ΤΟ ΒΟΕΙΚΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Τοῦ κ. ΜΑΥΡΙΚΙΟΥ Α. ΜΠΡΙΚΑ

Ὁμ. Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

1. Εἰσαγωγὴ

Τὸ 1773 ὁ G. E. Lessing, βιβλιοθηκάριος τότε τῆς βιβλιοθήκης τῆς Wolfenbüttel (Σαξονίας), ἐδημοσίευσε τὸ κείμενον ἑνὸς ἑλληνικοῦ χειρογράφου μὲ τίτλον «Πρόβλημα, ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρών, τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἐπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ».

Τὸ ὡς ἄνω χειρόγραφον προήρχετο ἐξ ἑνὸς Κώδικος τῆς βιβλιοθήκης ταύτης, ἀφορᾷ δὲ ἁπλῶς εἰς τὴν ἐκφώνησιν, καὶ μόνον, τοῦ ἔκτοτε καταστάντος περιφήμου βοεικοῦ προβλήματος τοῦ Ἀρχιμήδους, συνίσταται δὲ ἐξ εἴκοσι δύο διστίχων εἰς τὴν Ἰωνικὴν διάλεκτον.

Μετὰ τοῦ χειρογράφου τοῦ β. π. ἐδημοσίευσεν ὁ Lessing, ἀφ' ἑνὸς ἓν σχόλιον προερχόμενον ἐκ τοῦ αὐτοῦ κώδικος, περιλαμβάνον μίαν ἐντελῶς ἀνεπαρκῆ καὶ ἄνευ ἀποδείξεως «λύσιν» καὶ ἀφ' ἑτέρου μίαν ἀπόπειραν λύσεως τοῦ Ghr. Leiste, Καθηγητοῦ ἐν Wolfenbüttel.

Τὴν δημοσίευσιν τοῦ χειρογράφου τοῦ β.π. ἠκολούθησε μία σειρὰ δημοσιεύσεων ἀναφερομένων, ἀφ' ἑνός, εἰς τό θέμα αὐτῆς ταύτης τῆς πατρότητος τόσον τοῦ προβλήματος ὅσον καὶ τῆς ἐμμέτρου ἐκφωνήσεως αὐτοῦ καί, ἀφ' ἑτέρου, εἰς προσπαθείας ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος.

Αἱ σημαντικώτεραι ἐξ αὐτῶν εἶναι αἱ ἑξῆς :

α) Τὸ 1821, οἱ J. καὶ K. L. Struve, πατὴρ καὶ υἱός, εἰς δημοσίευσιν αὐτῶν, ὑποστηρίζουν ὅτι τὸ β.π. δέον ν' ἀποδοθῇ εἰς ἄγνωστον ἀρχαῖον μαθηματικὸν ὅστις τὸ παρουσίασεν ὑπὸ τὴν μορφὴν τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιγράμματος διὰ νὰ προκαλέσῃ τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ κοινοῦ. Ἰσχυρίσθησαν μάλιστα ὅτι πιθανῶς οἱ πέραν τοῦ 30στοῦ στίχοι προσετέθησαν ἀργότερον.

β) Τὸ 1828 ὁ G. Hermann, εἰς μίαν πανεπιστημιακὴν ἀνακοίνωσίν του, ἀποκρούει τοὺς ἰσχυρισμοὺς τῶν Struve ἐπικαλούμενος τὴν μαρτυρίαν τοῦ σχολιαστοῦ τοῦ διαλόγου «Χαρμίδης» τοῦ Πλάτωνος, ὁ ὁποῖος σχολιαστὴς ἀναφέρει «τὸ κληθὲν ὑπ' Ἀρχιμήδους βοεικὸν πρόβλημα». Σημειωτέον ὅτι ὁ Hermann ἀνέφερεν ὅτι, ὡς ἐγνώριζεν, ὁ Gauss εἶχε φθάσει εἰς μίαν πλήρη λύσιν τοῦ προβλήματος, ἐνῶ, ὡς εἶναι γνωστόν, ὁ Gauss οὐδὲν ἐδημοσίευσε σχετικῶς.

γ) Τὸ 1830 ὁ J. F. Wurm εἰς δημοσίευσίν του ἐσημείωσε διαφόρους ἀσαφείας τῆς ἐκφωνήσεως διὰ τὰς ὁποίας ἐπρότεινεν ἑρμηνείας, μᾶλλον ἀβασίμους, ἐπὶ τῶν ὁποίων ὅμως δὲν ἐπέμεινεν. Ἐπέμεινεν ἐν τούτοις ἐπὶ τῆς ἑρμηνείας τῆς λέξεως «πλίνθος», τοῦ στίχου 36, ὡς ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ὁπότε προκύπτει ὅτι τὸ πλῆθος τῶν λευκῶν ὁμοῦ μετὰ τοῦ τῶν κυανοχρόων ταύρων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον δύο ἀνίσων ἀκεραίων.

Ἡ σχέσις αὕτη ὁδηγεῖ, ὡς θὰ ἴδωμεν, εἰς τὴν κληθεῖσαν ἁπλῆν λύσιν ἢ λύσιν τοῦ Wurm.

δ) Τὸ 1842 ὁ G. H. F. Nesselmann (Die Algebra der. Griechen), χωρὶς νὰ ἔχῃ ὑπ' ὄψιν τὴν ἐργασίαν τοῦ Hermann, συμφωνεῖ μὲ τοὺς Struve.

ε) Τὸ 1856, ὁ Vincent (Nouvelles Annales de Math. t. XV) ἠσχολήθη ἐπίσης μὲ τὸ β.π. Δέχεται ὅμως ὡς αὐθεντικὰς μόνον τὰς τρεῖς πρώτας συνθήκας τοῦ προβλήματος, θεωρῶν τὰς λοιπὰς ὡς προστεθείσας μεταγενεστέρως.

στ) Τὸ 1880 οἱ Krumbiegel καὶ Amthor (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1880 p. 121 — 136 καὶ 153 — 171) ἐδημοσίευσαν μίαν ἐξονυχιστικὴν μελέτην ἐπὶ τοῦ β.π., τόσον ἀπὸ φιλολογικῆς ὅσον καὶ ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως, δόσαντες τήν, γνωστὴν ὡς λύσιν τοῦ Amthor, πλήρη λύσιν τοῦ προβλήματος.

η) Τὸ 1880 ὁ Paul Tannery, ἀναφερόμενος εἰς τὸ β.π., ἀναφέρει ἐν ὑστερογράφῳ μελέτης του «Ἡ ἀριθμητικὴ τῶν Ἑλλήνων εἰς τὸν Πάππον» τὸ ἀκόλουθον ἀπόσπασμα τοῦ Γεμίνου (1ος αἰὼν π.Χ.) :

. . . Θεωρεῖ οὖν τὸ μὲν κληθὲν ὑπ' Ἀρχιμήδους βοϊκὸν πρόβλημα, τοὺς δὲ μηλίτας καὶ φιαλίτας ἀριθμούς . . .

Οὕτω, ἡ ἀναφερθεῖσα ἀνωτέρω, ὑπὸ στοιχεῖον β, παρατήρησις τοῦ Hermann φαίνεται βασιζομένη εἰς ἀντιγραφὴν τοῦ σχολιαστοῦ ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Γεμίνου.

2. Τὸ πρόβλημα

Παραθέτομεν κατωτέρω τὸ πλῆρες κείμενον τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ βοεικοῦ προβλήματος, ὡς ἐδημοσιεύθη ὑπὸ τοῦ Lessing, καὶ ἐν συνεχείᾳ πρὸς αὐτό, ἐλευθέραν μετάφρασιν εἰς τὴν νεοελληνικήν.

«Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον,
φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης, τετραχῇ στίφια δασσαμένη
χροίην ἀλλάσσοντα, τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον·
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον· ἐν δὲ ἑκάστῳ
στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι,
συμμετρίης τοιῆς δε τετευχότες· ἀργότριχας μὲν
κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ
καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσους, ὦ ξεῖνε, νόησον·
αὐτὰρ κυανέους τῷ τετράτῳ τε μέρει
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσί τε πᾶσιν.
τοὺς δι' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρει
ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει ἑβδομάτῳ τε
καὶ ξανθοῖς αὖτις πᾶσιν ἰσαζομένους.
θηλείαισι δὲ βουσὶ ταδ' ἔπλετο· λευκότριχες μὲν
ἦσαν συμπάσης κυανέης ἀγέλης
τῷ τριτάτῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεκὲς ἴσαι.
αὐτὰρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν
μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο
σὺν ταύροις· πάσης δ' εἰς νομὸν ἐρχομένης
ξανθοτρίχων ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδὲ καὶ ἕκτῳ
ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἔχον. Τετραχῇ
ξανθαὶ δι' ἠριθμοῦντο μέρους τρίτου ἡμίσει ἴσαι
ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τε μέρει.
ξεῖνε, σὺ δ' Ἠελίοιο βοῶν πόσαι ἀτρεκὲς εἰπὼν
χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ὅσαι κατὰ χρῶμα ἕκασται,
οὐκ ἄϊδρίς κε λέγοι οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής·
οὐ μὴν πώ γε σοφοῖς ἀναρίθμιος· ἀλλ' ἴθι φράζει
καὶ τάδ' ἔτ' ἄλλα βοῶν Ἠελίοιο πάθη.
ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο πληθὺν
κυανέοις, ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
εἰς βάθος εἰς εὖρός τε· τὰ δι' αὖ περιμήκεα πάντη
πίμπλαντο π λ ί ν θ ο υ Θρινακίης πεδία.
ξανθοὶ δ' αὖτ' εἰς ἓν καὶ ποικίλοι ἀθροισθέντες
ἵσταντ' ἀμβολάδην ἐξ ἑνὸς ἀρχόμενοι
σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον οὔτε προσόντων
ἀλλοχρόων ταύρων οὔτ' ἐπιλειπομένων.
ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνὶ πραπίδεσιν ἀθροίσας
καὶ πληθέων ἀποδούς, ὦ ξεῖνε, πάντα μέτρα
ἔρχεο κυδιόων νικηφόρος ἴσθι τε πάντως
κεκριμένος ταύτῃ γ' ὄμπνιος ἐν σοφίῃ».

«Ὑπολόγισον, φίλε, τὸ πλῆθος τῶν βοῶν τοῦ θεοῦ Ἡλίου, ἂν ἔχῃς τὴν πρὸς τοῦτο διάθεσιν καὶ ἱκανότητα.

Ἔβοσκον τότε εἰς τὰς πεδιάδας τῆς Σικελίας κατανεμημένοι εἰς τέσσαρας ἀγέλας, ἀναλόγως τοῦ χρώματος αὐτῶν.

Ἡ πρώτη ἀγέλη περιελάμβανε μόνον λευκούς, ἡ δευτέρα κυανούς, ἡ τρίτη ξανθοὺς καὶ ἡ τετάρτη ποικιλοχρόους, ἑκάστη δὲ ἀγέλη περιελάμβανε ταύρους καὶ ἀγελάδας κατὰ τὰς κάτωθι ἀναλογίας.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν λευκῶν ταύρων ἰσοῦτο πρὸς τὸ ἥμισυ σὺν τὸ τρίτον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κυανῶν, σὺν προσέτι τὸ πλῆθος τῶν ξανθῶν ταύρων.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν κυανῶν ταύρων ἰσοῦτο πρὸς τὸ ἓν τέταρτον σὺν τὸ ἓν πέμπτον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ποικιλοχρόων, σὺν προσέτι τὸ πλῆθος τῶν ξανθῶν ταύρων.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ποικιλοχρόων ταύρων ἰσοῦτο πρὸς τὸ ἓν ἕκτον σὺν τὸ ἓν ἕβδομον τῶν λευκῶν, σὺν προσέτι τὸ πλῆθος τῶν ξανθῶν ταύρων.

Αἱ ἀγελάδες, ἐξ ἄλλου κατενέμοντο ὡς ἑξῆς :

Ὁ ἀριθμὸς τῶν λευκῶν ἰσοῦτο πρὸς τὸ ἓν τρίτον σὺν τὸ ἓν τέταρτον τοῦ πλήθους ὁλοκλήρου τῆς κυανῆς ἀγέλης.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν κυανῶν ἰσοῦτο πρὸς τὸ ἓν τέταρτον σὺν τὸ ἓν πέμπτον ὁλοκλήρου τῆς ποικιλοχρόου ἀγέλης.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ποικιλοχρόων ἰσοῦτο πρὸς τὸ ἓν πέμπτον σὺν τὸ ἓν ἕκτον τοῦ πλήθους ὁλοκλήρου τῆς ξανθῆς ἀγέλης.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ξανθῶν ἰσοῦτο πρὸς τὸ ἓν ἕκτον σύν τὸ ἓν ἕβδομον τοῦ πλήθους ὁλοκλήρου τῆς λευκῆς ἀγέλης.

Ὅταν, φίλε, εὕρῃς τὸν ἀκριβῆ ἀριθμὸν τῶν βοῶν καὶ προσδιορίσῃς τὸ πλῆθος ἀφ' ἑνὸς τῶν ταύρων καὶ ἀφ' ἑτέρου τῶν ἀγελάδων ἑκάστης ἀγέλης, δὲν θὰ δύνασαι νὰ θεωρηθῇς ἀδαὴς καὶ ἄμοιρος ἀριθμητικῶν γνώσεων. Ἐν τούτοις δὲν θά συγκαταλέγεσαι ἀκόμη μεταξὺ τῶν σοφῶν διότι ζητοῦνται καὶ ἄλλα στοιχεῖα. Ὅταν τὰ πλήθη τῶν λευκῶν καὶ τῶν κυανῶν ταύρων ὁμοῦ δύνανται νὰ διαταχθοῦν ὥστε ν' ἀποτελοῦν ἓν πλῆρες τετράγωνον πληροῦν τὴν πεδιάδα τῆς Σικελίας.

Ὅταν, ἐξ ἄλλου, τὰ πλήθη τῶν ξανθῶν καὶ τῶν ποικιλοχρόων ταύρων ὁμοῦ διαταχθοῦν εἰς σχῆμα τριγώνου, ὥστε εἰς τὴν κορυφὴν αὐτοῦ νὰ εὑρίσκεται εἷς ταῦρος, ἑκάστη δὲ τῶν ἰσαπεχουσῶν παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, νὰ περιλαμβάνῃ ἰσαπέχοντας ἀλλήλων ἀνὰ ἕνα ταῦρον ἑκάστοτε ἐπὶ πλέον τῶν τῆς προηγουμένης καὶ ὑπολογίσῃς τὰ ζητούμενα πλήθη, εἰς τρόπον ὥστε νὰ πληροῦνται ἅπασαι αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι, τότε θὰ δύνασαι νὰ εἶσαι ὑπερήφανος καὶ θὰ εἶσαι σοφός».

Ὡς ἔχομεν ἀναφέρει ἐν ἀρχῇ, διάφοροι ἀσχοληθέντες μὲ τὸ χειρόγραφον τοῦ β. π. διατύπωσαν ὡρισμένας παρατηρήσεις καὶ ἐσημείωσαν διαφόρους ἀσαφείας τῆς ἐκφωνήσεως.

Οὕτω, κατὰ πρῶτον, διετυπώθει ἡ ἐκδοχὴ κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ πέραν τοῦ τριακοστοῦ στίχοι τῆς ἐκφωνήσεως ἔχουν προστεθῆ μεταγενεστέρως.

Ἡ ἐκδοχὴ αὕτη, ἐὰν γίνῃ ἀποδεκτή, ὁδηγεῖ εἰς μίαν πρώτην λύσιν, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ μόνον τῶν 7 πρώτων συνθηκῶν τὰς ὁποίας θέτει ἡ ἐκφώνησις.

Ἡ λύσις αὕτη, τὴν ὁποίαν θὰ καλέσωμεν «λύσιν διὰ πληρώσεως τῶν 7 πρώτων συνθηκῶν», εἶναι ἡ ἁπλουστέρα, δὲν παρουσιάζει σημαντικήν τινα δυσχέρειαν, ἀποτελεῖ δὲ ἀφετηρίαν τῶν λοιπῶν λύσεων καὶ ὁδηγεῖ εἰς τὰ μικρότερα δυνατὰ πλήθη.

Ἡ σπουδαιοτέρα ὅμως τῶν ἀσαφειῶν τῆς ἐκφωνήσεως ἀφορᾷ εἰς τὴν ἑρμηνείαν τοῦ ὅρου «πλίνθος» τοῦ στίχου 36.

Κατὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ Wurm, ὁ ὅρος πλίνθος σημαίνει ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μορφῆς συνήθους πλίνθου. Ἑπομένως, ἡ προκύπτουσα ὀγδόη συνθήκη τοῦ προβλήματος, στίχοι 33—36, θὰ εἶναι* :

$$\Lambda + \mathrm{K} = p\,q$$

ὅπου p καὶ q δύο ἀκέραιοι, ἡ δὲ ἐννάτη

$$\Xi + \Pi = \frac{1}{2}\,\nu\,(\nu + 1)$$

Αἱ ἑπτὰ πρῶται συνθῆκαι τῆς ἐκφωνήσεως, συμπληρούμεναι διὰ τῶν ἀνωτέρω δύο, ὁδηγοῦν εἰς τὴν καλουμένην λύσιν τοῦ Wurm.

Ἀντιθέτως πρὸς τὸν Wurm, οἱ Krumbiegel καὶ Amthor ὑπεστήριξαν ὅτι εἴτε, πιθανῶς, ἡ λέξις «πλίνθος» ἀνεγράφη, ὑπὸ τοῦ ἀντιγράψαντος παλαιόθεν τὸ χειρόγραφον, ἐκ παραδρομῆς ἀντὶ τῆς λέξεως «πλήθους», εἴτε πρόκειται ἀκόμη περὶ πλίνθου τετραγώνου ὅμως μορφῆς, λόγῳ τῆς φράσεως τοῦ αὐτοῦ στίχου 34, «. . . ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι εἰς βάθος εἰς εὖρός τε».

Δέχονται, ἑπομένως, ὡς 8ην συνθήκην τήν* :

$$\Lambda + \mathrm{K} = \mu^2$$

καὶ ὡς ἐννάτην τὴν :

$$\Xi + \Pi = \frac{1}{2}\,\nu\,(\nu + 1)$$

καθὼς καὶ τὰς ἑπτὰ πρώτας.

Ἡ οὕτω προκύπτουσα λύσις καλεῖται λύσις τοῦ Amthor.

3. Ἡ πλήρωσις τῶν 7 πρώτων συνθηκῶν

Ἡ ἁπλουστέρα λύσις τοῦ β.π. προκύπτει ὅταν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ 7 πρῶται συνθῆκαι τῆς ἐκφωνήσεως, δηλαδὴ αἱ περιλαμβανόμεναι μέχρι τοῦ στίχου 30. Ἡ λύσις ἄλλως τε αὕτη ἀποτελεῖ ἀφετηρίαν τόσον τῆς λύσεως τοῦ

---

*) Βλ. σελ. 926.

*) Βλ. σελ. 931.

Wurm ὅσον καὶ τῆς λύσεως τοῦ Amthor. Ἑπομένως θὰ ἀσχοληθῶμεν, κατὰ πρῶτον μὲ αὐτήν.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τῶν συμβόλων :

(1) $$\Lambda, \ K, \ \Xi, \ \Pi$$

τοὺς ἀριθμοὺς τῶν λευκῶν, κυανῶν, ξανθῶν καὶ ποικιλοχρώμων ταύρων τῶν τεσσάρων ἀγελῶν καὶ διὰ τῶν συμβόλων :

(2) $$\lambda, \ \kappa, \ \xi, \ \pi$$

τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς ἀγελάδων τῶν αὐτῶν ἀγελῶν, θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν, τὰς ἑξῆς ἑπτὰ σχέσεις :

(3)
$$\begin{aligned}
\Lambda &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) K + \Xi \\
K &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \Pi + \Xi \\
\Pi &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \Lambda + \Xi \\
\lambda &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (K + \kappa) \\
\kappa &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) (\Pi + \pi) \\
\pi &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (\Xi + \xi) \\
\xi &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) (\Lambda + \lambda)
\end{aligned}$$

Ἔχομεν οὕτω 7 ἐξισώσεις δι' 8 συνολικῶς ἀγνώστους ἀκεραίους ἀριθμούς. Τὸ πρόβλημα εἶναι, ἑπομένως, ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως καὶ δύναται νὰ ἔχῃ ἀπεριόριστον πλῆθος λύσεων.

Θὰ ἐκφράσωμεν κατωτέρω τὰς τιμὰς τῶν 8 ἀγνώστων, (1) καὶ (2), τῇ βοηθείᾳ μιᾶς παραμέτρου.

Αἱ τρεῖς πρῶται ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (3) δύνανται νὰ γραφοῦν

(4)
$$\begin{aligned}
6\,\Lambda - 5\,K &= 6\,\Xi \\
20\,K - 9\,\Pi &= 20\,\Xi \\
42\,\Pi - 13\,\Lambda &= 42\,\Xi
\end{aligned}$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῆς Κ μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τούτων, ἀπομένει ἓν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους Λ καὶ Π, ὅταν λάβωμεν ὡς βοηθητικὴν παράμετρον τὴν

(5) $$a = \frac{\Xi}{891}$$

Ἐπιλύοντες τὸ σύστημα τοῦτο καί, ἐν συνεχείᾳ, ἐπανερχόμενοι εἰς τὴν πρώτην, λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τῆς Κ. Ἔχομεν οὕτω :

$$(6)\qquad \begin{aligned} \Lambda &= 2226\,\alpha \\ K &= 1602\,\alpha \\ \Xi &= 891\,\alpha \\ \Pi &= 1580\,\alpha \end{aligned}$$

Αἱ τέσσαρες τελευταῖαι τῶν ἐξισώσεων (3) δύνανται νὰ γραφοῦν :

$$(7)\qquad \begin{aligned} 12\,\lambda - 7\,\kappa &= 7\,K = 11\,214\,\alpha \\ 20\,\kappa - 9\,\pi &= 9\,\Pi = 14\,220\,\alpha \\ 30\,\pi - 11\,\xi &= 11\,\Xi = 9\,801\,\alpha \\ 42\,\xi - 13\,\lambda &= 13\,\Lambda = 28\,938\,\alpha \end{aligned}$$

ὅταν, τῇ βοηθείᾳ τῶν (6), εἰσαγάγωμεν τὴν παράμετρον α. Καὶ ὅταν ἀπαλείψωμεν τὴν κ μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας καί, ἐν συνεχείᾳ, τὴν ξ μεταξὺ τρίτης καὶ τετάρτης, ἔχομεν τὸ σύστημα :

$$(8)\qquad \begin{aligned} 240\,\lambda - 63\,\pi &= 323\,820\,\alpha \\ -143\,\lambda + 1\,260\,\pi &= 729\,960\,\alpha \end{aligned}$$

τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει τὰς τιμὰς τῶν λ καὶ π. Αὗται, εἰσαγόμεναι εἰς τὴν πρώτην καὶ τὴν τρίτην τῶν (7), μᾶς δίδουν τὰς κ καὶ ξ. Ἔχομεν οὕτω :

$$(9)\qquad \begin{aligned} \lambda &= 7\,206\,360\,b \\ \kappa &= 4\,893\,246\,b \\ \xi &= 5\,439\,213\,b \\ \pi &= 3\,515\,820\,b \end{aligned}$$

ὅπου

$$(10)\qquad b = \frac{\alpha}{4657} \qquad (4657 = \text{πρῶτος ἀριθμός}).$$

Εἰσάγοντες ἐν τέλει ἐκ τῆς (10) τὴν τιμὴν τῆς α, ἔχομεν, λόγῳ τῶν (6) :

$$(11)\qquad \begin{aligned} \Lambda &= 10\,366\,482\,b \\ K &= 7\,460\,514\,b \\ \Xi &= 4\,149\,387\,b \\ \Pi &= 7\,358\,060\,b \end{aligned}$$

Ἡ πλήρης λύσις τοῦ προβλήματος τούτου συνοψίζεται ὑπὸ τῶν στοιχείων (9) καὶ (10) ὅπου b μία αὐθαίρετος παράμετρος.

Ὡς εἶναι φανερόν, εἰς τὴν λύσιν ταύτην, ἐπιτυγχάνομεν τὰ μικρότερα δυνατὰ πλήθη λαμβάνοντες :

(12) $$b = 1$$

4. Ἡ λύσις τοῦ Wurm

Εἰς τὴν λύσιν ταύτην πληροῦμεν, κατὰ πρῶτον, τὰς 7 πρώτας συνθήκας. Ἐν συνεχείᾳ πληροῦμεν τὴν 9ην

(1) $$\Xi + \Pi = \frac{1}{2} \nu (\nu + 1)$$

ἐκλέγοντες τὴν ἄγνωστον ν εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν διὰ τὴν 8ην συμφώνως μὲ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ Wurm.

(2) $$\Lambda + K = pq$$

δηλαδὴ τὰς διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Ἀναχωροῦντες ἐκ τῶν τιμῶν τῶν Ξ καὶ Π, εὑρίσκομεν :

(3) $$\begin{aligned}\Xi + \Pi &= 4\,149\,387\, b + 7\,358\,060\, b \\ &= (3^4 \cdot 11 + 2^2 \cdot 5 \cdot 79) \cdot 4\,657\, b \\ &= 2\,471 \cdot 4\,657\, b \\ &= 7 \cdot 353 \cdot 4\,657\, b\end{aligned}$$

Ἐκ τῶν δύο ὅμως παραγόντων ν καὶ ν + 1 τῆς (1), ὁ εἷς θὰ εἶναι πάντοτε ἄρτιος. Καλοῦντες αὐτὸν 2S, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν ἕτερον μίαν τῶν 2 τιμῶν, $2S \pm 1$ καὶ

(4) $$\frac{1}{2} \nu (\nu + 1) = S\,(2S \pm 1)$$

Λαμβάνομεν ἑπομένως

(5) $$\Xi + \Pi = S\,(2S \pm 1) = 7 \cdot 353 \cdot 4\,657\, u\upsilon$$

καὶ προσδιορίζομεν τὰ u καὶ υ εἰς τρόπον ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν $b = u\upsilon$, ἄρα καὶ ὅλα τὰ μεγέθη Λ, K, Ξ, Π, λ, κ, ξ καὶ π, νὰ καταστῶσιν ἐλάχιστα

Πρὸς τοῦτο θέτομεν :

$$\begin{aligned}m_8 &= 7 \cdot 353 \cdot 4\,657 = 11\,507\,447 \\ m_7 &= 353 \cdot 4\,657 = 1\,643\,921 \\ m_6 &= 7 \cdot 4\,657 = 32\,599\end{aligned}$$

$$
(6) \quad
\begin{aligned}
m_5 &= 1 \cdot 4657 = 4657 \\
m_4 &= 7 \cdot 355 = 2471 \\
m_3 &= 353 = 353 \\
m_2 &= 7 = 7 \\
m_1 &= 1 = 1
\end{aligned}
$$

ὁπότε πᾶσα λύσις μιᾶς τῶν ὀκτὼ ἐξισώσεων.

$$
(7) \qquad 2\, m_\nu \; u - m_{9-\nu}\, \upsilon = \pm 1, \; (\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)
$$

θὰ πληροῖ τὴν (5). Διότι, ἐὰν ἀναπτύξωμεν τοὺς λόγους $\dfrac{2m_\nu}{m_{9-\nu}}$ ὑπὸ μορφὴν συνεχοῦς κλάσματος* καί, θέτοντες :

$$
(8) \qquad \frac{2\, m_\nu}{m_{9-\nu}} = \frac{P_n}{Q_n},
$$

λάβωμεν

$$
(9) \qquad \frac{\upsilon}{u} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}
$$

τότε, λόγῳ τῆς γνωστῆς σχέσεως

$$
(10) \qquad P_n\, Q_{n-1} - Q_n\, P_{n-1} = (-1)^n
$$

ἡ ὁποία ταυτίζεται μὲ τὴν (7), ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν :

$$
(11) \qquad S = m_\nu u, \quad 2S \pm 1 = m_9\, \upsilon
$$

διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν (5), ἀφοῦ

$$
(12) \qquad m_\nu\, m_{9-\nu} = 7 \cdot 353 \cdot 4657
$$

Θὰ προσδιορίσωμεν, ἑπομένως, τὰ u καὶ υ τῶν ὀκτὼ ἐξισώσεων (7) καὶ θὰ ἐπιλέξωμεν, τελικῶς, τὰ ὁδηγοῦντα εἰς τὸ μικρότερον γινόμενον uυ.

α) Ἡ πρώτη ἐξίσωσις

$$
(13) \qquad 2\, m_8\, u - m_1\, \upsilon = \pm 1
$$

πληροῦται, ὡς εἶναι φανερόν, ἀφ' ἑνὸς διὰ $u = 0$, $\upsilon = 1$ καὶ ἀφ' ἑτέρου διὰ $u = 1$ καὶ $\upsilon = 23\,014\,893$.

Ἡ πρώτη λύσις δίδει $u\upsilon = 0$ καὶ ἀπορρίπτεται διότι ὁδηγεῖ εἰς μηδενικοὺς ἀριθμοὺς ταύρων καὶ ἀγελάδων δι' ὅλας τὰς ἀγέλας ($b = u\upsilon = 0$).

Ἡ δευτέρα λύσις δίδει $u\upsilon = 23\,014\,893$.

β) Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις, $2m_7\, u - m_2\, \upsilon = \pm 1$, ἀπαιτεῖ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος.

---

*) Βλ. [8, σελ. 221].

$$(14) \qquad \frac{3287842}{7} = 469691 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

τοῦ ὁποίου τὰ ἀτελῆ κλάσματα εἶναι

$$(15) \qquad \frac{1}{0}, \quad \frac{469\,691}{1}, \quad \frac{469\,692}{1}, \quad \frac{1\,409\,075}{3}, \quad \frac{3\,287\,842}{7}$$

Ἔχομεν ἑπομένως

$$(16) \qquad u = 3, \quad \upsilon = 1\,409\,075, \quad u\upsilon = 4\,227\,225$$

γ) Ἡ τρίτη ἐξίσωσις, $2\,m_6\,u - m_3\,\upsilon = \pm 1$, ἀπαιτεῖ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος

$$(17) \qquad \frac{65198}{353} = 184 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10}}}}}}$$

τοῦ ὁποίου τὰ ἀτελῆ κλάσματα εἶναι

$$(18) \qquad \frac{1}{0}, \quad \frac{184}{1}, \quad \frac{185}{1}, \quad \frac{554}{3}, \quad \frac{1847}{10}, \quad \frac{4248}{23}, \quad \frac{6095}{33}, \quad \frac{65\,198}{353}$$

Ἔχομεν ἑπομένως

$$(19) \qquad u = 33, \qquad u = 6095, \qquad u\upsilon = 201\,135$$

δ) Ἡ τετάρτη ἐξίσωσις, $2\,m_5\,u - m_4\,\upsilon = \pm 1$, ἀπαιτεῖ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος,

$$(20) \qquad \frac{9314}{2471} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{62 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}$$

τοῦ ὁποίου τὰ ἀτελῆ κλάσματα εἶναι

$$(21)\quad \frac{1}{0},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{15}{4},\ \frac{34}{9},\ \frac{49}{13},\ \frac{3072}{815},\ \frac{3121}{828},\ \frac{9314}{2471}$$

Ἔχομεν ἑπομένως :

$$(22)\qquad u = 828\,,\quad \upsilon = 3121\,,\quad u\upsilon = 2\,584\,188$$

ε) Ἡ πέμπτη ἐξίσωσις, $2\,m_4\,u - m_4\,\upsilon = \pm 1$, ἀπαιτεῖ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος :

$$(23)\qquad \frac{4942}{4657} = 1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{6}}}}}$$

τοῦ ὁποίου τὰ ἀτελῆ κλάσματα εἶναι :

$$(24)\qquad \frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{17}{16},\ \frac{35}{33},\ \frac{52}{49},\ \frac{815}{768},\ \frac{4942}{4657}$$

Ἔχομεν ἑπομένως :

$$(25)\qquad u = 768\,,\quad \upsilon = 815\,,\quad u\upsilon = 625\,920$$

στ) Ἡ ἕκτη ἐξίσωσις, $2\,m_3\,u - m_6\,\upsilon = \pm 1$, ἀπαιτεῖ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος:

$$(26)\qquad \frac{706}{32599} = 0 + \cfrac{1}{46 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}}}$$

τοῦ ὁποίου τὰ ἀτελῆ κλάσματα εἶναι

$$(27)\qquad \frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{46},\ \frac{5}{231},\ \frac{6}{277},\ \frac{17}{785},\ \frac{23}{1062},\ \frac{132}{6095},\ \frac{287}{13252},\ \frac{706}{32599}$$

Ἔχομεν συνεπῶς

$$(28)\qquad u = 13\,252\,,\quad \upsilon = 287\,,\quad u\upsilon = 3\,803\,924$$

ζ) Ἡ ἑβδόμη ἐξίσωσις, $2\,m_2\,u - m_7\,\upsilon = \pm 1$, ἀπαιτεῖ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος :

$$(29)\qquad \frac{14}{1643921} = 0 + \cfrac{1}{117\,422 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{13}}}$$

τοῦ ὁποίου τὰ ἀτελῆ κλάσματα εἶναι :

$$(30)\qquad \frac{1}{0}\,,\ \frac{0}{1}\,,\ \frac{1}{117\,422}\,,\ \frac{1}{117\,423}\,,\ \frac{14}{1\,643\,921}$$

Ἔχομεν ἐπομένως :

$$(31)\qquad u = 117\,423\,,\quad \upsilon = 1,\quad u\upsilon = 117\,423$$

η) Ἡ ὀγδόη, τέλος, ἐξίσωσις, $2\,m_1\,u - m_8\,\upsilon = \pm 1$ ἀπαιτεῖ, τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος :

$$(32)\qquad \frac{2}{11\,507\,447} = 0 + \cfrac{1}{5\,753\,723 + \cfrac{1}{2}}$$

τοῦ ὁποίου τὰ ἀτελῆ κλάσματα εἶναι

$$(33)\qquad \frac{1}{0}\,,\ \frac{0}{1}\,,\ \frac{1}{5\,753\,723}\,,\ \frac{2}{11\,507\,447}$$

Ἔχομεν ἐπομένως

$$(34)\qquad u = 5\,753\,723,\quad \upsilon = 1,\quad u\upsilon = 5\,753\,723$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ μικροτέρα τιμὴ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ δόσωμεν εἰς τὴν παράμετρον $b = u\upsilon$ δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως 7. Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι :

$$(35)\qquad b = u\upsilon = 117\,423$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης προκύπτουν

$$S = 7\,u = 821\,961$$

$$2\,S - 1 = 1\,643\,921$$

$$(36)\qquad \Xi + \Pi = \frac{2\,S\,(2\,S - 1)}{2} = \frac{1\,643\,922 \cdot 1\,643\,921}{2}$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν

$$(37)\qquad \begin{aligned} \Lambda + K &= 17\,826\,996\, b \\ &= 3\,828 \cdot 4\,657\, b \\ &= 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,657\, b \\ &= 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4\,349 \cdot 4\,657 \\ &= (2^2 \cdot 3^4 \cdot 4\,349)\,(11 \cdot 29 \cdot 4\,657) \\ &= 1\,409\,076 \cdot 1\,485\,583 \\ &= p\,q \end{aligned}$$

Ἡ κατὰ Wurm «πλινθὶς» θὰ εἶναι κατὰ ταῦτα ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον πλευρῶν :

$$(38)\qquad 1\,409\,076 \quad \text{καὶ} \quad 1\,485\,583$$

Ἐξ ἄλλου, εἰσάγοντες τὴν τιμὴν (35) τῆς παραμέτρου b εἰς τὰς ἐξισώσεις (9) καὶ (11) τῆς πρώτης παραγράφου εὑρίσκομεν διὰ τὰ πλήθη τῶν ταύρων καὶ ἀγελάδων τῆς λύσεως Wurm

$$(39)\qquad \begin{aligned} \Lambda &= 1\,217\,263\,415\,886 \\ K &= 876\,035\,935\,422 \\ \Xi &= 487\,233\,469\,701 \\ \Pi &= 864\,005\,479\,380 \\ \lambda &= 846\,192\,410\,280 \\ \kappa &= 574\,579\,625\,058 \\ \xi &= 638\,688\,708\,099 \\ \pi &= 412\,838\,131\,860 \end{aligned}$$

καὶ συνολικὸν ἀριθμὸν βοῶν

$$5\,916\,837\,175\,686$$

5. Ἡ λύσις τοῦ Amthor

Εἰς τὴν λύσιν ταύτην, πέραν τῶν 7 πρώτων συνθηκῶν τὰς ὁποίας ἔχομεν διατυπώσει ὡς (3) εἰς τρίτην παράγραφον, θεωροῦμεν ἑτέρας δύο, τὴν 8ην.

$$(1)\qquad \Lambda + K = \mu^2$$

καὶ τὴν 9ην

$$(2)\qquad \Xi + \Pi = \frac{1}{2}\,\nu(\nu+1)$$

ὅπου μ καὶ ν ἀκέραιοι πρὸς προσδιορισμόν. Ἐξ αὐτῶν ἡ (1) ἀντικαθιστᾶ τὴν ἀντίστοιχον συνθήκην (2) τῆς λύσεως τοῦ Wurm

$$\Lambda + K = p\,q$$

Ἡ δευτέρα ταυτίζεται μὲ τὴν ἀντίστοιχον τῆς λύσεως τοῦ Wurm.

Ἔχομεν οὕτω, ὅπως βλέπομεν, $7 + 2 = 9$ συνθήκας διὰ $8 + 2 = 10$ ἀγνώστους. Ἐπομένως τὸ πρόβλημα εἶναι, ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, ὅπως δὲ θὰ δείξωμεν ἡ λύσις του ἐξαρτᾶται ἐκ μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (6) τῆς τρίτης παραγράφου ἔχομεν :

(3) $$\mu^2 = \Lambda + K = 3828\,\alpha = 3828 \cdot 4657\, b = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657\, b.$$

Διὰ νὰ δύναται ὅμως τὸ τετράγωνον μ^2 νὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν (3), πρέπει νὰ ἔχωμεν :

(4) $$b = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657\, \kappa^2$$

ὅπου

(5) $$\kappa = \text{ἀκέραιος}$$

ἐπίσης, λόγῳ τῶν ἐξισώσεων (6) τῆς τρίτης παραγράφου καὶ τῆς ἀνωτέρω (2), ἔχομεν :

(6) $$4\,\nu(\nu + 1) = 8\,(\Xi + \Pi) = 19\,760\,\alpha = 2^3 \cdot 7 \cdot 353 \cdot 4\,657\, b.$$

Ἀλλὰ

(7) $$4\,\nu\,(\nu + 1) = 4\,\nu^2 + 4\,\nu = (2\,\nu + 1)^2 - 1$$

Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

(8) $$y^2 - A'\, x^2 = 1$$

ὅπου

$$y = 2\,\nu + 1$$

(9) $$A' = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353\;\; 4\,657^2$$

καὶ ἐὰν λάβωμεν :

$$z = 2 \cdot 4\,657\, x$$

(10) $$A = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 = 4\,729\,494$$

ἡ ἐξίσωσις (8) γράφεται :

(11) $$y^2 - A\, z^2 = 1$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν μικροτέραν λύσιν y, z τῆς (11), ἀρκεῖ νὰ ἀναπτύξωμεν τὴν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως :

(12) $$x^2 - A = 0$$

ὑπὸ μορφὴν συνεχοῦς κλάσματος μέχρις ὅτου ἔχωμεν ἓν πλῆρες πηλίκον x_i τοῦ ὁποίου ὁ παρανομαστὴς D_i νὰ ἰσοῦται πρὸς Η, δηλαδή, εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν τῆς ἐξισώσεων (11), πρὸς 1, ὁπότε ἡ (11) πληροῦται διὰ τὰς ἀκεραίας τιμάς.

(13) $$y = P_i\,, \quad Z = Q_i$$

Εἰς τὰς σελίδας 934, 935 δίδομεν, ὑπὸ μορφὴν πίνακος, τὰ στοιχεῖα τοῦ ἀναπτύγματος εἰς συνεχὲς κλάσμα τῆς

(14) $$x = \sqrt{A} \qquad A = 4\,729\,494$$

Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ πίνακος τούτου, ἔχομεν :

$D_i = 1$ διὰ $i = 92$.

Ἐν συνεχείᾳ, εἰς τὰς σελ. 936—939 δίδομεν ἐπίσης ὑπὸ μορφὴν πίνακος, τὰς τιμὰς P_i' καὶ Q_i' τῶν ἀτελῶν κλασμάτων τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ

$$\sqrt{A} - 2\,174 \tag{15}$$

δηλ. τοῦ κλασματικοῦ τμήματος τῆς x.

Ὡς εἶναι φανερόν, ἔχομεν :

$$\begin{aligned} P_i &= P_i' + 2174\, Q_i' \\ Q_i &= Q_i' \end{aligned} \tag{16}$$

Ἑπομένως διὰ $i = 92$:

$$\begin{aligned} P_{92} &= 109\;931\;986\;732\;829\;734\;979\;866\;232\;821\;433\;543\;901\;088\;049 \\ Q_{92} &= 50\;549\;485\;234\;315\;033\;074\;477\;819\;735\;540\;408\;986\;340 \end{aligned} \tag{17}$$

Βάσει τῆς μικροτέρας ταύτης λύσεως τῆς (11) δύνανται νὰ προκύψουν ἅπασαι αἱ λοιπαὶ καὶ ἰδιαιτέρως ἡ μικροτέρα ἡ πληροῦσα τὴν ἐξίσωσιν (8). Αὕτη, λόγῳ τῶν (10), εἶναι ἡ μικροτέρα λύσις τῆς (11) ἡ διαιρουμένη διὰ τοῦ $2 \cdot 4\,657$.

Θὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἀναζήτησιν ταύτης, συμφώνως πρὸς τὸν **Amthor**, εἰς τὴν σελίδα 940.

$$y^2 - Az^2 = 1$$

$$A = 4729494, \quad \sqrt{A} = 2174 + \frac{1}{x_1}$$

$$x_i = \frac{E_i + \sqrt{A}}{D_i} = a_i + \frac{1}{x_{i+1}}$$

$$E_i = D_{i-1}\, a_{i-1} - E_{i-1}, \quad D_i = \frac{1}{D_{i-1}}\left[A - E_i^2\right]$$

i	a_i	E_i	D_i	i	a_i	E_i	D_i	i	a_i	E_i	D_i
0	2174	0	1	21	1	438	2327	42	47	2128	91
1	1	2174	3218	22	8	1889	499	43	3	2149	1223
2	2	1044	1131	23	6	2103	615	44	1	1520	1978
3	1	1218	2370	24	1	1587	3595	45	1	458	2285
4	5	1652	697	25	21	2008	194	46	6	1827	609
5	2	1833	1965	26	1	2066	2377	47	1	1827	2285
6	25	2097	169	27	1	311	1949	48	1	458	1978
7	3	2128	1190	28	3	1638	1050	49	3	1520	1223
8	1	1442	2227	29	1	1512	2327	50	47	2149	91
9	1	785	1847	30	1	815	1747	51	1	2128	2210
10	1	1062	1950	31	1	932	2210	52	1	82	2137
11	1	888	2021	32	2	1278	1401	53	17	2055	237
12	1	1133	1705	33	2	1524	1718	54	1	1974	3514
13	1	572	2582	34	6	1912	625	55	5	1540	671
14	15	2010	267	35	1	1838	2162	56	1	1815	2139
15	1	1995	2807	36	1	324	2139	57	1	324	2162
16	2	812	1450	37	5	1815	671	58	6	1838	625
17	16	2088	255	38	1	1540	3514	59	2	1912	1718
18	1	1992	2986	39	17	1974	237	60	2	1524	1401
19	2	994	1253	40	1	2055	2137	61	1	1278	2210
20	1	1512	1950	41	1	82	2210	62	1	832	1747

i	a_i	E_i	D_i	i	a_i	E_i	D_i	i	a_i	E_i	D_i
63	1	815	2327	74	1	994	2986	85	3	1442	1190
64	3	1512	1050	75	16	1992	255	86	25	2128	169
65	1	1638	1949	76	2	2088	1450	87	2	2097	1965
66	1	311	2377	77	1	812	2807	88	5	1833	697
67	21	2066	194	78	15	1995	267	89	1	1652	2870
68	1	2008	3595	79	1	2010	2582	90	2	1218	1131
69	6	1587	615	80	1	572	1705	91	1	1044	3218
70	8	2103	499	81	1	1133	2021	92	4348	2174	1
71	1	1889	2327	82	1	888	1950	93	1	2174	3218
72	1	438	1950	83	1	1062	1847	94	2	1044	1131
73	2	1512	1253	84	1	785	2227	.	.	. .	. .

$$P_n = P_{n-1}\, a_{n-1} + P_{n-2}$$

n	a_n	P_n
2	1	1
3	2	2
4	1	3
5	5	17
6	2	37
7	25	942
8	3	2 853
9	1	3 805
10	1	6 668
11	1	10 473
12	1	17 141
13	1	27 614
14	1	44 755
15	15	698 939
16	1	743 694
17	2	2 186 327
18	16	35 724 926
19	1	37 911 253
20	2	111 547 432
21	1	149 458 685
22	1	261 006 117
23	8	2 237 507 621
24	6	13 686 051 843
25	1	15 923 559 464
26	21	348 080 800 587
27	1	364 004 360 051
28	1	712 085 160 638
29	3	2 500 259 841 965
30	1	3 212 345 002 603
31	1	5 712 604 844 568
32	1	8 924 949 847 171
33	2	23 562 504 538 910
34	2	58 049 958 924 991
35	6	359 862 258 088 856
36	1	415 912 217 013 847
37	1	775 774 475 102 703
38	5	4 294 784 552 527 362
39	1	5 070 559 067 630 065
40	17	90 494 288 742 238 467
41	1	95 564 847 809 868 532
42	1	186 059 136 552 106 999
43	47	8 840 344 265 758 897 485
44	3	26 707 091 933 826 799 454
45	1	35 547 435 199 587 696 939
46	1	62 254 528 133 416 496 393
47	6	409 074 605 000 086 675 297
48	1	471 329 133 133 503 171 690
49	1	880 403 738 133 589 846 987
50	3	2 112 540 347 534 272 712 651
51	47	147 169 804 072 244 407 341 584
52	1	150 282 340 419 778 680 054 235

53	1	401 970 794 537 058 167 734 547
54	17	7 036 592 016 372 191 151 267 075
55	1	7 438 562 810 909 249 319 001 622
56	5	44 229 406 070 918 437 746 275 185
57	1	51 667 968 881 827 687 065 276 807
58	1	95 895 374 952 746 124 811 551 992
59	6	627 052 218 598 304 435 934 588 759
60	2	1 350 001 812 149 354 996 680 729 510
61	2	3 327 055 842 897 014 429 296 047 779
62	1	4 677 057 655 046 369 425 976 777 289
63	1	8 004 113 497 943 383 855 272 825 068
64	1	12 681 171 152 989 753 231 249 602 357
65	3	46 047 626 956 912 643 699 021 632 139
66	1	59 728 798 109 902 396 980 271 234 496
67	1	104 776 425 068 815 040 679 292 866 635
68	21	2 259 033 724 513 018 251 245 421 433 831
69	1	2 363 810 149 579 833 291 924 714 300 466
70	6	16 441 894 621 992 018 002 793 707 236 627
71	8	133 898 967 125 515 977 314 274 372 193 482
72	1	150 340 861 747 507 995 317 068 079 430 109
73	1	284 239 828 873 023 972 631 342 451 629 591
74	2	718 820 519 493 555 940 579 752 982 677 291
75	1	1 003 060 348 368 579 913 211 095 434 300 882
76	16	16 767 786 093 358 834 551 957 279 931 491 403
77	2	34 538 632 535 084 249 017 125 655 297 283 688
78	1	51 306 418 628 443 083 569 082 935 228 775 091
79	15	804 134 311 961 730 502 553 369 683 728 910 053
80	1	855 441 330 590 173 586 122 452 618 957 685 144
81	1	1 659 576 242 551 904 088 675 822 302 686 595 197
82	1	2 515 017 573 142 077 674 798 274 921 644 280 341
83	1	4 174 593 815 693 981 763 474 097 224 330 875 538
84	1	6 689 611 388 836 059 438 272 372 145 975 155 879
85	1	10 864 205 204 530 041 201 746 469 370 306 031 417
86	3	39 282 227 002 426 183 043 511 780 256 893 250 130
87	25	992 919 880 265 184 617 289 540 975 792 637 284 667
88	2	2 025 121 987 532 795 417 622 593 731 842 167 819 464
89	5	11 118 529 817 929 161 705 402 509 635 003 476 381 987
90	1	13 143 651 805 461 957 123 025 103 366 845 644 201 451
91	2	37 405 833 428 853 075 951 452 716 368 694 764 784 889
92	1	50 549 485 234 315 033 074 477 819 735 540 408 986 340

$$Q_n = Q_{n-1}\, a_{n-1} + Q_{n-2}$$

n	a_n	Q_n
2	1	1
3	2	3
4	1	4
5	5	23
6	2	50
7	25	1 273
8	3	3 869
9	1	5 142
10	1	9 011
11	1	14 153
12	1	23 164
13	1	37 317
14	1	60 481
15	15	944 532
16	1	1 005 013
17	2	2 954 558
18	16	48 277 941
19	1	51 232 499
20	2	150 742 939
21	1	201 975 438
22	1	352 718 377
23	8	3 023 722 454
24	6	18 495 053 101
25	1	21 518 775 555
26	21	470 389 339 756
27	1	491 908 115 311
28	1	962 297 455 067
29	3	3 378 800 480 512
30	1	4 341 097 935 579
31	1	7 719 898 416 091
32	1	12 060 996 351 670
33	2	31 841 891 119 431
34	2	75 744 778 590 532
35	6	486 310 562 662 623
36	1	562 055 341 253 155
37	1	1 048 365 903 915 778
38	5	5 803 684 660 882 045
39	1	6 852 250 764 747 823
40	17	122 292 147 861 545 036
41	1	129 144 398 626 292 859
42	1	251 436 546 487 837 895
43	47	11 946 662 083 554 673 924
44	3	36 091 422 797 151 859 687
45	1	48 038 084 880 706 533 591
46	1	84 129 507 677 858 393 259
47	6	552 815 130 947 856 893 139
48	1	636 944 638 625 715 286 397
49	1	1 189 759 769 573 572 179 536
50	3	4 206 223 947 346 431 825 005
51	47	198 882 285 294 855 867 954 771
52	1	203 088 509 242 202 299 779 776

n	a_n	P_n
53	1	297 452 140 492 023 087 395 819
54	17	5 206 968 728 784 171 165 783 158
55	1	5 504 420 869 276 194 253 178 977
56	5	32 729 073 075 165 142 431 678 043
57	1	38 233 493 944 441 336 684 857 020
58	1	70 962 567 019 606 479 116 535 063
59	6	464 008 396 062 080 211 384 067 398
60	2	998 980 359 143 766 901 884 669 859
61	2	2 461 969 614 349 614 015 153 407 116
62	1	3 460 949 973 493 380 917 038 076 975
63	1	5 922 919 587 842 994 932 191 484 091
64	1	9 383 869 561 336 375 849 229 561 066
65	3	34 074 528 271 852 122 479 880 167 289
66	1	43 458 397 833 188 498 329 109 728 355
67	1	77 532 926 105 040 620 808 989 895 644
68	21	1 671 649 846 039 041 535 317 897 535 879
69	1	1 749 182 772 144 082 156 126 887 432 523
70	6	12 166 746 478 903 534 472 079 222 132 017
71	8	99 083 154 603 372 357 932 760 664 488 659
72	1	111 249 901 082 275 892 404 839 886 620 676
73	1	210 333 055 685 648 250 337 600 551 109 335
74	2	531 916 012 453 572 393 080 040 988 839 346
75	1	742 249 068 139 220 463 417 641 539 948 681
76	16	12 407 901 102 681 102 687 762 305 628 018 242
77	2	25 558 051 273 501 426 018 942 252 795 985 165
78	1	37 965 952 376 182 528 706 704 558 424 003 407
79	15	595 047 336 916 239 355 619 510 629 156 036 270
80	1	633 013 289 292 421 885 326 215 187 580 039 677
81	1	1 228 060 626 208 661 241 945 725 816 736 075 947
82	1	1 861 073 915 501 083 127 271 941 004 316 115 624
83	1	3 089 134 541 709 744 369 217 666 821 052 191 571
84	1	4 950 208 457 210 827 496 489 607 825 368 307 195
85	1	8 039 342 998 920 571 865 707 274 646 420 498 766
86	3	29 068 237 453 972 543 093 611 431 764 629 803 493
87	25	734 745 279 348 234 149 205 933 068 762 165 586 091
88	2	1 498 558 796 150 440 841 505 597 569 288 960 975 675
89	5	8 227 539 260 100 438 356 793 980 315 206 970 464 466
90	1	9 726 098 056 250 879 198 299 578 484 495 931 440 141
91	2	27 679 735 372 602 196 753 213 937 884 198 833 344 748
92	1	37 405 833 428 853 075 951 452 716 368 694 764 784 889

6. Προσδιορισμὸς τῆς μικροτέρας λύσεως τῆς ἐξισώσεως (8)

Ὅπως ἔχομεν ἤδη ἀναφέρει εἰς τὴν σελίδα 933 ἡ ζητουμένη μικροτέρα λύσις τῆς (8) δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ τῆς λύσεως (17) τῆς ἐξισώσεως (11), ἀφοῦ ἡ τελευταία αὕτη

(18) ἢ (11) $$y^2 - Az^2 = 1$$

προκύπτει ἐκ τῆς (8)

(19) ἢ (8) $$y^2 - A' x^2 = 1$$

λόγῳ τῶν σχέσεων

(20) ἢ (10) $$A' = (2 \cdot 4\,657)^2 A, \qquad Z^2 = (2 \cdot 4\,657)^2 x^2$$

Διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα, θὰ προσδιορίσωμεν ὡρισμένας ἰδιότητας τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (11).

I.— Ἡ ἐξίσωσις (18) δύναται νὰ γραφῇ.

(21) $$(y + \sqrt{A}\, z)\,(y - \sqrt{A}\, z) = 1$$

ὁπότε ὁδηγεῖ εἰς τὰς σχέσεις

(22 $$(y + \sqrt{A}\, z)^n = 1, \qquad (y - \sqrt{A}\, z)^n = 1$$

αἱ ὁποῖαι ἀναπτυσσόμεναι δίδουν

(23) $$\begin{aligned} (y + \sqrt{A}\, z)^n &= Y_n + Z_n \sqrt{A} \\ (y - \sqrt{A}\, z)^n &= Y_n - Z_n \sqrt{A} \end{aligned}$$

(24) $$(y + \sqrt{A}\, z)^m\,(y + \sqrt{A}\, z)^n = (Y_m + \sqrt{A}\, Z_m)\,(Y_n + \sqrt{A}\, Z_n) =$$

$$(Y_m Y_n + Z_m Z_n A) + (Y_m Z_n + Y_n Z_m)\sqrt{A} = Y_{m+n} + \sqrt{A}\, Z_{m+n}$$

ὅπου Y_n τὸ τμῆμα τὸ ἀνεξάρτητον τοῦ $\sqrt{A}$, εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τῆς (23), καὶ Z_n ὁ συντελεστὴς τοῦ $\sqrt{A}$, εἰς τὸ αὐτὸ ἀνάπτυγμα.

II.— Ἐάν, ἐκ τῶν λύσεων τῆς (18), ἡ (y_ρ, z_ρ) εἶναι ἡ μικροτέρα διὰ τὴν ὁποία ἡ z_ρ εἶναι πολλαπλάσιον ἑνὸς πρώτου ἀριθμοῦ M, ἢ συμβολικῶς ἐὰν

(25) $$Z_\rho \equiv 0 \bmod M$$

καὶ καλέσωμεν $(y_{\rho+\sigma},\ z_{\rho+\sigma})$ τὴν ἀμέσως μεγαλυτέραν λύσιν διὰ τὴν ὁποίαν ἐπίσης

(26) $$Z \equiv 0 \bmod M$$

τότε θὰ ἔχωμεν

(27) $$\sigma \geqslant \rho$$

Πράγματι, ἐκ τῶν (23), (24) προκύπτει

(28) $$Y_{\rho+\sigma} = Y_\rho\, Y_\sigma + Z_\rho\, Z_\sigma\, A$$

(29) $$Z_{\rho+\sigma} = Y_\sigma\, Z_\rho + Y_\rho\, Z_\sigma$$

καὶ ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως,

(30α) $$Z_\rho \equiv 0 \bmod M$$

(30β) $$\text{καὶ} \quad Z_{\rho+\sigma} \equiv 0 \bmod M$$

θὰ πρέπει, λόγῳ τῆς (29), νὰ ἔχωμεν

(31) $$Y_\rho\, Z_\sigma \equiv \bmod M$$

δηλαδή, εἴτε

(32) $$Y_\rho \equiv 0 \bmod M$$

(33) $$\text{εἴτε} \quad Z_\sigma \equiv o \bmod M$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἔχομεν

(34) $$Y^2{}_\rho - A\, Z^2{}_\rho = 1$$

δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ πληροῦνται ταυτοχρόνως ἡ (30α) καὶ ἡ (32). Ἄρα θὰ πληροῦται ἡ (33). Λόγῳ ὅμως τῆς (25), $\sigma > \rho$. Ἄρα πληροῦται ἡ (27).

III.— Ἐάν, ὅπως εἰς τὸ II, ἡ (y_ρ, z_ρ) εἶναι ἡ μικροτέρα λύσις διὰ τὴν ὁποίαν ἡ $z_\rho \equiv 0 \bmod M$, καὶ ἡ ἀμέσως μεγαλυτέρα $(y_{\rho+\sigma}, z_{\rho+\sigma})$ διὰ τὴν ὁποίαν ἐπίσης $z \equiv 0 \bmod M$ τότε αἱ λοιπαὶ τιμαὶ τῶν z αἱ πληροῦσαι τὴν αὐτὴν συνθήκην θὰ εἶναι τῆς μορφῆς :

(35) $$Z_{\alpha\rho + \beta\sigma}$$

ὅπου α καὶ β αὐθαίρετοι, θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, ἀκέραιοι.

Ἡ ἀπόδειξις ἀκολουθεῖ τὴν πορείαν τῆς ἀποδείξεως τῆς προτάσεως II. Ἀντὶ ὅμως ν' ἀναχωρήσωμεν ἐκ τῶν (28) καὶ (29) ἀναχωροῦμεν ἐκ τῶν

(36) $$Y_{\rho+2\sigma} = Y_\sigma\, Y_{\rho+\sigma} + Z_{\rho+\sigma}\, Z_\sigma\, A$$

(37) $$Z_{\rho+2\sigma} = Y_\sigma\, Z_{\rho+\sigma} + Y_{\rho+\sigma}\, Z_\sigma$$

καὶ ἔχομεν λόγῳ τῆς (37)

(38) $$Z_{\rho+2\sigma} \equiv 0 \bmod M$$

διότι

(39) $$Z_{\rho+\sigma} \text{ καὶ } Z_\sigma \equiv 0 \bmod M$$

Ἀκολούθως, ἀποδεικνύομεν ὅτι

(40) $$Z_{\rho+3\sigma} \equiv 0 \bmod M$$

διότι

(41) $$Z_{\rho+2\sigma} \text{ καὶ } Z_\sigma \equiv 0 \bmod M$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τοῦ $Z_{\rho+\beta\sigma}$

Ἐν συνεχείᾳ ἀποδεικνύομεν ὅτι

(42) $$Z_{2\rho+\beta\sigma} \equiv 0 \text{ mod } M$$

καὶ φθάνομεν τελικῶς εἰς τὴν

(43) $$Z_{\alpha\rho+\beta\sigma} \equiv 0 \text{ mod } M.$$

IV.— Ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς αὐτῆς ὑποθέσεως, ὡς καὶ εἰς τὴν **III**, διὰ τὸ Z_ρ καὶ $Z_{\rho+\sigma}$, ἀποδεινύομεν ὅτι

(44) $$\sigma = \rho$$

Ἔστω g ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ρ καὶ σ, θὰ ἔχωμεν

(45) $$\rho = g\rho_1 , \quad \sigma = g\sigma_1$$

ὅπου ρ_1 καὶ σ_1 πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν δύο ἀκεραίους, α καὶ β, τοιούτους ὥστε

(46) $\alpha\rho_1 + \beta\sigma_1 = 1$, ὁπότε $\alpha\rho + \beta\sigma = g$.

Λόγῳ ὅμως τῆς (43) θὰ εἶναι

(47) $$Z_g \equiv 0 \text{ mod } M$$

Ἀλλὰ τότε πρέπει νὰ εἶναι :

(48) $$\rho_1 = 1 \text{ καὶ } \sigma = \rho\sigma_1$$

Ἀφοῦ ὅμως

(49) $$Z_{2\rho} \text{ καὶ } Z_{\rho+\sigma}$$

αἱ ἀμέσως μεγαλύτεραι τιμαί, μετὰ τὴν Z_ρ, $\equiv 0$ mod M, ἔπεται ἀμέσως ἡ (44).

Ἑπομένως καὶ ἡ (35) γίνεται ἁπλῶς

(50) $$Z_{\alpha\rho}$$

V.— Ἔστω Μ εἷς πρῶτος ἀριθμός, οὐχὶ παράγων τοῦ Α, καὶ (y_1, z_1) ἡ μικροτέρα λύσις τῆς

(51) $$y^2 - Az^2 = 1$$

Ἐὰν **δὲν** εἶναι y_1 καὶ $z_1 \equiv 0$ mod M, τότε θὰ ἔχωμεν :

(52) εἴτε $y_{M-1} \equiv 1$ καὶ $z_{M-1} \equiv 0$ mod M

(53) εἴτε $y_{M+1} \equiv 1$ καὶ $z_{M+1} \equiv 0$ mod M

ἀναλόγως τοῦ ἂν ὁ Α εἶναι ἢ ὄχι τετραγωνικὸν ὑπόλοιπον τοῦ Μ (εἶναι δηλαδὴ ἢ ὄχι ἴσοι πρὸς τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως διὰ τοῦ Μ ἑνὸς τῶν τετραγώνων : $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, (M-1)^2$).

Πράγματι, ἔχομεν:

$$(53)\quad (y_1 + A z_1)^M = y_1^M + \left(\frac{M}{2}\right) y_1^{M-2} z_1 A + \left(\frac{M}{4}\right)^{M-4} z_1^4 A^2 + \cdots$$

$$+ \left(\frac{M}{M-}\right) y_1 z_1^{M-1} A^{\frac{M-1}{2}}$$

$$+ \sqrt{A} \left[\left(\frac{M}{1}\right) y_1^{M-1} z_1 + \left(\frac{M}{3}\right) y_1^{M-3} z^3 A + \cdots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{M}{M}\right) z_1^M A^{\frac{M-1}{2}} \right.$$

$$= y_M + \sqrt{A}\, z_M$$

$$\text{ὅπου } \left(\frac{M}{m}\right) = C_m^M = \frac{M!}{m!\,(M-m)!}$$

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ M πρῶτος ἀριθμός, ἅπαντες οἱ διωνυμικοὶ συντελεσταὶ συντελεσταὶ $\left(\frac{M}{m}\right)$ εἶναι ἀκέραιοι καὶ πολλαπλάσια τοῦ M πλὴν μόνον τοῦ $\left(\frac{M}{m}\right) = 1$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$(55)\quad y_M \equiv y_1^M \bmod M \text{ καὶ } z_M \equiv z_1^M A^{\frac{M-1}{2}} \bmod M.$$

Κατὰ τὸ γνωστὸν ὅμως θεώρημα τοῦ Fermat, διὰ M τυχόντα πρῶτον ἀριθμὸν καὶ α ἀκέραιον μὴ διαιρούμενον διὰ τοῦ M, ἔχομεν:

$$(56)\quad \alpha^M \equiv \alpha \bmod M$$

ἑπομένως ἐνταῦθα

$$(57)\quad y_M \equiv y_1, \quad z_M \equiv z_1 A^{\frac{M-1}{2}} \bmod M$$

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν A τετραγωνικὸν ὑπόλοιπον τοῦ M, θὰ ἔχωμεν.

$$(58)\quad A^{\frac{M-1}{2}} \equiv 1 \bmod M$$

καὶ

$$(59)\quad y^M \equiv y_1, \quad z_M \equiv z_1 \bmod M$$

Ἐπειδὴ ὅμως

$$(60)\quad \begin{aligned} y_M &= y_{M-1}\, y_1 + z_{M-1}\, z_1 A \\ z_M &= y_{M-1}\, z_1 + z_{M-1}\, y_1 \end{aligned}$$

θὰ ἔχωμεν

$$(61)\quad \begin{aligned} y_1 &\equiv y_{M-1}\, y_1 + z_{M-1}\, z_1 A \bmod M \\ z_1 &\equiv y_{M-1}\, z_1 + z_{M-1}\, y_1 \bmod M \end{aligned}$$

Ἐὰν τώρα πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῶν (61) μὲ $-z_1$ καὶ y_1 καὶ ἀθροίσωμεν, θὰ ἔχωμεν :

$$0 \equiv z_{M-1}\,(y_1^2 - z_1^2 A) \mod M \tag{62}$$

καὶ λόγω τῆς (51)

$$z_{M-1} \equiv 0 \mod M \tag{63}$$

Ὁμοίως ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη τῶν (61) ἐπὶ y_1 καὶ $-z_1 A$ καὶ ἀθροίσωμεν, θὰ ἔχωμεν :

$$(y_1^2 - z_1^2 A) \equiv y_{M-1}\,(y_1^2 - z_1^2 A) \mod M \tag{64}$$

ἢ

$$(y_1^2 - z_1^2 A)\,(y_{M-1} - 1) \equiv 0 \mod M \tag{65}$$

δηλαδὴ

$$y_{M-1} \equiv 1 \mod M \tag{66}$$

Ἑπομένως τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ἀπεδείχθη.

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ A δὲν εἶναι τετραγωνικὸν ὑπόλοιπον τοῦ M, θὰ ἔχωμεν :

$$A^{\frac{M-1}{2}} \equiv -1 \mod M \tag{67}$$

ὁπότε, λόγω τῆς (57)

$$y_M \equiv y_1\,, \quad z_M \equiv -z_1 \mod M \tag{68}$$

Ἀλλὰ

$$\begin{aligned} y_{M+1} &= y_M\,y_1 + z_M\,z_1\,A_1 \\ z_{M+1} &= y_M\,z_1 + z_M\,y_1 \end{aligned} \tag{69}$$

Ἑπομένως :

$$\begin{aligned} y_{M+1} &\equiv y_1^2 - z_1^2 A \quad \text{καὶ} \quad y_{M+1} \equiv 1 \mod M \\ z_{M+1} &\equiv y_1 z_1 - z_1 y_1 \equiv 0 \mod M \end{aligned} \tag{70}$$

ἄρα καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως ἀληθεύει.

VI.— Κατὰ ταῦτα, ἡ μικροτέρα λύσις (y_ρ, z_ρ) τῆς $y^2 - z^2 A = 1$ διὰ τὴν ὁποίαν

$$z_\rho \equiv 0 \mod M \tag{71}$$

(ὅπου M πρῶτος ἀριθμός, μὴ διαιρῶν τὸν A) προκύπτει ὅταν ἀναλύσωμεν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας τὸν $M-1$ ἢ τὸν $M+1$, ἀναλόγως τοῦ ἂν ὁ A εἶναι ἢ ὄχι τετραγωνικὸν ὑπόλοιπον τοῦ M, ἔστω

$$M - 1 = p \cdot q \cdot r \cdot \cdots \quad \text{ἢ} \quad M + 1 = p \cdot q \cdot r \cdot \cdots \tag{72}$$

ὁπότε ἡ z_ρ θὰ εἶναι ἀναγκαστικῶς μιᾶς τῶν μορφῶν :

(73) $$z_p\,,\ z_q\,,\ z_r\,,\ .\ .\ .\ ,\ z_{pq}\,,\ z_{pr}\,,\ .\ .\ .$$

Πράγματι, κατὰ τὴν (50) ἅπασαι αἱ $z \equiv 0 \mod M$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $z_{\alpha\rho}$ ὅπου z_ρ ἡ μικροτέρα z διὰ τὴν ὁποίαν $\equiv 0 \mod M$.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ὁ A εἶναι τετραγωνικὸν ὑπόλοιπον τοῦ M, συμφώνως τῇ V.

(74) $$z_{M-1} \equiv 0 \mod M$$

ἑπομένως $M - 1 = \alpha\rho$, δηλ. ρ = παράγων τοῦ $M - 1$.

Ἐάν, ἀντιθέτως, ὁ A δὲν εἶναι τετραγωνικὸν ὑπόλοιπον τοῦ M, τὸ ρ θὰ εἶναι παράγων τοῦ $M + 1$.

Κατωτέρω γίνεται ἐφαρμογὴ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς μικροτέρας λύσεως τῆς ἐξισώσεως.

(75) $$y^2 - 4\,729\,494\, z^2 = 1$$

εἰς τὴν ὁποίαν

(76) $$z \equiv 0 \mod 4\,657$$

Κατὰ πρῶτον ἐλέγχομεν ὅτι ἡ λύσις (17) (P_{92}, Q_{92}) τῆς σελίδος 933 δὲν ἔχει παράγοντα τὸ $M = 4\,657$. Πράγματι :

$$P_{92} \equiv 4\,406 \equiv -\ 251 \mod 4\,657$$

(77) $$Q_{92} \equiv 3\,051 \equiv -1\,606 \mod 4\,657$$

Ἐπίσης ἐλέγχομεν ὅτι :

(78) $$A = 4\,729\,494 \equiv 2\,639 \equiv -2\,018 \mod 4\,657$$

Ἐν συνεχείᾳ ἐξακριβώνομεν ἐὰν τὸ A εἶναι ἢ ὄχι τετραγωνικὸν ὑπόλοιπον τοῦ $M = 4\,657$, ἐὰν δηλαδὴ ἔχομεν :

(79) $$A^{\frac{M-1}{2}} \equiv +1 \text{ ἢ } -1 \mod M$$

Ἔχομεν ὡς ἄνω

(80) $$A = m\,M + r_1 \quad , \quad r_1 = +\,2\,639 \text{ ἢ } -2\,018$$

$$A^2 = m^2 M^2 + 2m\,M\,r_1{}^2 + r_1{}^2$$

$$r_1{}^2 = 4\,072\,324 \equiv 2\,106 \mod M$$

(81) $$A^2 \equiv 2\,106 \equiv r_2 \mod M$$

καὶ γενικῶς ἐάν :

(82) $$A^\nu = n\,M + r_\nu \quad , \quad A^\mu = m\,M + r_\mu \quad , \quad \text{ἔχομεν :}$$

(83) $$A^{\nu+\mu} = n\,m\,M^2 + (m r_\nu + n r_\mu)\,M + r_\nu\, r_\mu\,.$$

Ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς (80) καὶ χρησιμοποιοῦντες τὴν (83) καταρτίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα:

$$(84)\qquad \begin{array}{llll} A \equiv -2018\,, & A^2 \equiv 2106\,, & A^4 \equiv 1772\,, & A^8 \equiv 1166 \\ A^{16} \equiv -288\,, & A^{32} \equiv -882\,, & A^{64} \equiv 205\,, & A^{128} \equiv 112 \\ A^{256} \equiv -1427\,, & A^{512} \equiv 1220\,, & A^{1024} \equiv -1840\,, & A^{2048} \equiv -39 \\ A^{2304} \equiv -231\,, & A^{2320} \equiv 1330\,, & A^{2328} \equiv -1. & \end{array}$$

Ἀλλὰ

$$(85)\qquad 2328 = \frac{4657-1}{2}$$

ἑπομένως τὸ A δὲν εἶναι τετραγωνικὸν ὑπόλοιπον τοῦ $M = 4657$. Κατὰ ταῦτα διὰ τὴν μικροτέραν λύσιν z_ρ, τὸ ρ θὰ εἶναι παράγων τοῦ

$$(86)\qquad M + 1 = 4\,658 = 2 \cdot 17 \cdot 137$$

καὶ θὰ δύναται νὰ λάβῃ μόνον μίαν τῶν τιμῶν:

$$(87)\qquad 2,\ 17,\ 34,\ 137,\ 274,\ 2\,329,\ 4\,658$$

Ὅπως προκύπτει ἐκ τῶν (77), ἔχομεν διὰ τὴν μικροτέραν λύσιν $y_1 = P_{92}$, $Z_1 = Q_{92}$ τῆς $y^2 - Az^2 = 1$.

$$(88)\qquad \begin{array}{l} y_1 \equiv -\ 251 \mod 4\,657 \\ z_1 \equiv -1\,606 \mod 4\,657 \end{array}$$

Ἐξ ἄλλου, ἡ (78) δίδει:

$$(89)\qquad A \equiv -2\,018 \mod 4\,657.$$

Εἰσάγοντες τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἰς τὰς σχέσεις (23) καὶ (24) καὶ δίδοντες εἰς τὸ n καταλλήλους τιμὰς εὑρίσκομεν διαδοχικῶς τὰ στοιχεῖα τοῦ κατωτέρω πίνακος ὑπολοίπων mod 4 657:

$$(90)\qquad \begin{array}{llll} y_1 \equiv -251\,, & y_{274} \equiv -1006 & z_1 \equiv -1606\,, & z_{274} \equiv -82 \\ y_2 \equiv 262\,, & y_{548} \equiv -1724 & z_2 \equiv 551\,, & z_{548} \equiv 1989 \\ y_4 \equiv 2234\,, & y_{1096} \equiv 2019 & z_4 \equiv -10\,, & z_{1096} \equiv 1689 \\ y_8 \equiv 1560\,, & y_{2192} \equiv -1686 & z_8 \equiv 1890\,, & z_{2192} \equiv -2323 \\ y_{16} \equiv 634\,, & \underline{y_{2329} \equiv -1} & z_{16} \equiv 1038\,, & \underline{z_{2329} \equiv 0} \\ y_{17} \equiv -1411\,, & & z_{17} \equiv 1933\,, & \\ y_{34} \equiv 106\,, & & z_{34} \equiv -1579\,, & \\ y_{68} \equiv -814\,, & & z_{68} \equiv 556\,, & \\ y_{136} \equiv -2054\,, & & z_{136} \equiv +1710\,, & \\ y_{137} \equiv 1686\,, & & z_{137} \equiv -2329\,, & \end{array}$$

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου προκύπτει ὅτι :

$$(91) \qquad \begin{aligned} y_{2329} &\equiv -1 \mod 4\,657 \\ z_{2329} &\equiv 0 \mod 4\,657 \end{aligned}$$

Ἐξ ἄλλου, ἀφοῦ Q_{92} εἶναι ἄρτιος

$$(97) \qquad \begin{aligned} z_1 = Q_{92} &\equiv 0 \mod 2 \\ z_2 = 2y_1 z_1 &\equiv 0 \mod 2 \end{aligned}$$

ἕπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν :

$$(93) \qquad z_{2329} \equiv 0 \mod 2 \cdot 4657$$

Ἄρα, ἡ ζητουμένη λύσις τῆς (8) εἶναι ἡ

$$(94) \qquad y_{2329}, \quad z_{2329}$$

Θὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τάξιν μεγέθους τῶν ὡς ἄνω τιμῶν.

Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ, λόγω τῆς (75), τὰ μεγέθη y^2 καὶ Az^2 διαφέρουν κατὰ μίαν μόνον μονάδα, καὶ τὰ μεγέθη y καὶ $\sqrt{A}\,z$ θὰ διαφέρουν ἐλάχιστα. Ἔχομεν ἄλλωστε.

$$(95) \qquad y_1 = P_{92} = 109\,932\ (39)\ , \quad Z_1 \sqrt{A} = 109\,932\ (39)$$

ὅπου, διὰ τοῦ συμβόλου **N (ν)** θὰ ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς **N** συμπληροῦται ὑπὸ ν ἀκόμη ψηφίων.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

$$(96) \qquad \begin{aligned} \log y_1 &= 44{,}041\,1240 \\ \log z_1 &= 40{,}703\,7168 \\ \log A &= 6{,}674\,8146 \\ \log \sqrt{A} &= 3{,}337\,4073 \\ \log z_1 \sqrt{A} &= 44{,}041\,1241 \\ \log (y_1 + z_1 \sqrt{A}) &= 44{,}342\,1541 \\ \log (y_{2329} + z_{2329} \sqrt{A}) &= \log (y_1 + z_1 \sqrt{A})^{2329} = 103\,272{,}8769 \end{aligned}$$

καὶ ἀφοῦ y_{2329} καὶ z_{2329} $\sqrt{A}$ εἶναι σχεδὸν ἴσα, ἔχομεν :

$$(97) \qquad \begin{aligned} \log z_{2329} \sqrt{A} &= 103\,272,\ 8769 - \log 2 = 103\,272{,}5759 \\ \log \sqrt{A} & \qquad\qquad = -\ 3{,}33\,74 \\ \hline & \log z_{2329} = 103\,269{,}2385 \end{aligned}$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν λύσιν x τῆς (8) χρησιμοποιοῦμεν τὴν (10)

$$(98) \qquad x = \frac{Z}{2 \cdot 4657}$$

$$\log (2 \cdot 4657) = 3\,9691$$
$$\log x = 103\,265{,}2694$$
$$\log x^2 = 206\,530{,}5388$$

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῶν (3), (4) καὶ (6) λαμβάνομεν :

$$\Lambda + K = (2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657)^2 \, x^2$$
$$\Xi + \Pi = (3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353) \;\; 4657^2 \, x^2$$
$$\Lambda + K + \Xi + \Pi = 6\,028\,143 \cdot 4\,657^2 \, x^2$$
$$\log \, 6\,028\,143 \cdot 4657^2 = 14{,}1164$$
$$\log (\Lambda + K + \Xi + \Pi) \qquad 206\,544{,}6552$$

$$\Lambda + K + \Xi + \Pi = 4521 \quad \mathbf{(206\,541)} \tag{99}$$

Ὁ **Amthor** ἔχει ὑπολογίση τὸ σύνολον τῶν ταύρων καὶ ἀγελάδων καὶ ἔχει εὕρη

$$\Lambda + K + \Xi + \Pi + \lambda + \eta + \xi + \pi = 7766 \; \mathbf{(206\,541)} \tag{100}$$

Ἡ ἀναλογία συμφωνεῖ μὲ τὴν προκύπτουσαν ἐκ τοῦ πίνακος (39) τῆς λύσεως Wurm.

Μεγέθη τῆς τάξεως τῶν προκυψάντων ὡς ἄνω ἀριθμῶν ὑπερβαίνουν τὴν φαντασίαν τοῦ ἀνθρώπου. Αἱ κατωτέρω δύο παρατηρήσεις εἶναι ἱκαναὶ νὰ μᾶς πείσουν περὶ τούτου.

α) Ἐὰν θελήσωμεν ν' ἀναγράψωμεν πραγματικῶς ἕνα ἀριθμὸν τῆς τάξεως τοῦ ὡς ἄνω (100) καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι μία σελὶς πίνακος ἑπταψηφίων λογαρίθμων περιέχει 2500 περίπου ψηφία, βλέπομεν ὅτι ἡ ἀναγραφὴ ἑνὸς ἀριθμοῦ 206 545 ψηφίων θὰ καταλάβη 82,5 περίπου σελίδας καὶ ἡ ἀναγραφὴ τῶν 8 ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν τὰς 8 ἀγέλας, θ' ἀπαιτήση περίπου ἕνα τόμον 660 σελίδων!

β) Ἀλλ' ἂν διὰ τὴν ἀναγραφὴν ἑνὸς τοιούτου ἀριθμοῦ ἀπαιτοῦνται 660 σελίδες πόση ἔκτασις γῆς ἀπαιτεῖται διὰ νὰ περιλάβη τὰς ἀντιστοίχους ἀγέλας ;

Μία σφαίρα τῶν διαστάσεων τῆς γῆς θὰ εἶχεν ἐπιφάνειαν ἴσην περίπου πρὸς

$$5{,}1 \cdot 10^{14} \, \mu^2$$

Δοθέντος ὅτι διὰ νὰ παραμείνη ὄρθιος εἷς βοῦς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἀπαιτοῦνται :

$$1 \cdot 2{,}55 = 2{,}55 \, \mu^2$$

ἡ ὅλη σφαῖρα θὰ ἠδύνατο νὰ . . . φιλοξενήση

$$2 \;\, 10^{14} \text{ βόας}$$

θ' ἀπαιτηθοῦν δὲ περίπου ἕταιραι

$$3{,}9 \cdot 10^{206530}$$

τοιαῦται σφαῖραι διὰ νὰ εὕρουν θέσιν, καὶ ὄχι νὰ βοσκήσουν αἱ 8 ἀγέλαι. Καὶ διὰ ν' ἀναγράψωμεν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν τῶν ἀπαιτουμένων σφαιρῶν, διαστάσεων τῆς Γῆς, ἀπαιτοῦνται περίπου 80 σελίδες !

Δὲν εἶναι βεβαίως γνωστὸν ἂν ὁ Ἀρχιμήδης ἠσχολήθη μὲ τὴν ἀριθμητικὴν ἐπίλυσιν τοῦ βοεικοῦ προβλήματος. Εἶναι ὅμως περίεργον, ἐξ ἄλλου, τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «ψαμμίτης» ἐθεώρησεν ἀριθμοὺς τάξεως μεγέθους πολὺ ἀνωτέρας τῶν παρουσιαζομένων εἰς τὸ βοεικὸν πρόβλημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. E. Callandreau: Célèbres problèmes mathématiques. Paris 1949 p. 10 - 18.
2. T. L. Heath: The Works of Archimedes p. 319.
3. » A Manual of Greek Mathematics p. 336
4. J. L. Heiberg: Questiones Archimedae I. p. 448.
5. E. Hoppe. Math. u Astr. im klass, Altertum p. 256, 265, 278,
6. Krumbiegel u. Amthor: Zeitschr für Math. u. Physik. 1880 p. 121-136, 153-171
7. G. Loria: Hist. des Sciences Math. p. 155.
8. M. Μπρίκα: Μαθήματα Γενικῶν Μαθηματικῶν, Τεῦχος I, 1954.
9. A. Rey: La Science dans l' Antiquité p. 245, 264, 300, 307.
10. Rousse Ball: History Math. p. 72.
11. E. Σταμάτη: Ἅπαντα Ἀρχιμ. I. σελ. 10, 22, 28.
12. D. E. Smith: History of Math. II. p. 453.
13. Paul Tannery. Bull des Sciences Mathématiques. t. 5 ; 1881. p, 25-30.