ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Τοῦ κ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ Σ. ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ
Εἰδικοῦ Ἐπιστήμονα Α.Β.Σ.Θ. καὶ Πολυτεχνικῆς Σχολῆς Α.Π.Θ.

I. Εἰσαγωγή.

Τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς τῶν ἐπενδύσεων μὲ τὴ χρήση τοῦ μαθηματικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχει ἀντιμετωπισθεῖ στὴ διεθνὴ βιβλιογραφία ἀπὸ πολλοὺς συγγραφεῖς, [6], [7] κ.τ.λ. Ὁ βασικότερος λόγος τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν τεχνικῶν τοῦ μαθηματικοῦ προγραμματισμοῦ ἔναντι τῶν συμβατικῶν τεχνικῶν τῆς ἐπιλογῆς τῶν ἐπενδύσεων, ὅπως π.χ. τῆς καθαρῆς παρούσας ἀξίας, τοῦ ἐσωτερικοῦ ἐπιτοκίου ἀποδόσεως κ.τ.λ., εἶναι ὅτι οἱ ποσότητες τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, ποὺ διαμορφώνουν τὰ διάφορα μεγέθη εἰσροῶν καὶ ἐκροῶν, εἶναι περιορισμένες. Γιὰ τὸ λόγο ὅτι οἱ συντελεστὲς τῆς παραγωγῆς εἶναι περιορισμένοι, δημιουργεῖται ἀνταγωνιστικὴ ἀλληλοεξάρτηση μεταξὺ τῶν διαφόρων ἐπενδύσεων, δηλαδὴ οἱ ἐπενδύσεις ἀνταγωνίζονται γιὰ περιορισμένους διαθέσιμους πόρους. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ἀποδοχὴ ἑνὸς ὑποσυνόλου τοῦ συνόλου τῶν ὑπὸ πρόκριση ἐπενδύσεων ἀποκλείει τὴν ἐπιλογὴ τοῦ συμπληρώματός του. Ἔτσι τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς τοῦ ὑποσυνόλου ἐκείνου, ποὺ δὲν παραβιάζει τὸ σύνολο τῶν περιορισμῶν καὶ ταυτόχρονα μεγιστοποιεῖ τὴ συνολικὴ καθαρὴ παρούσα ἀξία τῶν ἐπενδύσεων, εἶναι πρόβλημα μαθηματικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἀκόμη ἐπειδὴ συνήθως δὲν εἶναι δυνατὸ νὰ γίνουν ἀποδεκτὰ κλασματικὰ ἐπίπεδα ἐπενδύσεων καὶ κάθε ἐπένδυση ἢ γίνεται δεκτὴ στὸ ἄριστο ὑποσύνολο τῶν ἐπενδύσεων ἢ ἀπορρίπτεται, ἡ ἐπιλογὴ τοῦ ἄριστου ὑποσυνόλου διατυπώνεται ὡς πρόβλημα ἀκέραιου γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ μὲ διτιμικὲς μεταβλητές. Σημειώνεται ὅτι ὡς «ἄριστο ὑποσύνολο» θεωρεῖται ἐκεῖνο τὸ ὑποσύνολο τῶν ἐπενδύσεων, ποὺ μεγιστοποιεῖ τὴ συνολικὴ καθαρὴ παρούσα ἀξία τῶν ἐπενδύσεων.

Γιὰ τὴ μόρφωση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ὡς προβλήματος ἀκέραιου γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἔστω ὅτι μιὰ ἐπιχείρηση ἔχει στὴ διάθεσή της κατὰ τὴ χρονικὴ περίοδο $j = 1, 2, \ldots, n$ χρηματικὸ ποσὸ D_j, ποὺ χρησιμοποιεῖται ἀπὸ τὸ διάνυσμα τῶν ὑπὸ πρόκριση ἐπενδύσεων $x = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$. Ἔστω ἀκόμη ὅτι κάθε ἐπένδυση x_i, $i=1, 2, \ldots, m$ ἔχει καθαρὴ παρούσα ἀξία p_i καὶ ὅτι χρησιμοποιεῖ d_{ji} χρηματικὲς μονάδες τῶν $j = 1, 2, \ldots, n$ περιόδων. Μὲ τὰ δεδομένα αὐτὰ ζητεῖται νὰ ἐπιλεγεῖ τὸ ἄριστο ὑποσύνολο τῶν ἐπενδύσεων ἔτσι, ὥστε νὰ μεγιστοποιεῖται ἡ συνολικὴ καθαρὴ παρούσα ἀξία. Ἡ μαθηματικὴ μόρφωση τοῦ πιὸ πάνω προβλήματος ὁρίζεται ἀπὸ τὶς σχέσεις (1), (2) καὶ (3).

$$\text{MaxP} = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_m x_m \tag{1}$$

μὲ τοὺς περιορισμοὺς

$$
\begin{aligned}
d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1m}\, x_m &\leqslant D_1 \\
d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \ldots + d_{2m}x_m &\leqslant D_2 \qquad (2)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
d_{n1}\, x_1 + d_{n2}\, x_2 + \ldots + d_{nm}\, x_m &\leqslant D_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
0 \leqslant x_i \leqslant 1 \text{ , } x_i \text{ ἀκέραιος} \qquad (3)\\
\text{γιὰ } i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}
\end{gathered}
$$

Ἀπὸ τὴν ἄριστη λύση ἡ τιμὴ $x_i = 1$ (0) δείχνει ἂν ἡ ἐπένδυση ἐπιλέγεται (ἀπορρίπτεται). Στὸν περιορισμὸ $d_{j1}\ x_1 + d_{j2}\ x_2 + \ldots + d_{jm}\ x_m \leqslant D_j$, τὸ d_{ji}μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ ὄχι μόνο ὡς ἡ χρηματικὴ ἐκροὴ τῆς ἐπενδύσεως i κατὰ τὴν περίοδο j, ἀλλὰ ὡς ἡ χρηματικὴ εἰσροὴ ἢ ἐκροὴ τῆς ἀντίστοιχης ἐπενδύσεως καὶ περιόδου. Στὴν περίπτωση αὐτὴ τὰ d_{ji} , ποὺ εἶναι εἰσροές, θὰ ἐμφανίζονται μὲ ἀρνητικὸ πρόσημο, ἐνῶ ἐκεῖνα ποὺ εἶναι ἐκροὲς μὲ θετικό. Ἔτσι ἂν ἡ ἐπένδυση i ἐπιλέγεται τὸ D_j θὰ αὐξάνεται ἢ θὰ μειώνεται ἀνάλογα μὲ τὸ ἂν τὸ ἀντίστοιχο d_{ji} εἶναι εἰσροὴ ἢ ἐκροή.

2. Μορφὲς Ἀλληλοεξαρτήσεως τῶν Ἐπενδύσεων.

Ἡ προηγούμενη διατύπωση τοῦ προβλήματος τῆς ἐπιλογῆς τῶν ἐπενδύσεων ὡς προβλήματος ἀκέραιου γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ βασίζεται στὴν ὑπόθεση, ὅτι ἡ ἐπιλογὴ μιᾶς ἐπενδύσεως δὲν ἀποκλείει τὴν ἐπιλογὴ μιᾶς ὁποιασδήποτε ἄλλης, δηλαδὴ οἱ ἐπενδύσεις εἶναι ἀνεξάρτητες. Σὲ πραγματικὰ ὅμως προβλήματα οἱ ἐπενδύσεις παρουσιάζονται συχνὰ μὲ μιὰ κάποια μορφὴ ἀλληλοεξαρτήσεως. Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ κρίνεται σκόπιμο νὰ ἐξετασθοῦν οἱ διάφορες περιπτώσεις ἀλληλοεξαρτήσεως τῶν ἐπενδύσεων καὶ νὰ δοθοῦν οἱ ἀντίστοιχες μαθηματικές τους ἐκφράσεις. Οἱ κυριότερες ἀπὸ τὶς περιπτώσεις αὐτὲς εἶναι οἱ ἑξῆς.

2.1. Ἀμοιβαίως Ἀποκλειόμενες Ἐπενδύσεις.

Ἔστω ὅτι οἱ ἐπενδύσεις $x_1, x_2, \ldots, x_L$ εἶναι ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενες, δηλαδὴ ἡ ἐπιλογὴ τῆς μιᾶς ἀποκλείει τὴν ἐπιλογὴ μιᾶς ὁποιασδήποτε ἄλλης. Γιὰ νὰ ληφθεῖ ὑπόψη ἡ ἀλληλοεξάρτηση αὐτή, προστίθεται στὸ σύνολο τῶν περιορισμῶν, ποὺ ὁρίζουν τὸ σύνολο λύσεων τοῦ ἀκέραιου γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ὁ περιορισμός,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_L \leqslant 1 \qquad (4)$$

Μὲ τὴν εἰσαγωγὴ τοῦ περιορισμοῦ (4) ἐξασφαλίζεται ὅτι μόνο μιὰ τὸ πολὺ ἐπένδυση τοῦ συνόλου αὐτοῦ μπορεῖ νὰ ἐπιλεγεῖ.

2.2. Ἐξαρτημένες Ἐπενδύσεις.

Ἔστω ὅτι ἡ ἐπένδυση x_1 εἶναι δυνατὸ νὰ ἐπιλεγεῖ, μὲ τὴν προϋπόθεση ὅτι ἐπιλέγεται ἡ x_2, ποὺ εἶναι ἀνεξάρτητη. Ἡ μορφὴ αὐτὴ ἐξαρτήσεως ἐκφράζεται μαθηματικῶς ἀπὸ τὴ σχέση,

$$x_1 \leqslant x_2 \tag{5}$$

Ἂν ἡ ἐπένδυση x_2 ἐπιλεγεῖ, ἰσχύει ὁ περιορισμὸς $x_1 \leqslant 1$, ἐνῶ ἂν ἡ x_2 δὲν ἐπιλεγεῖ, τότε $x_1 \leqslant 0$, ποὺ μαζὶ μὲ τὸν περιορισμὸ τῆς μὴ ἀρνητικότητας (3) δίνει $x_1 = 0$. Ἡ ἀνάλυση αὐτὴ μπορεῖ εὔκολα νὰ γενικευθεῖ γιὰ τὴν περίπτωση ἑνὸς συνόλου ἐξαρτημένων ἐπενδύσεων $\{x_1, x_2, \ldots, x_L\}$, ὅπου ἡ ἀποδοχὴ τῆς x_i ἐξαρτιέται ἀπὸ τὴν ἀποδοχὴ τῆς x_{i+1}. Ἡ μαθηματικὴ διατύπωση τῆς ἐξαρτήσεως αὐτῆς δίνεται ἀπὸ τὸ πιὸ κάτω σύστημα ἀνισοτήτων,

$$\begin{array}{c} x_L \leqslant 1 \\ x_{L-1} \leqslant x_L \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 \leqslant x_2 \end{array} \tag{6}$$

2.3. Μικτὲς Ἐξαρτήσεις.

Οἱ μικτὲς ἐξαρτήσεις εἶναι συνδυασμὸς τῶν δύο προηγουμένων περιπτώσεων καὶ μποροῦν νὰ ἔχουν διάφορες μορφές. Ἐνδεικτικὰ ἀναφέρεται ἡ ἑξῆς περίπτωση. Ἔστω ὅτι οἱ ἐπενδύσεις x_1 καὶ x_2 εἶναι ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενες καὶ ὅτι ἡ x_3 ἐξαρτιέται ἀπὸ τὴν ἀποδοχὴ τῆς x_1 ἢ τῆς x_2. Ἡ μικτὴ αὐτὴ ἐξάρτηση ἐκφράζεται ἀπὸ τοὺς περιορισμούς,

$$x_1 + x_2 \leqslant 1 \tag{7}$$

$$x_3 \leqslant x_1 + x_2 \tag{8}$$

Ἔτσι ἂν μιὰ ἀπὸ τὶς x_1 καὶ x_2 ἐπιλεγεῖ ὁ περιορισμὸς (8) γίνεται $x_3 \leqslant 1$. Ἂν πάλι καμμιὰ ἀπὸ τὶς x_1 καὶ x_2 δὲν ἐπιλεγεῖ, τότε ἡ (8) γίνεται $x_3 \leqslant 0$, ποὺ μαζὶ μὲ τὴν (3) δίνει $x_3 = 0$.

Ἀπὸ τὴν παραπάνω ἀνάλυση εἶναι φανερὸ ὅτι οἱ διάφορες περιπτώσεις ἀλληλοεξαρτήσεως τῶν ἐπενδύσεων μποροῦν νὰ ληφθοῦν ἄμεσα ὑπόψη μὲ τὴν εἰσαγωγὴ τῶν κατάλληλων περιοριστικῶν σχέσεων στὸ σύνολο τῶν περιορισμῶν, ποὺ ὁρίζουν τὸ σύνολο λύσεων τοῦ προβλήματος τοῦ ἀκέραιου γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.

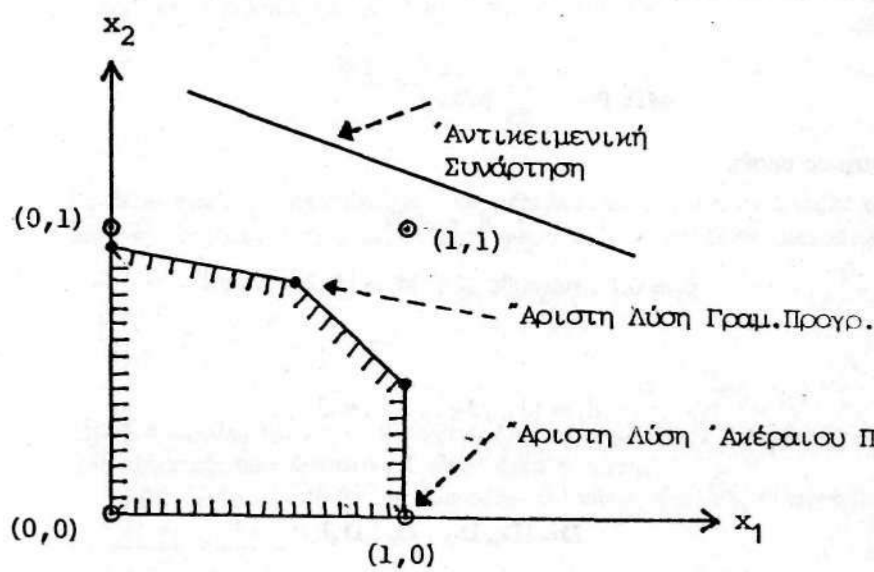
3. Σκοπιμότητα Χρησιμοποιήσεως τοῦ Ἀκέραιου Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

Τὸ πρόβλημα (1), (2) καὶ (3) εἶναι γνωστὸ στὴ σχετικὴ βιβλιογραφία τῆς θεωρίας τοῦ ἀκέραιου γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ὡς π ο λ υ δ ι ά σ τ α τ ο π ρ όβλημα knapsack. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ἐφαρμογή του στὴν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος τῆς ἐπιλογῆς τῶν ἐπενδύσεων ἔχει καὶ πληθώρα ἄλλων ἐφαρμογῶν, (βλέπε π.χ. [2]). Δυστυχῶς ὅμως τὸ πρόβλημα knapsack ἀνήκει στὴν κατηγορία τῶν "NP complete" προβλημάτων, ποὺ σημαίνει ὅτι ὁ χρόνος, ποὺ ἀπαιτεῖται γιὰ τὴν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος, εἶναι ἐκθετικὴ συνάρτηση τοῦ μεγέθους του. Ἀντίθετα ἂν ἀγνοηθεῖ ὁ περιορισμὸς τῆς μὴ διαιρετότητας, τὸ πρόβλημα γίνεται πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ποὺ ὅπως εἶναι γνωστό, ἡ ἐπίλυσή του δὲν ἀντιμετωπίζει καμμιὰ ὑπολογιστικὴ δυσκολία. Γιὰ τοὺς πιὸ πάνω λόγους πολλοὶ ἐρευνητὲς ἀγνοοῦν τὸν περιορισμὸ τῆς μὴ διαιρετότητας καὶ ἀντιμετωπίζουν τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς τῶν ἐπενδύσεων ὡς πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ὅμως μιὰ τέτοια ἁπλοποίηση τοῦ προβλήματος θὰ μποροῦσε νὰ χαρακτηρισθεῖ μᾶλλον ὡς ἀφελὴς καὶ πρόχειρη γιὰ τοὺς παρακάτω λόγους.

α) Λειτουργικὰ ἡ ἀποδοχὴ ἑνὸς κλασματικοῦ μέρους μιᾶς ἐπενδύσεως δὲν ἔχει νόημα στὶς περισσότερες περιπτώσεις.

β) Ἡ στρογγυλοποίηση κλασματικῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν στὴ γειτνίαση τῆς ἄριστης λύσεως τοῦ ἀντίστοιχου προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ μπορεῖ νὰ ὁδηγήσει σὲ πραγματοποιήσιμη λύση, ποὺ ἀπέχει πάρα πολὺ ἀπὸ τὴν ἄριστη ἢ ἀκόμη καὶ σὲ μὴ πραγματοποιήσιμη λύση, ὅπως ἐμφανίζεται στὸ διάγραμμα 1.

Διάγραμμα 1



γ) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκέραιων λύσεων, ποὺ γειτνιάζουν τὴν ἄριστη λύση τοῦ ἀντίστοιχου προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἀκόμη καὶ γιὰ προβλήματα μεσαίου μεγέθους, εἶναι πολλὲς φορὲς ἀστρονομικός. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ἐξέταση τῶν στοιχείων τῆς γειτνιάσεως εἶναι ἕνα ἄλλο πρόβλημα ἀκέραιου προγραμματισμοῦ τῆς ἴδιας δυσκολίας μὲ τὸ πρῶτο. Π.χ. στὸ διάγραμμα 1 ἡ ἐξέταση τοῦ συνόλου τῶν ἀκέραιων στοιχείων, ποὺ γειτνιάζουν τὴν ἄριστη λύση τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἐξέταση τῶν τεσσάρων δυνατῶν ἀκέραιων λύσεων τοῦ προβλήματος αὐτοῦ. Εἶναι δηλαδὴ τὸ ἴδιο τὸ πρόβλημα τοῦ ἀκέραιου προγραμματισμοῦ δύο μεταβλητῶν καὶ ἴσως καὶ πιὸ δύσκολο.

Γιὰ τὴν ἐπίλυση τοῦ παραπάνω προβλήματος ἔχουν ἀναπτυχθεῖ διάφοροι ἀλγόριθμοι, ὅπως μεταξὺ ἄλλων οἱ τῶν Balas [1], Goefrion [3], Glover [4], Zionts [8], κ.τ.λ.

Στὰ ἑπόμενα θὰ ἀναπτυχθεῖ ἕνας ἀλγόριθμος ἀκέραιου γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ποὺ χρησιμοποιεῖ τὴ μέθοδο τῆς ἐπαγωγικῆς ἀπαριθμήσεως. Ἡ βασική του διαφορὰ ἀπὸ τοὺς ἄλλους ἀλγόριθμους βρίσκεται στὸ γεγονὸς ὅτι κατὰ τὴ διάρκεια τῆς ἀλγοριθμικῆς διαδικασίας ἐξετάζονται μόνο πραγματοποιήσιμες λύσεις. Ἂν καὶ ὁ ἀλγόριθμος, ποὺ θὰ παρουσιασθεῖ, δὲν ἔχει δοκιμασθεῖ ἀκόμη ἐκτενῶς σὲ προβλήματα μεγάλου μεγέθους, τὰ προκαταρκτικὰ ἀποτελέσματα, ποὺ βρέθηκαν μὲ τὴ χρήση τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ Univac 1106 τοῦ Α.Π.Θ., δείχνουν ὅτι εἶναι συγκριτικὰ πολὺ ἱκανοποιητικά.

4. Ἀλγόριθμος Ἐπαγωγικῆς Ἀπαριθμήσεως.

4.1. Ἀνάπτυξη Ἀλγορίθμου.

Τὸ πρόβλημα ποὺ ὁρίσθηκε ἀπὸ τὶς σχέσεις (1), (2) καὶ (3) μπορεῖ ἰσοδύναμα νὰ γραφεῖ ὡς,

$$\text{Max } P = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i \tag{9}$$

μὲ τοὺς περιορισμοὺς

$$\sum_{i=1}^{m} d_i x_i \leqslant D \tag{10}$$

$$x_i = 0{,}1 \text{ , γιὰ κάθε } \quad i \in M = \{1, 2, \ldots, m\} \tag{11}$$

ὅπου

$$d_i = [d_{1i}, d_{2i}, \ldots, d_{ni}]$$

καὶ

$$D = [D_1, D_2, \ldots, D_n]$$

Κάθε διάνυσμα $x = (x_i)$, $i \in M$, τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου παίρνουν τιμὲς 0 ἢ 1, ὀνομάζεται λ ύ σ η τοῦ πιὸ πάνω προβλήματος. Ὡς μ ε ρ ι κ ή λ ύ σ η (PS) ὁρίζεται ἕνα ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν μεταβλητῶν τοῦ προβλήματος, ποὺ κάθε μεταβλητή του ἔχει τιμὴ 0 ἢ 1. Γιὰ καθαρὰ ὑπολογιστικοὺς λόγους ἡ x_k μεταβλητὴ τοῦ PS, ποὺ ἔχει τιμὴ 0 (1), θὰ ἐμφανίζεται στὸ PS μὲ $-k$ (k) ἀντίστοιχα. Ἔτσι ἡ μερικὴ λύση PS= $\{-2, 1, -3, 5\}$ σημαίνει ὅτι $x_1 =1$, $x_2 =0$, $x_3 =0$ καὶ $x_5 =1$. Ἀκόμη θὰ συμβολίζεται μὲ $\overline{PS}$ τὸ σύνολο τῶν μεταβλητῶν, ποὺ ἀνήκουν στὸ M καὶ δὲν ἀνήκουν στὸ PS, δηλαδὴ $\overline{PS} = M \setminus PS$[1].

Σὲ κάθε μερικὴ λύση PS ἀντιστοιχεῖ καὶ ἕνα μερικὸ πρόβλημα, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἀντικειμενικὴ συνάρτηση

$$\sum_{i \in \overline{PS}} p_i x_i + \sum_{i \in PS^+} p_i \tag{12}$$

μὲ τοὺς περιορισμοὺς

$$\sum_{i \in \overline{PS}} d_i x_i < D - \sum_{i \in PS^+} d_i \equiv D\,(PS) \tag{13}$$

$$x_i = 0,1, \qquad \forall\, i \in \overline{PS}$$

ὅπου PS^+ εἶναι τὸ σύνολο τῶν θετικὰ προσημασμένων στοιχείων τοῦ PS. Ἂν εἶναι $D\,(PS) \geqslant 0$, τότε ἡ μερικὴ λύση ὀνομάζεται δ υ ν α τ ὴ ἢ π ρ α γ μ α τ ο π ο ι ή σ ι μ η. Σὲ κάθε μερικὴ λύση ἀντιστοιχεῖ καὶ μιὰ τιμὴ τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως, ποὺ συμβολίζεται μὲ Z(PS) καὶ ὁρίζεται ὡς

$$Z(PS) = \sum_{i \in PS^+} p_i$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν μεταβλητῶν τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὴ μερικὴ λύση, συμβολίζεται μὲ $Z(\overline{PS})$ καὶ εἶναι

$$Z(\overline{PS}) = \sum_{k \in \overline{PS}} p_k$$

Τέλος συμβολίζεται μὲ x^* ἡ ἄριστη λύση καὶ μὲ $Z(x^*)$ ἡ τιμὴ τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἄριστη λύση.

Ὁ ἀλγόριθμος, ποὺ θὰ παρουσιασθεῖ πιὸ κάτω, εἶναι τῆς κατηγορίας τῆς ἐπαγω-

---

1. Τὸ σύμβολο « \ » χρησιμοποιεῖται, γιὰ νὰ δηλώσει διαφορὰ συνόλων, δηλαδὴ $A \setminus B = \{x \mid x \in A, \Lambda, x \notin B\}$

γικῆς ἢ μερικῆς ἀπαριθμήσεως (implicit ἢ partial enumeration) σὲ ἀντιδιαστολὴ μὲ τὴ μέθοδο τῆς ὁλικῆς ἀπαριθμήσεως (total enumeration). Σημειώνεται ὅτι σ' ἕνα πρόβλημα n-μεταβλητῶν ἡ μέθοδος τῆς ὁλικῆς ἀπαριθμήσεως ἐξετάζει 2^n συνδυασμοὺς 0—1. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἀκόμη καὶ σὲ προβλήματα μεσαίων διαστάσεων οἱ ἀλγόριθμοι τῆς ὁλικῆς ἀπαριθμήσεως εἶναι πολὺ δύσκολο, ἂν ὄχι ἀδύνατο, νὰ ἐφαρμοσθοῦν. Ἀντίθετα οἱ ἀλγόριθμοι τῆς ἐπαγωγικῆς ἀπαριθμήσεως χρησιμοποιοῦν κατάλληλους ἐλέγχους (tests) ἔτσι, ὥστε νὰ δημιουργοῦνται ἐπαρκεῖς συνθῆκες, ἀπὸ τὶς ὁποῖες συμπεραίνεται ὅτι ὁρισμένα ὑποσύνολα λύσεων δὲν μπορεῖ νὰ περιέχουν τὴν ἄριστη λύση. Ἡ συστηματικὴ ἐφαρμογὴ τῶν ἐλέγχων ὁδηγεῖ στὴν ἐντόπιση καὶ στὴν ἀπομάκρυνση τῶν συνόλων αὐτῶν ἀπὸ περαιτέρω διερεύνυση. Ἔτσι τὰ σύνολα αὐτὰ ἐξετάζονται ἔμμεσα καὶ ἡ σύγκλιση τῆς ἀλγοριθμικῆς διαδικασίας πρὸς τὴν ἄριστη λύση ἐπιταχύνεται. Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ ἀποτελεσματικότητα κάθε ἀλγορίθμου ἐπαγωγικῆς ἀπαριθμήσεως ἐξαρτιέται ἄμεσα ἀπὸ τὴν ἀποτελεσματικότητα, μὲ τὴν ὁποία οἱ ἔλεγχοι ἀποκλείουν περιοχὲς λύσεων καθὼς καὶ ἀπὸ τὸ χρόνο ἐκτελέσεως τῶν ἐλέγχων. Οἱ ἔλεγχοι αὐτοὶ διακρίνονται γενικὰ σὲ ἐλέγχους ἐφικτότητας (feasibility tests) καὶ ἐλέγχους ἀριστότητας (optimality tests).

4.2. Ἔλεγχοι Ἐφικτότητας.

Οἱ ἔλεγχοι ἐφικτότητας χρησιμοποιοῦνται γιὰ τὴν ἐντόπιση περιοχῶν δυνατῶν λύσεων. Αὐτὸ ἐπιτυγχάνεται μὲ τὴν ἀπομάκρυνση περιοχῶν μὴ πραγματοποιήσιμων λύσεων. Πιὸ ἀναλυτικά, ἔστω ἡ μερικὴ λύση PS καὶ τὸ ἀντίστοιχο διάνυσμα D(PS). Ἂν $d_{kj} > D_k$ (PS), $j \in \overline{PS}$, τότε κάθε λύση, ποὺ περιέχει τὶς μεταβλητὲς τοῦ PSU{j}, εἶναι μὴ πραγματοποιήσιμη λύση. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ μεταβλητὴ x_j εἰσάγεται στὸ PS μὲ τιμὴ ἴση μὲ τὸ μηδέν, δηλαδὴ γίνεται PSU {−j}, καὶ συνεχίζεται ἡ ἀλγοριθμικὴ διαδικασία. Ἔτσι ὅλες οἱ λύσεις, ποὺ ἔχουν τὶς μεταβλητὲς τοῦ P-SU{j}, ἀποκλείονται ἀπὸ περαιτέρω διερεύνηση ὡς μὴ πραγματοποιήσιμες.

Παράδειγμα. Ἔστω PS= {−1, 3, −2, 5} καὶ $\overline{PS}$ = {4, 6, 7, 8}. Ἔστω ἀκόμη ὅτι τὸ PS ὁρίζει τοὺς πιὸ κάτω περιορισμοὺς ἑνὸς μερικοῦ προγράμματος,

$$\begin{aligned} 5x_4 + 12x_6 + 7x_7 + 3x_8 &\leqslant 11 = D_1(PS) \\ 3x_4 + 7x_6 + 2x_7 + 9x_8 &\leqslant 9 = D_2(PS) \\ 3x_4 + 4x_6 + 8x_7 + 10x_8 &\leqslant 10 = D_3(PS) \\ x_4, x_6, x_7, x_8 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω $d_{16} = 12 > D_1$ (PS)= 11, ὁπότε κάθε λύση ποὺ ἔχει τὶς μεταβλητὲς $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_5 = 1$ καὶ $x_6 = 1$ εἶναι μὴ πραγματοποιήσιμη. Ἔτσι PSU {−6} = {−1, 3, −2, 5, −6}, ποὺ σημαίνει ὅτι 8 (= 2^{8-5}) λύσεις ἀποκλείονται ἔμμεσα ἀπὸ ἐπιπρόσθετη διερεύνηση ὡς μὴ πραγματοποιήσιμες.

4.3. Ἔλεγχος Ἀριστότητας.

Μὲ τοὺς ἐλέγχους ἀριστότητας παρέχονται ἐπαρκεῖς συνθῆκες, ὅτι ὁρισμένα ὑποσύνολα λύσεων δὲν περιέχουν τὴν ἄριστη λύση, ὁπότε καὶ τὰ σύνολα αὐτὰ ἀποκλείονται ἀπὸ περαιτέρω διερεύνηση. Πιὸ συγκεκριμένα, ἔστω $Z(\overline{x})$ ἡ τιμὴ τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν καλύτερη πραγματοποιήσιμη λύση $\overline{x}$, ποὺ ἔχει βρεθεῖ σὲ ἕνα στάδιο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαδικασίας, καὶ $Z(\overline{PS})$ τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν μεταβλητῶν τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως, ποὺ περιλαβαίνονται στὸ $\overline{PS}$. Ἔστω ἀκόμη $Z(PS)$ τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν μεταβλητῶν τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως, ποὺ εἶναι θετικὰ προσημασμένες στὸ PS. Ἂν ἰσχύει $Z(PS) + Z(\overline{PS}) \leqslant Z(\overline{x})$, (γιὰ πρόβλημα μεγιστοποιήσεως), τότε ὑπάρχουν ἐπαρκεῖς συνθῆκες ὅτι κάθε λύση, ποὺ περιέχει τὶς μεταβλητὲς τοῦ PS, δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι καλύτερη τῆς $\overline{x}$ καὶ ἑπομένως νὰ εἶναι ἡ ἄριστη.

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἀντικειμενικὴ συνάρτηση,

$$\text{MaxZ} = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 8x_5 + 4x_6 + 9x_7$$

Ἔστω ἀκόμη $PS = \{-1, 3, 2, -6\}$, ὁπότε $\overline{PS} = \{4, 5, 7\}$, $Z(PS) = 7$ καὶ $Z(\overline{PS}) = 24$. Ἂν ἡ τιμὴ τῆς ἀντικειμενικῆς συναρτήσεως, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ μέχρι στιγμῆς καλύτερη λύση, εἶναι $Z(\overline{x}) = 33$, τότε σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω κάθε π ρ ο σ α ύ ξ η σ η (augmentation) τοῦ PS μὲ μεταβλητὲς τοῦ $\overline{PS}$ θὰ δώσει λύσεις, ποὺ θὰ εἶναι κατώτερες τῆς $\overline{x}$.

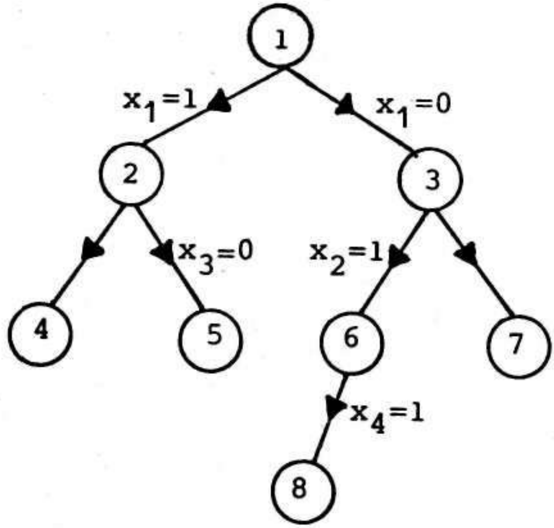
5. Δομὴ Ἀλγοριθμικῆς Διαδικασίας τῆς Ἐπαγωγικῆς Ἀπαριθμήσεως.

Ὅπως ἀναφέρθηκε στὰ προηγούμενα ὁ ἀλγόριθμος, ποὺ θὰ παρουσιασθεῖ, εἶναι τῆς κατηγορίας τῶν ἀλγορίθμων τῆς ἐπαγωγικῆς ἀπαριθμήσεως. Κάθε ἀλγόριθμος τῆς κατηγορίας αὐτῆς χρησιμοποιεῖ τρεῖς βασικὲς διαδικασίες, ποὺ εἶναι α) ἡ δ ι α κ λ ά δ ω σ η (branching), β) ὁ φ ρ α γ μ ὸ ς ἢ ἡ ἀ π ό ρ ρ ι ψ η (bound) καὶ γ) ἡ ὀ π ι σ θ ο δ ρ ό μ η σ η (backtrack). Ἀναλυτικὰ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς διαδικασίες αὐτὲς ἔχει ὡς ἑξῆς:

5.1. Διακλάδωση.

Μὲ τὴ διαδοχικὴ χρησιμοποίηση τῆς διαδικασίας τῆς διακλαδώσεως τὸ ἀρχικὸ σύνολο λύσεων διαμερίζεται σὲ ὑποσύνολα. Ὁ διαμερισμὸς αὐτὸς δημιουργεῖ ἕνα δ ε ν δ ρ ι σ μ ὸ (arborescence), ὅπως π.χ. ἐμφανίζεται στὸ διάγραμμα 2. Στὴν κορυφὴ 1 τοῦ διαγράμματος ἀντιστοιχεῖ τὸ σύνολο τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος καὶ σὲ κάθε κορυφὴ μεγαλύτερη τοῦ 1 ἀντιστοιχεῖ καὶ ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο λύσεων τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος. Κάθε τ ό ξ ο (arc) τοῦ δένδρου λύσεων συνδέει δύο κ ο ρ υ φ ὲ ς ἢ κ ό μ β ο υ ς (nodes ἢ vertices). Ὁ κόμβος πρὸς τὸν ὁποῖο κατευθύνεται τὸ τόξο ὀνομάζεται ἑ π ό μ ε ν ο ς (successor) καὶ αὐτὸς ἀπὸ τὸν ὁποῖο προέρχεται π ρ ο η γ ο ύ μ ε ν ο ς (predeccessor). Ἀκόμη σὲ κάθε τόξο ἀντιστοιχεῖ καὶ ἕνας περιορισμός. Ὁ περιορισμὸς αὐτὸς μαζὶ μὲ τὸ σύνολο τῶν περιορισμῶν, ποὺ ὁρίζουν τὸ σύνολο λύσεων, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸν προηγούμενο κόμβο, θὰ πρέπει νὰ ἱκανοποιηθεῖ, προκειμένου νὰ προσδιορίσει τὸ σύνολο λύσεων ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸν ἑπόμενο κόμβο.

Διάγραμμα 2.



Γενικὰ ἡ μορφὴ τῶν περιορισμῶν, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ διάφορα τόξα τοῦ δένδρου λύσεων, ἐξαρτιέται ἀπὸ τὴ δομὴ τοῦ συνόλου λύσεων καὶ ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν τεχνικῶν (π.χ. ἀπαρίθμηση ἢ κυρτὴ ἀνάλυση), ποὺ χρησιμοποιοῦνται, γιὰ νὰ διαμερισθεῖ τὸ σύνολο λύσεων. Στὴ συγκεκριμένη περίπτωση, ὅπου θὰ χρησιμοποιηθεῖ ἡ μέθοδος τῆς ἀπαριθμήσεως, τὸ δέντρο λύσεων, ποὺ δημιουργεῖται μὲ τὴ διαδοχικὴ ἐφαρμογὴ τῆς διαδικασίας τῆς διακλαδώσεως, ποὺ διαμερίζει τὸ σύνολο λύσεων, παίρνει τὴ μορφὴ τοῦ διαγράμματος 2. Σημειώνεται ἀκόμη ὅτι σὲ κάθε κορυφὴ ἀντιστοιχεῖ καὶ μιὰ μερικὴ λύση, ποὺ ὁρίζει ἕνα μερικὸ πρόβλημα τῆς μορφῆς (12) καὶ (13).

Παράδειγμα. Ἔστω τὸ σύστημα περιοριστικῶν σχέσεων,

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 6x_5 &\leqslant 12 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 &\leqslant 10 \\ x_i = 0 \text{ ἢ } 1, \quad i = 1, 2, \ldots&, 5. \end{aligned}$$

Τὸ σύνολο λύσεων, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τοὺς πιὸ πάνω περιορισμούς, ἀντιστοιχεῖ στὸν κόμβο 1 τοῦ δένδρου τοῦ διαγράμματος 2. Τὸ σύνολο λύσεων, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸν κόμβο 8, ὁρίζεται ἀπὸ τὸ πιὸ κάτω μερικὸ πρόγραμμα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ μερικὴ λύση

$PS = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_4 = 1\}$ ἢ ἰσοδύναμα $PS = \{-1, 2, 4\}$ καὶ ποὺ εἶναι,

$$4x_3 + 6x_5 \leqslant 6$$
$$5x_3 + 3x_5 \leqslant 5$$
$$x_3, x_5 = 0 \text{ ἢ } 1$$

Ἡ διακλάδωση θὰ γίνεται μὲ ἐπαύξηση τοῦ συνόλου PS μὲ μιὰ μεταβλητὴ τοῦ $\overline{PS}$ ἀρνητικὰ ἢ θετικὰ προσημασμένη.

5.2. Φραγμός.

Ἡ διαδικασία τοῦ φραγμοῦ ἢ τῆς ἀπορρίψεως ἐλέγχει μὲ τὴ χρησιμοποίηση ὁρισμένων κριτηρίων ἐφικτότητας καὶ ἀριστότητας, ἂν ἕνα ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν λύσεων περιέχει τὴν ἄριστη λύση. Σὲ περίπτωση ποὺ διαπιστωθεῖ ὅτι ἡ ἄριστη λύση δὲν περιέχεται σὲ ἕνα ὑποσύνολο, τότε τὸ ὑποσύνολο αὐτὸ δὲν διερευνᾶται περισσότερο καὶ ὁ ἀλγόριθμος περνᾶ στὴ διαδικασία τῆς ὀπισθοδρομήσεως.

5.3. Ὀπισθοδρόμηση.

Μὲ τὴ διαδικασία τῆς ὀπισθοδρομήσεως γίνεται ἐπιστροφὴ σὲ ἕνα κόμβο τοῦ δένδρου λύσεων, ποὺ ἔχει ἤδη δημιουργηθεῖ καὶ ἐρευνηθεῖ, γιὰ νὰ δημιουργηθοῦν νέα ὑποσύνολα λύσεων, ποὺ δὲν ἔχουν ἀκόμη διερευνηθεῖ. Διαδικασιακὰ αὐτὸ γίνεται μὲ ἀρνητικὴ προσήμανση τοῦ τελευταίου ἀπὸ τὰ δεξιὰ θετικοῦ στοιχείου τοῦ PS καὶ μὲ ἀπομάκρυνση ἀπὸ τὸ PS ὅλων τῶν στοιχείων, ποὺ τὸ ἀκολουθοῦν.

Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι μὲ τὴν ἐφαρμογὴ ὁρισμένων ἐλέγχων ἔχει διαπιστωθεῖ ὅτι τὸ ὑποσύνολο λύσεων, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ μερικὴ λύση $PS = \{1, 3, -2, -6\}$, $\overline{PS} = \{4, 5\}$, δὲν περιέχει τὴν ἄριστη λύση. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὁ ἀλγόριθμος ὀπισθοδρομεῖ μὲ ἀποτέλεσμα τὰ σύνολα PS καὶ $\overline{PS}$ νὰ ἀναθεωρηθοῦν ὡς ἑξῆς: $PS = \{1, -3\}$, $\overline{PS} = \{2, 6, 4, 5\}$. Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ ἀρνητικὴ προσήμανση τοῦ 3 στὸ νέο PS καὶ ἡ στὴ συνέχεια προσαύξηση τοῦ PS μὲ στοιχεῖα τοῦ $\overline{PS}$ ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴ δημιουργία καὶ διερεύνηση νέων ὑποσυνόλων, ποὺ δὲν ἔχουν δημιουργηθεῖ προηγουμένως. Αὐτὸ γιατὶ ὅλα τὰ νέα ὑποσύνολα θὰ ἔχουν τὴ μεταβλητὴ x_3 ἴση μὲ τὸ μηδέν, ἐνῶ τὰ προηγούμενα εἶχαν τὴ μεταβλητὴ αὐτὴ ἴση μὲ τὴ μονάδα. Ἡ παραπάνω ἀνάλυση στὰ πλαίσια μιᾶς ἀλγοριθμικῆς διαδικασίας παρουσιάζεται πιὸ κάτω.

6. Βήματα τοῦ Ἀλγορίθμου.

Ἡ προηγούμενη ἀνάλυση συστηματοποιεῖται στὰ πιὸ κάτω βήματα.

Βῆμα 1. (Ἀρχικὲς Συνθῆκες).

Θέσε $PS = \emptyset$, $\overline{PS} = M$, $Z(PS) = 0$, $Z(\overline{PS}) = \sum_{i \in \overline{PS}} P_i$, $Z(\overline{x}) = -\infty$,

$D(PS) = D$.

Πήγαινε στὸ βῆμα 3.

Βῆμα 2. (Ἔλεγχος Περατώσεως, Ὀπισθοδρόμηση).

Ἂν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ PS εἶναι ἀρνητικὰ προσημασμένα, ἡ διαδικασία τελείωσε.

Διαφορετικὰ προσήμανε ἀρνητικὰ τὸ πρῶτο ἀπὸ τὰ δεξιὰ θετικὸ στοιχεῖο τοῦ PS καὶ προσαύξησε τὸ $\overline{PS}$ μὲ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ PS ποὺ τὸ ἀκολουθοῦν.

Ἀναθεώρησε κατάλληλα τὶς τιμὲς τῶν $Z(PS)$, $Z(\overline{PS})$ καὶ $D(PS)$.

Ἂν $\overline{PS}=\emptyset$, ἐπανάλαβε τὸ βῆμα 2.

Ἂν $Z(PS) + Z(\overline{PS}) \leqslant Z(\overline{x})$, ἐπανάλαβε τὸ βῆμα 2.

Διαφορετικὰ πέρασε στὸ βῆμα 3.

Βῆμα 3. (Φραγμός).

Θέσε $PS \cup \{-j\}$, $\overline{PS} = \overline{PS} \setminus \{j\}$, $Z(\overline{PS}) = Z(\overline{PS}) - P_j$, γιὰ κάθε μεταβλητὴ x_j, $j \in \overline{PS}$, τέτοια ὥστε, $d_{kj} > D_k(PS)$, $k \in M$.

Ἂν $\overline{PS} = \emptyset$, πήγαινε στὸ βῆμα 2.

Ἂν $Z(PS) + Z(\overline{PS}) \leqslant Z(\overline{x})$, πήγαινε στὸ βῆμα 2.

Διαφορετικὰ πέρασε στὸ βῆμα 4.

Βῆμα 4. (Διακλάδωση).

Πᾶρε τὸ πρῶτο στοιχεῖο τοῦ $\overline{PS}$, προσαύξησε τὸ PS καὶ ἀναθεώρησε τὰ $Z(PS)$, $Z(\overline{PS})$ καὶ $D(PS)$, δηλαδὴ θέσε $PS=PS \cup \{k\}$, $\overline{PS}=\overline{PS} \setminus \{k\}$, $Z(PS)= Z(PS) + P_k$, $Z(\overline{PS}) = Z(\overline{PS}) - P_k$, $D_i(PS) = D_i(PS) - d_{ik}$, $\forall\, i \in M$.

Ἂν $\overline{PS}=\emptyset$, θέσε $x(PS)= \{x_j = 1$ ἢ 0, ἂν $j=-j$ ἢ $j=j$, $j \in PS\}$, $Z(\overline{x})= Z(PS)$ καὶ πήγαινε στὸ βῆμα 2.

Διαφορετικὰ πήγαινε στὸ βῆμα 3.

7. Παράδειγμα.

Γιὰ τὴν ἐφαρμογὴ τοῦ ἀλγορίθμου θὰ χρησιμοποιηθεῖ τὸ κλασσικὸ παράδειγμα τῶν Lorie καὶ Savage. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχει ὡς ἑξῆς: Μιὰ ἐπιχείρηση θέλει νὰ προσδιορίσει τὸ ὑποσύνολο ἐκεῖνο ἀπὸ συνολικὰ ἐννέα ἐπενδύσεις, ποὺ μεγιστοποιεῖ τὴν καθαρὴ παρούσα ἀξία τῶν ἐπενδύσεων. Τὸ μέγιστο διαθέσιμο χρηματικὸ ποσὸ τῆς ἐπιχειρήσεως γιὰ τὴν πρώτη χρονικὴ περίοδο εἶναι 50 νομισματικὲς μονάδες καὶ γιὰ τὴ δεύτερη 20. Ἀκόμη ἡ καθαρὴ παρούσα ἀξία καὶ ἡ ἐκροὴ κάθε ἐπενδύσεως σὲ κάθε περίοδο εἶναι γνωστὲς καὶ δίνονται στὸν πιὸ κάτω πίνακα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Ἐπένδυση	Ἐκροὴ Περιόδου 1	2	Καθαρὴ Παρούσα Ἀξία
x_1	12	3	14
x_2	54	7	17
x_3	6	6	17
x_4	6	2	15
x_5	30	35	40
x_6	6	6	12
x_7	48	4	14
x_8	36	3	10
x_9	18	3	12

Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα ἡ μαθηματικὴ διατύπωση τοῦ προβλήματος τῶν Lorie καὶ Savage ὡς προβλήματος ἀκέραιου γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι

$$\text{MaxP}= 14x_1 + 17x_2 + 17x_3 + 15x_4 + 40x_5 + 12x_6 + 14x_7 + 10x_8 + 12x_9$$

μὲ τοὺς περιορισμοὺς

$$12x_1 + 54x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 30x_5 + 6x_6 + 48x_7 + 36x_8 + 18x_9 \leqslant 50$$

$$3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 35x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 3x_9 \leqslant 20$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \text{ , } x_i \text{ ἀκέραιος, } i= 1, 2, \ldots, 9.$$

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ ἀλγορίθμου τῆς ἐπαγωγικῆς ἀπαριθμήσεως γιὰ τὴν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ἔχει ὡς ἑξῆς:

Βῆμα 1.

$PS=\emptyset$, $\overline{PS} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $Z(PS)=0$, $Z(\overline{PS}) = 151$, $Z(\bar{x}) =-\infty$, $D(PS) = [50\ 20]$. Πήγαινε στὸ 3.

Βῆμα 3.

Ἐπειδὴ $d_{12} =54 > D_1(PS)=50$ καὶ $d_{25} =35 > D_2(PS)=20$, θέσε $PS=PSU\ \{-2, -5\} = \{-2, -5\}$, $\overline{PS} = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ καὶ $Z(\overline{PS})=151 - (17+40)=94$. Ἐπειδὴ $Z(PS) + Z(\overline{PS}) =0+94=94 > Z(\bar{x}) =-\infty$ καὶ $\overline{PS} \neq \emptyset$, πήγαινε στὸ 4.

Βῆμα 4.

$PS=PSU\ \{1\} = \{-2, -5, 1\}$, $\overline{PS}= \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $Z(PS)= 0+14=14$, $Z(\overline{PS})= 94-14=80$, $D(PS)= [38\ 17]$

Ἐπειδὴ $\overline{PS}\neq\emptyset$ πήγαινε στὸ 3.

Βῆμα 3.

'Επειδὴ $d_{17}=48 > D_1\ (PS)=38$, θέσε $PS=PS\cup\{-7\} = \{-2, -5, 1, -7\}$, $\overline{PS}=\{3, 4, 6, 8, 9\}$, $Z(\overline{PS})= 80-14=66$.

'Ακόμη ἐπειδὴ $Z(PS) + Z(\overline{PS})= 14+66 > Z(\bar{x}) =-\infty$ καὶ $\overline{PS}\neq\emptyset$, πήγαινε στὸ 4.

Βῆμα 4.

$PS=PS\cup\{3\} = \{-2, -5, 1, -7, 3\}$, $\overline{PS}=\{4, 6, 8, 9\}$, $Z(PS)= 14+17=31$, $Z(\overline{PS})= 66-17=49$, $D(PS)= [32\ \ 11]$.

'Επειδὴ $\overline{PS}\neq\emptyset$, πήγαινε στὸ 3.

Βῆμα 3.

'Επειδὴ $d_{18}=36 > D_1\ (PS)=32$, θέσε $PS=PS\cup\{-8\} = \{-2, -5, 1, -7, 3, -8\}$, $\overline{PS}=\{4, 6, 9\}$, $Z(\overline{PS}) = 49-10=39$.

'Επειδὴ $Z(PS) + Z(\overline{PS})= 31+39 > Z(\bar{x}) =-\infty$ καὶ $\overline{PS}\neq\emptyset$, πήγαινε στὸ 4.

Βῆμα 4.

$PS=PS\cup\{4\} = \{-2, -5, 1, -7, 3, -8, 4\}$, $\overline{PS}=\{6, 9\}$, $Z(PS)=31+15=46$, $Z(\overline{PS})=39-15=24$, $D(PS) = [26\ \ 9]$.

'Επειδὴ $\overline{PS}\neq\emptyset$, πήγαινε στὸ 3.

Βῆμα 3.

'Η σχέση $d_{kj} > D_k\ (PS)$, $k=1, 2$, δὲν ἰσχύει γιὰ κανένα $j \in \overline{PS}$. 'Επειδὴ ἀκόμη εἶναι $Z(PS) + Z(\overline{PS})= 46+24 > Z(\bar{x}) =-\infty$ καὶ $\overline{PS}\neq\emptyset$, ἡ διαδικασία περνᾶ στὸ βῆμα 4.

Βῆμα 4.

$PS=PS\cup\{6\} = \{-2, -5, 1, -7, 3, -8, 4, 6\}$, $\overline{PS}=\{9\}$, $Z(PS)= 46+12=58$, $Z(\overline{PS})= 24-12=12$, $D(PS)= [20\ \ 3]$.

'Επειδὴ $\overline{PS}\neq\emptyset$, πήγαινε στὸ 3.

Βῆμα 3.

'Η σχέση $d_{kj} > D_k\ (PS)$, $k= 1, 2$, δὲν ἰσχύει γιὰ κανένα $j \in \overline{PS}$. 'Ακόμη ἐπειδὴ εἶναι $Z(PS) + Z(\overline{PS})= 58+12 > Z(\bar{x}) =-\infty$ καὶ $\overline{PS}\neq\emptyset$, πήγαινε στὸ 4.

Βῆμα 4.

$PS=PS\cup\{9\} = \{-2, -5, 1, -7, 3, -8, 4, 6, 9\}$, $\overline{PS}=\emptyset$, $Z(PS)= 58+12=70$, $Z(\overline{PS}) =12-12=0$, $D(PS)= [2\ \ 0]$.

'Επειδὴ $\overline{PS}=\emptyset$, θέσε

$\bar{x}=x(PS)= \{x_1 =1, x_2 =0, x_3 =1, x_4 =1, x_5 =0, x_6 =1, x_7 =0, x_8 =0, x_9 =1\}$, $Z(\bar{x}) = Z(PS)=70$ καὶ πήγαινε στὸ 2.

Βῆμα 2.

$PS= \{-2, -5, 1, -7, 3, -8, 4, 6, -9\}$, $\overline{PS}=\emptyset$, $Z(PS)= 70-12=58$, $Z(\overline{PS})=0$, $D(PS)= [20\ \ 3]$.

'Επειδὴ $\overline{PS}=\emptyset$ ἐπανάλαβε τὸ βῆμα 2 ὡς ἑξῆς:

$PS= \{-2, -5, 1, -7, 3, -8, 4, -6\}$, $\overline{PS}=\{9\}$, $Z(PS)= 58-12=46$, $Z(\overline{PS})= 12$, $D(PS)= [26\ \ 9]$.

'Επειδὴ $Z(PS) + Z(\overline{PS}) = 46+12 < Z(\bar{x})=70$, ἐπανάλαβε τὸ βῆμα 2.

$PS= \{-2, -5, 1, -7, 3, -8, -4\}$, $\overline{PS}=\{9, 6\}$, $Z(PS)= 46-15=31$, $Z(\overline{PS})= 12+12=24$, $D(PS)= [32\ \ 11]$.

'Επειδὴ $Z(PS) + Z(\overline{PS}) = 31+24 < Z(\bar{x})=70$, ἐπανάλαβε τὸ βῆμα 2.

$PS = \{-2, -5, 1, -7, -3\}$, $\overline{PS} = \{9, 6, 4, 8\}$, $Z(PS) = 31-17=14$, $Z(\overline{PS}) = 24+15+10=49$, $D(PS) = [38 \;\; 17]$.

'Επειδὴ $Z(PS) + Z(\overline{PS}) = 14+49 < Z(\bar{x})=70$, ἐπανάλαβε τὸ βῆμα 2.

$PS = \{-2, -5, -1\}$, $\overline{PS} = \{9, 6, 4, 8, 3, 7\}$, $Z(PS) = 14-14=0$, $Z(\overline{PS}) = 49+17+14=80$, $D(PS) = [50 \;\; 20]$.

'Επειδὴ δὲν ἰσχύει $Z(PS) + Z(\overline{PS}) = 0+80 \leqslant Z(\bar{x}) = 70$, πήγαινε στὸ 3.

Βῆμα 3.

'Η σχέση $d_{kj} > D_k\,(PS)$, $k = 1, 2$, δὲν ἰσχύει γιὰ κανένα $j \in \overline{PS}$. 'Επειδὴ $Z(PS) + Z(\overline{PS}) = 0+80 > Z\,(\bar{x})=70$ πήγαινε στὸ 4.

Βῆμα 4.

$PS = \{-2, -5, -1, 9\}$, $\overline{PS} = \{6, 4, 8, 3, 7\}$, $Z(PS) = 0+12=12$, $Z(\overline{PS})=80-12=68$, $D(PS) = [32 \;\; 17]$.

'Επειδὴ $\overline{PS} \neq \emptyset$, πήγαινε στὸ 3.

Βῆμα 3.

'Επειδὴ $d_{18} = 36 > D_1\,(PS)=32$, θέσε $PS=PS \cup \{-8\} = \{-2, -5, -1, 9, -8\}$, $\overline{PS} = \{6, 4, 3, 7\}$, $Z(\overline{PS}) = 68-10=58$.

'Επειδὴ $Z(PS) + Z(\overline{PS}) = 12+58 = Z(\bar{x})=70$, πήγαινε στὸ βῆμα 2.

Βῆμα 2.

$PS = \{-2, -5, -1, -9\}$, $\overline{PS} = \{6, 4, 3, 7, 8\}$, $Z(PS) = 12-12=0$, $Z(\overline{PS}) = 58+10=68$, $D(PS) = [50 \;\; 20]$.

'Επειδὴ $Z(PS) + Z(\overline{PS}) = 0+68 < Z(\bar{x})=70$, ἐπανάλαβε τὸ βῆμα 2. 'Επειδὴ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ PS εἶναι ἀρνητικὰ προσημασμένα ἡ διαδικασία τελείωσε.

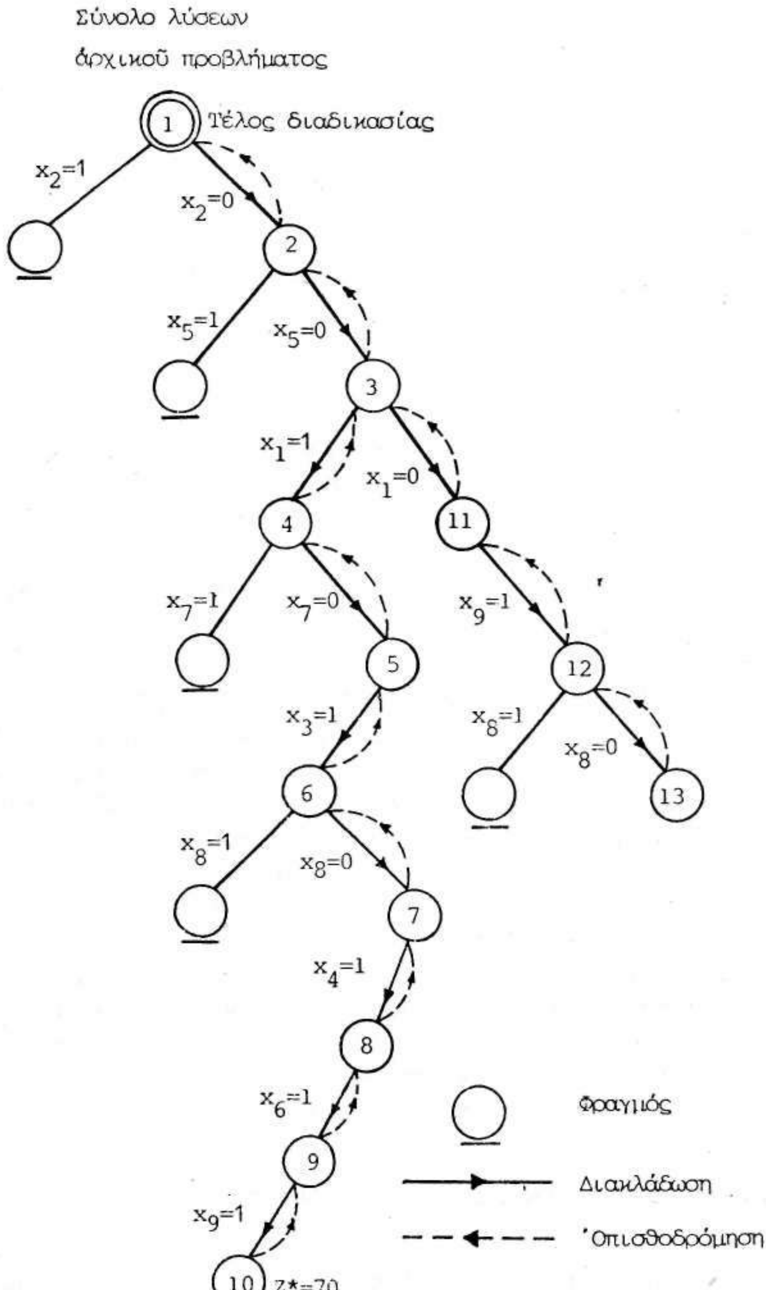
'Απὸ τὰ πιὸ πάνω προκύπτει ὅτι ἡ ἄριστη λύση εἶναι $x_1=x_3=x_4=x_6=x_9=1$, $x_2=x_5=x_7=x_8=0$, ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ ἐπιχείρηση πρέπει νὰ ἐπιλέξει τὶς ἐπενδύσεις x_1, x_3, x_4, x_6, x_9 καὶ ν' ἀπορρίψει τὶς ὑπόλοιπες. 'Η μέγιστη καθαρὴ παροῦσα ἀξία ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ λύση αὐτὴ εἶναι 70 νομισματικὲς μονάδες.

Τὸ δένδρο λύσεων ποὺ δημιουργεῖται μὲ τὴν ἐφαρμογὴ τοῦ ἀλγορίθμου τῆς ἐπαγωγικῆς ἀπαριθμήσεως στὸ πρόβλημα τῶν Lorie καὶ Savage παρουσιάζεται στὸ διάγραμμα 3, ὅπου οἱ κόμβοι ποὺ προσημαίνονται μὲ – ὁρίζουν σύνολα μὴ πραγματοποιήσιμων λύσεων. Τὰ συνεχῆ προσανατολισμένα εὐθύγραμμα τμήματα παριστάνουν διακλαδώσεις, ἐνῶ τὰ διακεκομένα ὀπισθοδρομήσεις. 'Ακόμη ἀριστερὰ σὲ κάθε συνεχὲς προσανατολισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα ἐμφανίζεται ἡ μεταβλητὴ μὲ τὴν τιμή της ποὺ δημιουργεῖ τὴν ἀντίστοιχη διακλάδωση. Τέλος θὰ πρέπει νὰ τονισθεῖ ὅτι σὲ κάθε πρόβλημα ἀντιστοιχεῖ καὶ ἕνα διαφορετικὸ δένδρο λύσεων.

8. Πρόγραμμα 'Ηλεκτρονικοῦ 'Υπολογιστῆ.

Γιὰ τὸν ἀλγόριθμο ποὺ παρουσιάστηκε, γράφηκε πρόγραμμα ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστῆ σὲ γλῶσσα Fortran V, ποὺ ἔλυσε τὸ πρόγραμμα τῶν Lorie καὶ Savage σὲ ἑκατοστὰ τοῦ δευτερολέπτου μὲ ὑπολογιστὴ Univac 1106. Τὸ ἴδιο πρόγραμμα ἐφαρ-

Διάγραμμα 3



Σύνολο λύσεων
ἀρχικοῦ προβλήματος
1
Τέλος διαδικασίας
$x_2=1$
$x_2=0$
2
$x_5=1$
$x_5=0$
3
$x_1=1$
$x_1=0$
4
11
$x_7=1$
$x_7=0$
$x_9=1$
5
12
$x_3=1$
$x_8=1$
$x_8=0$
6
13
$x_8=1$
$x_8=0$
7
$x_4=1$
8
$x_6=1$
Φραγμός
9
Διακλάδωση
$x_9=1$
Ὀπισθοδρόμηση
10
$Z^*=70$

μόστηκε ἀκόμη γιὰ τὴν ἐπίλυση ἑνὸς συνόλου προβλημάτων, οἱ παράμετροι τῶν ὁποίων δημιουργήθηκαν μὲ ὑποπρόγραμμα τυχαίων ἀριθμῶν. Τὸ πρόγραμμα αὐτὸ εἶναι τὸ πιὸ κάτω.

```
             IMPLICIT INTEGER (A-H,O-Z)
          PARAMETER LM=100 , LN=50
          INTEGER P(LM),PS(LM),XSTAR(LM),RPS(LM)
         ,,D(LN,LM),R(LN)
          LOGICAL   PSBAR(LM)
          NPS=0
          IP=5
          LP=6
          READ(IP,5) M,N,EPS
          ZPS=0
    5     FORMAT()
   30     FORMAT(/(10X,15(I5,1X)))

    C      CLEAR  MATRICES

          DO 10 L10=1,M
          PS(L10)=0
          P(L10)=0
          XSTAR(L10)=0
          PSBAR(L10)=.FALSE.
          DO 10 L15=1,N
   10     D(L10,L15)=0
          DO 20 L20=1,N
          RPS(L20)=0
          R(L20)=0
   20        CONTINUE
          READ(IP,5) (P(I),I=1,M),(R(I),I=1,N)
          READ(IP,5) ((D(I,J),J=1,M),I=1,N)
             RTRI=CLOCK('RESET')
             RTRI=CLOCK('START')
          M1=M-1
          WRITE(LP,15)
   15     FORMAT(1H1///10X,'I N P U T    D A T A ',///)
          WRITE(LP,25)
   25     FORMAT(15X,'NPV VECTOR'//)
          WRITE(LP,30)(P(L30),L30=1,M)
          WRITE(LP,32)
   32     FORMAT(///15X,'ACTIVITY MATRIX'///)
          DO 35 L35=1,N
          WRITE(LP,30)(D(L35,L36),L36=1,M)
   35        CONTINUE
          WRITE(LP,38)
   38        FORMAT(///15X,'RESOURCES AVAILABILITY VECTOR'///)
          WRITE(LP,30)(R(L30),L30=1,N)
    C     WRITE(LP,40)
   40     FORMAT(1H1///15X,'THE COURSE OF COMPUTATION',///)
          DO 45 L45=1,N
   45     RPS(L45)=R(L45)
          ZPSBAR=0
          DO 50 L50=1,M
   50     ZPSBAR=ZPSBAR+P(L50)

    C  ROUNDING OPERATION

   55     L55=0
          DO 60 L60=1,M
```

```
      L55=1
      GO TO 60
 55      PSBAR(L50)=.TRUE.
         NPS=NPS+1
         PS(NPS)=-L50
         ZPSBAR=ZPSBAR-P(L50)
         IF(ZPSBAR+ZPS.LE.ZXSTAR+EPS) GO TO 120
C     WRITE(6,30) (PS(I),I=1,NPS)
C     WRITE(6,54) ZPSBAR,ZPS
 60   CONTINUE
         IF(L55.EQ.1) GO TO 59
C
C UPDATE THE BEST SOLUTION FOUND SO FAR
C
         DO 75 L75=1,NPS
 75      XSTAR(L75)=PS(L75)
      NITR=NITR+1
         NXSTAR=NPS
         ZXSTAR=ZPS
      K=0
C     WRITE(LP,54) ZXSTAR,ZPSBAR
         GO TO 120
C
C       BRANCHING
C
C     WRITE(LP,30) (PS(L30),L30=1,NPS)
C     WRITE(LP,52) (PSBAR(L52),L52=1,M)
 52      FORMAT(2X,10(L1,2X))
C     WRITE(LP,54) ZPS,ZPSBAR
 54      FORMAT(//2(2X,I10))
 59      DO 80 L80=1,M
         IF(PSBAR(L80)) GO TO 80
         NPS=NPS+1
         PS(NPS)=L80
         ZPS=ZPS+P(L80)
         ZPSBAR=ZPSBAR-P(L80)
         PSBAR(L80)=.TRUE.
         DO 95 L95=1,N
 95      RPS(L95)=RPS(L95)-D(L95,L80)
C     WRITE(LP,30) (PS(L30),L30=1,NPS)
C     WRITE(LP,52) (PSBAR(L30),L30=1,M)
C     WRITE(LP,54) ZPS,ZPSBAR
C     WRITE(LP,30)( RPS(L30),L30=1,N)
         GO TO 55
 80   CONTINUE
         GO TO 120
C
C     BACKTRACK
C
 120     L100=NPS
         DO 125 L125=L100,1,-1
         L120=PS(L125)
         IF(L120.LT.0) GO TO 140
         PS(L125)=-L120
         ZPS=ZPS-P(L120)
         DO 130 L130=1,N
 130     RPS(L130)=RPS(L130)+D(L130,L120)
         IF(ZPSBAR+ZPS.LE.ZXSTAR+EPS) GO TO 120
         GO TO 55
 140     L120=-L120
         PSBAR(L120)=.FALSE.
         ZPSBAR=ZPSBAR+P(L120)
         NPS=NPS-1
 125  CONTINUE
```

```
            RIRI=CLOCK('READ')
          WRITE(LP,150)
  150       FORMAT(1H1/15X,'F I N A L   R E S U L T S ',//10X,
         ,'THE OPTIMAL SOLUTION IS '/)
            RIRI=CLOCK('READ')
          WRITE(LP,70) (XSTAR(L30),L30=1,NXSTAR)
          WRITE(LP,155)
  155       FORMAT(/10X,'THE INDEXED VARIABLES STORED POSITIVELY('
         ,'NEGATIVELY) ARE EQUAL TO ONE(ZERO)'/)
          WRITE(LP,160) ZXSTAR,RIRI,NITR
  160       FORMAT(/10X,'THE VALUE OF THE OPTIMAL SOLUTION = ',T6//
         ,T20,'IN ',F19.4,' SECONDS  ',' WITH NITR=',T3)
            END
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Balas, E.,** "An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables", Operations Reserch 13, 517-549, (1965).

2. **Garfinkel, R.S.,** and **Nemhauser, G.L.,** "Integer Programming", John Wiley, New York, (1972).

3. **Geoffrion, A.M.,** "An Improved Implicit Enumeration Approach for Integer Programming", Operations Research, 17, 437-454, (1969).

4. **Glover, F.,** "A Multiphase-Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem", Operations Research, 13, 879-919, (1965).

5. **Lorie, J.F.,** and **Savage, L.J.,** "Three Problems in Rationing Capital", Journal of Business, 28, 229-239, (1955).

6. **Mao, J.C.T.,** "Quantitative Analysis of Financial Decisions", The Macmillan Co., New York, (1969).

7. **Weingartner, H.M.,** "Capital Budgeting of Interrelated Projects: Survey and Synthesis", Management Science, 12, 485-516, (1966).

8. **Zionts, S.,** "Generalized Implicit Enumeration Bounds on Variables for Solving Linear Program with Zero-One Variables", Nav. Res. Log. Quart., 19, 165-181, (1972).