ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Χ. ΧΟΜΠΑ
Ἐντεταλμένου Ἐπιμελητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

Εἰσαγωγὴ

Χρόνος ἀναμονῆς εἶναι μία διακριτὴ τυχαία μεταβλητὴ ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ τὴ γεωμετρικὴ κατανομὴ ἢ τὴν κατανομὴ Pascal καὶ ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ χρόνο —μετρούμενο σὲ δοκιμὲς Bernoulli— ποὺ πρέπει νὰ ἀναμένουμε, γιὰ νὰ ἔχουμε τὴν πρώτη ἐπιτυχία στὴ γεωμετρικὴ κατανομὴ ἢ τὴ νιοστὴ ἐπιτυχία στὴν κατανομὴ Pascal.

Κλασικὸ εἶναι τὸ παράδειγμα τοῦ Χρόνου Ἀναμονῆς στὸ πείραμα τῶν ἐπανειλημμένων δοκιμῶν Bernoulli ἑνὸς μὴ ἰδανικοῦ νομίσματος μέχρι νὰ παρουσιάσει γιὰ πρώτη φορὰ τὸ ἐνδεχόμενο «Πρόσωπο». Ἂν X εἶναι ἡ τυχαία μεταβλητὴ ποὺ ἐκφράζει τὸ χρόνο αὐτό, τότε ἡ κατανομή της θὰ εἶναι:

$$P_X(x) = pq^x, \text{ ἄν } x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

ὅπου p εἶναι ἡ πιθανότητα ἐπιτυχίας σέ μία δοκιμή καί $q=1-p$.
Ἐπειδὴ ἡ πιθανογεννήτρια τῆς κατανομῆς αὐτῆς εἶναι:

$$G_X(t) = \frac{p}{1-qt}$$

ὁ μέσος χρόνος ἀναμονῆς εἶναι:

$$G'_X(1) = \frac{q}{p}$$

ὅπου $G'(t)$ εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς πιθανογεννήτριας τῆς κατανομῆς. Ἡ διακύμανση τοῦ χρόνου ἀναμονῆς δίνεται ἀπὸ τὸν ἀκόλουθο τύπο, τὸν ὁποῖο καὶ θὰ χρησιμοποιήσουμε στὰ ἑπόμενα:

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$$

$$= \frac{2pq^2}{p^3} + \frac{pq}{p^2} - \left(\frac{pq}{p^2}\right)^2$$

$$= \frac{q}{p^2}$$

Στὴν παρούσα ἐργασία θὰ ἐξετάσουμε δύο ἀκόμη περιπτώσεις χρόνου ἀναμονῆς οἱ ὁποῖες παρουσιάζουν ἀξιόλογο ἐνδιαφέρον ὄχι μόνο θεωρητικό, ἀλλὰ καὶ πρακτικό.

1. Χρόνος ἀναμονῆς στὸ πείραμα τῶν ἐπανειλημμένων ρίψεων ἰδανικοῦ νομίσματος μέχρι νὰ παρουσιάσει γιὰ πρώτη φορὰ τὸ ἐνδεχόμενο «Πρόσωπο, Πρόσωπο».

Ἔστω ὅτι X εἶναι ἡ διακριτὴ τυχαία μεταβλητὴ ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ χρόνο ἀναμονῆς —ποὺ μετριέται σὲ ρίψεις νομίσματος— μέχρις ὅτου ἕνα ἰδανικὸ νόμισμα, ποὺ ρίχνεται ἐπανειλημμένα, παρουσιάσει γιὰ πρώτη φορὰ τὸ ἐνδεχόμενο [Π, Π]. Ὁ δειγματικὸς χῶρος τοῦ πειράματος αὐτοῦ μπορεῖ νὰ διαμεριστεῖ σὲ δύο κλάσεις, δηλαδὴ στὶς ἀκολουθίες τῶν ρίψεων ποὺ ἀρχίζουν μὲ «Πρόσωπο» στὴν πρώτη ρίψη καὶ στὶς ἀκολουθίες τῶν ρίψεων ποὺ ἀρχίζουν μὲ «Γράμματα» στὴν πρώτη ρίψη.

Ἔστω ὅτι X/Π_1 συμβολίζει μία νέα τυχαία μεταβλητὴ ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ συνολικὸ ἀριθμὸ τῶν ρίψεων ποὺ γίνονται μέχρι νὰ παρουσιαστεῖ γιὰ πρώτη φορὰ τὸ ἐνδεχόμενο [Π, Π], δοθέντος ὅτι ἡ πρώτη ρίψη παρουσίασε «Πρόσωπο». Μὲ βάση τὶς ἰδιότητες τῶν ὑπὸ συνθήκη πιθανοτήτων, ἡ συνάρτηση πιθανότητας $P_X(j)$ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X μπορεῖ νὰ πάρει τὴ μορφή:

$$
\begin{aligned}
P_X(j) &= \frac{1}{2} P[X = j/\Pi_1] + \frac{1}{2} P[X = j/\Gamma_1] \\
&= \frac{1}{2} P[X = j/\Pi_1] + \frac{1}{2} P[X = j-1] \\
&= \frac{1}{2} P_{X/\Pi_1}(j) + \frac{1}{2} P_X(j-1) \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

Στὴ συνέχεια, τὸ δειγματικὸ χῶρο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν τυχαία μεταβλητὴ X/Π_1 διαμερίζουμε καὶ πάλι σὲ δύο κλάσεις, δηλαδὴ στὶς ἀκολουθίες τῶν ρίψεων ποὺ στὴ δεύτερη ρίψη παρουσιάζουν «Πρόσωπο» καὶ στὶς ἀκολουθίες τῶν ρίψεων ποὺ στὴ δεύτερη ρίψη παρουσιάζουν «Γράμματα». Μὲ βάση καὶ πάλι τὶς ἰδιότητες τῶν ὑπὸ συνθήκη πιθανοτήτων, ἡ συνάρτηση πιθανότητας τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X/Π_1 παίρνει τὴ μορφή:

$$
\begin{aligned}
P_{X/\Pi_1}(j) &= P[X = j/\Pi_1] \\
&= \frac{1}{2} P[X = j/\Pi_1\Pi_2] + \frac{1}{2} P[X = j/\Pi_1\Gamma_2]
\end{aligned}
$$

(1.2) $$= \frac{1}{2} \; P_{X/\Pi_1\Pi_2}(j) + \frac{1}{2} P_X(j-2)$$

Ἐπιλύοντας τὴν (1.1) ὡς πρὸς $P_{X/\Pi_1}(j)$, λαμβάνουμε:

(1.3) $$P_{X/\Pi_1}(j) = 2P_X(j) - P_X(j-1)$$

Κατόπιν ἐπιλύοντας τὴν (1.2) ὡς πρὸς $P_{X/\Pi_1\Pi_2}(j)$, λαμβάνουμε:

(1.4) $$\delta_{2,j} = P_{X/\Pi_1\Pi_2}(j) = 2P_{X/\Pi_1}(j) - P_X(j-2)$$

ὅπου $\delta_{2,j} = 1$, ἂν $j=2$, καὶ 0, ἂν $j \neq 2$ εἶναι ἡ συνάρτηση Δέλτα τοῦ Kronecker. Ἂν τώρα συνδυάσουμε τὶς (1.3) καὶ (1.4) ἔχουμε:

(1.5) $$\delta_{2,j} = 4P_X(j) - 2P_X(j-1) - P_X(j-2)$$

Προφανῶς εἶναι: $P_X(j) = 0$, ἂν $j = 0, 1$.
Ἀπὸ τὴν ἐπίλυση τῆς σχέσεως (1.5) ἐπιλύοντας ὡς πρὸς $P_X(j)$ προκύπτει ὁ ἀναδρομικὸς τύπος ποὺ μᾶς δίνει τὴ συνάρτηση πιθανότητας τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X:

(1.6) $$P_X(j) = \begin{cases} \frac{1}{2} P_X(j-1) + \frac{1}{4} P_X(j-2) + \frac{1}{4} \delta_{2,j} & \text{ἂν } j=2,\ 3,\ 4..... \\ 0, & \text{ἂν } j=0,\ 1 \end{cases}$$

Οἱ πιθανότητες ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὴ συνάρτηση (1.6) συνοψίζονται στὸν ἀκόλουθο πίνακα:

$X = j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$P_X(j)$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{256}$	$\frac{21}{512}$	$\frac{17}{512}$	...

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ μέση τιμὴ καθὼς καὶ τὴ μέση ἀπόκλιση τετραγώνου τοῦ χρόνου ἀναμονῆς γιὰ τὸ ἐνδεχόμενο [Π, Π], πρέπει πρῶτα νὰ καθορίσουμε τὴν πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(t)$ τῆς κατανομῆς. Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ πολλαπλασιάζουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1.5) μὲ τὴ συνάρτηση t^j καὶ προσθέτουμε ὅλες τὶς σχέσεις ποὺ προκύπτουν μὲ $j = 0, 1, 2, 3,.....$ Ἔτσι ἔχουμε:

(1.7) $$\sum_{j=0}^{\infty} \delta_{2,j}\, t^j = 4 \sum_{j=0}^{\infty} P_X(j) t^j - 2 \sum_{j=2}^{\infty} P_X(j-1) t^j - \sum_{j=2}^{\infty} P_X(j-2) t^j$$

πού γράφεται:

$$t^2 = 4G_X(t) - 2tG_X(t) - t^2G_X(t) \tag{1.8}$$

καὶ ἀπὸ τὴν ὁποία προκύπτει ἡ πιθανογεννήτρια συνάρτηση τῆς παραπάνω κατανομῆς:

$$G_X(t) = -1 + \frac{4-2t}{-t^2-2t+4} \tag{1.9}$$

Θέτοντας $\varphi(t) = 4-2t$ καὶ $\sigma(t) = -t^2-2t+4$, λαμβάνουμε:

$$G_X(t) = -1 + \frac{\varphi(t)}{\sigma(t)} \tag{1.10}$$

Ἀπὸ αὐτὴν μποροῦμε νὰ βροῦμε τὶς τιμὲς τῆς πρώτης καὶ τῆς δεύτερης παραγώγου στὸ σημεῖο $t=1$, δηλαδὴ τὶς τιμὲς ποὺ ἀπαιτοῦνται γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς διακυμάνσεως τοῦ χρόνου ἀναμονῆς μὲ τὴ βοήθεια τῆς πιθανογεννήτριας συναρτήσεως. Ἔτσι, μὲ βάση τὶς συναρτήσεις $\varphi(t)$ καὶ $\sigma(t)$ ἔχουμε:

$$\begin{array}{lll} \varphi(1) = 2, & \varphi'(1) = -2, & \varphi''(1) = 0 \\ \sigma(1) = 1, & \sigma'(1) = -4, & \sigma''(1) = -2 \end{array}$$

Ἑπομένως εἶναι:

$$\begin{aligned} E(X) = G_X' &= \frac{\varphi'(1)}{\sigma(1)} - \varphi(1)\frac{\sigma'(1)}{\sigma^2(1)} \\ &= -\frac{2}{1} - 2\,\frac{(-4)}{1} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Ἐπίσης λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} G''(1) &= \frac{\varphi''(1)}{\sigma(1)} - 2\varphi'(1)\,\frac{\sigma'(1)}{\sigma^2(1)} - \varphi(1)\,\frac{\sigma''(1)}{\sigma^2(1)} + 2\,\frac{\varphi(1)\,[\sigma'(1)]^2}{\sigma^3(1)} \\ &= 0 - 2(-2)\cdot\frac{(-4)}{1} - 2\,\frac{(-2)}{1} + 2\,\frac{2.16}{1} \\ &= 52 \end{aligned}$$

Ἄρα εἶναι:

$$\begin{aligned} V(x) &= G_X''(1) + G_X'(1) - [G_X'(1)]^2 \\ &= 52 + 6 - 36 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Τελικά, ὁ μέσος χρόνος ἀναμονῆς καὶ ἡ μέση ἀπόκλιση τετραγώνου τοῦ χρόνου αὐτοῦ εἶναι:

$$\mu_X = 6 \quad \text{καὶ } \sigma_X = \sqrt{22}$$

2. Χρόνος ἀναμονῆς στὸ πείραμα τῶν ἐπανειλημμένων ρίψεων ἰδανικοῦ νομίσματος μέχρι νὰ παρουσιάσει γιὰ πρώτη φορὰ τὸ ἐνδεχόμενο «Πρόσωπο, Γράμματα».

Ἔστω ὅτι X εἶναι ἡ διακριτὴ τυχαία μεταβλητὴ ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ χρόνο ἀναμονῆς —ποὺ μετριέται σὲ ρίψεις νομίσματος— μέχρις ὅτου ἕνα ἰδανικὸ νόμισμα ποὺ ρίχνεται ἐπανειλημμένα παρουσιάσει γιὰ πρώτη φορὰ τὸ ἐνδεχόμενο [Π, Γ]. Καὶ πάλι διαμερίζουμε τὸ δειγματικὸ χῶρο τοῦ πειράματος σὲ δύο κλάσεις, δηλαδὴ στὶς ἀκολουθίες τῶν ρίψεων ποὺ ἀρχίζουν μὲ «Πρόσωπο» στὴν πρώτη ρίψη καὶ στὶς ἀκολουθίες τῶν ρίψεων ποὺ ἀρχίζουν μὲ «Γράμματα» στὴν πρώτη ρίψη.

Ἐδῶ ἡ μεταβλητὴ X/Π_1 ἐκφράζει τὸ συνολικὸ ἀριθμὸ τῶν ρίψεων ποὺ γίνονται μέχρι νὰ παρουσιαστεῖ γιὰ πρώτη φορὰ τὸ ἐνδεχόμενο [Π, Γ], δοθέντος ὅτι ἡ πρώτη ρίψη τοῦ νομίσματος παρουσίασε «Πρόσωπο». Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ συνάρτηση πιθανότητας $P_X(j)$ τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X μπορεῖ νὰ πάρει τὴ μορφή:

$$
\begin{aligned}
P_X(j) &= \frac{1}{2}\, P[X = j/\Pi_1] + \frac{1}{2}\, P[X = j/\Gamma_1] \\
&= \frac{1}{2}\, P_{X/\Pi_1}(j) + \frac{1}{2}\, P_X(j-1),
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

ὅπου j=2, 3, 4....

Κατόπιν διαμερίζουμε καὶ πάλι τὸ δειγματικὸ χῶρο τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X/Π_1 σὲ δύο κλάσεις, δηλαδὴ στὶς ἀκολουθίες τῶν ρίψεων ποὺ στὴ δεύτερη ρίψη παρουσιάζουν «Πρόσωπο» καὶ στὶς ἀκολουθίες τῶν ρίψεων ποὺ στὴ δεύτερη ρίψη παρουσιάζουν «Γράμματα». Τότε ἡ συνάρτηση πιθανότητας τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X/Π_1 παίρνει τὴ μορφή:

$$
\begin{aligned}
P_{X/\Pi_1}(j) &= \frac{1}{2}\, P_{X/\Pi_1}(j/\Pi_2) + \frac{1}{2}\, P_{X/\Pi_1}(j/\Gamma_2) \\
&= \frac{1}{2}\, P_{X/\Pi_1\Pi_2}(j) + \frac{1}{2}\, P_{X/\Pi_1\Gamma_2}(j)
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Προφανῶς εἶναι: $P_{X/\Pi_1\Gamma_2}(j) = \delta_{j,\,2}$, ὅπου $\delta_{j,\,2}$ εἶναι ἡ συνάρτηση Δέλτα τοῦ Kronecker. Μὲ βάση τὴ συνάρτηση αὐτὴ ἡ (2.2) γίνεται:

$$P_{X/\Pi_1}(j) = \frac{1}{2}\, P_{X/\Pi_1\Pi_2}(j) + \frac{1}{2}\, \delta_{j,\,2} \tag{2.3}$$

Συνεχίζουμε τὴ διαδικασία τῆς διαμερίσεως τῶν δειγματικῶν χώρων σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω καὶ ἔχουμε:

$$P_{X/\Pi_1\Pi_2}(j) = \frac{1}{2}\, P_{X/\Pi_1\Pi_2\Pi_3}(j) + \frac{1}{2}\, P_{X/\Pi_1\Pi_2\Gamma_3}(j) \tag{2.4}$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι: $P_{X/\Pi_1\Pi_2\Gamma_3}(j) = \delta_{j,\,3}$, ἡ (2.4) γράφεται:

$$(2.5) \qquad P_{X/\Pi_1\Pi_2}(j) = \frac{1}{2} P_{X/\Pi_1\Pi_2\Pi_3}(j) + \frac{1}{2}\delta_{j,\,3}$$

Ἐπίσης λαμβάνουμε:

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} P_{X/\Pi_1\Pi_2\Pi_3}(j) &= \frac{1}{2} P_{X/\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4}(j) + \frac{1}{2} P_{X/\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Gamma_4}(j) \\ &= \frac{1}{2} P_{X/\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4}(j) + \frac{1}{2}\delta_{j,\,4} \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τὶς (2.1), (2.3), (2.5), (2.6) καθὼς καὶ τὶς ἄπειρες ὅμοιες σχέσεις ποὺ θὰ εἴχαμε μὲ τὸν ἀλγόριθμο τῆς διαμερίσεως τῶν δειγματικῶν χώρων, παίρνουμε:

$$(2.7) \qquad P_X(j) = \frac{1}{2} P_X(j-1) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta_{j,\,k} + \left(\frac{1}{2}\right)^k P_{\Pi\kappa+2} + \ldots$$

ὅπου $P_{\Pi\kappa+2}$ εἶναι —χάρη συντομίας— ἡ συνάρτηση πιθανότητας: $P_{X/\Pi_1\Pi_2\Pi_3\ldots\Pi\kappa+1}$ $_{\Pi\kappa+2}$ ποὺ θὰ παρουσιαστεῖ στὸν ἀλγόριθμο.
Εἶναι ὅμως: $\left(\frac{1}{2}\right)^k P_{\Pi\kappa+2} \to 0$, ὅταν $\kappa \to \infty$ καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτηση πιθανότητας τῆς τυχαίας μεταβλητῆς X θὰ εἶναι:

$$(2.8) \qquad P_X(j) = \begin{cases} \frac{1}{2} P_X(j-1) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta_{j,\,k}, & \text{ἂν } j=2,\ 3\ldots \\ 0, & \text{ἂν } j=0,\ 1 \end{cases}$$

Οἱ πιθανότητες ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὴ συνάρτηση (2.8) συνοψίζονται στὸν ἀκόλουθο πίνακα:

X = j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$P_X(j)$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{7}{256}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{1024}$	...

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν πιθανογεννήτρια $G_X(t)$ τῆς παραπάνω κατανομῆς, ἀπὸ τὴν ὁποία θὰ προκύψει ἡ μαθηματικὴ ἐλπίδα καὶ ἡ διακύμανση, ἀκολουθοῦμε τὴν ἑξῆς διαδικασία:
Πολλαπλασιάζουμε τὴ (2.8) μὲ τὴ συνάρτηση t^j καὶ ἀθροίζουμε τὶς σχέσεις ποὺ προκύπτουν γιὰ ὅλα τὰ j=0, 1, 2, 3...
Ἔτσι ἔχουμε:

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^j P_X(j) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j \sum_{k=2}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \delta_{j,}$$

(2.9)

$$k + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_X(j-1)$$

Τὸ πρῶτο μέλος τῆς (2.9) εἶναι ἀκριβῶς ἡ πιθανογεννήτρια $G_X(t)$ καὶ ἑπομένως ἡ τελευταία γράφεται:

$$G_X(t) = \frac{1}{2} t \sum_{j=0}^{\infty} t^{j-1} P_X(j-1) + (\frac{t}{2})^2 + (\frac{t}{2})^3 + (\frac{t}{2})^4 + \ldots \tag{2.10}$$

Ἀπὸ αὐτὴν παίρνουμε:

$$G_X(t) = \frac{1}{2} t\, G_X(t) + \frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{2-t} \right) \tag{2.11}$$

ὁπότε λύνοντας τὴ (2.11) ὡς πρὸς $G_X(t)$ λαμβάνουμε:

$$G_X(t) = \frac{t^2}{(2-t)^2} \tag{2.12}$$

Ἔτσι ἔχουμε:

$$G_X(t) = \frac{\varphi(t)}{\sigma(t)}, \text{ ὅπου } \varphi(t) = t^2 \text{ καὶ } \sigma(t) = (2-t)^2$$

Θέτοντας:

$$\begin{array}{lll} \varphi(1) = 1, & \varphi'(1) = 2, & \varphi''(1) = 2 \\ \sigma(1) = 1, & \sigma'(1) = -2, & \sigma''(1) = 2 \end{array}$$

Ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \mu_X = G'_X(1) &= \frac{\varphi'(1)}{\sigma(1)} - \frac{\varphi(1)\sigma'(1)}{\sigma^2(1)} \\ &= \frac{2}{1} - \frac{1(-2)}{1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ἐπίσης λαμβάνουμε:

$$G''_X(1) = \frac{\varphi''(1)}{\sigma(1)} - 2\frac{\varphi'(1)\sigma'(1)}{\sigma^2(1)} - \frac{\varphi(1)\sigma''(1)}{\sigma^2(1)} + 2\varphi(1)\frac{[\sigma'(1)]^2}{\sigma^3(1)}$$

$$= \frac{2}{1} - 2 \cdot \frac{2\cdot(-2)}{1} - \frac{1\cdot 2}{1} + 2\cdot 1\cdot \frac{4}{1}$$
$$= 16$$

Ἄρα εἶναι:

$$\begin{aligned} V(X) &= G_X''(1) + G_X'(1) - [G_X'(1)]^2 \\ &= 16 + 4 - 16 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Τελικά, ὁ μέσος χρόνος ἀναμονῆς καὶ ἡ μέση ἀπόκλιση τετραγώνου τοῦ χρόνου αὐτοῦ εἶναι:

$$\mu_X = 4 \text{ καὶ } \sigma_X = \sqrt{4} = 2$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. PENNEY, W. "A Waiting Time Problem", Journal of Recreational Mathematics, October 1969.
2. SEAL, H.L. "The Historical Development of the Use of Generating Functions in Probability Theory", Bull de l' Associations des Actuaires Suisses 1949.
3. ΔΡΑΚΑΤΟΥ Κ. «Στατιστική» Τεύχη I-V Ἀθῆναι, 1972-80.