UN MODELE D' ACCROISSEMENT AU MAXIMUM DU RENDEMENT DE LA MAIN D' OEUVRE

Par Dr. J-C. PANAYIOTOPOULOS

Ecole Des Hautes Etudes Industrielles

Sommaire

Dans ce traité on examine la mise en place optimale de n ravailleurs dans m postes. On donne un algorithme d' optimisation du rendement de n travailleurs, à l' aide de l'ordinateur. Le programme correspondant en FORTRAN IV est de l' ordre des secondes avec max $(n, m) < 500$ et de l' ordre des minutes avec $500 \leqslant \max(n,m) \leqslant 40000$.

Introduction

En généraI la mise en place de n travailleurs dans m postes est envisagée suivant la méthode du Kuhn [1]. Ainsi, si on définit les matrices :

$$C = (c_{ij}) \quad , \quad X = (x_{ij}) \quad , \quad i \in \{1,2,\ldots,n\} \quad , \quad j \in \{1,2,\ldots,m\}$$

Si c_{ij} est le rendement du travailleur i dans le poste j, on a $x_{ij} = 0$ si on ne pose pas le travailleur i dans le poste j et $x_{ij} = 1$ autrement; alors on a $c_{ij} \in A$ et $x_{ij} \in \{0,1\}$ avec A un ensemble nommé échelle de rendement où d'habitude on a $A = \{0,1,2,\ldots,10\}$. La méthode Kuhn consiste à trouver le :

$$\max \sum_i \sum_j x_{ij} c_{ij} \qquad \text{avec :}$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad , \quad \text{pour chaque } j = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad , \quad \text{pour chaque } i = 1,2,\ldots,n.$$

L' algorithme de Kuhn resout le problème ci - dessus pour un max $(n,m) < 20$ seulement, parce que, vu sa nature, l' utilisation de l' ordinateur n' est pas possible [2]. C' est pourquoi la recherche d' un autre algorithme devient nécessaire.

Supposons que nous avons à trouver le :

$$\max \sum_i \sum_j x_{ij} c_{ij} \quad \text{avec} \quad x_{ij} \in \{0,1\} \text{ et } c_{ij} \in RU\{-\infty\} \text{ et :}$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad , \quad \forall\ j = 1,2,\ldots,m \quad , \quad \sum_j x_{ij} = 1 \quad , \quad \forall\ i = 1,2,\ldots,n.$$

A la suite on donne un algorithme rapide de la solution du problème, dont les pas succésifs sont :

PAS 1. Si $m < n$, poser $c_{ik} = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ et $k = m + 1,\ldots, n$.
Si $m > n$, poser $c_{rj} = 0$, $j = 1,2,\ldots,m$ et $r = n + 1,\ldots, m$.
Soit $\omega = \max(n,m)$.

PAS 2. Trouver le $W = \max\limits_{i,j} c_{ij}$. Poser $c_{ij} = W - c_{ij}$.

PAS 3. Trouver les $p_j = \min\limits_i c_{ij}$, $j = 1,2,\ldots,\omega$.
Poser $c_{ij} = c_{ij} - p_j$.

PAS 4. Définir la matrice $L = (\lambda_{ij})$ ainsi que :
$\lambda_{ij} = 1$ si $c_{ij} \neq 0$, autrement $\lambda_{ij} = 0$.

PAS 5. Si $\lambda_{ij} = 0$ et $\lambda_{\theta j} = 0$, alors poser $\lambda_{\theta j} = 2$, $\vartheta = 1,2,\ldots,\omega$, $\vartheta \neq i$
Si $\lambda_{ij} = 0$ et $\lambda_{i\theta} = 0$, alors poser $\lambda_{i\theta} = 2$, $\vartheta = 1,2,\ldots,\omega$, $\vartheta \neq j$
De façon que le nombre des deux dans la matrice L soit le minimum possible.

PAS 6. Poser $V = 0$. Si $\lambda_{ij} = 0$, alors $V = V + 1$, $i, j, = 1,2,\ldots,\omega$.
Si $V = \omega$ aller au PAS 12.

PAS 7. Définir les suites finies $s_i = 0$ et $g_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, \omega$. Si $\lambda_{ij} = 0$, poser $g_i = 0$.

PAS 8. Si $\lambda_{ij} = 2$ et $g_i = 1$, alors poser $s_j = 1$. Soit $\nu = \sum\limits_{i=1}^{\omega} g_i$.

PAS 9. Si $\lambda_{ij} = 0$ et $s_j = 1$, alors poser $g_i = 1$. Soit $\mu = \sum\limits_{i=1}^{\omega} g_i$.
Si $\nu \neq \mu$, aller au PAS 8.
Si $\nu = \mu$ et $\nu = \omega$, aller au PAS 12.

PAS 10. Trouver le $R = \min_{i,j \in M} c_{ij}$, $M = \{ i, j / g_i = 1 \text{ et } s_j = 0 \}$.

PAS 11. Si $g_i = 1$, poser $c_{ij} = c_{ij} - R$.

Si $s_j = 1$, poser $c_{ij} = c_{ij} + R$.

Aller au PAS 4.

PAS 12. La matrice C a la solution optimale. FIN.

Au pas 12 on prend une matrice, la matrice C, dont certains éléments sont égales au zéro. En tout cas, il n'existe pas une ligne (où une colonne) qui n' inclue au mois un zéro. Pour trouver la solution il faut marquer un seul élément $c_{ij} = 0$ de la matrice dans chaque ligne. L'existence d'un seul élément noté dans chaque colonne est irdispensable. Evidemment on commence à marquer par les lignes (où colonnes) qui ont le nombre minime de zéros. Ainsi si on marque l' élément c_{ij}, on pose $x_{ij} = 1$, autrement on pose $x_{ij} = 0$. C'est la solution optimale. D'autre part si on a le problème :

$$\min \sum_i \sum_j x_{ij} c_{ij} \quad \text{avec } c_{ij} \in R \cup \{ +\infty \} \text{ et } x_{ij} \in \{ 0, 1 \}$$

avec les même limitations comme au maximum, alors l'algorithme ci - dessus resout de nouveau notre problème, il suffit de suppimer le pas 2.

L'algorithme ci-dessus devient très rapide pour l'ordinateur.

Ainsi pour 625 variablcs, c'est à dire pour 25 postes avec égales en nombre travailleurs, le temps du programme correspondant était beaucoup moins d' un minute en C.D.C. 3300 et en FORTRAN IV. Pour un max $(n,m) \leqslant 4000$ le temps est de l'ordre des minutes, mais pour un max $(n,m) \leqslant 500$ le temps est d' ordre des secondes.

REFERENCES

[1]. ABADIE J., Mathematiques des Programmes Economiques, 1969

[2]. DANTZIG G., Linear Programming and extensions, 1963.