτε πολλαπλασιαστικῶς, ὡς ἐξετέθη εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον.

4.1. Ὑπόδειγμα Προσθετικῶν Ἐποχικῶν Συντελεστῶν

Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο διαφέρει ἐκείνου τῆς παραγράφου 3.1 ὡς πρὸς τὴν τάσιν T. Ἐν προκειμένῳ ἡ ἐξομαλυνθεῖσα σειρὰ $\bar{Y}_t$ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\bar{Y}_t = A\,(Y_t - S_{t-L}) + (1 - A)\,(\bar{Y}_{t-1} + T_{t-1})\,, \quad 0 \leqslant A \leqslant 1 \tag{4.1}$$

ὅπου T_{t-1} εἶναι ἡ τελευταία ἐκτίμησις τῆς τάσεως, ὁ δὲ ἐποχικὸς συντελεστὴς S_t εἶναι ὁ τῆς ἐξισώσεως (3.2), δηλαδὴ

$$S_t = B\,(Y_t - \bar{Y}_t) + (1 - B)\,S_{t-L}\,, \quad 0 \leqslant B \leqslant 1 \tag{4.2}$$

Ἡ τάσις ὁρίζεται ὡς

$$T_t = C\,(\bar{Y}_t - \bar{Y}_{t-1}) + (1 - C)\,T_{t-1}\,, \quad 0 \leqslant C \leqslant 1 \tag{4.3}$$

ἡ δὲ πρόβλεψις τῆς h μελλοντικῆς περιόδου ἡ γενομένη εἰς τὸ τέλος τῆς t περιόδου δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t\,(h) &= \bar{Y}_t + hT_t + S_{t-L+h}\,, \quad \text{διὰ } h = 1,2,3,\ldots,L \\ &= \bar{Y}_t + hT_t + S_{t-2L+h}\,, \quad \text{διὰ } h = L+1,\, L+2,\ldots,2L\end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2. Ὑπόδειγμα Πολλαπλασιαστικῶν Ἐποχικῶν Συντελεστῶν ἢ Ὑπόδειγμα Winters

Ἐν προκειμένῳ ἡ χρονολογικὴ σειρὰ Y_t ἐξομαλύνεται συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν

$$\bar{Y}_t = A\,\frac{Y_t}{S_{t-L}} + (1 - A)\,(\bar{Y}_{t-1} + T_{t-1})\,, \quad 0 \leqslant A \leqslant 1 \tag{4.5}$$

ὁ δὲ ἐποχικὸς συντελεστὴς ὁρίζεται ὡς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3.5) ἤτοι

$$S_t = B\,\frac{Y_t}{\bar{Y}_t} + (1 - B)\,S_{t-L}\,, \quad 0 \leqslant B \leqslant 1 \tag{4.6}$$

Ἡ τάσις δίδεται ὑπὸ τῆς

$$T_t = C\,(\bar{Y}_t - \bar{Y}_{t-1}) + (1 - C)\,T_{t-1}\,, \quad 0 \leqslant C \leqslant 1 \tag{4.7}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς ἡ (4.3), σταθμίζει δὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο τελευταίων ἐκτιμήσεων τῆς ἐξομαλυνθείσης σειρᾶς μετὰ τῆς προηγουμένης ἐκτιμήσεως τῆς τάσεως. Τέλος ἡ πρόβλεψις $\hat{Y}_t\,(h)$ προσδιορίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\hat{Y}_t(h) = (\bar{Y}_t + hT_t)\, S_{t-L+h} \quad , \quad \delta\iota\grave{\alpha} \quad h = 1,2,3,\ldots,L \qquad (4.8)$$
$$= (\bar{Y}_t + hT_t)\, S_{t-2L+h} \quad , \quad \delta\iota\grave{\alpha} \quad h = L+1,L+2,\ldots,2L$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ $\hat{Y}_t(h)$ τῶν ἐξισώσεων (4.4) καὶ (4.8) εἶναι συνάρτησις τῆς τελευταίας τιμῆς τῆς σειρᾶς Y_t , τῶν παραμέτρων A,B καὶ C καὶ τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῶν $\bar{Y}$, S καὶ T.

5. Ὑπολογισμὸς ἀρχικῶν Τιμῶν καὶ Ἐπιλογὴ Τιμῶν Παραμέτρων

Ἡ ἐφαρμογὴ ἑνὸς ὑποδείγματος ἐκθετικῆς ἐξομαλύνσεως — εἴτε μὲ ἐποχικοὺς συντελεστάς, εἴτε μὲ ἐποχικοὺς συντελεστὰς καὶ τάσιν — ἐπὶ πραγματικῶν δεδομένων ἀπαιτεῖ

α) Τὸν ὑπολογισμὸν ἀρχικῆς τιμῆς τῆς ἐξομαλυνθείσης σειρᾶς $\bar{Y}$, τοῦ ἐποχικοῦ συντελεστοῦ S καὶ τῆς τάσεως T, ἐφ' ὅσον αὐτὴ ἐμφανίζεται εἰς τὸ ὑπόδειγμα καὶ

β) Τὴν ἐπιλογὴν τῶν καταλλήλων τιμῶν τῶν A, B καὶ C ἢ τοῦ A καὶ B ἀναλόγως τῆς ὑπάρξεως τάσεως ἢ μή.

Ἀκολούθως εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην παρουσιάζεται ὁ τρόπος ἐπιλογῆς τῶν ἀρχικῶν τιμῶν καὶ τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων τοῦ ἐκθετικοῦ ὑποδείγματος μόνον μὲ πολλαπλασιαστικοὺς ἐποχικοὺς συντελεστὰς καὶ προσθετικὴν τάσιν, ὁ ὁποῖος τυγχάνει καὶ ὁ πλέον πολύπλοκος.

Οἱ τρόποι ἐπιλογῆς τῶν ἀρχικῶν τιμῶν καὶ τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων τῶν λοιπῶν ἐκτεθέντων ὑποδειγμάτων δύνανται εὐκόλως νὰ προκύψουν ἐκ τοῦ κατωτέρω ἀναλυομένου τοιούτου καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἀνάλυσίς των παραλείπεται. Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ὑποδείγματος μὲ πολλαπλασιαστικοὺς ἐποχικοὺς συντελεστὰς καὶ προσθετικὴν τάσιν ἀκολουθεῖται ἡ ἀκόλουθος διαδικασία.

A) Αἱ χρονικαὶ περίοδοι τῆς ὑπὸ ἐξέτασιν χρονολογικῆς σειρᾶς ἀριθμοῦνται $t = 1,2,\ldots D$ καὶ διαιροῦνται εἰς δύο μέρη. Τὸ πρῶτον μέρος τῆς σειρᾶς διαρκείας K περιόδων χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῶν $\bar{Y}$, S καὶ T — ὡς ἀναφέρεται εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον — χωρὶς νὰ γίνωνται προβλέψεις. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς σειρᾶς διαρκείας D-K περιόδων εἰσάγονται αἱ ἀρχικαὶ τιμαὶ τῶν $\bar{Y}$, S καὶ T αἱ ὑπολογισθεῖσαι εἰς τὸ πρῶτον μέρος, ὁπότε τὸ ἐκθετικὸν ὑπόδειγμα δύναται νὰ ἐκτιμήσῃ τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν προβλέψεων καὶ νὰ ὑπολογίσῃ τὰ σφάλματα τῶν προβλέψεων ἀπὸ τὴν περίοδον K+1 ἕως τὴν περίοδον D, διὰ τοὺς διαφόρους συνδυασμοὺς τιμῶν τῶν παραμέτρων.

B) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῶν $\bar{Y}$, S καὶ T γίνεται ὡς κατωτέρω :

i) Ὑπολογίζεται ὁ μέσος ὅρος τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς δι' ἕκαστον ἔτος V_i καὶ θεωρεῖται ὁ μέσος ὅρος τοῦ πρώτου ἔτους ὡς ἀρχικὴ τιμὴ τοῦ $\bar{Y}$.

ii) Ὑπολογίζεται ἡ μέση διαφορὰ μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου μέσου δρου τοῦ πρώτου μέρους τῆς σειρᾶς καὶ θεωρεῖται ὡς ἀρχικὴ τιμὴ τῆς τάσεως T_1.

iii) Ὑπολογίζεται ὁ ἐποχικὸς συντελεστὴς δι' ἑκάστην περίοδον τοῦ πρώτου μέρους τῆς σειρᾶς ὡς τὸ πηλίκον τῆς πραγματικῆς τιμῆς τῆς περιόδου πρὸς τὴν διαφορὰν τοῦ μέσου ὅρου τοῦ ἔτους καὶ τῆς τάσεως συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν

$$S_t = \frac{Y_t}{V_i - \left(\frac{L+1}{2} - j\right) T_1} \qquad (5.1)$$

ὅπου j εἶναι ἡ θέσις τῆς περιόδου ἐντὸς τοῦ ἔτους. Ἐκ τῶν ὑπολογιζομένων ἐποχικῶν συντελεστῶν εὑρίσκεται ὁ μέσος ὅρος των δι' ἑκάστην περίοδον π.χ. ὁ μέσος ὅρος διὰ τὸν Ἰανουάριον ὑπολογίζεται ἐκ τῶν συντελεστῶν ἑκάστου Ἰανουαρίου τοῦ πρώτου μέρους τῆς σειρᾶς. Περαιτέρω οἱ μέσοι ὅροι τῶν συντελεστῶν προσαρμόζονται οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμά των νὰ ἰσοῦται πρὸς L. Οὕτως ἐξασφαλίζεται ὅτι οἱ ἐποχικοὶ συντελεσταὶ διαμορφώνουν μόνον ἐποχικὰς προσαρμογὰς καὶ δὲν ἀλλάζουν τὸ μέσον ἐπίπεδον τῶν τιμῶν.

Γ) Ἐπιλέγεται τὸ κριτήριον, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκτιμᾶται ἡ ἀποτελεσματικότης τοῦ ὑποδείγματος ὡς πρὸς τὰς προβλέψεις. Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἐχρησιμοποιήθη ὡς κριτήριον ἀποτελεσματικότητος[1] ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ «μέσου τετραγωνικοῦ σφάλματος προβλέψεως» (mean squared forecast error)

$$S_e = \left[\frac{\sum\limits_{t=K+1}^{D} e^2_{t,h}}{D-K-1}\right]^{1/2} \qquad (5.2)$$

ὅπου $e_{t,h}$ τὸ σφάλμα προβλέψεως τῆς (t+h) περιόδου ὁριζόμενον ὡς

$$e_{t,h} = Y_{t+h} - \hat{Y}_t\,(h) \qquad (5.3)$$

Δ) Δεδομένων τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῶν $\overline{Y}$, S καὶ T ἀναζητεῖται ὁ ἄριστος συνδυασμὸς τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων A, B καὶ C δηλ. ὁ συνδυασμὸς ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐλάχιστον μέσον τετραγωνικὸν σφάλμα προβλέψεως. Τοῦτο καθίσταται δυνατόν, ἐφ' ὅσον διερευνηθῇ ὁ παραμετρικὸς χῶρος [2] τοῦ ἐκθετικοῦ ὑποδείγματος διὰ τῆς προσομοιώσεως [3] (simulation) τοῦ ὅλου συστήματος διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ.

---

1. Ἕτερα κριτήρια μετρήσεως τῆς ἀποτελεσματικότητος τῶν προβλέψεων ἀναγράφονται εἰς [1] κεφ. II.

2. Ἐν προκειμένῳ ὡς παραμετρικὸς χῶρος θεωρεῖται τὸ σύνολον τῶν δυνατῶν συνδυασμῶν ὅλων τῶν τιμῶν τῶν A, B καὶ C.

3. Ἡ διερεύνησις τοῦ παραμετρικοῦ χώρου δυνατὸν νὰ γίνῃ διὰ τοῦ ἀλγορίθμου τῆς βαθυτέρας τομῆς (steepest descent algorithm) ἢ δι' ἄλλης παραπλησίας μεθόδου· βλέπε [2], [3] καὶ [4]. Τὰ μειονεκτήματά των ἔναντι τῆς τεχνικῆς τῆς προσομειώσεως ἀναφέρονται εἰς [1] Κεφ. II.

Εἰδικώτερον εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς σειρᾶς διὰ τῆς εἰσαγωγῆς διαφόρων τιμῶν τῶν παραμέτρων A, B καὶ C ληφθέντων ἀπὸ ὅλους τοὺς δυνατοὺς συνδυασμοὺς τῶν 0,.2,.4,.6,.8,1 τὸ ἐκθετικὸν ὑπόδειγμα ὑπολογίζει τιμὰς τῶν $\bar{Y}$, S καὶ T χωρὶς νὰ ἐνεργῇ προβλέψεις. Αἱ τιμαὶ τῶν κατὰ τὴν περίοδον K θεωροῦνται ὡς ἀρχικαὶ τιμαὶ διὰ τὸ δεύτερον μέρος τῆς σειρᾶς ($t=K+1, K+2, \ldots, D$), κατὰ τὸ ὁποῖον τὸ ὑπόδειγμα ἐνεργεῖ προβλέψεις διὰ τοὺς συνδυασμοὺς τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων καὶ ὑπολογίζει τὰ σφάλματα τῶν προβλέψεων. Ὁ συνδυασμὸς δέ, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐλάχιστον μέσον τετραγωνικὸν σφάλμα προβλέψεως, θεωρεῖται ὡς ὁ συνδυασμὸς τῶν «βελτίστων» τιμῶν τῶν παραμέτρων καὶ χρησιμοποιεῖται διὰ τὰς μελλοντικὰς προβλέψεις τῆς ὑπὸ ἐξέτασιν μεταβλητῆς, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι δὲν θὰ ἐπέλθουν οὐσιώδεις μεταβολαὶ εἰς τὸ σύστημα. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, εἶναι ἀναγκαία ἡ εὕρεσις ἑνὸς νέου συνδυασμοῦ τῶν «βελτίστων» τιμῶν τῶν παραμέτρων δι' ἐφαρμογῆς ὁλοκλήρου τῆς ἀνωτέρω διαδικασίας.

6. Ἐφαρμογὴ ὑποδειγμάτων

Ἐκ τῶν προαναφερθέντων ἐκθετικῶν ὑποδειγμάτων ἐφηρμόσθησαν ἐπὶ πραγματικῶν δεδομένων τὸ ὑπόδειγμα μὲ πολλαπλασιαστικοὺς ἐποχικοὺς συντελεστὰς καὶ τὸ ὑπόδειγμα μὲ πολλαπλασιαστικοὺς ἐποχικοὺς συντελεστὰς καὶ τάσιν διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ὑπολογιστοῦ CDC 7600. Ἡ ἐξετασθεῖσα χρονολογικὴ σειρὰ 72 μηνιαίων παρατηρήσεων ἀντιπροσωπεύει πωλήσεις βιομηχανικοῦ τινος προϊόντος εἰς χιλιάδας τόννους. Αἱ πρῶται 24 παρατηρήσεις τῆς σειρᾶς ἐχρησιμοποιήθησαν διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῶν δύο ὑποδειγμάτων δηλ. τοῦ $\bar{Y}$ καὶ S διὰ τὸ ὑπόδειγμα μὲ ἐποχικοὺς συντελεστὰς καὶ τῶν $\bar{Y}$, S καὶ T διὰ τὸ ὑπόδειγμα μὲ ἐποχικοὺς συντελεστὰς καὶ τάσιν. Προβλέψεις τῆς ἑπομένης χρονικῆς περιόδου ($h=1$) ἐγένοντο διὰ τὰς τελευταίας 48 παρατηρήσεις δι' ἀμφότερα τὰ ὑποδείγματα.

Εἰδικώτερον διὰ τὸ πρῶτον ὑπόδειγμα ὑπελογίσθησαν προβλέψεις δι' ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς τῶν τιμῶν τῶν A καὶ B ἀπὸ 0.0 ἕως 1.0 μὲ βῆμα 0.1 καὶ ἐν συνεχείᾳ εὑρέθη ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μέσου τετραγωνικοῦ σφάλματος προβλέψεως δι' ἓν ἕκαστον συνδυασμόν. Αἱ τιμαὶ τῶν σφαλμάτων προβλέψεως δίδονται εἰς τὸν πίνακα 1 ἐκ τοῦ ὁποίου ἐμφαίνεται ὅτι ἡ μικροτέρα τιμὴ τοῦ S_e εἶναι 11.6 καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν συνδυασμὸν τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων $A=0.3$ καὶ $B=0.5$.

Ἡ χρησιμοποίησις βήματος μικροτέρου τοῦ 0.1 διὰ τὰς τιμὰς τῶν A καὶ B ἐνδεχομένως νὰ δώσῃ τιμὴν τοῦ S_e μικροτέραν τοῦ 11.6 πλὴν ὅμως ἡ συνάρτησις τοῦ σφάλματος προβλέψεως εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ «ἀρίστου» συνδυασμοῦ εἶναι λίαν κυρτὴ καὶ ἑπομένως ἡ χρησιμοποίησις ἑνὸς μικροτέρου βήματος δὲν τυγχάνει ἀξία προσπαθείας. Εἰς τὸν αὐτὸν πίνακα σημειοῦνται ἐπίσης διὰ περιφερειῶν αἱ περιοχαὶ τῶν τιμῶν τοῦ S_e μέχρι 11.8 καὶ 12.1.

Διὰ τὸ ἐκθετικὸν ὑπόδειγμα μὲ πολλαπλασιαστικοὺς ἐποχικοὺς συντελεστὰς καὶ ἐκθετικὴν τάσιν ὑπελογίσθησαν κατ' ἀρχὰς αἱ προβλέψεις καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μέσου τετραγωνικοῦ σφάλματος προβλέψεων δι' ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς

Πίναξ 1. Τετραγωνικαὶ Ρίζαι Μέσου Τετραγωνικοῦ Σφάλματος Προβλέψεων Ἐκθετικοῦ Ὑποδείγματος μὲ Πολλαπλασιαστικοὺς Ἐποχικοὺς Συντελεστάς.

B											
1.0	15.9	13.5	12.9	12.6	12.6	12.9	13.3	13.8	14.5	15.6	17.7
0.9	15.6	13.1	12.5	12.2	12.3	12.6	13.1	13.7	14.5	15.7	17.7
0.8	15.4	12.8	12.1	11.9	12.1	12.4	13.0	13.7	14.6	15.8	17.7
0.7	15.5	12.6	11.9	11.7	11.9	12.3	13.0	13.7	14.7	15.9	17.7
0.6	15.6	12.4	11.7	11.7	11.8	12.3	13.0	13.8	14.8	16.0	17.7
0.5	16.0	12.4	11.7	$\boxed{11.6}$	11.9	12.4	13.1	14.0	14.9	16.1	17.7
0.4	16.5	12.4	11.7	11.7	12.0	12.6	13.3	14.2	15.1	16.2	17.7
0.3	17.4	12.5	11.8	11.9	12.3	12.9	13.6	14.4	15.3	16.4	17.7
0.2	18.8	12.7	12.1	12.3	12.7	13.3	13.9	14.7	15.5	16.5	17.7
0.1	21.2	13.1	12.6	12.8	13.3	13.8	14.4	15.1	15.8	16.7	17.7
0.0	24.9	13.7	13.4	13.6	14.0	14.5	14.9	15.5	16.1	16.8	17.7
A	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0,6	0,7	0,8	0,9	1.0

Πίναξ 2. Τετραγωνικαὶ Ρίζαι Μέσου Τετραγωνικοῦ Σφάλματος Προβλέψεων Ἐκθετικοῦ Ὑποδείγματος μὲ Πολλαπλασιαστικοὺς Ἐποχικοὺς Συντελεστὰς καὶ Προσθετικὴν Τάσιν.

B	C 0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	A=0.0						A=0.1					
0.0	73.2	73.2	73.2	73.2	73.2	73.2	22.3	14.1	15.0	15.6	16.7	17.8
0.2	63.0	63.0	63.0	63.0	63.0	63.0	21.3	13.2*	13.8	14.6	16.1	17.6
0.4	55.3	55.3	55.3	55.3	55.3	55.3	20.4	13.1*	13.8	15.4	18.0	20.6
0.6	49.5	49.5	49.5	49.5	49.5	49.5	19.7	13.4	14.7	17.7	22.1	25.8
0.8	45.1	45.1	45.1	45.1	45.1	45.1	19.2	14.1	16.7	21.7	28.9	33.0
1.0	41.8	41.8	41.8	41.8	41.8	41.8	19.0	15.5	20.1	29.9	40.5	43.6
	A=0.2						A=0.3					
0.0	16.5	14.3	15.6	16.9	18.6	21.1	15.2	14.9	16.6	18.5	20.4	21.1
0.2	15.5	12.9*	13.8	14.4	14.9	16.4	14.0	13.2*	14.1	15.3	17.2	18.8
0.4	15.0	12.7*	13.8	14.6	15.6	18.3	13.4	12.6	13.5	14.7	15.6	18.2
0.6	14.8	13.1*	14.9	15.9	17.4	22.6	13.2*	12.8*	14.0	16.3	18.8	19.9
0.8	14.8	14.1	16.7	17.6	19.4	26.3	13.3	13.5	15.0	18.7	23.6	24.7
1.0	15.1	15.6	19.1	20.3	22.0	30.3	13.7	14.5	16.3	21.3	29.6	32.2
	A=0.4						A=0.6					
0.0	14.9	15.5	17.3	18.8	19.6	20.0	15.2	16.2	17.3	18.4	20.0	21.1
0.2	13.7	13.8	15.1	16.7	17.9	18.5	14.4	15.4	16.9	18.1	19.1	20.4
0.4	13.0*	13.0*	14.2	15.8	17.4	18.3	13.8	14.7	16.3	17.7	18.9	20.4
0.6	12.8*	13.0*	14.5	16.3	18.2	19.8	13.4	14.5	16.1	17.8	19.3	21.0
0.8	12.9*	13.5	15.7	18.5	20.5	22.9	13.4	14.6	16.6	18.6	20.3	22.2
1.0	13.2*	14.4	17.6	22.0	24.3	27.2	13.6	15.3	17.7	20.3	22.6	24.3
	A=0.8						A=1.0					
0.0	16.4	17.8	19.4	21.0	23.0	25.2	18.0	19.9	22.2	24.9	28.2	32.4
0.2	15.9	17.3	18.9	20.5	22.5	24.7	18.0	19.9	22.2	24.9	28.2	32.4
0.4	15.4	16.9	18.6	20.3	22.4	24.8	18.0	19.9	22.2	24.9	28.2	32.4
0.6	15.1	16.6	18.4	20.3	22.5	25.2	18.0	19.9	22.2	24.9	28.2	32.4
0.8	14.9	16.4	18.4	20.4	22.9	25.8	18.0	19.9	22.2	24.9	28.2	32.4
1.0	14.7	16.4	18.5	20.7	23.4	26.5	18.0	19.9	22.2	24.9	28.2	32.4

τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων A, B καὶ C ἀπὸ 0.0 ἕως 1.0 μὲ βῆμα 0.2. Πλησίον τῆς εὑρεθείσης περιοχῆς τοῦ ἀρχικοῦ ἀρίστου συνδυασμοῦ (ἐν προκειμένῳ $S_e = 12.7$ εἰς A=0.2, B=0.4 καὶ C=0.2) ἐγένετο δευτέρα ἔρευνα ὑπολογισμῶν διὰ τιμὰς τοῦ A ἴσας πρὸς 0.1 καὶ 0.3 ἡ ὁποία ἔδωσε νέον ἄριστον συνδυασμὸν εἰς A=0.3, B=0.4 καὶ C=0.2 μὲ ἐλάχιστον Se=12,6 (ἔναντι 11.6 τοῦ προηγουμένου ὑποδείγματος). Τὰ ἀποτελέσματα ἀμφοτέρων τῶν ὑπολογιστῶν παρουσιάζονται εἰς τὸν πίνακα 2. Εἰς τὴν δευτέραν ἔρευναν ὑπολογισμῶν δὲν ἐχρησιμοποιήθη βῆμα μικρότερον τοῦ 0.2 διὰ τὸ B καὶ C καθ' ὅτι, ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος, αἱ τιμαί, αἱ ὁποῖαι ἀσκοῦν τὴν μεγαλυτέραν ἐπίδρασιν ἐπὶ τοῦ μέσου τετραγωνικοῦ σφάλματος προβλέψεως, εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς παραμέτρου A.

7. Συμπεράσματα

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἐκτίθενται ὑποδείγματα ἐκθετικῆς ἐξομαλύνσεως μὲ ἐποχικοὺς συντελεστὰς ἢ μὲ ἐποχικοὺς συντελεστὰς καὶ τάσιν, διὰ τῶν ὁποίων καθίσταται δυνατὴ ἡ πρόβλεψις, μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς. Τὰ ὑποδείγματα αὐτὰ ἀπαιτοῦν μικρὸν ἀριθμὸν παρατηρήσεων διὰ τὴν ἐφαρμογήν των, ἡ ὁποία εἶναι εὔκολος καὶ ταχεῖα ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὑπάρχει κατάλληλον πρόγραμμα ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ.

Εἰς τὸ ἐπιλεγόμενον ὑπόδειγμα καθίσταται ἀναγκαῖος ἀφ' ἑνὸς μὲν ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῆς ἐξομαλυνθείσης σειρᾶς, τῶν ἐποχικῶν συντελεστῶν ἢ καὶ τῆς τάσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ εὕρεσις τοῦ «ἀρίστου» συνδυασμοῦ τῶν τιμῶν τῶν παραμέτρων.

Εἰδικώτερον διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀρίστου συνδυασμοῦ γίνεται χρῆσις τῆς τεχνικῆς τῆς προσομοιώσεως, ἡ ὁποία ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν διερεύνησιν ὁλοκλήρου τοῦ παραμετρικοῦ χώρου τοῦ ὑποδείγματος· διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἀποτελεσματικότητος τοῦ ὑποδείγματος ὡς πρὸς τὰς προβλέψεις χρησιμοποιεῖται ὡς κριτήριον τὸ μέσον τετραγωνικὸν σφάλμα προβλέψεως.

Ἄξιον προσοχῆς τυγχάνει ἡ παρουσία μηδενικῶν τιμῶν εἰς τὰς παραμέτρους. Θὰ ἀνέμενε κανεὶς μηδενικὰς τιμὰς εἰς τὰς παραμέτρους ὅταν ἡ τυχαία ἐπίδρασις ἐπὶ τῶν προσφάτων παρατηρήσεων τῶν χρονικῶν σειρῶν εἶναι μεγάλη, μὲ ἀποτέλεσμα ἡ ἀποτελεσματικότης τοῦ ὑποδείγματος ὡς πρὸς τὰς προβλέψεις νὰ εἶναι μικρά. Πλὴν ὅμως θὰ πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι πραγματικαὶ μεταβολαὶ εἰς τὸ σύστημα δύνανται ταχέως νὰ «ἀφομοιωθοῦν» ὑπὸ τοῦ ὑποδείγματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἱκανότητα, ἐὰν κάποια ἀπὸ τὰς παραμέτρους ἀλλάζῃ λόγῳ μεταβολῶν εἰς τὸ σύστημα, νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν τὴν νέαν τιμὴν καὶ νὰ ἐξομαλύνῃ τὰς μεγάλας τυχαίας ἐπιδράσεις ἐπὶ τῶν παρατηρήσεων. Εἰς μίαν χρονολογικὴν σειράν, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάρχει μικρὰ ἢ οὐδεμία ἀλλαγὴ εἰς ὡρισμένας παραμέτρους, αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων θὰ εἶναι πολὺ μικραὶ ἢ μηδενικαὶ καὶ ἐὰν ἀκόμη ἡ τυχαία ἐπίδρασις ἐπὶ τῶν παρατηρήσεων εἶναι μικρά· τοῦτο συμβαίνει διότι δὲν ὑπάρχει λόγος σημαντικῆς ἢ ἐπουσιώδους ἀλλαγῆς εἰς τὰς ἀρχικὰς ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων.

Εἰς χρονολογικὴν ὅμως σειρὰν μὲ μεγάλας μεταβολὰς εἰς τὰς παραμέτρους μία μικρὰ τυχαία ἐπίδρασις θὰ ἔχῃ ὡς ἀποτέλεσμα μεγάλας τιμὰς μὲ μεγαλύτερον βάρος εἰς τὰς τρεχούσας ἐκτιμήσεις, ἐνῶ μιὰ μεγάλη τυχαία ἐπίδρασις θὰ ὁδηγήσῃ εἰς μικροτέρας τιμάς, βλέπε [6].

Τέλος, ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἐκθετικῶν ὑποδειγμάτων προκύπτει ὅτι τὸ σφάλμα προβλέψεως δὲν εἶναι εὐαίσθητον εἰς μικρὰς μεταβολὰς τῶν παραμέτρων· ὡστόσον αἱ ἄρισται τιμαὶ τῶν παραμέτρων ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς φύσεως τῶν παρατηρήσεων τῆς σειρᾶς. Κατὰ συνέπειαν ἐὰν αἱ παράμετροι ἐκτιμηθοῦν ἅπαξ καὶ χρησιμοποιοῦνται διὰ μελλοντικὰς προβλέψεις χωρὶς νὰ γίνεται περιοδικὴ ἐπανεκτίμησίς των, ἐνδεχομένως νὰ προκύψουν ἀμφιβολίαι ὡς πρὸς τὴν ὀρθότητά των, ἰδιαιτέρως ὅταν ἡ χρονολογικὴ σειρὰ ὑπόκειται εἰς ἀλλαγάς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] ECONOMOU, G. S. «Sales forecasting in a sector of the construction industry : A statistical and econometric approach». Unpublished Ph. D. Thesis, University of Manchester, 1973.

[2] HAYM, G. «Evolutionary operations in the world of business». Master's Thesis, New York University, 1969.

[3] LOWE, C. W. «Industrial statistics», vol. 2. Business Books Ltd. London, 1970.

[4] PASCHKE, P. E. «An improved method of steepest ascent for optimizing responses generated dy computer simulation experiment», Paper presented at the 41st Operations Research Society of America Meeting. New Orleans, 1972.

[5] THEIL, H. and WAGE. S. «Some observations on adaptive forecasting» Management Science, vol. 10, no, 2, 1964.

[6] WINTERS, P. R. «Forecasting sales by exponentially weighted moving averages». Management Science, vol. 6, no. 3, 1960.