ΤΟ ΟΜΟΘΕΤΙΚΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΖΗΤΗΣΕΩΣ

Τοῦ ΘΕΟΔΩΡΟΥ Γ. ΓΚΑΜΑΛΕΤΣΟΥ

Καθηγητοῦ τῆς Α.Β.Σ.Π.

1. Ἐφαρμογὴ τῆς Κλασικῆς Θεωρίας Ζητήσεως εἰς τὴν Σύγχρονον Ἔρευναν

Ἡ κλασικὴ θεωρία τῆς ζητήσεως τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι γνωστὴ εἰς τοὺς οἰκονομολόγους ἀπὸ τὰ μέσα τοῦ περασμένου αἰῶνος. Ἡ ἐφαρμογὴ ὅμως τῆς θεωρίας ταύτης ἀνεπτύχθη τελευταίως λόγῳ ἀφ' ἑνὸς τῆς ἀνάγκης τῶν προγραμμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, καὶ ἀφ' ἑτέρου τῆς ἀναπτύξεως τῆς οἰκονομετρικῆς μεθοδολογίας. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς θεωρίας ταύτης ἐγένετο ὑπὸ τῶν ἐρευνητῶν, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς διεθνοῦς βιβλιογραφίας, κατὰ διαφόρους τρόπους. Λόγω τῆς ἐκτενοῦς βιβλιογραφίας καὶ πρὸς διευκόλυνσιν τοῦ ἀναγνώστου ἔχομεν κατατάξει τὰς μελέτας ταύτας εἰς πέντε βασικὰς κατηγορίας, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν ὡρισμένα κοινὰ χαρακτηριστικά.

Εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν ἀνήκουν αἱ μελέται, αἱ ὁποῖαι προϋποθέτουν μίαν προσθετικὴν συνάρτησιν χρησιμότητος, ἐκ τῆς ὁποίας πηγάζουν αἱ συγκεκριμένης μορφῆς συναρτήσεως ζητήσεως. Τοιαῦται μελέται εἶναι τῶν Stone [1], Goldberger and Gamaletsos [2], Gamaletsos [3, 4] κ.ἄ. Σημειωτέον ὅτι ἡ χρησιμοποίησις μιᾶς προσθετικῆς συναρτήσεως χρησιμότητος ὡς βάσεως διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων ζητήσεως γίνεται κυρίως διὰ τὴν μείωσιν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὑπὸ ἐκτίμησιν παραμέτρων.

Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν ὑπάγονται αἱ μελέται, αἱ ὁποῖαι προϋπο-

1. Stone R., «Linear Expenditure Systems and Demand Analysis : An Application to the Pattern of British Demand», *Economic Journal*, τόμ. 24, Σεπτέμβριος 1954, σελ. 511-527.

2. Goldberger A.S., and Gamaletsos Theodore, «A Cross Country Comparison of Consumer Expenditure Patterns», *European Economic Review*, τόμ. 1, Ἄνοιξις 1970, σελ. 357 - 400.

3. Gamaletsos Theodore, «Further Analysis of Cross Country Comparison of Consumer Expenditure Patterns», *European Economic Review*, Ἀπρίλιος 1973, τόμ. 4, σελ. 1—20.

4. Gamaletsos Theodore, «A Generalized Linear Expenditure System», *Applied Economics*, τόμ. 6, 1974, σελ. 59—71.

θέτουν συγκεκριμένης μορφῆς ἐξισώσεις ζητήσεως καὶ χρησιμοποιοῦν ἐκλεκτικῶς ὡρισμένας ἐκ τῶν κλασικῶν συνθηκῶν διὰ νὰ μειώσουν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὑπὸ ἐκτίμησιν παραμέτρων. Τοιαῦται μελέται εἶναι τῶν Houthakker [5], Leser [6 7], Somermeyer [8] κ.ἄ. Εἰς τὰς ἐργασίας αὐτὰς ἐχρησιμοποιήθησαν ἐξισώσεις ζητήσεως τῆς μορφῆς Cobb—Douglas τροποποιημέναι ὅμως κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἰσχύῃ ὁ εἰσοδηματικὸς περιορισμός.

Εἰς τὴν τρίτην κατηγορίαν ἀνήκουν αἱ μελέται αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦν συναρτήσεις ζητήσεως, ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην κατηγορίαν, ἀλλὰ ἐφαρμόζουν συστηματικῶς τὰς κλασικὰς συνθήκας διὰ νὰ ἔχουν ἀφ' ἑνὸς θεωρητικὴν ὑπόστασιν καὶ ἀφ' ἑτέρου διὰ νὰ μειώσουν τὸν ἀριθμὸν τῶν παραμέτρων. Εἰς τὴν κατηγορίαν ταύτην ὑπάγονται αἱ μελέται τῶν Powell [9 10], Theil [11], Theil and Mnookin [12], κ. ἄ.

Εἰς τὴν τετάρτην κατηγορίαν ὑπάγονται αἱ μελέται ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι προϋποθέτουν συγκεκριμένης μορφῆς ἐξισώσεις ζητήσεως, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐφαρμόζονται συστηματικῶς ὅλαι αἱ κλασικαὶ συνθῆκαι καὶ ἐπὶ πλέον χρησιμοποιοῦνται ἐκλεκτικῶς περιορισμοὶ προερχόμενοι ἐκ τῆς ὑποθέσεως τῆς προσθετικότητος τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος. Ἡ ἐργασία τοῦ Barten [13 14], ἀνήκει εἰς αὐτὴν τὴν κατηγορίαν.

---

5. Houthakker, H.S., «The Influence of Prices and Incomes on Household Expenditures», *Bulletin of the International Institute of Statistics*, τόμ. 23, Ὀκτώβριος 1961, ἀριθ. 2, σελ. 704—740.

6. Leser, C.E.V., «Commodity Group Expenditure Functions for the United Kingdom, 1948—1957», *Econometrica*, τόμ. 29, Ἰανουάριος 1961, σελ. 24—32.

7. Leser, C.E.V., «Forms of Engel Funtions», *Econometrica*, τόμ. 31, Ὀκτώβριος 1963, σελ. 694—703.

8. Somermeyer, W.H., «Simultaneous Estimation of Complete Sets of Prise and Income Elasticities : Application of an Allocation Model to Time Series Data», Natherlands Central Bureau of Statistics, 1961.

9. Powell Alan, «Post—War Consumption in Canada : A. First Look at the Aggregates», *Canadian Journal of Economics and Political Science*, τόμ. 31, Νοέμβριος 1965, σελ. 559-565.

10. Powell Alan, «A Complete System of Consumer Demand Equation for the Australian Economy fitted by a Model of Additive Preferences», *Econometrica*, τόμ. 34, Ἰούλιος 1966.

11. Theil, H., «The Information Approach to Demand Analysis», *Econometrica*, τόμ. 33, Ἰανουάριος 1965, σελ. 67 - 87.

12. Theil, H., and Mnookin, R. H., «The Information Value of Demand Equations and Predictions», *The Journal of Political Economy*, τόμ. 74, Φεβρουάριος 1966, σελ. 34-45.

13. Barten, A.P., «Consumer Demand Function under Conditions of Almost Additive Preferences», *Econometrica*, τόμ. 32, Ἰανουάριος—Ἀπρίλιος 1964, σελ. 1 - 38.

14. Barten, A.P., «Evidence on the Slutsky Conditions for Demand Equations», Econometric Institute, Netherland School of Economics : Report 6504, Ἀπρίλιος 1965.

Τέλος εἰς τὴν πέμπτην κατηγορίαν ὑπάγονται αἱ ἐργασίαι, αἱ ὁποῖαι προϋποθέτουν ὡρισμένης μορφῆς ἐξισώσεις ζητήσεως, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐφαρμόζονται ἐκλεκτικῶς αἱ κλασικαὶ συνθῆκαι, καὶ ἐπὶ πλέον χρησιμοποιοῦνται ὡρισμέναι «αὐθαίρετοι» ὑποθέσεις. Ἡ ἐργασία τοῦ Houthakker[15] ὑπάγεται εἰς αὐτὴν τὴν κατηγορίαν.

2. Τὸ Θεωρητικὸν Ὑπόδειγμα

Τὸ πλῆρες σύστημα ἐξισώσεων ζητήσεως, τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται ἐνταῦθα ἀνήκει εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν τῶν προηγουμένων μελετῶν. Τοῦτο διότι ἡ βάσις τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι μία προσθετικὴ καὶ συγκεκριμένως «ὁμοθετικὴ» συνάρτησις χρησιμότητος.

Εἰς ἄλλην ἐργασίαν τοῦ γράφοντος[17] ἀνεφέρθη ὅτι τὸ Γενικὸν Γραμμικὸν σύστημα ἐξισώσεων ζητήσεως (Generalized Linear Expenditure System) προέρχεται ἐκ μιᾶς «σταθερᾶς ἐλαστικότητος ὑποκαταστάσεως» συναρτήσεως χρησιμότητος, ἡ ὁποία λαμβάνει τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος τῶν Stone - Geary διὰ $\rho \to 0$, ἐνῶ διὰ $\rho \to \infty$ λαμβάνει τὴν μορφὴν τῆς λεγομένης «ὁμοθετικῆς» συναρτήσεως χρησιμότητος

$$(2.1) \qquad u = -\Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i e^{b_i q_i}$$

ὅπου α_i καὶ b_i εἶναι παράμετροι ἔχουσαι τοὺς περιορισμοὺς $\alpha_i > 0$, $b_i > 0$, $\Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, αἱ δὲ q_i εἶναι αἱ ζητούμεναι ποσότητες τῆς i κατηγορίας καταναλωτικῶν ἀγαθῶν[18].

Τὸ «Ὁμοθετικὸν» Γραμμικὸν Σύστημα ἐξισώσεων ζητήσεως προέρχεται ἐκ τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος (2.1) ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τῆς ἐξισώσεως τοῦ εἰσοδήματος, ἡ ὁποία ἐν προκειμένῳ εἶναι $\Sigma_{i=1}^{n} p_i q_i = y$, ὅπου p_i εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ i ἀγαθοῦ καὶ y εἶναι τὸ (χρηματι-

---

15. Houthakker, H. S., «Additive Preferences», *Econometrica*, τόμ. 28, Ἀπρίλιος 1960, σελ. 244-256.

16. Σημειωτέον ὅτι ὡς ὁμοθετικὰς χαρακτηρίζομεν ἐκείνας, τὰς συναρτήσεις χρησιμότητος τῶν ὁποίων αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν κατὰ μῆκος μιᾶς εὐθείας διερχομένης ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων. Πρὸς τοῦτο βλέπε Γκαμαλέτσου Θεοδώρου *Θεωρητικὴ Οἰκονομική*, Τόμος β΄ σελ. 311.

17. Γκαμαλέτσος Θεόδωρος, *Διακλαδικὴ Ἀνάλυσις τῶν Δαπανῶν Ἰδιωτικῆς Καταναλώσεως τῆς Ἑλληνικῆς Οἰκονομίας*, ΚΕΠΕ, Ἀθῆναι 1975, σελ. 91.

18. Σημειωτέον ὅτι ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις χρησιμότητος ἀνεφέρθη εἰς τὴν διεθνῆ βιβλιογραφίαν ὑπὸ τῶν Chipman καὶ Pollak χωρὶς ὅμως νὰ ἔχουν ἀναπτύξει πλήρως τὸ σύστημα τοῦτο καὶ νὰ ἔχουν ἀναλύσει τὰ χαρακτηριστικὰ αὐτοῦ. Ἡ πλήρης παρουσίασις τοῦ ἀνωτέρω ὑποδείγματος γίνεται διὰ *πρώτην φορὰν* εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν. Σχετικῶς βλέπε:

— Chipman, T.S., «A Survey of the Theory of International Trade: Part II, The Neoclassical Theory», *Econometrica*, Vol. 33, No 44, Ὀκτώβριος 1965, σελ. 685—760.

— Pollak, P. A., «Additive Utility Functions and Linear Engel Curves», Discussion Paper No 53, June 1967 University of Pennsylvania, Department of Economics, σελ. 10.

κὸν) εἰσόδημα. Λαμβάνοντες τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς (2.1) ὡς πρὸς q_i ἔχομεν τὴν συνάρτησιν τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος

$$(2.2) \qquad u_i = \partial u/\partial q_i = \alpha_i \, b_i \, e^{-b_i q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ἡ ὁποία διὰ $\alpha_i > 0$ καὶ $b_i > 0$ εἶναι θετική. Ἡ μερικὴ παράγωγος τῆς (2.2) ὡς πρὸς q_i εἶναι

$$(2.3) \qquad u_{ji} = \partial^2 u/\partial q_i \, \partial q_j = \begin{cases} -\alpha_i \, b_i^2 \, e_i^{-b_i q_i} \text{ ἢ } -b_i \, u_i & \text{διὰ } i = j \\ 0 & \text{διὰ } i \neq j \end{cases}$$
$$(i, j = 1, \ldots, n).$$

Ἐκ τῆς (2.3) παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀρνητικὴ διὰ $i = j$, ἱκανοποιεῖ δηλαδὴ τὴν συνθήκην δευτέρας τάξεως (τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος ὑπὸ τὸν εἰσοδηματικὸν περιορισμόν), ἐνῷ διὰ $i \neq j$ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἱκανοποιεῖ τὴν ὑπόθεσιν τῆς προσθετικότητος τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος.

Ὡς γνωστὸν ἐκ τῶν συνθηκῶν πρώτης τάξεως τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος (2.1) ἔχομεν

$$(2.4) \qquad u_i = \lambda p_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ἡ ὁποία γίνεται

$$(2.5) \qquad \alpha_i \, b_i \, e^{-b_i q_i} = \lambda p_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

δι' ἀντικαταστάσεως τῆς ἐξισώσεως (2.2) εἰς τὴν (2.4) Λύοντες ἐν συνεχείᾳ τὴν (2.5) ὡς πρὸς q_i ἔχομεν

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} q_i &= b_i^{-1} \ln (\alpha_i \, b_i/\lambda p_i) \\ &= b_i^{-1} \ln (\alpha_i \, b_i/p_i) - b_i^{-1} \ln \lambda \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2.6) ἐπὶ p_i καὶ ἀθροίζοντες ὡς πρὸς i ἔχομεν

$$(2.7) \qquad \begin{aligned} y &= \Sigma_{i=1}^{n} \; p_i \, q_i \\ &= \Sigma_{i=1}^{n} \; p_i b_i^{-1} [\ln (\alpha_i \, b_i/p_i) - \ln \lambda] \\ &= -\ln \lambda \, (\Sigma_{i=1}^{n} \, p_i \, b_i^{-1}) + \Sigma_{i=1}^{n} \, p_i \, b_i^{-1} \ln (\alpha_i \, b_i/p_i), \end{aligned}$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν τοῦ Lagrange

$$(2.8) \qquad \lambda = e^{(\Sigma p_i b_i^{-1})^{-1} \, (\Sigma p_i b_i^{-1} \ln (\alpha_i b_i/p_i))} \; e^{-y \, (\Sigma p_i \, b_i^{-1})^{-1}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν ἐξίσωσιν (2.8) εἰς τὴν (2.6) ἀνωτέρω ἔχομεν

$$(2.9)\qquad q_i = b_i^{-1} \ln(\alpha_i b_i/p_i) - b_i^{-1} [\Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1}]^{-1} [\Sigma_{i=1}^{n} p_i^{-1} \ln(\alpha_i b_i/p_i)]$$
$$+\ b_i^{-1} [\Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1}]^{-1} y \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Τὸ «Ὁμοθετικὸν Γραμμικὸν Σύστημα» ἐξισώσεων ζητήσεως (Homothetic Linear Expenditure System ἢ ἐν συντομίᾳ HLES) εὑρίσκεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἐξισώσεων ζητήσεων (2.9) ἐπὶ p_i, εἶναι δὲ τῆς μορφῆς

$$(2.10)\qquad e_i = b_i^{-1} p_i \ln(\alpha_i b_i/p_i) - b_i^{-1} p_i [\Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1}]^{-1} [\Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1} \ln(\alpha_i b_i/p_i)] +$$
$$b_i^{-1} p_i\ [\Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1}]^{-1} y \qquad (i = 1, \ldots, n).$$ [19]

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα γράφεται καὶ ὡς

$$(2.11)\qquad e_i = p_i \gamma_i - \beta_i \Sigma_{i=1}^{n} p_i \gamma_i + \beta_i y$$
$$= p_i \gamma_i + \beta_i (y - \Sigma_{i=1}^{n} p_i \gamma_i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ἐὰν θέσωμεν ὅπου $p_i b_i^{-1} [\Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1}]^{-1} = \beta_i$, καὶ $b_i^{-1} \ln(\alpha_i b_i/p_i) = \gamma_i$.

Ἐκ τῆς (2.11) ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι τὸ Ὁμοθετικὸν Γραμμικὸν Σύστημα ἐξισώσεων ζητήσεως εἶναι γενικωτέρας μορφῆς τοῦ (ἁπλοῦ) Γραμμικοῦ Συστήματος τοῦ καθηγητοῦ Stone. Ἡ γενίκευσις δὲ αὕτη παρουσιάζεται ἀναλυτικώτερα κατωτέρω, ἀφοῦ προηγουμένως δοθοῦν αἱ ἐλαστικότητες εἰσοδήματος καὶ τιμῶν.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Stone ἐπεκράτησε μέχρι τοῦδε εἰς τὴν διεθνῆ βιβλιογραφίαν λόγῳ τῆς ἁπλότητος αὐτοῦ καὶ τοῦ περιωρισμένου ἀριθμοῦ τῶν ὑπὸ ἐκτίμησιν παραμέτρων. Ἀλλὰ καὶ τὸ παρὸν ὑπόδειγμα ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν παραμέτρων (n b_i καὶ (n — 1) α_i) πρὸς ἐκεῖνον τοῦ ὑποδείγματος τοῦ Stone. Ὑστερεῖ βεβαίως ὡς πρὸς τὴν ἁπλότητά του, καθιστῶντας σχετικῶς δυσχερῆ τὴν ἐκτίμησιν αὐτοῦ [20].

Ὁ τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖον γίνεται ὁ ἐπιμερισμὸς τοῦ συνόλου τῶν καταναλωτικῶν δαπανῶν εἰς τὰς ἐπὶ μέρους κατηγορίας εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς ἐκεῖνον τῶν ὑποδειγμάτων Γραμμικοῦ καὶ Γενικοῦ Γραμμικοῦ. Ἡ βασικὴ διαφορὰ με-

---

19. Ἐὰν ἀθροίσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2.10) παρατηροῦμεν ὅτι ἱκανοποιεῖται ὁ εἰσοδηματικὸς περιορισμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ βασικὴν προϋπόθεσιν τῶν συστημάτων αὐτῶν.

20. Ἡ δυσχέρεια εἰς τὴν ἐκτίμησιν αὐτοῦ ἔγκειται βασικῶς εἰς τὴν λογαριθμικὴν μορφὴν τῶν παραμέτρων αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι ἐνῷ θεωρητικῶς λαμβάνουν μόνον θετικὰς τιμάς, κατὰ τὴν μὴ γραμμικῶς ἐκτίμησιν ὅμως αὐτῶν εἶναι πιθανὸν ὁ ὑπολογιστὴς νὰ ἐπιλέξῃ μίαν ἀρνητικὴν τιμήν. Μία λύσις τῆς ἐνδεχομένης ταύτης δυσχερείας εἶναι νὰ γίνῃ ἡ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων ὑπὸ τὸν περιορισμὸν ὅτι αὗται δὲν θὰ λαμβάνουν ἀρνητικὰς τιμάς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην βεβαίως μετατοπίζομεν τὸ πρόβλημά μας, διότι ναὶ μὲν ἀποφεύγομεν τὴν δυσχέρειαν τῆς ἐκτιμήσεως τοῦ ὑποδείγματος, δὲν ἐλέγχομεν ὅμως ὅπως θὰ ἔπρεπε τὴν ἐφαρμογὴν τῆς κλασικῆς θεωρίας, ἡ ὁποία γίνεται μόνον ὅταν ἐλευθέρως (χωρὶς περιορισμούς) ἐκτιμῶμεν τὰς παραμέτρους τῶν συστημάτων αὐτῶν.

ταξὺ τοῦ παρόντος ὑποδείγματος καὶ τοῦ ὑποδείγματος τοῦ Stone εἶναι ὅτι τὰ «ὁριακὰ ποσοστὰ συμμετοχῆς»

$$p_1 b_1^{-1} [\Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1}]^{-1}, \ldots, p_n b_n^{-1} [\Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1}]^{-1}$$

δὲν εἶναι σταθερά, ὡς συμβαίνει εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Stone, ἀλλὰ ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν τιμῶν.

Ὁ καταναλωτής, ὡς γνωστόν, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὑποδείγματος τοῦ Stone, δὲν ἀλλάσσει τὰ ποσοστὰ ταῦτα συμμετοχῆς διαχρονικῶς. Συμφώνως ὅμως πρὸς τὸ παρὸν ὑπόδειγμα οἱαδήποτε μεταβολὴ τῶν τιμῶν διαχρονικῶς ἢ γενικώτερον οἱαδήποτε μεταβολὴ τῶν προτιμήσεων τοῦ καταναλωτοῦ — ἡ ὁποία ἐν προκειμένῳ θεωρεῖται ὅτι ἀντανακλᾶται εἰς τὴν μεταβολὴν τῶν τιμῶν — ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν μεταβολὴν τῶν ὁριακῶν ποσοστῶν συμμετοχῆς. Ὁ Stone προσεπάθησε νὰ διορθώσῃ τὴν ἀδυναμίαν ταύτην τοῦ ὑποδείγματός του διὰ τῆς παροχῆς μιᾶς διαστάσεως χρόνου εἰς τὰ σταθερὰ ὁριακὰ ποσοστὰ συμμετοχῆς. Τοῦτο ὅμως δὲν ἔχει τὴν θεωρητικὴν τελειότητα τοῦ παρόντος ὑποδείγματος. Σημειωτέον ὅτι εἰς ἀμφότερα τὰ ὑποδείγματα αἱ λεγόμεναι «καμπύλαι τοῦ Engel» εἶναι εὐθεῖαι. Οἱ συντελεσταί

$$\text{(2.12)} \quad \beta_i = \partial e_i / \partial y$$

$$= p_i b_i^{-1} (\Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1})^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν τιμῶν, ἀλλὰ εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ εἰσοδήματος.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2.9) διὰ παραγωγήσεως ὡς πρὸς y καὶ p_j ($j = 1, \ldots, n$) λαμβάνομεν τὰς ἐλαστικότητος εἰσοδήματος καὶ τιμῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι τῆς μορφῆς

$$\text{(2.13)} \quad \eta_i = (\partial q_i / \partial y)(y / q_i)$$

$$= \beta_i / w_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ὅπου $\quad w_i = e_i / y$,

$$\text{(2.14)} \quad \eta_{ii} = (\partial q_i / \partial p_i)(p_i / q_i)$$

$$= - b_i^{-1} q_i^{-1} + p_i (b_i \Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1})^{-1} (b_i^{-1} q_i^{-1} - 1)$$

$$= - b_i^{-1} q_i^{-1} (1 - \beta_i) - \beta_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

καὶ

$$\text{(2.15)} \quad \eta_{ij} = (\partial q_i / \partial p_j)(p_j / q_i)$$

$$= \beta_i b_j^{-1} (p_j / p_i) q_i^{-1} [1 + \ln (p_j / p_i) + \ln (\alpha_i b_i / \alpha_j b_j) - b_i q_i]$$

$$(i \neq j) \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (2.12) παρατηροῦμεν ὅτι ὅλαι αἱ ἐλαστικότητες εἰσοδήματος εἶναι θετικαί, ἐφ' ὅσον ὅλοι οἱ b_i (ἑπομένως καὶ οἱ β_i) εἶναι θετικοί·

εἰς τὸ παρὸν ὑπόδειγμα ὅλα τὰ ἀγαθὰ εἶναι «κανονικά». Αἱ εἰσοδηματικαὶ ἐλαστικότητες τείνουν πρὸς τὴν μονάδα, ὅσον τὰ «ὁριακὰ ποσοστὰ συμμετοχῆς» β_i τείνουν νὰ ἐξισωθοῦν πρὸς τὰ ἀντοίστοιχα «μέσα ποσοστὰ συμμετοχῆς», w_i.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2.14) παρατηροῦμεν ὅτι ὅλαι αἱ ἐλαστικότητες τιμῶν κατὰ Cournot κεῖνται μεταξὺ μηδενὸς καὶ μεῖον ἄπειρον, ἐφ' ὅσον ὅλα τὰ b_i καὶ β_i εἶναι θετικά. Εἰς τὸ παρὸν ὑπόδειγμα δὲν τίθεται περιορισμὸς εἰς τὰς τιμὰς τῶν ἐλαστικοτήτων, ὡς τοῦτο συνέβαινεν εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Stone (ὅπου ἔπρεπε αὗται νὰ λαμβάνουν τιμὰς μεταξὺ 0 καὶ — 1).

Τέλος, ἐκ τῶν σταυροειδῶν ἐλαστικοτήτων τιμῶν (2.15) ἐπαληθεύεται ἡ ὕπαρξις τῆς ὑποκαταστάσεως τῶν ἀγαθῶν· ὑπενθυμίζεται ὅτι, εἰς τὰ συστήματα τὰ προερχόμενα ἐκ μιᾶς προσθετικῆς συναρτήσεως χρησιμότητος δὲν ὑφίσταται συμπληρωματικότης τῶν ἀγαθῶν. Αἱ ἀνωτέρω ἐλαστικότητες τιμῶν (2.14) καὶ (2.15) δύνανται νὰ γραφοῦν καὶ ὡς

$$\eta_{ii} = -\eta_i \left[w_i - \eta_{\lambda y}^{-1} (1 - w_i \eta_i)\right] \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.16}$$

καὶ

$$\eta_{ij} = -\eta_i w_j \left(1 + \eta_{\lambda y}^{-1} \eta_j\right) \qquad (i \neq j) \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{2.17}$$

ἀντιστοίχως, ὅπου $\eta_{\lambda y}$ εἶναι ἡ ἐλαστικότης εἰσοδήματος τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος αὐτοῦ (income elasticity of marginal utility of income), ἡ ὁποία εἰς τὸ παρὸν ὑπόδειγμα δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\begin{aligned} \eta_{\lambda y} &= (\partial \lambda / \partial y)(y / \lambda) \\ &= -(\Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1})^{-1} y. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ὁ δὲ δείκτης «εὐκαμψίας τοῦ εἰσοδήματος» (income flexibility) ἢ δείκτης τοῦ Frisch, ὁ ὁποῖος, ὡς γνωστόν, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀντίστροφον τῆς ἐλαστικότητος εἰσοδήματος τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος τοῦ εἰσοδήματος, εἰς τὸ παρὸν ὑπόδειγμα εἶναι

$$\varphi = (\partial \lambda / \partial y)(\lambda / y) = \eta_{\lambda y}^{-1} = -(\Sigma_{i=1}^{n} p_i b_i^{-1})\, y^{-1}. \tag{2.19}$$

Αἱ κατὰ Slutsky ἐλαστικότητες τιμῶν εἰς τὸ Ὁμοθετικὸν Γραμμικὸν Σύστημα εὑρίσκονται χρησιμοποιοῦντες τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν τοῦ Slutsky

$$\eta_{ij}^{*} = \eta_{ij} + \eta_i w_j \qquad (i, j = , \ldots, n). \tag{2.20}$$

Σημειωτέον ὅτι τὸ Ὁμοθετικὸν Γραμμικὸν ὑπόδειγμα, ὅπως τὸ Γραμμικὸν τοῦ Stone καὶ τὸ Γενικὸν Γραμμικὸν τοῦ γράφοντος, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν ἀνάλυσιν τῆς ζητήσεως ἀγαθῶν ὁμαδοποιημένων εἰς διαφόρους κατηγορίας καὶ ὑποκατηγορίας.

3. Συμπέρασμα

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως τῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ Ὁμοθετικοῦ Γραμμικοῦ ὑποδείγματος συμπεραίνομεν ὅτι, τοῦτο ὑπερέχει ἀπὸ θεωρητικῆς τουλάχιστον ἀπόψεως τοῦ Γραμμικοῦ ὑποδείγματος τοῦ Stone διότι: (α) Τὰ «ὁριακὰ ποσοστὰ συμμετοχῆς» (ἢ οἱ συντελεσταὶ τοῦ εἰσοδήματος) δὲν εἶναι σταθερὰ διαχρονικῶς, ἀλλὰ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς μεταβολῆς τῶν τιμῶν τῶν ἀγαθῶν (καὶ γενικώτερον ἐκ τῆς μεταβολῆς τῶν προτιμήσεων τῶν καταναλωτῶν), (β) Αἱ ἐλαστικότητες τιμῶν λαμβάνουν οἱανδήποτε ἀρνητικὴν τιμὴν καὶ δὲν λαμβάνουν τιμὰς μεταξὺ 0 καὶ —1, ὡς συμβαίνει εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦ Stone, κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον δὲν ἀποκλείονται ἐκ τοῦ παρόντος ὑποδείγματος τὰ ἀγαθὰ πολυτελείας. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐναπόκειται εἶναι ἡ ἐκτίμησις τοῦ παρόντος ὑποδείγματος διὰ νὰ ἴδωμεν ἐὰν τοῦτο ὑπερέχῃ τοῦ Γραμμικοῦ ὑποδείγματος τοῦ Stone καὶ ἀπὸ ἐμπειρικῆς ἀπόψεως.