ΛΑΤΙΝΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ι—ΧΡΗΣΤΟΣ Π. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΣ

Δτωρ Μαθηματικῶν, Ἐπιμελητὴς τῆς Ἕδρας τῶν Μαθηματικῶν τῆς Α.Β.Σ.Π.

1. Γενικὰ

Ὑπάρχουν πολλὰ εἴδη Μαθηματικῶν Σχεδίων (Desings) μὲ πολλὲς ἐφαρμογὲς σὲ διάφορες Ἐπιστῆμες. Γενικὰ τὸ Μαθηματικὸ Σχέδιο εἶναι μία μήτρα μὲ ὁρισμένες χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες, οἱ ὁποῖες χωρίζουν τὰ Σχέδια σὲ διάφορες κατηγορίες. Ἔτσι διακρίνουμε τὰ Λατινικὰ τετράγωνα, τὰ BIBD, τὰ Στατιστικὰ Σχέδια, τὰ Σχέδια τοῦ Hadamard κ.τ.λ. [1].

Μέχρι σήμερα, ὁ προγραμματισμὸς ἐργασίας ἐμφανίζεται πολὺ ἐλλειπὴς καὶ καθόλου ἱκανοποιητικός. Ἡ δυσκολία του ἔγκειται στοὺς πολύπλοκους περιορισμούς, οἱ ὁποῖοι πάντοτε ὑπάρχουν. Γι' αὐτὸ χωρὶς Ἠλεκτρονικὸ Ὑπολογιστὴ καὶ ἀλγορίθμους Συνδυαστικῆς ἀναλύσεως, εἶναι ἀδύνατος ὁ προγραμματισμὸς ἐργασίας σὲ ἱκανοποιητικὰ στάδια.

Σ' αὐτὴ τὴν ἐργασία ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα τοῦ προγραμματισμοῦ ἐργασίας μὲ τὴ βοήθεια τῶν Λατινικῶν τετραγώνων· δίδονται γιὰ πρώτη φορὰ χαρακτηριστικὲς ἐφαρμογὲς τῆς Ἐπιχειρησιακῆς Ἔρευνας, ὅπως προγραμματισμὸς ἐργασίας βιομηχανίας, ὀργανισμοῦ μεταφορῶν, σχεδίασις πειράματος, προγραμματισμὸς ἐπιτηρήσεως κ.τ.λ. Ἐξ ἄλλου στὸ πρῶτο μέρος τῆς ἐργασίας δίδονται γενικὲς γνώσεις ἐπὶ τῶν Λατινικῶν τετραγώνων, καθὼς καὶ ὅλα τὰ σχετικὰ ἐπ' αὐτῶν ποὺ ἔχουν μέχρι σήμερα βρεθῆ.

2. Τὰ ἀμοιβαίως ὀρθογώνια Λατινικὰ τετράγωνα

Ἡ ἔννοια τοῦ Λατινικοῦ τετραγώνου δόθηκε ἀπὸ τὸν Euler τὸ 1776 [2]. Μία μήτρα ηΧη καλεῖται Λατινικὸ τετράγωνο τάξεως η, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, κάθε στοιχεῖο αὐτῆς ἀνήκη σ' ἕνα σύνολο η διακεκριμένων στοιχείων καὶ ἀπαντᾶται μία καὶ μόνο φορὰ σὲ κάθε γραμμὴ καὶ σὲ κάθε στήλη [3].

Δύο Λατινικὰ τετράγωνα $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ τάξεως η, εἶναι ὀρθογώνια, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, γιὰ κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, \eta\}$ τὸ ζεῦγος $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ εἶναι διακεκριμένο [4]. Ὀρθογώνιος συλλογὴ εἶναι ἕνα σύνολο Λατινικῶν τετραγώνων τάξεως η, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα ἀνὰ δύο εἶναι ὀρθογώνια. Ἕνα παράδειγμα ὀρθογωνίου συλλογῆς πλήθους 3 καὶ τάξεως 4, εἶναι τὸ κάτωθι :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \tag{2.1}$$

η	M(η)	η	M(η)	η	M(η)
1	∞	24	3	47	46
2	—	25	24	48	3
3	2	26	2	49	48
4	3	27	26	50	2
5	4	28	3	51	3
6	—	29	28	52	3
7	6	30	2	Ἐάν :	
8	7	31	30	$53 \leqslant η < 125$	
9	8	32	31	τότε $M(η) \geqslant 4$	
10	2	33	3	καὶ ἐάν :	
11	10	34	2	$η \geqslant 90$	
12	5	35	4	τότε ἰσχύει	
13	12	36	3	$M(η) \geqslant 6$	
14	2	37	36	[7]	
15	3	38	2		
16	15	39	2		
17	16	40	4		
18	2	41	40		
19	18	42	2		
20	3	43	42		
21	4	44	3	(1)	
22	2	45	4		
23	22	46	3		

Τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως ὀρθογωνίων συλλογῶν εἶναι ἀπὸ τὰ πιὸ ἄλυτα προβλήματα τῆς Συνδυαστικῆς ἀναλύσεως. Εἶναι χαρακτηριστικὸ ὅτι ὅταν ὁ Parker τὸ 1959 κατασκεύασε δύο ὀρθογώνια Λατινικὰ τετράγωνα τάξεως $\eta = 10$, τοῦτο θεωρήθηκε τόσο σημαντικὸ γεγονὸς ποὺ δημοσιεύθηκε στὸν καθημερινὸ τύπο [5]. Ἀπὸ τότε πολλοὶ ἐρευνητὲς προσπάθησαν νὰ κατασκευάσουν ὀρθογώνιο συλλογὴ πλήθους 3 γιὰ τὴν ἴδια τάξη μὲ τὴ βοήθεια Ἠλεκτρονικοῦ Ὑπολογιστοῦ, χωρὶς μέχρι σήμερα νὰ τὸ κατορθώσουν. Πάντως, ἐὰν $N(\eta)$ συμβολίζῃ τὸν μέγιστο πληθάριθμο ὀρθογωνίου συλλογῆς τάξεως η, τότε ἰσχύει $N(\eta) \leqslant \eta - 1$. Οἱ πιὸ χαρακτηριστικὲς κατασκευὲς ὀρθογωνίων συλλογῶν ἔχουν γίνει μὲ τὴν βοήθεια τῶν κάτωθι :

1. Ἡ μέθοδος Mac - Neish μὲ τὰ σώματα τοῦ Galois [8].
2. Ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων Γεωμετριῶν [9].
3. Ἡ μέθοδος τῶν BIBD [10].
4. Ἡ μέθοδος τῶν ὀρθογωνίων μεταθέσεων ὁμάδων [6].
5. Εἰδικὲς μέθοδοι διὰ Ἠλεκτρονικοῦ Ὑπολογιστοῦ [4].

Μέχρι τοῦ 1976, ἡ εἰκόνα τῶν ἐρευνῶν ἐπὶ τῶν ὑπάρξεων καὶ κατασκευῶν τῶν ὀρθογωνίων συλλογῶν, δίδεται στὸν (1) πίνακα ὅπου μὲ $\eta \leqslant 52$ συμβολίζεται ἡ ἑκάστοτε τάξις, $M(\eta)$ τὸ μέχρι σήμερα γνωστὸ πληθάριθμο καὶ μὲ (—) ἡ μὴ ὕπαρξις [6].

Γενικῶς αὐξανομένου τοῦ η, αὐξάνεται καὶ τὸ $M(\eta)$. Ἑπομένως ἡ δυσκολία ἔγκειται περισσότερο στὶς μικρὲς τάξεις καὶ ὄχι τόσο στὶς μεγαλύτερες.

Τέλος, ὁμαδικὸς σχεδιασμὸς ὀρθογωνίου συλλογῆς $\{A, B, \ldots, \Phi\}$ θὰ ὀνομάζεται ἡ μήτρα $K = (\alpha_{ij}, \beta_{ij} \ldots, \varphi_{ij})$. Ἔτσι, ὁ ὁμαδικὸς σχεδιασμὸς τῆς συλλογῆς (2.1) εἶναι ὁ κάτωθι :

(1,1,1)	(2,2,2)	(3,3,3)	(4,4,4)
(2,3,4)	(1,4,3)	(4,1,2)	(3,2,1)
(3,4,2)	(4,3,1)	(1,2,4)	(2,1,3)
(4,2,3)	(3,1,4)	(2,4,1)	(1,3,2)

3. Σύνδεσις μεταξὺ προγραμματισμοῦ ἐργασίας καὶ ὀρθογωνίων Συλλόγων

Συνήθως στὸν προγραμματισμὸ ἐργασίας ἔχουμε νὰ κατασκευάσουμε ἕνα πρόγραμμα μὲ περίοδο W ἡμερῶν ποὺ νὰ τηροῦνται οἱ ἑκάστοτε περιορισμοί. Ἔτσι ὑπάρχουν τὰ σύνολα ἀνθρώπων ἢ γενικῶς καταστάσεων $S_1, S_2, \ldots, S_\omega$ καὶ ζητεῖται μέσα στὶς W ἡμέρες κάθε ἐμφανιζόμενο διάνυσμα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\omega)$ μὲ $\alpha_1 \in S_1, \alpha_2 \in S_2, \ldots, \alpha_\omega \in S_\omega$ νὰ εἶναι μοναδικό. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευασθῇ ἡ ὀρθογώνιος συλλογὴ $\{A_1, A_2, \ldots, A_\omega\}$ μὲ βάση τὰ ἀντίστοιχα σύνολα $S_1, S_2, \ldots, S_\omega$ τότε ἐξ ὁρισμοῦ πληροῦνται οἱ περιορισμοὶ τοῦ προβλήματος.

Ἀρκεῖ νὰ τεθῇ $W = \omega$ καὶ νὰ γραφοῦν τὰ Λατινικὰ τετράγωνα A_i, $i = 1, \ldots, \omega$ σὲ ὁμαδικὸ σχεδιασμό, ὁπότε ἡ κάθε γραμμὴ αὐτοῦ θὰ ἀντιπροσωπεύῃ καὶ μιὰ ἡμέρα τοῦ προγράμματος.

Σὰν ἕνα παράδειγμα, ἂς θεωρήσουμε τὶς καταστάσεις :

$$S_1 = \{ 1,2,3 \} \quad , \quad S_2 = \{ \alpha,\beta,\gamma \}$$

Σημειώνουμε τὰ δύο ἀντίστοιχα ὀρθογώνια Λατινικὰ τετράγωνα σὲ ὁμαδικὸ σχεδιασμό :

1η ἡμέρα ,	(1,α)	(2,β)	(3,γ)
2η » ,	(2,γ)	(3,α)	(1,β)
3η » ,	(3,β)	(1,γ)	(2,α)

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ πρόγραμμα ἔχει περίοδο $W = 3$ ἡμερῶν καὶ ὅτι τὴν πρώτη ἡμέρα ἡ πρώτη ὑποκατάσταση τοῦ S_1 θὰ συγχρονισθῇ μὲ τὴν πρώτη τοῦ S_2 ἐνῶ τὴν δεύτερη ἡμέρα μὲ τὴν δεύτερη τοῦ S_2 καὶ τὴν τρίτη ἡμέρα μὲ τὴν τρίτη τοῦ S_2. Ἀντίστοιχα προφανῶς συμβαίνουν καὶ μὲ τὶς ὑπόλοιπες ὑποκαταστάσεις τοῦ S_1. Γιὰ νὰ γίνη πιὸ φανερὸ τὸ παράδειγμα, μπορεῖ κανεὶς νὰ θέση τό S_1 σὰν τὰ τρία ὡράρια ἑνὸς αὐτοκινήτου καὶ τὸ S_2 σὰν τοὺς τρεῖς συνεταίρους ὁδηγούς του.

4. Προγραμματισμὸς ἐργασίας ἐργοστασίου

Σ' ἕνα ἐργοστάσιο ὑπάρχουν 5 ὅμοια τμήματα. Κάθε τμῆμα μπορεῖ νὰ λειτουργῇ μία φορὰ τὴν ἡμέρα. Ὅταν λειτουργῇ ἕνα τμῆμα, τότε τὰ ὑπόλοιπα ἀνεφοδιάζονται. Ζητεῖται ὁ καθορισμὸς ἐπιθεωρητῶν, ἐργατῶν καὶ τὸ πρόγραμμα ἐργασίας τῶν ἐργαζομένων τμημάτων, ἔτσι ὥστε νὰ ὑπάρχῃ δικαιοσύνη σὲ ἀνθρώπους μὲ τὴν ἀπαραίτητη προϋπόθεση, ὅτι κάθε ἄνθρωπος μπορεῖ νὰ ἐργάζεται σ' ἕνα μόνο ὡράριο ἡμερησίως καὶ ὅτι σὲ κάθε ὡράριο χρειάζεται ἕνας ἀκριβῶς ἐπιθεωρητής.

Προφανῶς ὑπάρχουν 5 ὡράρια τὴν ἡμέρα, ἔστω τὰ $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5 \}$. Ἂς θεωρήσουμε τὰ τμήματα $M = \{ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5 \}$ καὶ τοὺς 5 ἀναγκαίους ἐπιθεωρητὲς $E = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5 \}$. Χωρίζουμε καταλλήλως τοὺς ἐργάτες σὲ 5 ὁμάδες ἐργασίας $T = \{ \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5 \}$. Στὴ συνέχεια ζητεῖται τὸ πρόγραμμα ἐργασίας μὲ περίοδο 5 ἡμερῶν. Ἀρκεῖ νὰ γραφοῦν σὲ ὁμαδικὸ σχεδιασμὸ 4 ἀμοιβαίως ὀρθογώνια Λατινικὰ τετράγωνα τάξεως 5 τῶν ἀντιστοίχων συνόλων Ω, M, E καὶ T.

ἡμέρ.					
1η,	$(\omega_1,\varepsilon_1,\mu_1,\tau_1)$	$(\omega_2,\varepsilon_2,\mu_2,\tau_2)$	$(\omega_3,\varepsilon_3,\mu_3,\tau_3)$	$(\omega_4,\varepsilon_4,\mu_4,\tau_4)$	$(\omega_5,\varepsilon_5,\mu_5,\tau_5)$
2η,	$(\omega_2,\varepsilon_3,\mu_4,\tau_5)$	$(\omega_3,\varepsilon_4,\mu_5,\tau_1)$	$(\omega_4,\varepsilon_5,\mu_1,\tau_2)$	$(\omega_5,\varepsilon_1,\mu_2,\tau_3)$	$(\omega_1,\varepsilon_2,\mu_3,\tau_4)$
3η,	$(\omega_3,\varepsilon_5,\mu_2,\tau_4)$	$(\omega_4,\varepsilon_1,\mu_3,\tau_5)$	$(\omega_5,\varepsilon_2,\mu_4,\tau_1)$	$(\omega_1,\varepsilon_3,\mu_5,\tau_2)$	$(\omega_2,\varepsilon_4,\mu_1,\tau_3)$
4η,	$(\omega_4,\varepsilon_2,\mu_5,\tau_3)$	$(\omega_5,\varepsilon_3,\mu_1,\tau_4)$	$(\omega_1,\varepsilon_4,\mu_2,\tau_5)$	$(\omega_2,\varepsilon_5,\mu_3,\tau_1)$	$(\omega_3,\varepsilon_1,\mu_4,\tau_2)$
5η,	$(\omega_5,\varepsilon_4,\mu_3,\tau_2)$	$(\omega_1,\varepsilon_5,\mu_4,\tau_3)$	$(\omega_2,\varepsilon_1,\mu_5,\tau_4)$	$(\omega_3,\varepsilon_2,\mu_1,\tau_5)$	$(\omega_4,\varepsilon_3,\mu_2,\tau_1)$.

Ἔτσι ἂν πάρουμε γιὰ παράδειγμα τὴν 3η ἡμέρα καὶ τὴν ὁμάδα ἐργασίας τ_2, τότε ἔχουμε τὸ διάνυσμα $(\omega_1,\varepsilon_3,\mu_5,\tau_2)$ ποὺ μᾶς πληροφορεῖ ὅτι θὰ ἐργασθοῦμε στὸ πρῶτο ὡράριο, θὰ μᾶς ἐλέγχη ὁ τρίτος ἐπιθεωρητὴς καὶ θὰ ἐργασθοῦμε στὸ πέμπτο τμῆμα τοῦ ἐργοστασίου.

Εἶναι εὔκολο νὰ ἐλέγξουμε ὅτι τὸ πρόγραμμα αὐτὸ εἶναι δίκαιο, διότι:

i) Κάθε 5 ἡμέρες, ὁ κάθε ἐπιθεωρητὴς ἐπιβλέπει ὅλα τὰ τμήματα, ὅλες τὶς ὁμάδες ἐργασίας καὶ δὲν ἐπαναλαμβάνει κανένα ὡράριο.

ii) Ὁ κάθε ἐργάτης σὲ 5 ἡμέρες, δὲν δουλεύει ποτὲ δύο φορὲς στὸ ἴδιο τμῆμα καὶ ἔχει τὴν δυνατότητα βαθμολογήσεως ἀπ' ὅλους τοὺς ἐπιθεωρητές.

Τὰ προβλήματα τῶν ἐργοστασίων ὡς πρὸς τὸν προγραμματισμὸ ἐργασίας τους, ἔχουν συνήθως τὴν ἑξῆς μορφή:

Νὰ προγραμματισθῆ ἡ ἐργασία C ἐργατῶν, ὅταν ὑπάρχουν S ὡράρια.

Ἀρκεῖ νὰ χωρισθοῦν οἱ ἐργάτες σὲ S ὁμάδες καὶ νὰ κατασκευασθοῦν σὲ ὁμαδικὸ σχεδιασμὸ δύο ὀρθογώνια Λατινικὰ τετράγωνα τάξεως S. Ἀξίζει νὰ σημειωθῆ, ὅτι ὅταν $S = 2$ ἢ 6 τότε τὸ πρόβλημα εἶναι ἄλυτο.

5. Προγραμματισμὸς παρακολουθήσεως φαινομένου

Κάποιος γιὰ νὰ μελετήση ἕνα φαινόμενο μπορεῖ νὰ τὸ παρακολουθῆ λ στιγμὲς τὴν ἡμέρα κάνοντας ρ διαφορετικὲς παρατηρήσεις. Ζητεῖται ὁ προγραμματισμὸς τῆς ἐργασίας, ἔτσι ὥστε:

i) Νὰ γίνη ἐλαχιστοποίησις τῆς ἐργασίας ὡς πρὸς τὸν χρόνο.

ii) Νὰ μὴν ὑπάρχη παρατήρησις ποὺ νὰ μὴ ἔγινε κάποια δεδομένη στιγμή.

Ὑπάρχουν τρεῖς περιπτώσεις. Ἡ πρώτη περίπτωσις εἶναι νὰ ἰσχύη $\lambda=\rho$. Ἔστω τὸ σύνολον τῶν παρατηρήσεων $\Pi = \{\rho_1,\rho_2,...\rho_\lambda\}$ καὶ τὸ σύνολο τῶν στιγμῶν $\Omega = \{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_\lambda\}$. Ἐφ' ὅσον ζητεῖται τὸ ζεῦγος (λ_i,ρ_j), $i, j = 1,2,...,\lambda$ νὰ εἶναι διακεκριμένο, ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθοῦν σὲ ὁμαδικὸ σχεδιασμὸ δύο ὀρθογώνια Λατινικὰ τετράγωνα τάξεως λ. Ἑπομένως ἡ φ γραμμὴ τοῦ ὁμαδικοῦ αὐτοῦ σχεδιασμοῦ θὰ δίδη καὶ τὸν προγραμματισμὸ παρακολουθήσεως τοῦ φαινομένου τὴν φ ἡμέρα. Προφανῶς οἱ λ ἡμέρες εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς ποὺ ἀπαιτεῖται γιὰ νὰ γίνουν ὅλες οἱ παρατηρήσεις.

Ἡ δεύτερη περίπτωσις εἶναι ὅταν ἰσχύη $\lambda > \rho$. Ἔστω $\lambda = \rho + \omega$. Δημιουργοῦμε τὶς πλαστὲς παρατηρήσεις $\rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_\omega$ καὶ κατασκευάζουμε σὲ ὁμαδικὸ σχεδιασμὸ δύο ὀρθογώνια Λατινικὰ τετράγωνα τάξεως λ. Στὴ συνέχεια γίνεται ἀντικατάστασις τῶν ζευγῶν (λ_i, ρ'_j), $j \in \{1, 2, \ldots, \omega\}$ τῶν πρώτων γραμμῶν, μὲ τὰ ζεύγη (λ_i, ρ_κ), $\kappa \in \{1, 2, \ldots, \rho\}$ τῶν τελευταίων γραμμῶν. Γιὰ παράδειγμα, ἔστω $\lambda = 5$ καὶ $\rho = 3$. Τότε ὁ ἀντίστοιχος ὁμαδικὸς σχεδιασμὸς εἶναι ὁ κάτωθι:

(λ_1,ρ_1) (λ_2,ρ_2) (λ_4,ρ'_1) (λ_3,ρ_3) (λ_5,ρ'_2)
(λ_2,ρ_3) (λ_3,ρ'_1) (λ_5,ρ_1) (λ_4,ρ'_2) (λ_1,ρ_2)
(λ_3,ρ'_2) (λ_4,ρ_1) (λ_1,ρ_3) (λ_5,ρ_2) $(\lambda_2\rho'_1)$
(λ_4,ρ_2) (λ_5,ρ_3) (λ_2,ρ'_2) (λ_1,ρ'_1) (λ_3,ρ_1)
(λ_5,ρ'_1) (λ_1,ρ'_2) (λ_3,ρ_2) (λ_2,ρ_1) (λ_4,ρ_3)

Ὁπότε μετὰ τὶς ἀντικαταστάσεις, λαμβάνουμε τὸ ἑξῆς πρόγραμμα :

1η ἡμ. (λ_1,ρ_1) (λ_2,ρ_2) (λ_4,ρ_3) (λ_3,ρ_3) (λ_5,ρ_3)
2η ἡμ. (λ_2,ρ_3) (λ_3,ρ_2) (λ_5,ρ_1) (λ_4,ρ_2) (λ_1,ρ_2)
3η ἡμ. (λ_3,ρ_1) (λ_4,ρ_1) (λ_1,ρ_3) (λ_5,ρ_2) (λ_2,ρ_1)

Τέλος, ἐὰν $\rho > \lambda$ τότε ἐργαζόμαστε ὅπως καὶ στὴν δεύτερη περίπτωση, κατασκευάζοντας ὅμως αὐτὴ τὴ φορὰ ἕνα ὁμαδικὸ σχεδιασμὸ τάξεως ρ.

6. Προγραμματισμὸς κατανομῆς δρομολογίων

Μία ἑταιρεία μεταφορῶν κάνει κ δρομολόγια τὴν ἡμέρα. Κάθε ὄχημα προλαβαίνει νὰ κάνη ἕνα δρομολόγιο τὴν ἡμέρα. Ζητεῖται ὁ προγραμματισμὸς ἐργασίας, μὲ τὴν προϋπόθεση ὅτι στὸ τέλος τοῦ προγράμματος κάθε ὄχημα θὰ ἔχη κάνει τὸν αὐτὸ ἀριθμὸ χιλιομέτρων καὶ κάθε ὁδηγὸς ἐπίσης, ἀκόμη δὲ κάθε ὁδηγὸς νὰ μὴν ἔχη ὁδηγήσει τὸ ἴδιο ὄχημα δύο φορές.

Προφανῶς εἶναι ἀπαραίτητοι κ ὁδηγοὶ γιὰ τὰ κ ὀχήματα. Ἔστω τὸ σύνολο τῶν δρομολογίων $\Delta = \{ \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_u \}$, τὸ σύνολο τῶν ὁδηγῶν $0 = \{ o_1, o_2, \ldots, o_u \}$ καὶ τῶν ὀχημάτων $X = \{ \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_u \}$. Εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῆ ἕνα πρόγραμμα ἐργασίας μὲ περίοδο κ ἡμερῶν μὲ τὶς παραπάνω προϋποθέσεις· ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθοῦν 3 ἀμοιβαίως ὀρθογώνια Λατινικὰ τετράγωνα τῶν συνόλων Δ,Ο,Χ τάξεως κ, μὲ προϋπόθεση βέβαια τὴν ὕπαρξή τους. Πράγματι, ἐπειδὴ ἡ τριάδα $(\delta_i, o_j, \chi_\kappa)$ εἶναι διακεκριμένη, προκύπτει ὅτι ὅλα τὰ ὀχήματα κάθε μέρα θὰ κάνουν διαφορετικὸ δρομολόγιο καὶ ἐπομένως στὸ τέλος τοῦ προγράμματος θὰ ἔχουν κάνει ὅλα τὰ ἴδια χιλιόμετρα. Ἐπίσης κάθε ὁδηγὸς θὰ ἔχη κάνει τὸν αὐτὸ ἀριθμὸ χιλιομέτρων, διότι θὰ κάνη ὅλα τὰ δρομολόγια ἐνῶ συγχρόνως θὰ ἀλλάξη ὅλα τὰ ὀχήματα.

Στὴ συνέχεια, δίδεται μία ἐφαρμογὴ τοῦ προβλήματος μὲ $\kappa = 8$:

1η ἡμ. $(\delta_1,o_1\chi_1)$ (δ_2,o_2,χ_2) (δ_3,o_3,χ_3) (δ_4,o_4,χ_4) (δ_5,o_5,χ_5) (δ_6,o_6,χ_6)
(δ_7,o_7,χ_7) (δ_8,o_8,χ_8).

2η ἡμ. (δ_2,o_3,χ_4) (δ_3,o_4,χ_1) (δ_4,o_1,χ_2) (δ_1,o_2,χ_3) (δ_6,o_7,χ_8) (δ_7,o_8,χ_5)
(δ_8,o_5,χ_7) (δ_5,o_6,χ_7).

3η ἡμ. (δ_3,o_5,χ_7) (δ_4,o_6,χ_8) (δ_1,o_7,χ_5) (δ_2,o_8,χ_6) (δ_7,o_1,χ_3) (δ_8,o_2,χ_4)
(δ_5,o_3,χ_1) (δ_6,o_4,χ_2).

4η ἡμ. (δ_4,o_7,χ_6) (δ_1,o_8,χ_7) (δ_2,o_5,χ_8) (δ_3,o_6,χ_5) (δ_8,o_3,χ_2) (δ_5,o_4,χ_3)
(δ_6,o_1,χ_4) (δ_7,o_2,χ_1).

5η ἡμ. (δ_5,o_8,χ_2) (δ_6,o_5,χ_3) (δ_7,o_6,χ_4) (δ_8,o_7,χ_1) (δ_1,o_4,χ_6) (δ_2,o_1,χ_7) (δ_3,o_2,χ_8) (δ_4,o_3,χ_5).

6η ἡμ. (δ_6,o_2,χ_5) (δ_7,o_3,χ_6) (δ_8,o_4,χ_7) (δ_5,o_1,χ_8) (δ_2,o_6,χ_1) (δ_3,o_7,χ_2) (δ_4,o_8,χ_3) (δ_1,o_5,χ_4).

7η ἡμ. (δ_7,o_4,χ_8) (δ_8,o_1,χ_5) (δ_5,o_2,χ_6) (δ_6,o_3,χ_7) $(\delta_3 o_8,\chi_4)$ (δ_4,o_5,χ_1) (δ_1,o_6,χ_2) (δ_2,o_7,χ_3)

8η ἡμ. (δ_8,o_6,χ_3) (δ_5,o_7,χ_4) $(\delta_6\, o_8,\chi_1)$ (δ_7,o_5,χ_2) (δ_4,o_2,χ_7) (δ_1,o_3,χ_8) (δ_2,o_4,χ_5) (δ_3,o_1,χ_6).

7. Προγραμματισμὸς ἐπιτηρήσεως

Μία ὁμάδα ἀστυνομεύσεως εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ ἐπιτηρῆ ω ἀρτηρίες, ἐνῶ διαθέτει ρ ὀχήματα. Ζητεῖται τὸ πρόγραμμα ἐργασίας μὲ τὰ ἑξῆς δεδομένα.

i) Τὸ προσωπικὸ κάθε ὀχήματος, κάθε λ ἡμέρες νὰ ἔχη κάνει κ ἀργίες.

ii) Νὰ μὴν εἶναι ὄχημα σὲ κάποια ἀρτηρία περισσότερο ἀπὸ μία φορά.

Ἔστω οἱ ἀρτηρίες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\omega$ καὶ οἱ ἀργίες $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\kappa$. Θεωροῦμε ὅτι οἱ ἀργίες εἶναι πλαστὲς ἀρτηρίες :

$$\alpha_{\omega+1} = \beta_1,\ \alpha_{\omega+2} = \beta_2, \ldots, \alpha_{\omega+\kappa} = \beta_\kappa .$$

Ὑποθέτουμε ὅτι $\rho = \omega + \kappa$ καὶ τὰ ὀχήματα $o_1, o_2, \ldots, o_\rho$. Ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ δὲν βλάπτει τὸ πρόβλημα, διότι ἐὰν μὲν $\rho > \omega + \kappa$ τότε ὑπάρχουν περισσότερα τῶν ἀναγκαίων ὀχημάτων, ἐνῶ ἐὰν $\rho < \omega + \kappa$ τότε ἔχουμε ἔλλειψη ὀχημάτων καὶ θὰ πρέπει προφανῶς νὰ λιγοστεύουν οἱ κ ἀργίες. Ἐὰν λοιπόν, κατασκευασθοῦν δύο ὀρθογώνια Λατινικὰ τετράγωνα τάξεως ρ, τὰ ὁποῖα νὰ βασίζονται στὰ σύνολα τῶν ἀρτηριῶν καὶ ὀχημάτων ἀντιστοίχως, τότε αὐτὰ σὲ ὁμαδικὸ σχεδιασμὸ δίνουν ἕνα πρόγραμμα ἐργασίας ρ ἡμερῶν. Προφανῶς στὸ πρόβλημα ἰσχύει $\lambda = \rho$. Γιὰ παράδειγμα ἐὰν ληφθῆ $\omega = 5$ καὶ $\kappa = 2$ τότε ἔχουμε :

1η ἡμ.	(o_1,α_1)	(o_2,α_2)	(o_3,α_3)	(o_4,α_4)	(o_5,α_5)	(o_6,β_1)	(o_7,β_2)
2η ἡμ.	(o_2,α_3)	(o_3,α_4)	(o_4,α_5)	(o_5,β_1)	(o_6,β_2)	(o_7,α_1)	(o_1,α_2)
3η ἡμ.	(o_3,α_5)	(o_4,β_1)	(o_5,β_2)	(o_6,α_1)	(o_7,α_2)	(o_1,α_3)	(o_2,α_4)
4η ἡμ.	(o_4,β_2)	(o_5,α_1)	(o_6,α_2)	(o_7,α_3)	(o_1,α_4)	$(o_2.\alpha_5)$	(o_3,β_1)
5η ἡμ.	(o_5,α_2)	(o_6,α_3)	(o_7,α_4)	(o_1,α_5)	(o_2,β_1)	(o_3,β_2)	(o_4,α_1)
6η ἡμ.	(o_6,α_4)	(o_7,o_5)	(o_1,β_1)	(o_2,β_2)	(o_3,α_1)	(o_4,α_2)	(o_5,α_3)
7η ἡμ.	(o_7,β_1)	(o_1,β_2)	(o_2,α_1)	(o_3,α_2)	(o_4,α_3)	(o_5,α_4)	(o_6,α_5)

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ὄχημα ἀλλάζει ὅλες τὶς ἀρτηρίες καὶ ὅτι ἔχει δύο ἀργίες ὅταν συμπίπτη μὲ τὶς πλαστὲς ἀρτηρίες β_1, β_2.

Μία ἄλλη σημαντικὴ ἐφαρμογὴ τοῦ προγραμματισμοῦ ἐπιτηρήσεως εἶναι ἡ ἑξῆς :

Ἕνα Πανεπιστήμιο διαθέτει 7 αἴθουσες γιὰ ἐξετάσεις, 11 ὁμάδες ἐπιτηρητῶν καὶ πρόκειται νὰ κάνῃ ἐξετάσεις γιὰ 33 ἡμέρες. Ζητεῖται τὸ πρόγραμμα τῆς ἐπιτηρήσεως μὲ τὰ ἑξῆς δεδομένα :

i) Κάθε ἐπιτηρητὴς στὸ τέλος τῶν 33 ἡμερῶν νὰ ἔχῃ κάνει 12 ἀργίες.

ii) Νὰ μὴν καθήσῃ ἐπιτηρητὴς σὲ κάποια αἴθουσα περισσότερο ἀπὸ κάποιον ἄλλο.

Ἐὰν θεωρηθοῦν τὰ σύνολα αἰθουσῶν καὶ ἐπιτηρητῶν :

$$A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \}, \quad E = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{11} \},$$

ὅπου β_i, $i = 1,2,3,4$ ἀργίες, καὶ κατασκευασθοῦν δύο ὀρθογώνια Λατινικὰ τετράγωνα τάξεως 11 σὲ ὁμαδικὸ σχεδιασμό, τότε ἔχουμε ἕνα πρόγραμμα ἐπιτηρήσεως 11 ἡμερῶν μὲ 4 ἀργίες γιὰ τὴν κάθε ὁμάδα ἐπιτηρητῶν. Ἑπομένως σὲ 33 ἡμέρες οἱ ἀργίες θὰ ἀνέρχονται σὲ 12 γιὰ τὴν κάθε ὁμάδα ἐπιτηρητῶν, ἐνῶ συγχρόνως κάθε ἐπιτηρητὴς θὰ ἐπιτηρήσῃ κάθε αἴθουσα ἀκριβῶς 3 φορές. Ἄρα ἀρκεῖ νὰ ἐπαναληφθῇ ὁ ὁμαδικὸς σχεδιασμὸς τρεῖς φορὲς καὶ ἔχουμε τὴ λύση αὐτοῦ τοῦ προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] S. Vajda: The Mathematics of experimental desing, incomlete block desings and latin Squares. London (1967).

[2] L. Euler: De quadratis magisis. Leonardi Euleri Opera Omnia, Serie 1,7 (1923), 441 - 457.

[3] D. Raghavarao: Constructions and Combinatorial Problems in Desing of Experiments. New York (1971).

[4] J. Dénes, A. D. Keedwell: Latin squares and their applications. London (1974).

[5] E. T. Parker: Computer investigation of orthogonal latin squares of order ten. Symp. Appl. Math., 15 (1963), 73 - 81.

[6] J-C P. Panayiotopoulos: About latin squares of standard form and of even order. Dissertation of Ph. D., University of Athens (1976).

[7] R. M. Wilson: Concerning the number of mutually orthogonal latin squares. To appear (1976).

[8] H. F. Mac Neish: Euler squares. Ann. of Math., 23 (1922), 221 - 7.

[9]. R. C. Bose, S. S. Shrikhande, E.T. Parker: Further results on the construction of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture. Canad. J. Math., 12 (1960).

[10] R. C. Bose, I. M. Chakravarti, D. E. Knuth: On methods of constructing sets of mutually orthogonal latin squares using a computer. Technometrics, 2 (1960) 507 - 516.