ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΥΣΤΕΡΗΣΕΩΝ

Τοῦ κ. ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ. ΧΑΡΑΤΣΗ

Καθηγητοῦ Α.Σ.Ο.Ε.Ε.

1. ΓΕΝΙΚΑ

1α. Στατιστικὸς Προσδιορισμὸς Ἀνεξαρτήτων Μεταβλητῶν Συνήθους Ὑποδείγματος

Εἰς τὸν συνήθη τύπον ὑποδείγματος:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t, \qquad t = 1, \ldots T. \qquad (1.1)$$

Ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητὴ Y_t εἶναι τυχαία (random) μεταβλητή, ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ X_t ὑποτίθεται ὡς μὴ τυχαία μεταβλητὴ καὶ σταθερὰ εἰς ἐπαναλαμβανόμενα δείγματα, καὶ τὸ ε_t εἶναι ἡ τυχαία μεταβλητὴ τῶν καταλοίπων. Ἐάν τὸ t παριστᾶ χρονικὰς περιόδους (τρίμηνα, ἔτη, κλπ.), ἡ ἐξίσωσις (1.1) εἶναι ἕνα ὑπόδειγμα χρονολογικῆς σειρᾶς (time-series model), εἰς τὸ ὁποῖον τὸ Y τῆς περιόδου t ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ X τῆς αὐτῆς ἀκριβῶς περιόδου.

Ἡ μεταβλητὴ X_t συνήθως θεωρεῖται ὡς ἐλεγχομένη (controlable) μεταβλητή, ὅπως π.χ. ὅταν παριστᾶ ἔκτασιν χρησιμοποιηθέντων λιπασμάτων ἐπηρεαζόντων τὴν ἀγροτικὴν παραγωγὴν ἢ ἀπόδοσιν Y_t. Ἐνδέχεται ὅμως τὸ X_t νὰ εἶναι μεταβλητὴ φύσει τυχαία (ὅταν π.χ. μετρῇ τὴν βροχόπτωσιν εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα) ἢ θέσει τυχαία (ὅταν π.χ. $X_t = Y_{t-1}$). Ἐὰν τὸ X_t εἶναι τυχαία (στοχαστική, stochastic) μεταβλητή, ὑφίστανται προβλήματα πρὸς διερεύνησιν. Ταῦτα βασικὰ εἶναι τὰ ἑξῆς :

i) X_t = τυχαία μεταβλητὴ ἀλλὰ ἀνεξάρτητος τοῦ ε_t.

Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ἐν προκειμένῳ ἡ ἐπίδρασις ἐπὶ τῶν ἐπιθυμητῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐκτιμητριῶν ἢ ἐκτιμητῶν (estimators) εἶναι ἐπουσιώδης, ἐὰν τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος εἶναι ἀρκούντως μέγα. Πράγματι, διὰ μεγάλα δείγματα ὅπου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν μέθοδον τῆς Μεγίστης Πιθανοφανείας ἢ Πιθανότητος (Maximum Likelihood Method), ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ ἐκτιμήτριαι μεγίστης πιθανοφανείας θὰ εἶναι αἱ αὐταί. Τὸ τυχαῖον τῆς μεταβλητῆς X_t θὰ δώσῃ ἁπλῶς μίαν σταθερὰν ποσότητα εἰς τὴν Λογαριθμικὴν Συνάρτησιν Πιθανοφανείας (L^*).

ii) X_t = τυχαία μεταβλητὴ συσχετιζομένη μὲ τὸ ε_t.

Κλασσικὴ εἶναι ἡ περίπτωσις ὅπου $X_t = Y_{t-1}$ καὶ συγχρόνως τὸ ε_t αὐτοσυσχετίζεται (δηλ. $\Sigma\varepsilon_t\varepsilon_s \neq 0$ διὰ $t \neq s$).

Ἐν προκειμένῳ δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐκτιμήτριαι θὰ εἶναι ἀσυνεπεῖς (inconsistent) καὶ ὡς γνωστὸν ἡ συνέπεια εἶναι βασικὴ ἐπιθυμητὴ ἰδιότης τῶν ἐκτιμητριῶν.

Ἡ αὐτοσυσχέτισις τῶν καταλοίπων θὰ ἐπηρεάσῃ μόνον τὴν ἀποτελεσματικότητα (efficiency) τῶν ἐκτιμητριῶν ἐὰν δὲν ὑφίσταται τὸ Y_{t-1}, μεταξὺ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἐνῷ ἀντιθέτως θὰ ἐπηρεάσῃ καὶ τὴν συνέπειαν τῶν ἐκτιμητριῶν ἐὰν τὸ Y_{t-1} ὑφίσταται μεταξὺ αὐτῶν.

Εἰς περίπτωσιν ὑπάρξεως περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ὑποθέτομεν ὅτι αὗται δὲν συσχετίζονται πλήρως μεταξύ των, τοῦ φαινομένου τῆς συσχετίσεως ταύτης γνωστοῦ ὡς φαινομένου πολυσυγγραμμικότητος (multicollinearity). Ἡ πολυσυγγραμμικότης ἐπηρεάζει μόνον τὴν ἀποτελεσματικότητα τῶν ἐκτιμητριῶν δίδουσα μεροληπτικῶς πρὸς τὰ ἄνω τὰς διακυμάνσεις αὐτῶν.

1β. Οἰκονομετρικὸς Προσδιορισμὸς τῶν Ἀνεξαρτήτων Μεταβλητῶν

Εἰς ἓν ὑπόδειγμα χρονολογικῆς σειρᾶς πλειστάκις γνωρίζομεν ὅτι τὸ Y τῆς περιόδου t ἐπηρεάζεται ὄχι μόνον ἀπὸ τὸ X τῆς αὐτῆς περιόδου t, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὸ X τῶν περιόδων t-1, t-2, . . . , t-m. Ἐν προκειμένῳ τὸ ὑπόδειγμα χρονολογικῆς σειρᾶς :

$$Y_t = a + \beta X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots + \beta_m X_{t-m} + \varepsilon_t \qquad (1.2)$$

ὀνομάζεται ὑπόδειγμα κατανομῆς χρονικῶν ὑστερήσεων (Distributed Lag Model) ὅπου τὰ $\beta, \beta_1, \ldots, \beta_m$ ἐκφράζουν τὸν βαθμὸν ἐπηρεασμοῦ τοῦ X διαφόρων χρονικῶν ὑστερήσεων. Τὰ β ταῦτα θὰ ἠδύνατο νὰ θεωρηθοῦν ὡς σταθμίσεις τῶν X διαφόρων χρονικῶν ὑστερήσεων εἰς τρόπον ὥστε τά :

$$\beta_{m+1} = \beta_{m+2} = \cdots = \beta_n = 0.$$

Ἐν προκειμένῳ :

$$0 < \sum_{i=0}^{m} \beta_i < \infty \;, \quad \beta = \beta_0, \qquad (1.3)$$

αἱ σταθμίσεις (w)

$$w_i = \frac{\beta_i}{\Sigma\beta_i} \;, \; i = 0, 1, \ldots, m, \; \Sigma w_i = 1 \qquad (1.4)$$

καὶ ἡ μέση χρονικὴ ὑστέρησις (Average Lag, AL) :

$$AL = \frac{\Sigma i\beta_i}{\Sigma\beta_i} \;, \quad i = 0, 1, \ldots, m. \qquad (1.5)$$

Κλασσικὸν οἰκονομικὸν παράδειγμα εἶναι ἡ συνάρτησις καταναλώσεως τῶν οἰκοκυριῶν, ὅπου τυχὸν μηνιαῖαι αὐξήσεις τῶν εἰσοδημάτων κατανέμονται ὡς αὐξήσεις τῆς καταναλώσεως εἰς ἀριθμὸν μηνῶν. Ἡ προσαρμογὴ ἐν προκειμένῳ πρὸς τὸ νέον εἰσοδηματικὸν ἐπίπεδον ἀπαιτεῖ ὀλίγους μῆνας. Οὕτως, ἂν τὸν πρῶτον μῆνα δαπανᾶται τὸ 40% τῆς αὐξήσεως, τὸν δεύτερον τὸ 30% καὶ τὸν τρίτον τὸ 20%, τότε :

$$Y_t = \cdot 4\, X_t + \cdot 3 X_{t-1} + \cdot 2\, X_{t-2} + (\alpha + \varepsilon_t). \qquad (1.6)$$

Ἕτερον τυπικὸν παράδειγμα εἶναι ἡ συνάρτησις ἐπενδύσεων (τῶν ἐπιχειρήσεων), ὅπου αἱ δαπάναι ἐπενδύσεων (Y) τοῦ τρέχοντος τριμήνου ἐπηρεάζονται ἀπὸ τὰ κέρδη ἢ πωλήσεις κλπ. (X) ἀριθμοῦ τριμήνων, ὅπως εἰς τὰ ἀποτελέσματα τοῦ Almon (1965) διὰ τὰς δαπάνας ἐπενδύσεων εἰς τὴν βιομηχανίαν τῶν U.S.A. :

$$\begin{aligned} Y_t = {} & (d_1 D_{1t} + d_2 D_{2t} + d_3 D_{3t} + d_4 D_{4t}) \\ & + \underset{(\cdot 023)}{\cdot 048\, X_t} + \underset{(\cdot 016)}{\cdot 099\, X_{t-1}} + \underset{(\cdot 013)}{\cdot 141\, X_{t-2}} + \underset{(\cdot 023)}{\cdot 165\, X_{t-3}} \qquad (1.7) \\ & + \underset{(\cdot 023)}{\cdot 167\, X_{t-4}} + \underset{(\cdot 013)}{\cdot 146\, X_{t-5}} + \underset{(\cdot 016)}{\cdot 105\, X_{t-6}} + \underset{(\cdot 023)}{\cdot 053\, X_{t-7}} + \varepsilon_t . \end{aligned}$$

Εἰς τὰ ἄνω ἀποτελέσματα τὰ D_{jt}, $j = 1, \ldots, 4$, εἶναι ψευδομεταβληταὶ (Dummy Variables) τῶν διαφόρων τριμήνων τῶν ἐτῶν 1953 - 1961 καὶ d_j, $j = 1, \ldots, 4$, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ταύτας ἐκτιμήτριαι. Ἡ ἐπίδρασις ὅλων τῶν $X_t, X_{t-1}, \ldots, X_{t-7}$, εἶναι στατιστικῶς σημαντική, χαρακτηριζομένη ὡς αὔξουσα μέχρι καὶ τοῦ X_{t-4} καὶ φθίνουσα μετὰ ταῦτα.

Τὰ ὑποδείγματα (1.6) καὶ (1.7) ἀποτελοῦν δύο χαρακτηριστικὰς ὁμάδας ὑποδειγμάτων χρονικῶν ὑστερήσεων:

I) Ὁμάδα ὑποδειγμάτων κατανομῶν Γεωμετρικῶν Χρονικῶν Ὑστερήσεων (Geometric Lag Distributed Models), ὅπου τὰ β (ἢ w) βαίνουν συνεχῶς φθίνοντα, ὡς εἰς τὸ ὑπόδειγμα (1.6).

II) Ὁμάδα ὑποδειγμάτων κατανομῶν Χρονικῶν Ὑστερήσεων Λ (Inverted V-lag Distributed Models), ὅπου τὰ β (ἢ w) αὐξάνουν ἀρχικῶς καὶ φθίνουν ἐν συνεχείᾳ, ὡς εἰς τὸ ὑπόδειγμα (1.7).

1γ. Ὑποδείγματα Ἀριθμοῦ Ἀνεξαρτήτων Μεταβλητῶν

Ἐὰν τὸ ὑπόδειγμα (1.1) εἶχε δύο ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς X_{1t} καὶ X_{2t}, ἐχούσας ἰδίαν κατανομὴν χρονικῶν ὑστερήσεων, τότε ἡ ἐξίσωσις θὰ ἐγράφετο ὡς ἑξῆς :

$$Y_t = \alpha + \beta X_{1t} + \beta_1 X_{1(t-1)} + \beta_2 X_{1(t-2)} + \ldots + \beta_m X_{1(t-m)}$$
$$+ \beta' X_{2t} + \beta'_1 X_{2(t-1)} + \beta'_2 X_{2(t-2)} + \ldots + \beta'_m X_{2(t-m)} + \varepsilon_t. \quad (1.8)$$

1δ. Προβλήματα οἰκονομετρικῆς ἐκτιμήσεως

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ ἐκτίμησις τῶν ὑποδειγμάτων (1.2) ἢ (1.8) παρουσιάζει τὰ ἑξῆς προβλήματα :

i) Ἀπαιτεῖται μεγάλος ἀριθμὸς παρατηρήσεων, λόγω τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ τῶν παραμέτρων β.

ii) Ἡ ὑφισταμένη πολυσυγγραμμικότης τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν θὰ δώσῃ μεροληπτικὰ πρὸς τὰ ἄνω τυπικὰ σφάλματα.

iii) Πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῇ κατάλληλος μέθοδος οἰκονομετρικῆς ἐκτιμήσεως, ὥστε ἡ χρησιμοποιηθησομένη κατανομὴ χρονικῶν ὑστερήσεων νὰ εἶναι πλησιέστερον τῆς πραγματικῆς.

2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΣ

2α. Μετασχηματισμὸς τοῦ Koyck

Ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ Koyck (1954) εἶναι ἕνας βασικὸς μετασχηματισμὸς τῶν ἀναφερθεισῶν ἀνωτέρω δύο ὁμάδων ὑποδειγμάτων, ὁ ὁποῖος παρέχει τὴν εὐχέρειαν μετασχηματισμοῦ τῶν ὑποδειγμάτων τούτων, εἰς τρόπον ὥστε ἡ οἰκονομετρικὴ ἐκτίμησις νὰ καθίσταται περισσότερον εὐχερής.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις :

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t. \quad (1.9)$$

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\beta_i = \beta\lambda^j , \qquad i, j = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad (1.10)$$

ὅπου $0 \leqslant \lambda < 1$.

Ἐν προκειμένῳ $\beta_0 = \beta$, $\beta_1 = \beta\lambda$, $\beta_2 = \beta\lambda^2$, κδκ.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1.9) λαμβάνομεν :

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \beta\lambda X_{t-1} + \beta\lambda^2 X_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t . \quad (1.10\alpha)$$

Ἡ σχέσις αὕτη θὰ ἰσχύη καὶ διὰ τὴν προηγουμένην της περίοδον Y_{t-1} :

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta X_{t-1} + \beta\lambda X_{t-2} + \beta\lambda^2 X_{t-3} + \ldots + \varepsilon_t . \quad (1.11)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ λ λαμβάνομεν :

$$\lambda Y_{t-1} = \alpha\lambda + \beta\lambda X_{t-1} + \beta\lambda^2 X_{t-2} + \ldots + \lambda \varepsilon_{t-1}, \quad (1.12)$$

ἥτις ἀφαιρουμένη ἐκ τῆς (1.10) δίδει :

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = \alpha(1\text{-}\lambda) + \beta X_t + (\varepsilon_t + \lambda \varepsilon_{t-1})$$

ἢ

$$Y_t = \alpha(1\text{-}\lambda) + \beta X_t + \lambda Y_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t = \varepsilon_t\text{-}\lambda \varepsilon_{t-1}. \qquad (1.13)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μετασχηματισμοῦ τοῦ Koyck δύναται νὰ ἐκτιμηθῆ, ὅπου ὁ ὅρος

$$\alpha(1-\lambda) = \alpha^*$$

θὰ εἶναι ἡ σταθερὰ τῆς ἐξισώσεως. Ἐκ τῶν τριῶν παραμέτρων

$$\alpha^*, \quad \beta, \quad \lambda \qquad (1.14)$$

θὰ ἔδει τὰ ληφθοῦν τὰ ἀρχικὰ

$$\alpha \;, \quad \beta, \quad \lambda. \qquad (1.14\alpha)$$

Αἱ (1.14) καὶ (1.14α) ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν παραμέτρων.

2β. Μέθοδοι Οἰκονομετρικῆς Ἐκτιμήσεως τοῦ Μετασχηματισμοῦ τοῦ Koyck (1.13). Μέθοδος Ἐλαχίστων Τετραγώνων

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1.13) ἡ φερομένη ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ Y_{t-1} εἶναι ἡ τυχαία μεταβλητὴ Y_t μὲ μίαν χρονικὴν ὑστέρησιν, ἐνῷ συγχρόνως τὰ κατάλοιπα η_t (συνήθως) συσχετίζονται μὲ ταύτην, ἀναφερόμενα εἰς $t = 1, \ldots, T$ χρονικὰς περιόδους.

Ἐν προκειμένῳ :

i) Τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ Y_{t-1} εἶναι τυχαία μεταβλητή, θὰ ἔχῃ σχετικῶς περιωρισμένην ἐπίδρασιν ἐὰν τὸ T εἶναι ἀρκούντως μέγα, ὡς ἐλέχθη καὶ **ἀνωτέρω.**

ii) Τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ η_t συσχετίζεται μὲ τὸ Y_{t-1}, θὰ δώσῃ συνδυακύμανσιν :

$$\begin{aligned} E(Y_{t-1}\eta_t) &= E[Y_{t-1}(\varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1})] \\ &= E[(F_{t-1} + \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1})], \end{aligned}$$

ὅπου τὸ F_t εἶναι τὸ συστηματικὸν μέρος, ὅπερ δὲν συσχετίζεται μὲ τὸ ε_t καὶ οὕτω :

$$E(Y_{t-1}\eta_t) = E[\varepsilon_{t-1}(\varepsilon_t\text{-}\lambda\varepsilon_{t-1})] = -\lambda \varepsilon^2_{t-1} = \lambda \sigma_\varepsilon^{\,2}, \qquad (1.15)$$

ὅπου

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_s)_{t \neq s} = 0. \qquad (1.15\alpha)$$

Τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα δεικνύουν ὅτι ἂν ἐκτιμήσωμεν τὸ ὑπόδειγμα (1.13) μὲ τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων (Least Squares Method), αἱ ἐκτιμήτριαι ἐλαχίστων τετραγώνων :

$$b = (X'X)^{-1} X'y \qquad (1.16)$$

θὰ εἶναι ἀσυνεπεῖς. Εἰς τὴν (1.16):

$$b=\begin{bmatrix}\alpha^*\\ \beta\\ \lambda\end{bmatrix},\qquad y=\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_T\end{bmatrix},\qquad X=\begin{bmatrix}1 & X_1 & Y_0\\ 1 & X_2 & Y_1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_T & Y_{T-1}\end{bmatrix}. \tag{1.16α}$$

Ἡ (1.16) γράφεται:

$$b=(X'X)^{-1}X'(XB+\eta)=\beta+(X'X)^{-1}X'\eta,\ \eta=(\eta_1,\ldots,\eta_T)', \tag{1.17}$$

καὶ ἡ (1.15), ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν (1.17) δίδουν:

$$\underset{T\to\infty}{\text{Plim}}\,(b)\neq\beta,\ \text{δηλαδὴ}\ b=\text{ἀσυνεπὴς ἐκτιμήτρια.}$$

iii) Ἐὰν τὸ $\varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+\zeta_t$, καὶ $\rho=\lambda$:

Ἡ σχέσις (1.15α) προϋποθέτει ὅτι τὸ ε_t δὲν αὐτοσυσχετίζεται (δηλ. $\rho=0$). Ἐὰν ὅμως ἡ αὐτοσυσχέτισις τοῦ ε_t εἶναι ἀκριβῶς πρώτου βαθμοῦ, δηλ.

$$\varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+\zeta_t,\ |\rho|<1, \tag{1.18}$$

ὥστε τὰ νέα κατάλοιπα ζ_t συσχετίζονται τόσον μεταξύ των ὅσον καὶ μὲ τὸ Y_{t-1} καὶ συγχρόνως

$$\rho=\lambda, \tag{1.19}$$

τότε εἰς τὴν (1.13):

$$\eta_t=\varepsilon_t-\lambda\,\varepsilon_{t-1}=\varepsilon_t-\rho\varepsilon_{t-1}=\zeta_t. \tag{1.20}$$

Ἐν προκειμένῳ τὸ $\eta_t=\zeta_t$ δὲν θὰ συσχετίζεται μὲ τὸ Y_{t-1} καὶ αἱ ἐκτιμήτριαι ἐλαχίστων τετραγώνων δὲν θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀσυνεπεῖς (1).

---

1. Σημείωσις ἐπὶ τῆς αὐτοσυσχετίσεως:

Ἔστω $\quad Y_t=\alpha+\beta X_t+\beta_1 X_{t-1}+\ldots+\varepsilon_t,$

ὅπου $\quad \varepsilon_t=\rho\varepsilon_{t-1}+\zeta_t\ $ καὶ $\rho=\lambda$.

Τότε $\quad \rho Y_{t-1}=\alpha\rho+\beta\rho X_{t-1}+\beta_1\rho X_{t-2}+\ldots+\rho\varepsilon_{t-1},$

ὅπου $\quad \beta_1=\beta\lambda=\beta\rho.$

Δι' ἀφαιρέσεως λαμβάνομεν:

$$Y_t-\rho Y_{t-1}=\alpha(1-\rho)+\beta X_t+\ldots+(\varepsilon_t-\rho\varepsilon_{t-1}),$$

ἢ

$$Y_t=\alpha(1-\rho)+\beta X_t+\rho Y_{t-1}+\zeta_t,\quad \rho=\lambda. \tag{1.21}$$

Εἰς τὰ ἀνωτέρω, τὸ ε_t συσχετίζεται μὲ τὸ Y_{t-1}, ἀλλὰ τὸ $\zeta_t=\varepsilon_t-\rho\varepsilon_{t-1}$ εἶναι ἀνεξάρτητον.

2γ. Μέθοδοι Οἰκονομετρικῆς Ἐκτιμήσεως τοῦ Μετασχηματισμοῦ τοῦ Koyck (1.13): Μέθοδος Τεχνητῶν Μεταβλητῶν

Τὸ βασικὸν πρόβλημα ἐκτιμήσεως τῆς ἐξισώσεως (1.13) κατὰ τρόπον ἄμεσον εἶναι ὅτι αἱ μεταβληταὶ Y_{t-1} καὶ η_t συσχετίζονται. Τοῦτο δύναται νὰ ἀντιμετωπισθῆ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς Μεθόδου Τεχνητῶν Μεταβλητῶν (Instrumental Variables Method).

Ἡ μέθοδος αὕτη στηρίζεται εἰς τὴν εὕρεσιν καὶ χρησιμοποίησιν τεχνητῶν τινων μεταβλητῶν (Z) αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ ἑξῆς χαρακτηριστικά :

i) Συσχετίζονται μὲ τὰς μεταβλητὰς τύπου Y_{t-1} (αἱ ὁποῖαι συσχετίζονται μὲ τὰ κατάλοιπα η_t) καὶ συγχρόνως

ii) Δὲν συσχετίζονται μὲ τὰ κατάλοιπα (η_t)·

Ἡ δυσκολία τῆς μεθόδου ἔγκειται ἀκριβῶς εἰς τὴν ἐξεύρεσιν τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν Z.

Εἰς τὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν τῆς ἐξισώσεως (1.13), θὰ ἠδυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὴν Y_{t-1} τὴν μεταβλητὴν X_{t-1}. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ X_{t-1} συσχετίζεται μὲ τὴν Y_{t-1} (ἐφ' ὅσον εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἔχομεν τὰς μεταβλητὰς Y καὶ X) καὶ συγχρόνως αὕτη δὲν συσχετίζεται μὲ τὸ η_t (ἀφοῦ ἡ ἄλλη ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ X_t δὲν συσχετίζεται μὲ τὸ η_t).

Αἱ ἐκτιμήτριαι τῆς μεθόδου τεχνητῶν μεταβλητῶν ($\widehat{b}$) δίδονται ὑπὸ τῆς ἀκολούθου σχέσεως :

$$\widehat{b} = (Z'X)^{-1} Z'y, \tag{1.22}$$

ὅπου X καὶ y ὁρίζονται ὑπὸ τῆς (1.16α), $\widehat{b} = (\alpha^*,\ \beta,\ \lambda)'$, καὶ

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Z_1 \\ 1 & X_2 & Z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_T & Z_T \end{bmatrix}, \text{ ὅπου } \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{T-1} \end{bmatrix}. \tag{1.22α}$$

Ἐν προκειμένῳ $Z = (Z_0,\ Z_1,\ Z_2)$, ὅπου $Z_0 = I_T$, δηλ. μοναδιαῖον διάνυσμα ἐκ T στοιχείων, $Z_{1t} = X_t$ καὶ $Z_{2t} = X_{t-1}$ δι' ὅλα τὰ $t = 1, \ldots, T$.

Τὰ τυπικὰ σφάλματα τῶν $\widehat{b}$, δύνανται νὰ ληφθοῦν μόνον ἐκ τῆς ἀσυμπτωτικῆς διακυμάνσεως αὐτῶν :

$$\text{As.V}\,(\widehat{b}) = s^{*2}\,(Z'X)^{-1}\,Z'Z\,(X'Z)^{-1}, \tag{1.23}$$

ὅπου $s^{*2} = \dfrac{1}{T-n}\,\Sigma\,\eta^2_t$, $n = 3$ ὁ ἀριθμὸς τῶν παραμέτρων.

Τὸ η_t παριστᾶ τὰ κατάλοιπα τῆς ἐξισώσεως (1.13). Ἤτοι :

$$\eta_t = Y_t - \widehat{\alpha}^* - \widehat{\beta}\, X_t - \widehat{\lambda}\, Y_{t-1}, \quad t = 1, \ldots, T,$$

ὅπου τὰ $\widehat{\alpha}^*$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\lambda}$ εἶναι αἱ ἐκτιμήσεις τῆς μεθόδου τεχνητῶν μεταβλητῶν. Ἐκ τούτων δύνανται νὰ προκύψουν αἱ ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων τῆς (1.13) α, β, λ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἰσάριθμοι (δηλ. ὑπάρχει ἀκριβὴς ταυτοποίησις exact identification). Τὰ τυπικὰ σφάλματα τῶν παραμέτρων, αἱ ὁποῖαι εἶναι συναρτήσεις ἄλλων τοιούτων, δύνανται νὰ ἐκτιμηθοῦν μόνον κατὰ προσέγγισιν πρώτου βαθμοῦ τοῦ σχετικοῦ ἀναπτύγματος εἰς σειρὰν τοῦ Taylor (1).

2δ. Μέθοδοι Οἰκονομετρικῆς Ἐκτιμήσεως τοῦ Μετασχηματισμοῦ τοῦ Koyck (1.13): Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφανείας

Ἐν προκειμένῳ τὸ ὑπόδειγμα (1.13) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$(Y_t - \varepsilon_t) = \alpha\,(1 - \lambda) + \beta X_t + \lambda\,(Y_{t-1} - \varepsilon_{t-1}), \qquad (1.24)$$

ἢ

$$E\,(Y_t) = \alpha\,(1 - \lambda) + \beta X_t + \lambda\, E\,(Y_{t-1}). \quad E\,(Y_t) = Y_t - \varepsilon_t. \qquad (1.24\alpha)$$

Ἡ σχέσις αὕτη διὰ τὰς προηγουμένας της περιόδους δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς :

$$E\,(Y_{t-1}) = \alpha\,(1 - \lambda) + \beta X_{t-1} + \lambda\, E\,(Y_{t-2}) \qquad (1.24\beta)$$

$$E\,(Y_{t-2}) = \alpha\,(1 - \lambda) + \beta\, X_{t-2} + \lambda\, E\,(Y_{t-3}) \qquad (1.24\gamma)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$E\,(Y_1) = \alpha\,(1 - \lambda) + \beta\, X_1 + \lambda\, E\,(Y_0). \qquad (1.24\delta)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ $E\,(Y_{t-1})$ τῆς (1.24α) ὑπὸ τῆς (1.24β), ταύτης τὸ $E(Y_{t-2})$ ὑπὸ τῆς (1.24γ), κ.ὁ.κ. εὑρίσκομεν :

$$E\,(Y_t) = \alpha\,(1 - \lambda)\,(1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots \lambda^{t-1})$$

$$+ \beta\,(X_t + \lambda\, X_{t-1} + \lambda^2\, X_{t-2} + \ldots + \lambda^{t-1}\, X_1) + \lambda^t\, E\,(Y_0). \qquad (1.25)$$

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν (1.25) ὡς ἑξῆς :

$$Y_t - \varepsilon_t = \alpha - \alpha\,\lambda^t + \beta\, Z_t^{(\lambda)} + \theta_0\,\lambda^t, \qquad (1.26)$$

ὅπου

$$Z_t^{(\lambda)} = X_t + \lambda\, X_{t-1} + \lambda^2\, X_{t-2} + \ldots + \lambda^{t-1}\, X_1\,, \quad \text{καὶ} \quad \text{ὅπου}$$

1. Ἴδε καὶ Ε. Χαρατσῆ (1972). «Ἡ μεροληψία τῶν ἐκτιμήσεων Πολλαπλασιαστικῶν Ὑποδειγμάτων», σελ. 69.

$$\theta_0 = E(Y_0) \text{ λαμβάνεται ὡς σταθερά τις παράμετρος.}$$

Ἄλλως :

$$Y_t = \alpha + \beta Z_t^{(\lambda)} + (\theta_0 - \alpha)\lambda^t + \varepsilon_t, \quad 0 \leqslant \lambda < 1. \qquad (1.27)$$

Ἐὰν τὸ λ ἦτο γνωστόν, τότε βασικὰ θὰ εἴχωμεν μίαν γραμμικὴν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς $Z_t^{(\lambda)}$ καὶ $(\lambda^t)_t$, ἥτις ἠδύνατο νὰ ἐκτιμηθῇ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ λ εἶναι ἄγνωστον, δυνάμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν (1.27) διὰ τῆς μεθόδου τῆς Μεγίστης Πιθανοφανείας, μεγιστοποιοῦντες ὡς πρὸς τὰς παραμέτρους τὴν Λογαριθμικὴν Συνάρτησιν Πιθανοφανείας :

$$L^* = -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{T}{2}\log \sigma_\varepsilon{}^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2, \qquad (1.28)$$

ὅπου

$$\varepsilon_t = Y_t - \alpha - \beta Z_t^{(\lambda)} - (\theta_0 - \alpha)(\lambda^t)_t. \qquad (1.29)$$

Ὡς γνωστόν, ἡ μεγιστοποίησις διὰ δεδομένας τιμὰς τοῦ $0 \leqslant \lambda < 1$, ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς δεσμευμένης (ἢ περιωρισμένης) λογαριθμικῆς συναρτήσεως πιθανοφανείας L^*_λ ὡς πρὸς $(\alpha, \beta, \theta_0, \sigma^2)$, καὶ ταύτης ὡς πρὸς λ.

Ἐὰν ὅμως τὸ ε_t αὐτοσυσχετίζεται ὡς $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \zeta_t$, τότε ἡ μεγιστοποίησις τοῦ $L^*_{\lambda,\rho}$ θὰ πρέπει νὰ γίνῃ διὰ ζεύγη τιμῶν ἀμφοτέρων τῶν λ καὶ ρ.

Εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους 3 καὶ 4 διερευνῶνται ὡρισμέναι οἰκονομικαὶ ἐφαρμογαὶ τῶν ἀναφερθεισῶν ὁμάδων ὑποδειγμάτων Ι καὶ ΙΙ ἀντιστοίχως.

3. ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΥΣΤΕΡΗΣΕΩΝ

3α. Ὑποδείγματα Κατανομῶν Γεωμετρικῶν Χρονικῶν Ὑστερήσεων: Ὑποδείγματα Προσαρμογῆς πρὸς Ἀναμενόμενον Μέγεθος (Adaptive Expectation Models)

Πλειστάκις εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητὴ Y_t συσχετίζεται ὄχι μὲ τὴν πραγματικὴν (τρέχουσαν) τιμὴν τοῦ X_t, ἀλλὰ μὲ τὴν ἀναμενομένην (expected) τοιαύτην (X_t^*). Οὕτω διὰ τὴν (1.1) γράφομεν :

$$Y_t = \alpha + \beta X_t^* + \varepsilon_t. \qquad (1.30)$$

Κλασσικὸν εἶναι τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Nerlove (1958) διὰ τὴν συνάρτησιν Προσφορᾶς Γεωργικῶν Προϊόντων (Agricultural Supply Function), ὅπου :

Y_t = Καλλιεργουμένη ἔκτασις ὑπὸ τῶν γεωργῶν διὰ συγκεκριμένον γεωργικὸν προϊὸν καὶ

$X_t^* = P_t^*$ = 'Αναμενομένη Κανονικὴ Τιμὴ ὑπὸ τῶν γεωργῶν διὰ τὸ ὡς ἄνω γεωργικὸν προϊόν.

'Εν προκειμένῳ :

$$Y_t = \alpha + \beta P_t^* + \varepsilon_t . \qquad (1.30\alpha)$$

Βάσει τῆς χρησιμοποιηθείσης ὑπὸ τοῦ Nerlove ἐξισώσεως προσαρμογῆς :

$$P_t^* - P^*_{t-1} = \gamma^* (P_{t-1} - P^*_{t-1}), \qquad 0 < \gamma^* \leqslant 1. \qquad (1.31)$$

Τὸ γ^* ὀνομάζεται Λόγος 'Αναπροσαρμογῆς (Rate of Adjustment), καὶ δεικνύει τὸν βαθμὸν ἐπηρεασμοῦ τῆς ἀποκλίσεως μεταξὺ πραγματικῆς καὶ ἀναμενομένης τιμῆς τῆς προηγουμένης περιόδου εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀναμενομένης τιμῆς τῆς τρεχούσης περιόδου :

$$P_t^* = P^*_{t-1} + \gamma^* (P_{t-1} - P^*_{t-1}), \qquad (1.31\alpha)$$

ἤ

$$P_t^* = \gamma^* P_{t-1} + (1 - \gamma^*) P^*_{t-1}, \qquad (1.31\beta)$$

ὅπου τὸ γ^* λαμβάνει θέσιν συντελεστοῦ σταθμίσεως.

'Η σχέσις (1.31β) θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν προηγουμένην της περίοδον, δηλ.

$$P^*_{t-1} = \gamma^* P_{t-2} + (1 - \gamma^*) P^*_{t-2}, \qquad (1.31\gamma)$$

ἥτις ἀντικαθισταμένη εἰς τὴν (1.31β) δίδει :

$$P_t^* = \gamma^* P_{t-1} + (1 - \gamma^*) [\gamma^* P_{t-2} + (1 - \gamma^*) P^*_{t-2}]. \qquad (1.32)$$

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ

$$P^*_{t-2} = \gamma^* P_{t-3} + (1 - \gamma^*) P^*_{t-3}.$$

Οὕτως ἔχομεν :

$$P_t^* = \gamma^* P_{t-1} + \gamma^* (1 - \gamma^*) P_{t-2} + \gamma^* (1 - \gamma^*)^2 P_{t-3} + \dots \qquad (1.32\alpha)$$

'Αντικαθιστῶντες ταύτην εἰς τὴν (1.30α) λαμβάνομεν :

$$Y_t = \alpha + \beta [\gamma^* P_{t-1} + \gamma^* (1 - \gamma^*) P_{t-2} + \gamma^* (1 - \gamma^*)^2 P_{t-3} + \dots] + \varepsilon_t . \qquad (1.33)$$

'Η ἐντὸς τῆς ἀγκύλης ποσότης εἶναι πράγματι μία φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος ὅρου $(1 - \gamma^*)$.

'Εφαρμόζοντες ἐν προκειμένῳ τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Koyck κατὰ τὰ ἀναφερθέντα ἀνωτέρω διὰ τὴν ἐξίσωσιν (1.9) ἔχομεν :

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta [\gamma^* P_{t-2} + \gamma^* (1 - \gamma^*) P_{t-3} + \gamma^* (1 - \gamma^*)^2 P_{t-4} + \dots] + \varepsilon_t , \qquad (1.34)$$

ἤ

$$(1 - \gamma^*) Y_{t-1} = \alpha (1 - \gamma^*) + \beta [\gamma^* (1 - \gamma^*) P_{t-2} + \gamma^* (1 - \gamma^*)^2 P_{t-3} + \dots] + (1 - \gamma^*) \varepsilon_t . \qquad (1.34\alpha)$$

Δι' ἀφαιρέσεως ταύτης ἐκ τῆς (1.33) λαμβάνομεν :

$$Y_t - (1-\gamma^*)\, Y_{t-1} = \alpha\gamma^* + \beta\gamma^* P_{t-1} + [\varepsilon_t - (1-\gamma^*)\, \varepsilon_{t-1}], \qquad (1.35)$$

ἢ

$$Y_t = \alpha\gamma^* + \beta\gamma^* P_{t-1} + (1-\gamma^*)\, Y_{t-1} + \eta_t,\ \eta_t = \varepsilon_t - (1-\gamma^*)\, \varepsilon_{t-1}. \qquad (1.36)$$

Αὕτη εἶναι παρομοία τῆς (1.13), ἔχουσα ἐπίσης τρεῖς ἐκτιμητέας παραμέτρους :

$$\alpha^* = \alpha\gamma^*, \qquad \beta^* = \beta\gamma^*, \qquad \text{καὶ} \quad \lambda = (1-\gamma^*). \qquad (1.37)$$

Τὰ ἀναφερθέντα ἀνωτέρω εἰς τὴν παράγραφον 2 διὰ τὰς μεθόδους οἰκονομετρικῆς ἐκτιμήσεως τῆς (1.13), ἰσχύουν ἀναλόγως καὶ διὰ τὴν ἐκτίμησιν τοῦ ὑποδείγματος Προσαρμογῆς πρὸς Ἀναμενόμενον Μέγεθος (1.37).

Ἑτέρα κλασσικὴ οἰκονομικὴ ἐφαρμογὴ τοῦ ὡς ἄνω τύπου ὑποδείγματος εἶναι ἡ Συνάρτησις Καταναλώσεως :

$$C_t = \beta Y_t^* + \varepsilon_t,$$

ὅπου

C_t = Μετρηθεῖσα Πραγματικὴ Κατανάλωσις (Measured Real Consumption) καὶ

Y_t^* = Κανονικὸν ἢ Μόνιμον Εἰσόδημα (Normal or Permanent Income).

Ἐνταῦθα

$$Y^*_t - Y^*_{t-1} = \gamma^* (Y_t - Y^*_{t-1}).$$

Οἱ Zellner καὶ Geisel (1962) ἔχουν ἐκτιμήσει τὸ ὡς ἄνω ὑπόδειγμα διὰ τὰς USA (1947—1960) μὲ τὴν μέθοδον τῆς Μεγίστης Πιθανοφανείας, ἡ ὁποία περιεγράφη ἀνωτέρω (§ 2δ).

3β. Ὑποδείγματα Κατανομῶν Γεωμετρικῶν Χρονικῶν Ὑστερήσεων : Ὑποδείγματα Μερικῆς Ἀναπροσαρμογῆς (Partial Adjustment or Habit Persistence Models)

Διαζευκτικὸς οἰκονομικὸς προσδιορισμὸς τοῦ ὑποδείγματος (1.1) εἶναι ἐπίσης ὁ ἑξῆς :

$$Y_t^* = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t, \qquad (1.38)$$

ὅπου

Y_t^* εἶναι οὐχὶ τὸ πραγματικὸν μέγεθος (Y_t) τῆς τρεχούσης περιόδου t, ἀλλὰ τὸ ἀναμενόμενον ἢ μόνιμον μέγεθος τοῦ Y_t κατὰ τὴν περίοδον t.

Ὁ Nerlove, διὰ τὴν ἀναφερθεῖσαν ἀνωτέρω συνάρτησιν, ἐχρησιμοποίησε τὸν ὁρισμόν :

Y_t^* = Ἔκτασις μακροχρονίου ἰσορροπίας, διὰ τὴν καλλιέργειαν γεωργικοῦ τινος προϊόντός, καὶ

$X_t = P_{t-1}$ = Τιμαὶ τοῦ γεωργικοῦ προϊόντος τῆς προηγουμένης περιόδου.

Ἐν προκειμένῳ :

$$Y^*_t = \alpha + \beta P_{t-1} + \varepsilon_t . \qquad (1.38\alpha)$$

Βάσει τῆς χρησιμοποιηθείσης ὑπὸ τοῦ Nerlove ἐξισώσεως ἀναπροσαρμογῆς :

$$Y_t - Y_{t-1} = \gamma (Y^*_t - Y_{t-1}), \quad 0 < \gamma \leqslant 1 , \qquad (1.39)$$

κατὰ τὴν ὁποίαν

$$Y_t = Y_{t-1} + \gamma (Y_t^* - Y_{t-1}), \qquad (1.39\alpha)$$

τὸ

$$Y_t = \gamma Y_t^* + (1 - \gamma) Y_{t-1} . \qquad (1.39\beta)$$

Τὸ γ ἔχει καὶ ἐν προκειμένῳ θέσιν συντελεστοῦ σταθμίσεως.

Ἀντικαθιστῶντες ταύτην εἰς τὴν (1.38α) ἔχομεν :

$$Y_t = \gamma (\alpha + \beta P_{t-1} + \varepsilon_t) + (1 - \gamma) Y_{t-1} ,$$

ἢ

$$Y_t = \alpha\gamma + \beta\gamma P_{t-1} + (1 - \gamma) Y_{t-1} + \xi_t , \quad \xi_t = \gamma \varepsilon_t . \qquad (1.40)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὁμοιάζει πρὸς τὴν (1.36) ἐκτὸς ἀπὸ τὸν ὅρον τῶν καταλοίπων, ὁ ὁποῖος δημιουργεῖ ὀλιγώτερα προβλήματα διὰ τὴν ἐπιλογὴν οἰκονομετρικῆς μεθόδου ἐκτιμήσεως. Διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῆς (1.40) δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν μέθοδον ἐλαχίστων τετραγώνων, χωρὶς νὰ ἀπαιτῆται ἡ προϋπόθεσις $\rho = \lambda$ τὴν ὁποίαν εἴχομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1.13).

Ἐὰν τὸ ξ_t αὐτοσυσχετίζεται μὲ σχέσιν π.χ. πρώτου βαθμοῦ :

$$\xi_t = \rho \xi_t + \zeta_t , \qquad (1.41)$$

ὅπου ζ_t παριστᾶ τὰ ἀνεξάρτητα τυχαῖα κατάλοιπα, τότε ἡ διόρθωσις τῆς αὐτοσυσχετίσεως θὰ δώσῃ ἐκτιμητρίας ἐλαχίστων τετραγώνων συνεπεῖς καὶ ἀσυμπτωτικῶς ἀποτελεσματικάς.

Μερικὲς φορὲς ἡ σχέσις (1.39α) γράφεται μὲ ἕνα ὅρον τυχαίων καταλοίπων (v_t) :

$$Y_t = Y_{t-1} + \gamma (Y^*_t - Y_{t-1}) + v_t , \qquad (1.42)$$

ἢ

$$Y_t^* = \frac{1}{\gamma} Y_t + \frac{\gamma - 1}{\gamma} Y_{t-1} - \frac{1}{\gamma} v_t . \qquad (1.42\alpha)$$

Θέτοντες ἐξ ἄλλου τὴν (1.42) εἰς τὴν θέσιν τῆς (1.39α) θὰ λάβωμεν πάλιν τὴν (1.40) μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι :

$$\xi_t = \gamma\varepsilon_t + v_t \,, \tag{1.42β}$$

καὶ ἡ μέθοδος ἐλαχίστων τετραγώνων δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ πάλιν κατὰ τὰ ἀναφερθέντα ἀνωτέρω. Ἤτοι ἐὰν εἰς τὴν (1.41) τὸ $\rho = 0$, αἱ ἐκτημήτριαι ἐλαχίστων τετραγώνων θὰ εἶναι συνεπεῖς.

Ἐὰν ἀντιθέτως ὑφίσταται αὐτοσυσχέτισις τοῦ ξ_t, θὰ πρέπει αὕτη νὰ διορθωθῇ μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους, ἄλλως αἱ ἐκτιμήτριαι ἐλαχίστων τετραγώνων θὰ εἶναι ἀσυνεπεῖς κατὰ τὰ ἀναφερθέντα σχετικῶς μὲ τὸ ὑπόδειγμα (1.13).

3γ. Ὑποδείγματα Κατανομῶν Γεωμετρικῶν Χρονικῶν Ὑστερήσεων : Ὑποδείγματα Συνθέτων Γεωμετρικῶν Ὑστερήσεων (Compound Geometric Lag Models)

Πολλὲς φορὲς ὁ οἰκονομικὸς προσδιορισμὸς τοῦ ὑποδείγματος (1.1) γίνεται ὡς ἑξῆς :

$$Y_t^* = \alpha + \beta X_t^* + \varepsilon_t \,, \tag{1.43}$$

ὅπου τὸ Y_t^* δυνατὸν νὰ παριστᾷ ἓν ἀναμενόμενον ἢ ἐπιθυμητὸν (desired) μέγεθος καὶ X_t^* ἓν ἀναμενόμενον ἢ μόνιμον (expected or permanent) μέγεθος.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν X_t^* καὶ Y_t^* κατὰ τὰ ἀναφερθέντα ἀνωτέρω διὰ τῶν (1.32α) καὶ (1.42α) [ἢ (1.39β)] ἀντιστοίχως λαμβάνομεν:

$$Y_t = \alpha\gamma + \beta\gamma\gamma^* (P_{t-1} + \lambda P_{t-2} + \lambda^2 P_{t-3} + \ldots) + (1 - \gamma) Y_{t-1} + \xi_t \,, \tag{1.44}$$

ὅπου $\xi_t = \gamma\varepsilon_t + v_t$. [ἢ $\xi_t = \gamma\varepsilon_t$ ἐὰν ἐχρησιμοποιήθη ἡ (1.39β)].

Ἐφαρμόζοντες εἰς τὴν (1.44) τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Koyck λαμβάνομεν :

$$Y_t = \alpha\gamma\gamma^* + \beta\gamma\gamma^* P_{t-1} + [(1-\gamma) + (1-\gamma^*] Y_{t-1} - (1-\gamma)(1-\gamma^*) Y_{t-2} + w_t \,, \tag{1.45}$$

ὅπου τὰ κατάλοιπα $w_t = \xi_t - (1 - \gamma^*) \xi_{t-1}$.

Ἡ (1.45) ἀποτελεῖ μίαν γενικευμένην μορφὴν τῶν προηγουμένων τύπων ὑποδειγμάτων Γεωμετρικῶν Χρονικῶν Ὑστερήσεων καθ' ὅσον :

i) Διὰ $\gamma = 1$: Λαμβάνομεν τὸ ὑπόδειγμα Προσαρμογῆς πρὸς Ἀναμενόμενον Μέγεθος (1.36).

ii) Διὰ $\gamma^* = 1$: Λαμβάνομεν τὸ ὑπόδειγμα Μερικῆς Ἀναπροσαρμογῆς (1.40), καὶ

iii) Διὰ $\gamma = \gamma^* = 1$: Λαμβάνομεν τὸ ὑπόδειγμα εἰς τὰ πραγματικὰ μεγέθη :

$$Y_t = \alpha + \beta P_{t-1} + u_t ,$$

ὅπου $u_t = \varepsilon_t$ [ἢ $u_t = \varepsilon_t +$ τυχαῖα ἀνεξάρτητα v_t, ἐὰν ἐχρησιμοποιήθη ἡ (1.39β)].

3δ. Ὑποδείγματα Γεωμετρικῶν Χρονικῶν Ὑστερήσεων μὲ Περισσοτέρας Ἀνεξαρτήτους Μεταβλητὰς

Ἔστω ὅτι ἔχομεν δύο ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς X_{1t} καὶ X_{2t}, τοῦ ὑποδείγματος διδομένου ὑπὸ τῆς (1.8).

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ λ εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ἀμφοτέρας τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς X_{1t}, X_{2t} (δηλ: ὅτι $\lambda_1 = \lambda_2$), τότε ἐφαρμόζοντες εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Koyck λαμβάνομεν :

$$Y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta X_{1t} + \beta' X_{2t} + \lambda Y_{t-1} + \eta_t , \qquad (1.46)$$

ὅπου

$$\eta_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1} . \qquad (1.46\alpha)$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς μεθόδου οἰκονομετρικῆς ἐκτιμήσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ ὅ,τι ἀνεφέρθη διὰ τὴν ἐξίσωσιν (1.13). Ἐν τούτοις, ἐὰν $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε τὸ προκῦπτον ὑπόδειγμα δίδει κατάλοιπα μὲ αὐτοσυσχέτισιν δευτέρου βαθμοῦ [$\eta_t = (\lambda_1 + \lambda_2)\,\varepsilon_{t-1} - \lambda_1\lambda_2\varepsilon_{t-2} + \zeta_t$] καὶ συγχρόνως ἡ ἐκτίμησις τῶν ἀρχικῶν παραμέτρων ἐπιβάλλει τὴν χρησιμοποίησιν μὴ γραμμικῶν περιορισμῶν (non—linear constraints) κατὰ τὴν ἐκτίμησιν.

Χαρακτηριστικὸν οἰκονομικὸν παράδειγμα δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἀποτελεῖ ἡ συνάρτησις Ζητήσεως Χρήματος, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐπιθυμητὴ ποσότης διατηρουμένου χρήματος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ Μονίμου εἰσοδήματος (X^*_{1t}) καὶ τοῦ Ἀναμενομένου ἐπιπέδου τοῦ τόκου (X^*_{2t}).

4. ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΥΣΤΕΡΗΣΕΩΝ ΤΥΠΟΥ Λ

4α Ὑποδείγματα Κατανομῶν Χρονικῶν Ὑστερήσεων Λ : Ὑποδείγματα Ὀρθολογικῶν Κατανομῶν Ὑστερήσεων (Rational Distributed Lag Models)

Ὁ Jorgenson (1966) ἐχρησιμοποίησεν ἕνα ὑπόδειγμα χρονικῶν ὑστερήσεων εἰς τὸ ὁποῖον αἱ παράμετροι β ἀκολουθοῦν τὸν γνωστὸν τύπον τῶν γεωμετρικῶν χρονικῶν ὑστερήσεων (τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου) μετὰ ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν κ χρονικῶν περιόδων. Αἱ παράμετροι β αὐξανόμεναι κατὰ τὰς πρώτας περιόδους, ἔχουν τὸ ἀνώτατον σημεῖον ἐντὸς τοῦ διαστήματος τῶν κ αὐτῶν χρονικῶν περιόδων. Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \ldots + \beta_{\kappa-1} X_{t-\kappa+1}$$

$$+ \beta_\kappa X_{t-\kappa} + \lambda\, \beta_\kappa X_{t-\kappa-1} + \lambda^2 \beta_\kappa X_{t-\kappa} + \ldots + \varepsilon_t , \quad \beta_0 = \beta, \qquad (1.47)$$

ἤ

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \sum_{j=1}^{\kappa-1} \beta_j X_{t-j} + \beta_\kappa X_{t-\kappa}$$

$$+ \lambda\, \beta_\kappa X_{t-\kappa-} + \lambda^2 \beta_\kappa X_{t-\kappa} + \ldots + \varepsilon_t . \qquad (1.48)$$

Ἐφαρμόζοντες εἰς ταύτην τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Koyck λαμβάνομεν :

$$\lambda Y_{t-1} = \alpha\lambda + \beta_0 \lambda X_{t-1} + \sum_{j=1}^{\kappa-1} \beta_j \lambda X_{t-j-1}$$

$$+ \lambda\, \beta_\kappa X_{t-\kappa-1} + \lambda^2 \beta_\kappa X_{t-\kappa} + \ldots + \lambda\, \varepsilon_{t-1} . \qquad (1.49)$$

Αὕτη ἀφαιρουμένη ἐκ τῆς (1.48) δίδει :

$$Y_t = \alpha\,(1-\lambda) + \beta_0 X_t + \sum_{j=1}^{\kappa} (\beta_j - \lambda\, \beta_{j-1})\, X_{t-j}$$

$$+ \lambda\, Y_{t-1} + \eta_t , \qquad \eta_t = \varepsilon_t - \lambda\, \varepsilon_{t-1} . \qquad (1.50)$$

Τὰ προβλήματα τῶν μεθόδων οἰκονομετρικῆς ἐκτιμήσεως τῆς (1.50) εἶναι τὰ αὐτὰ μὲ ὅ,τι ἀνεφέρθη διὰ τὴν ἐξίσωσιν (1.13), μὲ τὴν πρόσθετον δυσκολίαν, ὅτι ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ κ, τόσον περισσότεραι μεταβληταὶ - X θὰ ὑπάρχουν, αἱ ὁποῖαι ὡς διαφέρουσαι μόνον κατὰ τὰς χρονικὰς ὑστερήσεις ἐπιτείνουν τὸ πρόβλημα τῆς πολυσυγγραμμικότητος.

4β. Ὑποδείγματα Κατανομῶν Χρονικῶν Ὑστερήσεων Λ : Ὑποδείγματα Κατανομῶν Ὑστερήσεων **Pascal (Pascal Lag Distribution Models)**

Μὲ τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Solow (1960) ἀποφεύγεται τὸ πρόβλημα τῆς πολυσυγγραμμικότητος τοῦ ὑποδείγματος (1.50). Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$Y_t = \alpha + \beta \sum_{t=0}^{\infty} W_t X_{t-1} + \varepsilon_t , \qquad (1.51)$$

ὅπου

$$\sum_{t=0}^{\infty} W_t = 1 , \qquad W_t \geqslant 0$$

καὶ

$$W_t = \frac{(r+t-1)\,!}{(r-1)\,!\; t\,!} \,(1-\lambda)^r \lambda^t , \qquad 0 \leqslant \lambda < 1. \qquad (1.52)$$

Τὸ r = θετικὸς ἀκέραιος ἀριθμός. Οὕτω :

διὰ $r = 1$: $w_t = (1-\lambda)\lambda^t$, καὶ

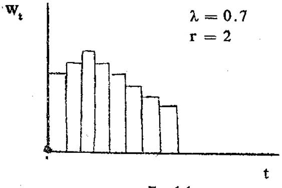
διὰ $r = 2$: $w_t = \frac{(t+1)\,!}{t\,!}\,(1-\lambda)^r\,\lambda^t = (1-\lambda)^2\,(t+1)\lambda^t$.

Ἐκ τούτων λαμβάνομεν διὰ $t = 0, 1, 2$:

	w_0	w_1	w_2
$r = 1$	$(1-\lambda)$	$(1-\lambda)\,\lambda$	$(1-\lambda)\,\lambda^2$
$r = 2$	$(1-\lambda)^2$	$2(1-\lambda)^2\lambda$	$3(1-\lambda)^2\lambda^2$.

Τὰ w_t τοῦ $r = 1$ ἀκολουθοῦν μίαν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ἄρα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς $r = 1$ ὑποδείγματα θὰ εἶναι Κατανομῶν Γεωμετρικῶν Χρονικῶν Ὑστερήσεων.

Ἀντιθέτως τὰ W_t τοῦ $r = 2$ φθάνουν εἰς ἕνα μέγιστον σημεῖον καὶ ἐν συνεχείᾳ μειοῦνται :



Σχ. 1.1
Κατανομὴ Ὑστερήσεων Pascal

Ἀντικαθιστῶντες τὰ W_t τοῦ $r = 2$ εἰς τὴν (1.51) εὑρίσκομεν :

$$Y_t = \alpha + \beta\,(1-\lambda)^2\,(X_t + 2\lambda\,X_{t-1} + 3\lambda^2\,X_{t-2} + \ldots) + \varepsilon_t\,. \qquad (1.53)$$

Ἐφαρμόζοντες εἰς ταύτην τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Koyck λαμβάνομεν :

$$Y_t = \alpha\,(1-\lambda) + \beta\,(1-\lambda)^2\,(X_t + \lambda\,X_{t-1} + \ldots) + \lambda\,Y_{t-1} + (\varepsilon_t - \lambda\,\varepsilon_{t-1}). \qquad (1.54)$$

Ἐφαρμόζοντες καὶ εἰς ταύτην τὸν μετασχηματισμὸν τοῦ Koyck ἔχομεν :

$$Y_t = \alpha\,(1-\lambda)^2 + \beta\,(1-\lambda)^2\,X_t + 2\lambda\,Y_{t-1} - \lambda^2\,Y_{t-2} + \eta_t^*\,, \qquad (1.55)$$

όπου $\qquad \eta_t^* = (\varepsilon_t - 2\lambda\, \varepsilon_{t-1} + \lambda^2\, \varepsilon_{t-2})$.

Αἱ ἐκτιμήτριαι ἐλαχίστων τετραγώνων τῆς (1.55) θὰ εἶναι συνεπεῖς ἐὰν τὸ η_t^* δὲν αὐτοσυσχετίζεται, τουτέστι ἐὰν τὰ κατάλοιπα ε_t ἐμφανίζουν τὴν συσχέτισιν δευτέρου βαθμοῦ:

$$\varepsilon_t = 2\lambda\, \varepsilon_{t-1} - \lambda^2\, \varepsilon_{t-2} + \eta_t^*,$$

όπου $\qquad \eta_t^*$ = τυχαῖα καὶ ἀνεξάρτητα κατάλοιπα.

Ἡ ἐξίσωσις (1.55) θὰ δώσῃ ἐκτιμήσεις τῶν τεσσάρων παραμέτρων:

$$\alpha\,(1-\lambda)^2, \qquad \beta\,(1-\lambda)^2, \qquad 2\lambda, \qquad \lambda^2,$$

αἱ ὁποῖαι ὅμως συντίθενται ἐκ τριῶν τοιούτων:

$$\alpha, \qquad \beta, \qquad \lambda.$$

Ἅπαξ καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παραμέτρων εἶναι μία παράμετρος, ἡ ἐκτίμησις μὲ ἕνα a priori περιορισμὸν (constraint) εἰς τὰς παρατρους δὲν εἶναι δύσκολος.

4γ. Ὑποδείγματα Κατανομῶν Χρονικῶν Ὑστερήσεων Λ: Ὑποδείγματα Πολυωνυμικῶν Κατανομῶν Ὑστερήσεων (Polynomial Lag Models)

Ἡ ἐξίσωσις (1.51) θὰ ἠδύνατο νὰ προσδιορισθῇ κατὰ τρόπον ὥστε τὰ W, γραφόμενα W_i, ἀκολουθοῦν μίαν πολυωνυμικὴν μορφὴν ἐντὸς ἑνὸς διαστήματος m χρονικῶν περιόδων, ἐκτὸς τοῦ ὁποίου ταῦτα εἶναι μηδέν :

$$W_{-1} = 0 \qquad W_{m+1} = 0$$

καὶ

$$W_i = \lambda_0 + \lambda_1\, i + \lambda_2\, i^2 + \lambda_3\, i^3, \tag{1.56}$$

όπου $\qquad i = -1, 0, 1, \ldots, m, m+1.$

Ἐν προκειμένῳ ἡ ἐξίσωσις γράφεται :

$$\begin{aligned} Y_t = \alpha + \beta\,[\lambda_0\, X_t &+ (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, X_{t-1} \\ &+ (\lambda_0 + 2\lambda_1 + 2^2\lambda_2 + 2^3\lambda_3)\, X_{t-2} \qquad (1.57). \\ &+ \ldots + (\lambda_0 + m\lambda_1 + m^2\lambda_2 + m^3\lambda_3)\, X_{t-m} + \varepsilon_t\,. \end{aligned}$$

Ἡ ἐκτίμησις ἑνὸς τοιούτου ὑποδείγματος, ἔστω καὶ ὑπὸ ἁπλοποιημένην μορφήν, προϋποθέτει τὴν εἰσαγωγὴν πολλῶν περιορισμῶν ἐπὶ τῶν ἐκτιμωμένων παραμέτρων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Almon, S. (1965). The Distributed Lag between Capital Appropriations and Expenditures. Econometrica, pp. 178-196.

2. Dhrymes, P. J. (1971). Distributed Lags: Problems of Estimation and Formulation. Holden-Day, Inc., San Francisco.

3. Jorgenson, D. W. (1966). Rational Distributed Lag Functions. Econometrica, pp. 135 - 149.

4. Kmenta, J. (1971). Elements of Econometrics. MacMillan, N. York.

5. Koyck, L. M. (1954). Distributed Lags and Investment Analysis. North—Holland Publishing Co., Amsterdam.

6. Nerlove, M. (1958). Distributed Lags and Demand Analysis for Agricultural and other Commodities. U.S. Department of Agriculture, Agricultural Marketing Service, Agricultural Handbook No. 141, Washington.

7. Solow, R.M. (1960). On a Family of Lag Distributions. Econometrica, pp. 393-406.

8. Theil, H. (1971). Principles of Econometrics. John Wiley & Sons, Inc., N. York.

9. Zellner, A. and M.S. Geisel (1968). Analysis of Distributed Lag Models with Applications to Consumption Function Estimation. Paper Presented to the European Meeting of the Econometric Society, Amsterdam, September 1968.