Η ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΕΙΣ ΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Τοῦ κ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΡΗΓΑ

1. Εἰσαγωγὴ

Πολλαὶ ἔννοιαι ἐκ τῆς μηχανικῆς ἔχουν εἰσαχθῆ ἐπιτυχῶς εἰς τὴν οἰκονομικήν, π.χ. ἰσορροπία, ἐλαστικότης, ῥοπὴ κλπ. Μία ἐπίσης ἔννοια τῆς μηχανικῆς, ἡ ὁποία ἔχει εἰσαχθῆ εἰς τὴν οἰκονομικήν, εἶναι καὶ ἡ ἔννοια τῆς εὐσταθείας (stability), διὰ τῆς ὁποίας μελετᾶται τὸ ἀκόλουθον γενικὸν πρόβλημα: κατὰ πόσον καὶ ὑπὸ ποίας συνθήκας αἱ διάφοροι μεταβληταί, εἰς ἕνα δεδομένον οἰκονομικὸν ὑπόδειγμα, συγκλίνουν διαχρονικῶς εἰς τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς ἰσορροπίας (δηλαδὴ πρὸς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας τοῦ ὑποδείγματος).

Εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν τὰ ὑποδείγματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται σταθερὸς ρυθμὸς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ἐν ἰσορροπίᾳ, δηλ. ἐπιτυγχάνεται μία κατάστασις δυναμικῆς ἰσορροπίας τῆς οἰκονομίας κατὰ τὴν ὁποίαν ὅλα τὰ μεγέθη τοῦ συστήματος αὐξάνονται διαχρονικῶς κατὰ ἕνα σταθερὸν ρυθμὸν (equilibrium steady growth). Ἕνα ἐκ τῶν εἰδικῶν προβλημάτων, αὐτῶν τῶν ὑποδειγμάτων, εἶναι τὸ πρόβλημα τῆς εὐσταθείας τοῦ ρυθμοῦ ἀνόδου ἰσορροπίας, δηλαδὴ κατὰ πόσον εἰς τυχοῦσαν ἀπόκλισιν τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος ἀπὸ τὸν ρυθμὸν ἰσορροπίας, θὰ ὑπάρξῃ τάσις πρὸς ἐπιστροφὴν τούτου πρὸς τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας ἢ ὄχι.

Συναφὴς πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς εὐσταθείας εἶναι ἡ ἔννοια τῆς σταθεροποιήσεως (stabilization), δηλαδὴ τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς ἡ ὁποία ὁδηγεῖ εἰς εὐσταθῆ κατάστασιν.

Εἰς τὸ παρὸν ἄρθρον γίνεται μία ἐπισκόπησις ὡρισμένων ὑποδειγμάτων καὶ μελέτη τῶν συνθηκῶν εὐσταθείας. Μελετῶνται τὰ κριτήρια εὐσταθείας τῶν λύσεων ἐξισώσεων διαφορῶν πρώτης, δευτέρας, ἀνωτέρας τάξεως καθὼς καὶ συστημάτων αὐτῶν.

Ὡς οἰκονομικαὶ ἐφαρμογαὶ μελετῶνται τὸ θεώρημα τοῦ ἱστοῦ τῆς ἀράχνης, καὶ τὰ ὑποδείγματα: δυναμικοῦ πολ/στοῦ, Harrod, πολ/στοῦ - ἐπιταχυντοῦ τοῦ Samuelson, Hicks, πολ/στοῦ εἰς μίαν ἀνοικτὴν οἰκονομίαν.

Ἡ εὐστάθεια δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς ὑποδείγματα διαφορικῶν ἐξισώσεων καθὼς καὶ εἰς τὴν μελέτην ἄλλων μεθόδων ὡς λ.χ. αὐτῆς τοῦ Liapunov, διὰ τῆς ὁποίας μελετῶνται ἡ εὐστάθεια τοῦ ὑποδείγματος γενικῆς ἰσορροπίας κατὰ Walras κ.ἄ.

2. Εὐστάθεια ὑποδειγμάτων ἐξισώσεων διαφορῶν πρώτης τάξεως

2.1. Ἡ ἐξίσωσις διαφορῶν πρώτης τάξεως

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha_0\, y_{x+1} + \alpha_1 y_x = g\,(x)$ (1) μὲ α_0, α_1 σταθερὰς ὁρίζεται ὡς γραμμικὴ ἐξίσωσις διαφορῶν πρώτης τάξεως [1].

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha_0\, y_{x+1} + \alpha_1\, y_x = 0$ (2) θὰ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ὁμογενής. (Τὰ α_0, α_1 σταθεραὶ $\neq 0$). Ἀπὸ τὴν (2) θὰ ἔχωμεν :

$$y_{x+1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\, y_x = 0 \quad (2') \qquad ἢ$$

$$y_{x+1} + b y_x = 0 \quad (3) \quad ὅπου\ b = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

Ἡ $y_x = c \cdot (-b)^x$ ἀποτελεῖ τὴν γενικὴν λύσιν τῆς ὁμογενοῦς. Ἡ γενικὴ λύσις τῆς (1) δίδεται ὑπὸ τῆς $\psi_x = \bar{y}_x + y_x$ (4) ὅπου $\bar{y}_x$ εἶναι μία μερικὴ λύσις ἐξαρτωμένη ἐκ τοῦ $g(x)$.

Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία

Διὰ νὰ δώσωμεν μίαν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τῆς λύσεως $y_x = c\,(-b)^x$ διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις :

I) $c > 0$

1) $-b > 0$

i) $-b = 1$ (σχ. 1α).

ii) $-b < 1$ (σχ. 2α).

iii) $-b > 1$ (σχ. 3α).

2) $-b < 0$

i) $-b = -1$ (σχ. 1b)

ii) $-b < -1$ (σχ. 2b)

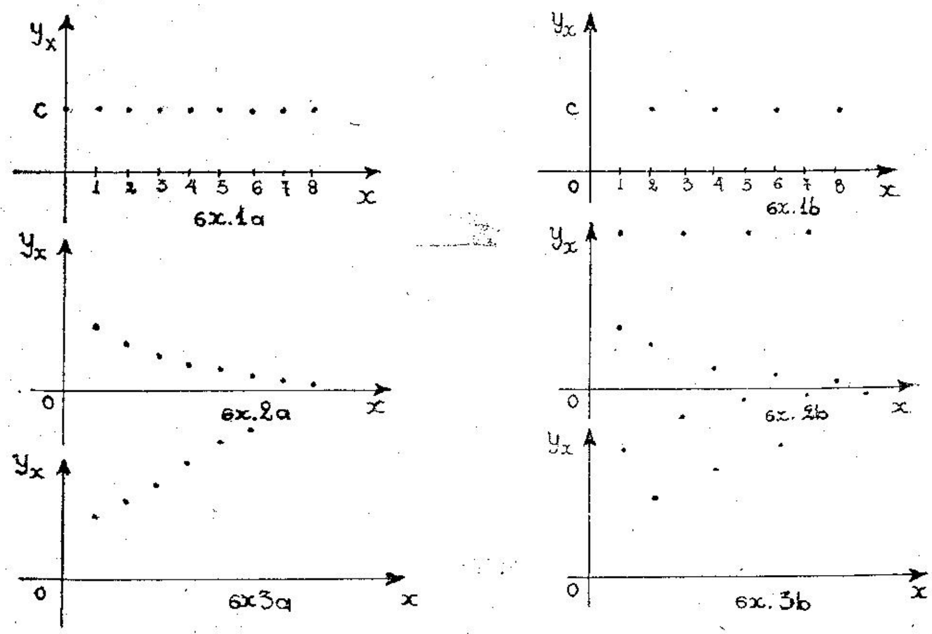
iii) $-b > -1$ (σχ. 3b)

II) $c < 0$ τότε εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις ὁ,τιδήποτε εἶναι θετικὸν γίνεται ἀρνητικὸν καὶ ἀντιστρόφως,

---

1. Βλ. [5, σελ. 129].

Συνήθως πρὸς διευκόλυνσιν συνδέομεν τὰ σημεῖα τῶν λύσεων δι' εὐθυγράμ-



μων τμημάτων. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον διευκολύνεται ἡ μελέτη τῆς μορφῆς τῶν λύσεων. Οὕτω τὰ ἀντίστοιχα σχήματα θὰ εἶναι ὡς τῆς σελ. 605.

2.2. Θεώρημα τοῦ ἱστοῦ τῆς ἀράχνης

Ἔστω τὸ ἁπλοῦν οἰκονομικὸν ὑπόδειγμα κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ ζήτησις ἑνὸς ἀγαθοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς τρεχούσης περιόδου, ἐνῶ ἡ προσφορὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς προηγουμένης περιόδου. Ἔστω δὲ ὅτι εἶναι :

$$D_t = \alpha_1 + b_1 P_t \qquad (1)$$

$$S_t = \alpha_2 + b_2 P_{t-1} \qquad (2)$$

Εἰς ἑκάστην περίοδον ἡ ἀγορὰ προσδιορίζει τὴν τιμὴν κατὰ τέτοιον τρόπον ὥστε ἡ ζήτησις νὰ ἀπορροφᾶ ἀκριβῶς τὴν προσφερομένην ποσότητα (συνθήκη ἰσορροπίας), ἤτοι :

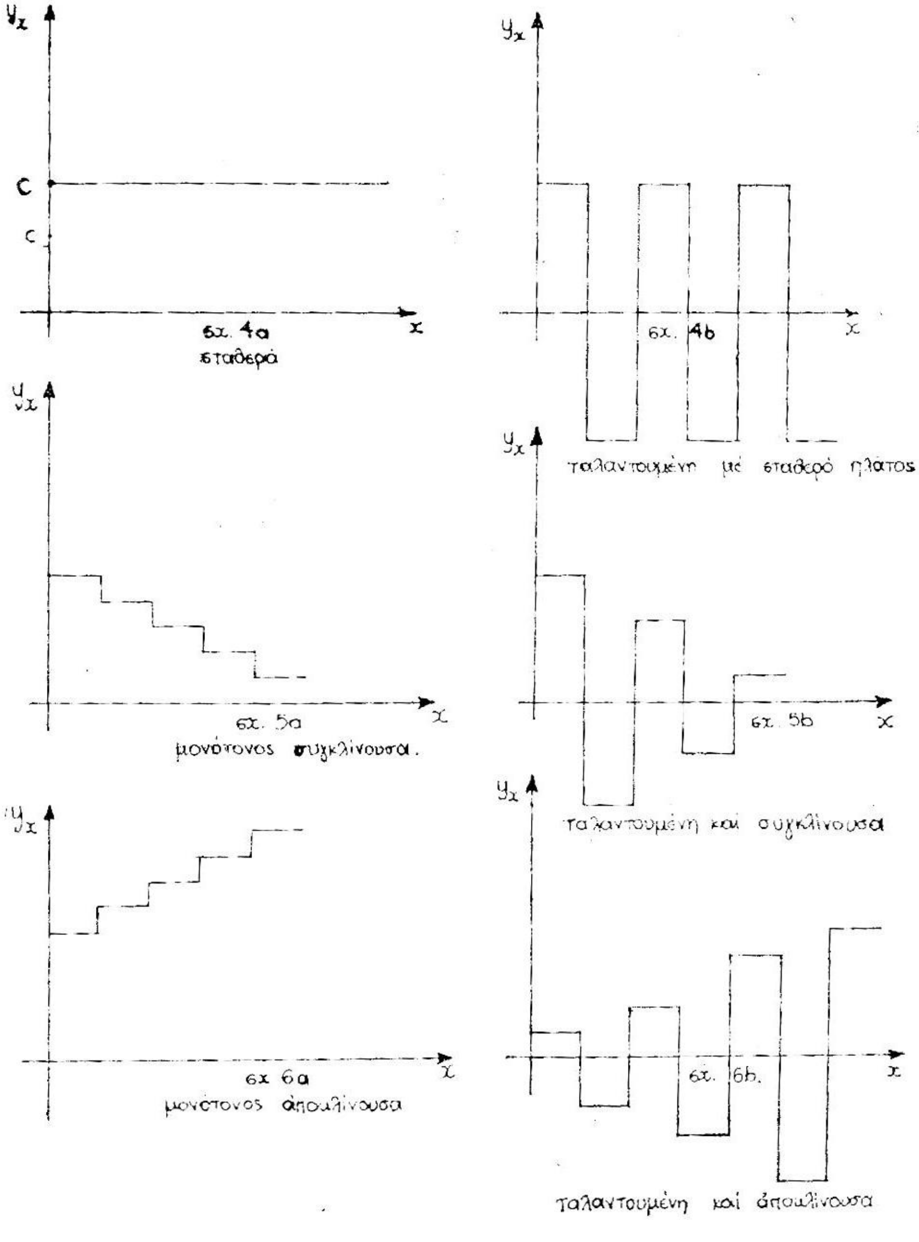
$$D_t = S_t \qquad (3)$$

ἢ $$\alpha_1 + b_1 P_t = \alpha_2 + b_2 P_{t-1}$$

ἢ $$b_1 P_t - b_2 P_{t-1} = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad (4)$$

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς ὁμογενοῦς τῆς (4) εἶναι ἡ $P^0_t = c\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^t$, ἐνῶ μία μερι-

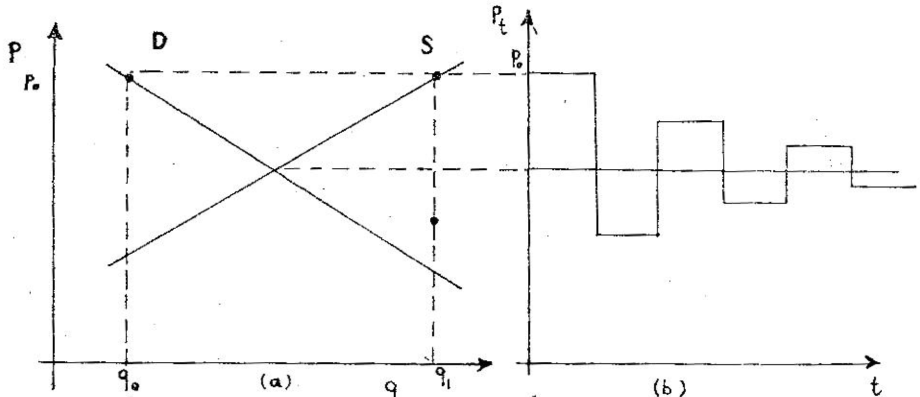
-κὴ λύσις εἶναι τῆς μορφῆς $\overline{P}_t = P_e$. Θέτομεν αὐτὴν εἰς τὴν (4) ὁπότε $b_1 P_e - b_2 P_e = \alpha_2 - \alpha_1$ ἢ $P_e = (\alpha_2 - \alpha_1)/(b_1 - b_2)$ μὲ $b_1 - b_2 \neq 0$. Ἡ γε-



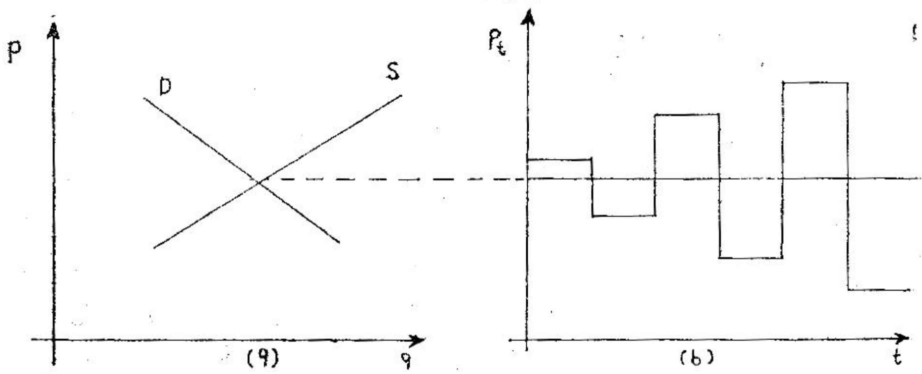
νικὴ λύσις τῆς (4) εἶναι ἡ $P_t = P_e + c\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^t$. Διὰ $t = 0$ θὰ εἶναι $P_t = P_0$ καὶ $P_0 = P_e + c\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^0$ ἢ $c = P_0 - P_e$.

Τελικῶς $P_t = P_e + (P_0 - P_e)\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^t$ (5).

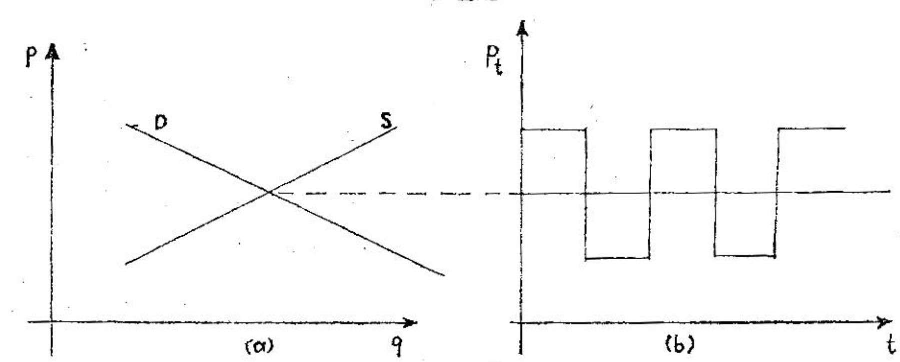
Ἡ ἔννοια τῆς P_e (τιμὴ ἰσορροπίας) εἶναι ἡ ἀκόλουθος: Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ



Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3

τιμὴ τῆς P_t εἶναι ἡ P_e τότε ἡ P_t παραμένει σταθερὰ διὰ κάθε t καὶ ἴση μὲ P_e.

Ἄς διερευνήσωμεν τὴν συμπεριφορὰν τῆς τιμῆς (5) ὡς πρὸς τὸν χρόνον t. Συνήθως ἡ ζήτησις ἔχει ἀρνητικὴν κλίσιν ($b_1 < 0$) καὶ ἡ προσφορὰ θετικὴ

$(b_2 > 0)$. Τότε $\frac{b_2}{b_1} < 0$ καὶ ἡ τιμὴ θὰ ἔχῃ μίαν ταλαντουμένην κίνησιν πέριξ τῆς τιμῆς ἰσορροπίας. Τότε ἐάν:

i) $\left|\frac{b_2}{b_1}\right| < 1$ ἢ $|b_2| < |b_1|$ αἱ ταλαντώσεις θὰ εἶναι φθίνουσαι.

ii) $\left|\frac{b_2}{b_1}\right| > 1$ ἢ $|b_2| > |b_1|$ αἱ ταλαντώσεις θὰ εἶναι αὔξουσαι.

iii) $\left|\frac{b_2}{b_1}\right| = 1$ ἢ $|b_2| = |b_1|$. αἱ ταλαντώσεις θὰ εἶναι ἀνοικτοῦ πλάτους,

Αἱ περιπτώσεις αὗται φαίνονται εἰς τὰ ἀνωτέρω σχήματα 1,2,3 ἀντιστοίχως.

Ἐὰν $\frac{b_2}{b_1} > 0$ θὰ ἔχωμεν ἀντίστοιχα ἀποτελέσματα. Ἡ συνθήκη διὰ τὴν σύγκλισιν θὰ εἶναι καὶ πάλιν $\left|\frac{b_2}{b_1}\right| < 1$.

2.3. Ἡ ἔννοια τῆς εὐσταθείας

Ὁ ρ ι σ μ ο ὶ

Ὅταν ἡ τιμὴ P_t ἔχῃ μίαν ἀπόκλισιν ἀπὸ τὴν τιμὴν ἰσορροπίας καὶ κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν διαδοχικῶν περιόδων τοῦ χρόνου, ἡ τιμὴ τείνει πρὸς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας, ἡ τιμὴ αὐτὴ ἰσορροπίας εἶναι «εὐσταθής» (stable). Εἰς ἐναντίαν περίπτωσιν ἡ τιμὴ ἰσορροπίας θὰ εἶναι «ἀσταθής» (unstable).

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 1 τῆς 2.2 ἡ τιμὴ ἰσορροπίας P_e εἶναι εὐσταθής.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 2 τῆς 2.2 ἡ τιμὴ ἰσορροπίας εἶναι ἀσταθής.

Τέλος εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχ. 3 τῆς 2.2 ἡ τιμὴ ἰσορροπίας P_e εἶναι οὐδέτερος (neutral).

Κριτήριον «εὐσταθείας» (stability) εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εἶναι τὸ $\left|\frac{b_2}{b_1}\right| < 1$, διότι τότε $\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^t = 0$.

Δίδομεν κατωτέρω ἕνα ἀκριβέστερον ὁρισμὸν τῆς εὐσταθείας τῆς τιμῆς ἰσορροπίας[1].

Ἔστω ὅτι ἡ τιμὴ P_e εἶναι ἡ τιμὴ ἰσορροπίας. Θεωροῦμεν μίαν περιοχὴν $\pi(P_e, \varepsilon)$ τοῦ P_e καὶ μίαν ἄλλην περιοχὴν τοῦ P_e τὴν $\pi^*(P_e, \delta) \subset \pi(P_e, \varepsilon)$.

Ἔστω ὅτι ἡ $P(t_0)$ εἶναι ἡ τιμὴ κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_0 καὶ ὅτι εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς $\pi^*(P_e, \delta)$, δηλ. ἰσχύει $|P(t_0) - P_e| < \delta$. Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ κατάστασις ἰσορροπίας εἶναι ε ὐ σ τ α θ ή ς ἐὰν ἡ τιμὴ κατὰ τὴν χρονικὴν

1. Βλ. [8, σελ. 514].

στιγμὴν t, δηλαδὴ ἡ $P(t)$ παραμένει εἰς τὴν περιοχὴν $\pi(P_e, \varepsilon)$ δηλαδὴ $|P(t) - P_e| < \varepsilon$ διὰ κάθε $t > t_0$. (Σχ. 1).

Σχ. 1

2.4. Ὑπόδειγμα δυναμικοῦ πολλαπλασιασμοῦ

α) Ἔστω τὸ ὑπόδειγμα[1] :

$C_t = \alpha + bY_{t-1}$ (1), $\alpha \geqslant 0$, $0 < b < 1$

$I_t = I_0 + \Delta I$ (2)

$Y_t = C_t + I_t$ (3)

ὅπου C_t = κατανάλωσις, Y_t = εἰσόδημα, I_t = ἐπένδυσις καὶ b = ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς κατανάλωσιν.

Εἰς τὸ ὑπόδειγμα αὐτὸ ἡ ἐπένδυσις εἶναι αὐτόνομος.

Ἐκ τῶν (1), (2), (3) θὰ ἔχωμεν :

$$Y_t = \alpha + bY_{t-1} + I_0 + \Delta I$$

ἢ $$Y_t - bY_{t-1} = \alpha + I_0 + \Delta I$$

Ἡ λύσις αὐτῆς εἶναι :

$$Y_t = \overline{Y}_t + Y^0_t = kb^t + \frac{\alpha + I_0 + \Delta I}{1 - b}$$

Ἐπειδὴ δὲ $b < 1$ τὸ ὑπόδειγμα εἶναι εὐσταθές.

β) Ἔστω μία τροποποίησις τοῦ προηγουμένου ὑποδείγματος ὅπου ἡ ἐπένδυσις εἶναι ἐν μέρει αὐτόνομος καὶ ἐν μέρει ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ εἰσόδημα δηλ. $I_t = hY_{t-1} + I_0 + \Delta I$, ὅπου τὸ h εἶναι ἡ ὁριακὴ ῥοπὴ πρὸς ἐπένδυσιν $(0 < h < 1)$.

Θὰ ἔχωμεν :

$$Y_t = \alpha + bY_{t-1} + hY_{t-1} + I_0$$

ἢ $$Y_t - (b + h)Y_{t-1} = \alpha + I_0 + \Delta I$$

ἡ γενικὴ λύσις αὐτῆς εἶναι :

$$Y_t = k\,(b + h)^t + \frac{\alpha + I_0 + \Delta I}{1 - b - h}$$

μὲ $1 - b - h \neq 0$.

---

1. Βλ. [2, σελ. 34].

Ἡ συνθήκη εὐσταθείας εἶναι ἡ $b+h<1$ ἢ $h<1-b$. Ἐπειδὴ $1-b=s=$ ἡ ὁριακὴ ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν, ἡ $h<1-b$ γίνεται $h<s$ δηλ. ὅταν ἡ ὁριακὴ ροπὴ πρὸς ἐπένδυσιν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ὁριακὴν πρὸς ἀποταμίευσιν τὸ ὑπόδειγμα θὰ εἶναι εὐσταθές.

c) Ἔστω τὸ ὑπόδειγμα:

$$C_t = \alpha + bY_{t-1} \qquad (1)$$
$$I_t = hY_{t-1} + I_0 + \Delta I \qquad (2)$$
$$X_t = X_0 + \Delta X \qquad (3)$$
$$M_t = mY_{t-1} + M_0 \qquad (4) \quad 0<m<1$$
$$Y_t = C_t + I_t + X_t - M_t \qquad (5)$$

ὅπου M αἱ εἰσαγωγαί, X αἱ ἐξαγωγαί, m ἡ ὁριακὴ ροπὴ πρὸς εἰσαγωγήν.

Ἀπὸ τὰς (1) — (5) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν διαφορῶν:

$$Y_t - (b+h-m)\,Y_{t-1} = \alpha + I_0 + X_0 - M_0 + \Delta I + \Delta X$$

μὲ γενικὴν λύσιν:

$$Y_t = K\,(b+h-m)^t + \frac{\alpha + I_0 + X_0 - M_0 + \Delta I + \Delta X}{1-b-h+m}$$

Ἡ συνθήκη εὐσταθείας εἶναι:

$$b+h-m<1 \quad \text{ἢ} \quad h<1-b+m \quad \text{ἢ} \quad h<s+m \quad \text{ἤτοι:}$$

ἡ ὁριακὴ ροπὴ πρὸς ἐπένδυσιν πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς ὁριακῆς ροπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν καὶ τῆς ὁριακῆς ροπῆς πρὸς εἰσαγωγήν.

2.5. Ὑπόδειγμα τοῦ Harrod

Ἔστω τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Harrod:

$$S_t = s\,Y_{t-1} \qquad (1)$$
$$I_t = k\,(Y_t - Y_{t-1}) \qquad (2)$$
$$S_t = I_t \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς (1), (2), (3) θὰ ἔχωμεν:

$$s\,Y_{t-1} = k\,(Y_t - Y_{t-1}) \quad \text{ἢ}$$

$$Y_t - \frac{k+s}{k}\,Y_{t-1} = 0$$

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς ὁμογενοῦς αὐτῆς ἐξισώσεως διαφορῶν εἶναι

$$Y_t = \lambda\left(\frac{k+s}{k}\right)^t = \lambda\left(1+\frac{s}{k}\right)^t$$

Ἐπειδὴ $\frac{k+s}{k} = 1 + \frac{s}{k} > 1$, ἡ λύσις αὐτὴ εἶναι ἀσταθής.

Τὸ $\frac{s}{k}$ ὡρίσθη ἀπὸ τὸν Harrod ὡς ἡ «Warranted» τιμὴ αὐξήσεως.

3. Εὐστάθεια ἐξισώσεων διαφορῶν δευτέρας τάξεως

Κριτήρια Εὐσταθείας.

3.1. Ἐξισώσεις διαφορῶν δευτέρας τάξεως

Ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς :

$$\alpha_0 y_{x+2} + \alpha_1 y_{x+1} + \alpha_2 y_x = q(x) \quad (1)$$

μὲ α_0, α_1, α_2 σταθεράς, ὁρίζεται ὡς γραμμικὴ ἐξίσωσις διαφορῶν δευτέρας τάξεως μὲ σταθεροὺς συντελεστάς ($\alpha_0 \neq 0$).

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha_0 y_{x+2} + \alpha_1 y_{x+1} + \alpha_2 y_x = 0$ (2) ὁρίζεται ὡς ἡ **ἀντίστοιχος** ὁμογενὴς τῆς (1). Ἡ (2) γράφεται καὶ ὡς :

$$y_{x+2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} y_{x+1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} y_x = 0 \quad (3)$$

ἢ $\quad y_{x+2} + b_1 y_{x+1} + b_2 y_x = 0 \; (3')$ ὅπου $b_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$, $b_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$

Ἡ (3') ἔχει ὡς χαρακτηριστικὴν τὴν

$$\lambda^2 + b_1 \lambda + b_2 = 0 \quad (4)$$

Διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις :

i) $\Delta = b_1^2 - 4b_2 > 0$, ἡ γενικὴ λύσις τῆς (3') εἶναι ἡ

$$y_x = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x \quad (5)$$ ὅπου c_1, c_2 σταθεραί.

Κριτήριον εὐσταθείας τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν (3') εἶναι $|\lambda_1| < 1$ **καὶ** $|\lambda_2| < 1$ διότι τότε $\lim\limits_{x\to\infty} y_x = 0$.

ii) $\Delta = b_1^2 - 4b_2 = 0$, ἡ γενικὴ λύσις τῆς (3') εἶναι ἡ

$$y_x = c_1 \lambda^x + c_2 x\lambda^x = (c_1 + c_2 x)\lambda^x \quad (6)$$

Κριτήριον εὐσταθείας εἶναι $|\lambda| < 1$ διότι

$$\lim_{x\to\infty} y_x = 0$$

iii) $\Delta = b^2 - 4b_2 < 0$, ἡ γενικὴ λύσις τῆς (3') εἶναι ἡ

$$y_X = c_1 (m + ni)^X + c_2 (m - ni)^X \quad (7)$$

ἢ $\quad y_X = Ar^X \cos(\theta x - \varepsilon) \quad (8) \quad$ ὅπου $r = \sqrt{m^2 + n^2}$.

Κριτήριον εὐσταθείας εἶναι $|r| < 1$, διότι $\lim\limits_{X \to \infty} y_X = 0$.

Ἐπειδὴ $r = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{\left(-\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4b_2 - b_1^2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b_2}$ ἡ

$|r| < 1$ γίνεται $\sqrt{b_2} < 1$ ἢ $b_2 < 1$.

Χωρὶς βλάβην τῆς γενικότητος δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\alpha_0 = 1$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις διαφορῶν δευτέρας τάξεως εἶναι ἡ

$$y_{X+2} + \alpha_1 y_{X+1} + \alpha_2 y_X = q(x) \quad (1')$$

Ἀποδεικνύεται[1] ὅτι κριτήρια εὐσταθείας εἴτε εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πραγματικῶν, εἴτε εἰς τὴν περίπτωοιν τῶν μιγαδικῶν ριζῶν, εἶναι :

$$1 + \alpha_1 + \alpha_2 > 0 \quad (10)$$

$$1 - \alpha_2 > 0 \quad (11)$$

$$1 - \alpha_1 + \alpha_2 > 0 \quad (12)$$

3.2 Ὑπόδειγμα πολλαπλασιαστοῦ—ἐπιταχυντοῦ τοῦ Samuelson

Τὸ ὑπόδειγμα πολλαπλασιαστοῦ — ἐπιταχυντοῦ τοῦ Samuelson δίδεται διὰ τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων :

$$C_t = b\, Y_{t-1} \quad (1) \quad \text{μὲ } 0 < b < 1$$

$$I_t = I_t' + I_t'' \quad (2)$$

$$\text{μὲ} \quad I_t' = \kappa\,(C_t - C_{t-1}) \quad (3)$$

$$I_t'' = G \quad (4)$$

$$Y_t = C_t + I \quad (5)$$

Τὸ C_t εἶναι ἡ κατανάλωσις κατὰ τὴν περίοδον t, b ἡ ὁριακὴ ροπὴ πρὸς κατανάλωσιν, I_t ἡ ὁλικὴ ἐπένδυσις, I_t'' ἡ αὐτόνομος ἐπένδυσις (εἰς τὴν πραγματικότητα δημοσία ἐπένδυσις) G σταθερά, κ ὁ συντελεστὴς ἐπιταχύνσεως.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας τοῦ ὑποδείγματος καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν διαφορῶν δευτέρας τάξεως :

$$Y_t - b(1 + \kappa) Y_{t-1} + b\kappa Y_{t-2} = G \quad (6)$$

1) Βλ. [2, σελ. 56].

Μία εἰδικὴ λύσις της (6) εἶναι ἡ $\overline{Y}_t = \dfrac{G}{1-b}$

Ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις εἶναι ἡ

$$\lambda^2 - b(1+\kappa)\lambda + b\kappa = 0 \qquad (7)$$

Κριτήρια εὐσταθείας εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

$$1 - b(1+\kappa) + b\kappa = 1 - b > 0 \qquad (8)$$

$$1 - b\kappa > 0 \qquad (9)$$

$$1 + b(1+\kappa) + b\kappa > 0 \qquad (10)$$

Ἡ (8) ἰσχύει διότι $b < 1$, ἡ (10) διότι εἶναι ἄθροισμα θετικῶν μεγεθῶν.
Ἄρα ἀπομένει ὡς κριτήριον εὐσταθείας ἡ (9) : $b\kappa < 1$ ἢ $b < \dfrac{1}{\kappa}$.

3.3. Ὑπόδειγμα τοῦ Hicks

Αἱ βασικαὶ ἐξισώσεις τοῦ ὑποδείγματος εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

$$Y_t = C_t + I_t \qquad (1)$$

$$C_t = bY_{t-1} \qquad (2)$$

$$I_t = I_t' + I_t'' \qquad (3)$$

$$I_t'' = A_0(1+g)^t \qquad (4)$$

$$I_t' = k(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \qquad (5).$$

Ὑποθέτομεν εἰς τὸ ὑπόδειγμα ὅτι ἡ αὐτόνομος ἐπένδυσις I'' αὐξάνει μὲ μίαν σταθερὰν τιμὴν αὐξήσεως g.

Ἀπὸ τὰς (1) — (5) λαμβάνομεν :

$$Y_t - (b+k)Y_{t-1} + kY_{t-2} = A_0(1+g)^t \qquad (6)$$

Μία εἰδικὴ λύσις εἶναι ἡ $\overline{Y}_t = Y_0(1+g)^t$ (7) ὅπου Y_0 μία σταθερά, ἡ ὁποία ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι :

$$Y_0 = \frac{A_0(1+g)^2}{(1+g)^2 - (b+k)(1+g) + k} \qquad (8)$$

Ἡ ἀντίστοιχος χαρακτηριστικὴ τῆς (6) εἶναι ἡ

$$\lambda^2 - (b+k)\lambda + k = 0 \qquad (9)$$

Αἱ συνθῆκαι εὐσταθείας εἶναι

$$1-(b+k)+k=1-b>0 \qquad (10)$$

$$1-k>0 \qquad (11)$$

$$1+(b+k)+k>0 \qquad (12)$$

Ἐξ αὐτῶν ἡ (10), (12) ἰσχύουν, ὁπότε ἀπομένει ἡ (11) δηλ. $k<1$.

4. Εὐστάθεια ὑποδειγμάτων ἐξισώσεων διαφορῶν ἀνωτέρας τάξεως

4.1. Κριτήρια εὐσταθείας ἐξισώσεων διαφορῶν ἀνωτέρας τάξεως

Ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς :

$$\alpha_0 y_{x+n} + \alpha_1 y_{x+n-} + \cdots + \alpha_n y_x = g(x) \qquad (1)$$

μὲ $\alpha_0, \alpha_1 \cdots, \alpha_n$ σταθεράς, ὁρίζεται ὡς γραμμικὴ ἐξίσωσις διαφορῶν ἀνωτέρας τάξεως μὲ σταθεροὺς συντελεστάς.

Ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha_0 y_{x+n} + \alpha_1 y_{x+n-1} + \cdots + \alpha_n y_x = 0 \qquad (2)$$

ὁρίζεται ὡς ἡ ἀντίστοιχος ὁμογενὴς τῆς (1), ἐνῶ ἡ

$$\alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0 \qquad (3)$$

ὁρίζεται ὡς ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τῆς (2).

Ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι εὐσταθείας τῆς (2) εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν ἀκολούθων n ὁριζουσῶν εἶναι νὰ εἶναι θετικαὶ (κριτήριον τοῦ Schur)[1]:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_0 \end{vmatrix}, \quad \left|\begin{array}{cc:cc} \alpha_0 & 0 & \alpha_n & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \alpha_n \\ \hdashline \alpha_n & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & 0 & \alpha_0 \end{array}\right|, \quad \cdots, \quad \left|\begin{array}{cccc:cccc} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-r+1} \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n & \cdots & \alpha_{n-r+2} \\ \hdashline \alpha_{r-1} & \alpha_{r-2} & \cdots & \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \\ \hdashline \alpha_n & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{r-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \cdots & 0 & 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{r-2} \\ \hdashline \alpha_{n-r+1} & \alpha_{n-r+2} & \cdots & \alpha_n & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 \end{array}\right|$$

1) Βλ. [2, σελ. 108].

$$
\left|\begin{array}{cccc:cccc}
\alpha_0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \\
\alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n & \cdots & \alpha_2 \\
\hdashline
\alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \\
\hline
\alpha_n & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\
\alpha_{n-1} & \alpha_n & \cdots & 0 & 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-2} \\
\hdashline
\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0
\end{array}\right|
$$

4.2 Γενικευμένον ὑπόδειγμα Hicks

Ἔστω τὸ γενικώτερον ὑπόδειγμα τοῦ Hicks,

$$Y_t = C_t + I_t \quad (1)$$

$$C_t = b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} \quad (2) \quad \text{μὲ } b_1 + b_2 = b$$

$$I_t = I_t' + I_t'' \quad (3)$$

$$I_t' = k_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + k_2 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) \quad (4) \quad \text{μὲ } k_1 + k_2 = k$$

$$I_t'' = A_0 (1 + g)^t \quad (5)$$

Ἐκ τῶν (1)—(5) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν διαφορῶν τρίτης τάξεως :

$$Y_t - (b_1 + k_1) Y_{t-1} - (k_2 + b_2 - k_1) Y_{t-2} + k_2 Y_{t-3} = A_0 (1 + g)^t \qquad (6)$$

Μία εἰδικὴ λύσις τῆς (6) εἶναι ἡ

$$\bar{Y}_t = Y_0 (1+g)^t = \frac{A_0 (1+g)^3}{(1+g)^3 - (b_1 + k_1)(1+g)^2 - (k_2 + b_2 - k_1)(1+g) + k_2} (1+g)^t$$

Ἡ ἀντίστοιχος χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τῆς ὁμογενοῦς τῆς (7) εἶναι ἡ

$$\lambda^3 - (b_1 + k_1) \lambda^2 - (k_2 + b_2 - k_1) \lambda + k_2 = 0 \qquad (8)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι $k_1 + k_2 = k \geqslant 2$ καὶ $k_2 > k_1$ ὁπότε $k_2 > 1$. (9)

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐὰν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς (8) τότε $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -k_2$ (10) εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πραγματικῶν ριζῶν καὶ $\lambda_1 r^2 = -k_2$ (11) εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς πραγματικῆς ρίζης λ_1 καὶ ἑνὸς ζεύγους μιγαδικῶν ριζῶν μέτρου r.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς ἀπολύτους τιμάς, εἶναι προφανὲς ὅτι τουλάχιστον μία ρίζα πρέπει νὰ εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερη ἀπὸ 1 ἐπειδὴ $k_2 > 1$. Δηλαδὴ εἶναι μία ἱκανὴ συνθήκη ἀσταθείας τῶν λύσεων.

5. Εὐστάθεια ὑποδειγμάτων συστημάτων ἐξισώσεων διαφορῶν

5.1. Συστήματα ἐξισώσεων διαφορῶν

Ὁ ἁπλούστερος τύπος ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων διαφορῶν εἶναι τὸ ἀκόλουθον πρώτης τάξεως σύστημα εἰς τὴν «κανονικήν» του μορφήν :

$$\begin{aligned} y_{x+1} &= \alpha_{11} y_x + \alpha_{12} z_x + g_1(x) \\ z_{x+1} &= \alpha_{21} y_x + \alpha_{22} z_x + g_2(x) \end{aligned} \qquad (1)$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ α_{ij} εἶναι σταθεραὶ καὶ αἱ $g_1(x)$, $g_2(x)$ εἶναι γνωσταὶ συναρτήσεις. Τὸ σύστημα (1) εἶναι μὴ ὁμογενές. Τὸ δὲ ἀντίστοιχον ὁμογενὲς εἶναι τό :

$$\begin{aligned} y_{x+1} &= \alpha_{11} y_x + \alpha_{12} z_x \\ z_{x+1} &= \alpha_{21} y_x + \alpha_{22} z_x \end{aligned} \qquad (2)$$

Τὸ (2) ἐπιλύεται ὡς ἀκολούθως : Ὑποθέτομεν ὅτι $\alpha_{12} \neq \alpha_{12} \neq 0$ ὁπότε

$$z_x = \frac{1}{\alpha_{12}} y_{x+1} - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} y_x \qquad (3)$$

$$z_{x+1} = \frac{1}{\alpha_{12}} y_{x+2} - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} y_{x+1} \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς (3) καὶ (4) εἰς τὴν β′ ἐξίσωσιν τῆς (2). Θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{1}{\alpha_{12}} y_{x+2} - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} y_{x+1} = \alpha_{21} y_x + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}} y_{x+1} - \frac{\alpha_{11}\alpha_{22}}{\alpha_{12}} y_x \qquad \text{ἤ}$$

$$y_{x+2} - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) y_{x+1} - (\alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22}) y_x = 0 \qquad (5)$$

Ἐπιλύωμεν τὴν (5) κατὰ τὰ γνωστά.

α) Ἔστω ὅτι ἡ ἀντίστοιχος χαρακτηριστικὴ τῆς (5) ἔχει ρίζας πραγματικὰς τὰς λ_1 λ_2. Θὰ εἶναι

$$y_x = A_1 \lambda_1^x + A_2 \lambda_2^x \qquad (6) \text{ καὶ}$$

$$z_x = \frac{A_1 \lambda_1^{x+1} + A_2 \lambda_2^{x+1}}{\alpha_{12}} - \frac{\alpha_{12}(A_1 \lambda_1^x + A_2 \lambda_2^x)}{\alpha_{12}} =$$

$$= \frac{\lambda_1 - \alpha_{11}}{\alpha_{12}} A_1 \lambda_1^x + \frac{\lambda_2 - \alpha_{11}}{\alpha_{12}} A_2 \lambda_2^x \qquad (7)$$

Αἱ (6), (7) εἶναι αἱ γενικαὶ λύσεις τοῦ (2).

β) Ἔστω ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς χαρακτηριστικῆς τῆς (5) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι. Τότε

$$y_x = (A_1 + A_2\, x)\, \lambda^{*x} \quad (8) \quad \text{καὶ}$$

$$z_x = \frac{1}{\alpha_{12}} [\, A_1 + A_2\, (x+1)\,]\, \lambda^{*x+1} - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}} (A_1 + A_2\, x)\, \lambda^{*x} =$$

$$= \lambda^{*x} \left[\frac{\lambda^*}{\alpha_{12}} (A_1 + A_2 + A_2\, x) - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} (A_1 + A_2\, x) \right]$$

$$= \left[\frac{(\lambda^* - \alpha_{11})\, A_1 + \lambda^*\, A_2}{\alpha_{12}} + \frac{\lambda^* - \alpha_{11}}{\alpha_{12}} A_2\, x \right] \lambda^*\, x \qquad (9)$$

Ἐπειδὴ $\lambda^* = \frac{1}{2} (\alpha_{11} + \alpha_{22})$ ἡ (9) γράφεται :

$$z_x = \left[\frac{(\alpha_{22} - \alpha_{11})\, A_1 + (\alpha_{11} + A_{22}}{2\, \alpha_{12}} + \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{2\, \alpha_{12}} A_2\, x \right] \lambda^{*x} \qquad (9')$$

γ) Ἐὰν αἱ ῥίζαι τῆς χαρακτηριστικῆς εἶναι μιγαδικαὶ τότε

$$z_x = r^x\, (A_1 \cos w\, x + A_2 \sin wx) \qquad (10)$$

ἤ

$$z_x = \frac{r^{x+1}\, [A_1 \cos (wx + w) + A_2 \sin (wx + w)\,] - \alpha_{11}\, r^x\, (A_1 \cos wx + A_2 \sin wx)}{\alpha_{12}}$$

$$= r^x \left[\frac{[\, r\, A_1\, (\cos wx \cos w - \sin wx \sin w) + A_2\, (\sin wx \cos w + \cos wx \sin w)\,] - \alpha_{11} (A_1 \cos wx + A_2 \sin wx)}{\alpha_{12}} \right]$$

$$= r^x \left[\frac{A_1\, r \cos w + A_2 r \sin w - a_{11}\, A_1}{a_{12}} \cos wt + \frac{A_2 r \cos w - A_1 r \sin w - a_{11} A_2}{\alpha_{12}} \sin wx \right] \qquad (11)$$

Β' Μέθοδος

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς $y_x = \alpha_1\, \lambda^x$, $z_x = \alpha_2\, \lambda^x$ εἰς τὴν (2). Θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha_1\, \lambda^{x+1} = \alpha_{11}\, \alpha_1\, \lambda^x + \alpha_{12}\, \alpha_2\, \lambda^x$$

$$\alpha_2\, \lambda^{x+1} = \alpha_{21}\, \alpha_1\, \lambda^x + \alpha_{22}\, \alpha_2\, \lambda^x$$

ἤ

$$\lambda^x \; [\, (\alpha_{11} - \lambda)\, \alpha_1 + \alpha_{12}\, \alpha_2\,] = 0$$

$$\lambda^x \; [\, \alpha_{21}\, \alpha_1 + (\alpha_{22} - \lambda)\, \alpha_2\,] = 0 \qquad (12)$$

Μὲ $\lambda \neq 0$, αἱ συναρτήσεις y_x, z_x θὰ εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος (2) ἐὰν τὸ σύστημα (12) ἱκανοποιεῖται διὰ κάθε x, δηλαδὴ ἐὰν

$$\begin{aligned}(\alpha_{11}-\lambda)\,\alpha_1 + \alpha_{12}\,\alpha_2 &= 0\\ \alpha_{21}\,\alpha_1 + (\alpha_{22}-\lambda)\,\alpha_2 &= 0 \qquad (13)\end{aligned}$$

Τὸ (13) ἔχει καὶ τὴν λύσιν $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ἀλλὰ τὴν ἀποκλείομεν.

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις πρέπει $\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ (14) ἡ ὁποία θὰ μᾶς δώσῃ τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος τῶν Ε.Δ.

Ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις n ἐξισώσεων εἶναι :

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

5.2 Εὐστάθεια λύσεων συστημάτων ἐξισώσεων διαφορῶν

Ἡ εὐστάθεια τῶν λύσεων τοῦ συστήματος μελετᾶται ἐκ τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου n βαθμοῦ ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς (15). Τὰ κριτήρια ποὺ ἐφαρμόζονται εἶναι τὰ ἴδια ποὺ ἔχομεν ἐφαρμόσει εἰς τὰς ἐξισώσεις διαφορῶν ἀνωτέρας τάξεως. Δυνάμεθα ὅμως καὶ χωρὶς νὰ ἀναπτύξωμεν τὴν ὁρίζουσαν νὰ εὕρωμεν κριτήρια εὐσταθείας.

«Συνθῆκαι εὐσταθείας» ἐννοοῦμεν ὡς συνήθως «συνθήκας» ὅτι αἱ ρίζαι τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως (15) (πραγματικαὶ ἢ μιγαδικαὶ) πρέπει νὰ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότεραι τῆς μονάδος ἢ ὅτι ὅλαι αἱ ρίζαι κεῖνται ἐντὸς τοῦ μοναδιαίου κύκλου εἰς τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον.

I) Ἔστω $\alpha_{ij} \geqslant 0$. Τότε ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι εἶναι ὅτι αἱ ἀκόλουθοι n ἀνισότητες ἰσχύουν :

$$1-\alpha_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1-\alpha_{11} & -\alpha_{11} \\ -\alpha_{21} & 1-\alpha_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ -\alpha_{21} & 1-\alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & 1-\alpha_{33} \end{vmatrix} > 0 \cdots \begin{vmatrix} 1-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & 1-\alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & 1-\alpha_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Μὲ ἄλλας λέξεις αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι τοῦ α' στοιχείου τῆς μήτρας $[I - A]$, ὅπου $A = [\alpha_{ij}]$ εἶναι ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος διαφορῶν, πρέπει νὰ εἶναι ὅλαι θετικαί.

II) Ἔστω ὅτι $\alpha_{ij} > 0$ (οἱ συντελεσταὶ εἶναι ὅλοι θετικοί).

Σχηματίζομεν τὰ n ἀθροίσματα :

$S_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Τότε ἱκαναὶ συνθῆκαι εἶναι ὅτι κανένα S_j δὲν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ 1 καὶ τουλάχιστον ἕνα ἐξ αὐτῶν εἶναι μικρότερον ἀπὸ 1.

III) Ἔστω $\alpha_{ij} \geqslant 0$. Τότε, συνθῆκαι εὐσταθείας εἶναι ὅτι ὅλα τὰ S_j (ὡς ὁρίζονται εἰς II) νὰ εἶναι μικρότεραι ἀπὸ 1.

IV) Ἔστω $\alpha_{ij} \geqslant 0$. Τότε συνθῆκαι ἀσταθείας εἶναι ὅτι ὅλα τὰ S_j εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ 1.

V) Ἔστω α_{ij} ὅτι εἶναι αὐθαίρετα. Σχηματίζομεν τὰ n ἀθροίσματα $| S_j | = \sum_{i=1}^{n} | \alpha_{ij} |$, $j = 1, 2, \ldots n$. Τότε ἱκαναὶ σηνθῆκαι εὐσταθείας εἶναι ὅτι ὅλα τὰ $| S_j |$ εἶναι μικρότερα ἀπὸ 1. Σημειώνομεν ὅτι αὐτὴ ἡ συνθήκη ἀπορροφᾶ τὴν συνθήκην III (ὅταν $\alpha_{ij} \geqslant 0$, τότε $\Sigma \, | \alpha_{ij} | = \Sigma \, \alpha_{ij}$).

VI) Μία ἀναγκαία συνθήκη εὐσταθείας εἶναι $| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} | < n$.

VII) Μία ἀναγκαία συνθήκη εὐσταθείας εἶναι ὅτι ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος διαφορῶν, $| A |$, νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος ἀπολύτως.

5.3. Ὑπόδειγμα πολλαπλασιαστοῦ εἰς μίαν ἀνοικτὴν οἰκονομίαν

Τὸ δυναμικὸν ὑπόδειγμα τὸ περιλαμβάνον πολλαπλασιαστὴν ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου διὰ δύο χώρας εἶναι τὸ ἀκόλουθον :

Χώρα 1		Χώρα 2	
$C_{1t} = b_1 Y_{1t-1}$		$C_{2t} = b_2 Y_{2t-1}$	
$I_{1t} = I_{01} + h_1 Y_{1t-1}$		$I_{2t} = I_{02} + h_2 Y_{2t-1}$	
$M_{1t} = M_{01} + m_1 Y_{1t-1}$	(1)	$M_{2t} = M_{02} + m_2 Y_{2t-1}$	(2)
$X_{1t} = M_{2t}$		$X_{2t} = M_{1t}$	
$Y_{1t} = C_{1t} + I_{1t} + X_{1t} - M_{1t}$		$Y_{2t} = C_{2t} + I_{2t} + X_{2t} - M_{2t}$	

Ὅπου b_i : ὁ συντελεστὴς ῥοπῆς πρὸς κατανάλωσιν $0 < b_i < 1$

h_i : » » » ἐπένδυσιν $0 < h_i < 1$

m_i : » » » εἰσαγωγὰς $0 < m < 1$

M_{it} : εἰσαγωγαὶ τῆς χώρας i

X_{it} : ἐξαγωγαὶ » » i.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας τῶς χωρῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= (b_1 + h_1 + m_1)\, Y_{1t-1} + m_2\, Y_{2t-1} + (I_{01} + M_{02} - M_{01}) \\ Y_{2t} &= m_1\, Y_{1t-1} + (b_2 + h_2 - m_2)\, Y_{2t-1} + (I_{02} + M_{01} - M_{02}) \end{aligned} \tag{3}$$

Ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τῆς ὁμογενοῦς μορφῆς τοῦ συστήματος (3) εἶναι :

$$\begin{vmatrix} (b_1 + h_1 - m_1) - \lambda & m_2 \\ m_1 & (b_2 + h_2 - m_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι εὐσταθείας εἶναι

$$1 - b_1 - h_1 + m_1 > 0 \tag{5}$$

$$(1 - b_1 - h_1 + m_1)\,(1 - b_2 - h_2 + m_2) - m_1\, m_2 > 0 \tag{6}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Baumol, W. J., Economic Dynamics, 1970.
2) Gandolfo G., Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics, 1972.
3) Coppel W. A., Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations, 1965.
4) Morishima M., Equilibrium, Stability and Growth, 1964.
5) Παναγιωτοπούλου Α., Στοιχεῖα Μαθηματικῶν, τεῦχος ΙΙ, 1974.
6) Ρήγα Κ., Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Οἰκονομικὴν Κυβερνητικήν, Σπουδαί, τεῦχος 1, 1976.
7) Σαραντίδη Σ., Ἀνάλυσις Ἐθνικοῦ Εἰσοδήματος καὶ Ἐθνικῶν Λογαριασμῶν, 1973.
8) Yamane T., Mathematics for Economists, 1962.