ΕΝΑΣ ΣΥΓΧΡΟΝΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΘΕΝΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΕΝΟΣ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Τοῦ Δρος *Ἀλέξη Λαζαρίδη,*

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σὲ ἕνα γραμμικὸ οἰκονομετρικὸ ὑπόδειγμα, ἐφόσον πληροῦνται ὁρισμένες ὑποθέσεις, τότε οἱ συντελεστὲς τοῦ ὑποδείγματος ποὺ ἔχουν ἐκτιμηθεῖ εἶναι ἄριστοι, γραμμικοί, ἀμερόληπτοι (BLU) ἐκτιμητὲς τῶν θεωρητικῶν συντελεστῶν.

Ὅλες σχεδὸν οἱ κλασσικὲς μέθοδοι ποὺ χρησιμοποιοῦνται γιὰ τὴν ἀπόδειξη αὐτῶν ποὺ προαναφέρθηκαν ἔχουν πεπερασμένες δυνατότητες. Μὲ ἄλλους λόγους, ἂν ὑποτεθεῖ ὅτι οἱ ἐκτιμηθέντες συντελεστὲς ἀποτελοῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $\mathbf{\hat{b}}$, τότε μὲ τὴν ἐφαρμογὴ τῶν κλασσικῶν μεθόδων εἶναι δυνατὸ νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ συντελεστὲς ἔχουν τὶς ἐπιθυμητὲς ἰδιότητες, μόνο ἂν θεωρηθεῖ τὸ κάθε στοιχεῖο τοῦ διανύσματος $\mathbf{\hat{b}}$ ξεχωριστά (βλέπε π.χ. Theil, 1971, σελίδα 104, Johnston, 1972, σελίδα 22). Αὐξανόμενης συνεπῶς τῆς διαστάσεως τοῦ διανύσματος $\mathbf{\hat{b}}$ ἡ ἐφαρμογὴ τῶν κλασσικῶν μεθόδων γίνεται προβληματική.

Στὴν παροῦσα ἐργασία, ἀναλύεται ἕνας σύγχρονος καὶ ἄμεσος τρόπος βάσει τοῦ ὁποίου ἀποδεικνύεται ὅτι — ἐφόσον πληροῦνται ὁρισμένες ὑποθέσεις — ὅλο τὸ διάνυσμα $\mathbf{\hat{b}}$, δηλαδὴ ταυτόχρονα ὅλοι οἱ συντελεστές, εἶναι BLU ἐκτιμητὲς τῶν θεωρητικῶν συντελεστῶν.

I. Βασικὲς μέθοδοι ἐκτιμήσεως

Δίδεται τὸ γραμμικὸ ὑπόδειγμα

$$Y = X\,\mathbf{b} + \mathbf{u}$$

ὅπου $\mathbf{Y}$, $\mathbf{u} \in E^m$, $\mathbf{b} \in E^n$ $(m > n)$

Ἡ πραγματικὴ μήτρα X, ποὺ ὑποτίθεται ὅτι δὲν εἶναι στοχαστική, ὁρίζεται στὸ $E^m \times E^n$.

Ὑποτίθεται ἐπίσης ὅτι

$$E(\mathbf{u}) = \mathbf{O}$$

$$E(\mathbf{uu}') = \sigma^2 I = R \tag{3}$$

|ὁ τόνος ὑποδηλώνει ἀναστροφή (transposition)|

Μὲ τὴ μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ὁ ἐκτιμητὴς $\hat{\mathbf{b}}$ τοῦ διανύσματος $\mathbf{b}$ ὑπολογίζεται ἂν ἐλαχιστοποιηθεῖ ἡ συνάρτηση

$$
\begin{aligned}
J &= \|\mathbf{Y} - X\,\hat{\mathbf{b}}\|^2 \\
&= \mathbf{Y}'\,\mathbf{Y} - 2\hat{\mathbf{b}}'\,X'\,\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{b}}'\,X'\,X\hat{\mathbf{b}} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Μὲ τὴν προϋπόθεση ὅτι ἡ (4) εἶναι τελείως κοίλη (strict convex) τότε ἡ ἐλαχιστοποίησή της, ὡς πρὸς $\hat{\mathbf{b}}$, μᾶς δίνει

$$\hat{\mathbf{b}} = (X'X)^{-1}\,X'\,\mathbf{Y}$$

Σημειώνεται ὅτι ἡ (4) εἶναι τελείως κοίλη ἂν καὶ μόνο ἂν ἡ λεγόμενη Hessian μήτρα τῆς συνάρτησης αὐτῆ εἶναι θετικὰ ὁρισμένη. Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ Hessian μήτρα τῆς (4) εἶναι ἡ $2X'X$. Δεδομένου ὅτι τὸ 2 εἶναι ἀκέραιος θετικὸς θὰ πρέπει ἡ μήτρα $X'X$ νὰ εἶναι θετικὰ ὁρισμένη, ποὺ συνεπάγεται ὅτι ἡ μήτρα αὐτὴ δὲν θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἰδιάζουσα (singular).

Μὲ τὴ μέθοδο τῆς μέγιστης πιθανότητας τὸ διάστημα $\hat{\mathbf{b}}$ ὑπολογίζεται ἂν μεγιστοποιηθεῖ ἡ συνάρτηση πιθανότητας (likelihood function)

$$L = \text{σταθερά} \,.\, |R|^{-1/2} \,.\, \exp\,(-1/2\ E)$$

$$\text{ὅπου } E = \|\,\mathbf{Y} - X\hat{\mathbf{b}}\,\|^2_{R^{-1}} \qquad (5)$$

Ὁ συμβολισμὸς exp(a) σημαίνει e^a

Ἡ L μεγιστοποιεῖται ἂν ἐλαχιστοποιηθεῖ ἡ (5). Μὲ τὶς προηγούμενες ὑποθέσεις σχετικὰ μὲ τὴ μήτρα $X'X$, τὸ διάνυσμα $\hat{\mathbf{b}}$ ποὺ ἐλαχιστοποιεῖ τὴν παραπάνω συνάρτηση δίδεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$\hat{\mathbf{b}} = (X'\,R^{-1}\,X)^{-1}\,X'\,R^{-1}\,\mathbf{Y} \qquad (6)$$

Δεδομένης τῆς σχ. (3), ἡ (6) γράφεται

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{b}} &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2}(X'\ X)^{-1}\ X'\ \mathbf{Y} \\
&= (X'\ X)^{-1}\ X'\ \mathbf{Y}
\end{aligned}
$$

Συνεπῶς, μὲ βάση τὶς ὑποθέσεις ποὺ ἀναφέρθηκαν στὴν ἀρχὴ καὶ οἱ δύο μέθοδοι δίνουν τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα.

Ἀναφορικὰ μὲ τὴν Bayesian μέθοδο, ἡ ἀνάπτυξη τῆς ὁποίας ἀποφεύγεται συστηματικὰ στὴν ἑλληνικὴ βιβλιογραφία, ἔχουμε νὰ παρατηρήσουμε τὰ ἑξῆς:

Κατ' ἀρχὰς θὰ πρέπει νὰ τονισθεῖ ὅτι σὲ ἀντίθεση μὲ τὶς κλασσικὲς μεθόδους ὅπου θεωρεῖται ἡ κατανομὴ τοῦ διανύσματος τῶν ἐκτιμητῶν $\hat{\mathbf{b}}$ σὲ σχέση μὲ τὸ θεωρητικὸ διάνυσμα $\mathbf{b}$, στὴν Bayesian μέθοδο ὑποτίθεται σὰν δεδομένη ἡ κατανομὴ τοῦ θεωρητικοῦ διανύσματος $\mathbf{b}$.

Πέρα ἀπὸ τὶς ὑποθέσεις ποὺ ἀποδίδονται μὲ τὶς σχέσεις (2) καί (3), ὑποτίθεται ἐπὶ πλέον ὅτι οἱ διαταρακτικοὶ ὅροι ἀκολουθοῦν τὴν κανονικὴ κατανομή. Σημειώνεται ὅτι ἡ τελευταία αὐτὴ ὑπόθεση θὰ πρέπει νὰ γίνει καὶ στὴν περίπτωση ἐκτιμήσεως τῶν συντελεστῶν μὲ τὴ μέθοδο τῆς μέγιστης πιθανότητας.

Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση τῆς κανονικῆς κατανομῆς τῶν διαταρακτικῶν ὅρων ἐξυπακούεται ὅτι ἡ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) τοῦ διανύσματος $\mathbf{b}$ (ποὺ συμβολίζεται μὲ $f(\mathbf{b})$) ἀκολουθεῖ ἐπίσης τὴν κανονικὴ κατανομὴ καὶ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$f(\mathbf{b}) = \text{σταθερά. } \exp\left(-1/2 \, \|\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\|_{\Sigma_0^{-1}}\right)$$

ὅπου $\bar{\mathbf{b}}$ παριστάνει τὴν προσδοκώμενη τιμὴ τοῦ $\mathbf{b}$ καὶ Σ_0 τὴ μήτρα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεών του.

Ὅπως προαναφέρθηκε ἡ συνάρτηση $f(\mathbf{b})$ μᾶς εἶναι γνωστὴ ἀπὸ προηγούμενες πληροφορίες (γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ ὀνομάζεται καὶ prior density function), πρὶν μᾶς δοθοῦν οἱ νέες παρατηρήσεις ἀναφορικὰ μὲ τὸ διάνυσμα $\mathbf{Y}$ καὶ τὴ μήτρα $\mathbf{X}$.

Μὲ τὴν Bayesian μέθοδο εἶναι δυνατὸς ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἐκ τῶν ὑστέρων συναρτήσεως πυκνότητας (posterior density function) τοῦ διανύσματος τῶν συντελεστῶν δεδομένου τοῦ διανύσματος $\mathbf{Y}$, ἤτοι ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ $f(\mathbf{b} \mid \mathbf{Y})$.

Εἶναι γνωστό (Chow, 1975, σελίδες 235–236) ὅτι

$$f(\mathbf{b} \mid \mathbf{Y}) = \frac{f(\mathbf{b},\mathbf{Y})}{f(\mathbf{Y})} = \frac{f(\mathbf{Y} \mid \mathbf{b})\, f(\mathbf{b})}{\int f(\mathbf{b},\mathbf{Y})\, d\mathbf{b}} = \frac{f(\mathbf{Y} \mid \mathbf{b})\, f(\mathbf{b})}{\int f(\mathbf{Y} \mid \mathbf{b})\, f(\mathbf{b})\, d\mathbf{b}}$$

Ἀλλὰ ἡ συνάρτηση $f(\mathbf{Y} \mid \mathbf{b})$ εἶναι ἡ συνάρτηση πιθανότητας (likelihood function) ἡ ὁποία – ὅπως προαναφέρθηκε – δίδεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$f(\mathbf{Y} \mid \mathbf{b}) = \text{σταθερά. } \exp\left(-1/2 \, \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}\|^2_{R^{-1}}\right)$$

δεδομένου ὅτι ἡ Ἰακωβιανὴ ὁρίζουσα τοῦ γραμμικοῦ μετασχηματισμοῦ (Jacobian of the transformation) τοῦ διανύσματος $\mathbf{u}$ (σχέση (1)) σὲ συνάρτηση τοῦ διανύσματος $\mathbf{Y}$, ἰσοῦται μὲ τὴ μονάδα (Johnston, 1972, σελίδες 25, 305, 353).

Θεωρώντας τὸν παρανομαστὴ τοῦ παραπάνω κλάσματος, θὰ ἔχουμε

$$\int f(\mathbf{Y} \mid \mathbf{b})\, f(\mathbf{b})\, d\mathbf{b} = \text{σταθερά. } \int \exp\left(-1/2\, L_1\right) d\mathbf{b}$$

ὅπου $L_1 = \{ \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}\|^2_{R^{-1}} + \|\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\|^2_{\Sigma_0^{-1}} \}$

Ἀναπτύσσοντας τὴν παράσταση L_1 ἔχουμε

$$\begin{aligned} L_1 &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b})' R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' \Sigma_0^{-1} (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \\ &= [\, \mathbf{Y} - \mathbf{X}\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{X}(\mathbf{b} - \mathbf{b}) \,]' R^{-1} [\, \mathbf{Y} - \mathbf{X}\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{X}(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \,] \\ &\quad + (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \Sigma_0^{-1} (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \\ &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\bar{\mathbf{b}})' R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\bar{\mathbf{b}}) \\ &\quad - 2(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})'\mathbf{X}' R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\bar{\mathbf{b}}) \end{aligned}$$

$$+ (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' X' R^{-1} X(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})$$
$$+ (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' \Sigma_0^{-1} (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})$$
$$= (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' (\Sigma_0^{-1} + X' R^{-1} X) (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})$$
$$- 2(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' X' R^{-1} (\mathbf{Y} - X\mathbf{b})$$
$$+ (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})' R^{-1} (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}}) \tag{6.α}$$

Ὁρίζοντας $\Gamma^{-1} = (\Sigma_0^{-1} + X' R^{-1} X)$ (6.β)
ἡ παράσταση (6.α) μπορεῖ ἐπίσης νὰ γραφεῖ ὡς ἑξῆς:

$$L_1 = [(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) - \Gamma X' R^{-1} (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})]' \Gamma^{-1} [(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) - \Gamma X' R^{-1} (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})]$$
$$+ (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})' (R^{-1} - R^{-1} X\Gamma X' R^{-1}) (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})$$

Διαφοροποιώντας ὡς πρὸς **b** θὰ προκύψει

$$\int \exp(-1/2\ L_1)\, d\mathbf{b} = \text{σταθερά}.\ \exp(-1/2\ L_2)$$
ὅπου $L_2 = (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})' (R^{-1} - R^{-1} X\Gamma X' R^{-1}) (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})$

Κὰνοντας χρήση τῆς ταυτότητας μητρῶν τοῦ Hauseholder (1953) ποὺ ἔχει τὴ γενικὴ μορφὴ

$$(A + BCB')^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B(C^{-1} + B' A^{-1} B)^{-1} B' A^{-1}$$

καὶ θεωρώντας τὴ μήτρα $(R^{-1} - R^{-1} X\Gamma X' R^{-1})$ θὰ προκύψει

$$R^{-1} - R^{-1} X\Gamma X' R^{-1} =$$
$$= R^{-1} - R^{-1} X(\Sigma_0^{-1} + X' R^{-1} X)^{-1} X' R^{-1} \quad \{ \text{ἀπὸ τὴ σχέση (6.β)} \}$$
$$= (R + X\Sigma_0 X')^{-1}$$

Συνεπῶς

$$\int \exp(-1/2\ L_1)\, d\mathbf{b} = \text{σταθερά}.\ \exp(-1/2\ \| \mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}} \|^2_{(R+X\Sigma_0 X')^{-1}}) \tag{6.γ}$$

Θὰ εἶναι ἑπομένως

$$f(\mathbf{b}|\mathbf{Y}) = \text{σταθερά} \frac{\exp(-1/2\ \{\|\mathbf{Y}-X\mathbf{b}\|^2_{R^{-1}} + \|\mathbf{b}-\bar{\mathbf{b}}\|^2_{\Sigma_0^{-1}}\})}{\exp(-1/2\ \|\mathbf{Y}-X\bar{\mathbf{b}}\|^2_{(R+X\Sigma_0 X')^{-1}})}$$
$$= \text{σταθερά}.\ \exp(-1/2\ P_1)$$
ὅπου

$$P_1 = \{ \| \mathbf{Y} - X\mathbf{b} \|^2_{R^{-1}} + \| \mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}} \|^2_{\Sigma_0^{-1}} - \| \mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}} \|^2_{(R+X\Sigma_0 X')^{-1}} \}$$

Δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτηση πυκνότητας $f(\mathbf{b}|\mathbf{Y})$ εἶναι – ὅπως προαναφέρθηκε – ἀνάλογος τῆς συναρτήσεως πιθανότητας, ἡ μεγιστοποίηση τῆς πρώτης, ὡς πρὸς $\mathbf{b}$, συνεπάγεται καὶ τὴ μεγιστοποίηση τῆς δεύτερης.

Τὸ διάνυσμα $\mathbf{b}^*$ ποὺ μεγιστοποιεῖ τὴν $f(\mathbf{b}|\mathbf{Y})$ εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἐλαχιστοποιεῖ τὴν παράσταση P_1. Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ $\mathbf{b}^*$ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἀναπτύσσοντας τὴν παράσταση P_1 προκύπτει

$$\begin{aligned}
P_1 &= (\mathbf{Y} - X\mathbf{b})' R^{-1} (\mathbf{Y} - X\mathbf{b}) \\
&\quad + (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' \Sigma_0^{-1} (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \\
&\quad - (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})' (R + X\Sigma_0 X')^{-1} (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}}) \\
&= [\, \mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}} - X(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \,]' R^{-1} [\, \mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}} - X(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \,] \\
&\quad + (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' \Sigma_0^{-1} (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \\
&\quad - (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})' (R + X\Sigma_0 X')^{-1} (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}}) \\
&= (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})' R^{-1} (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}}) \\
&\quad - 2 (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' X' R^{-1} (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}}) \\
&\quad + (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' X' R^{-1} X(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \\
&\quad + (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' \Sigma_0^{-1} (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \\
&\quad - (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})' (R + X\Sigma_0 X')^{-1} (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}}) \\
&= (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' (\Sigma_0^{-1} + X' R^{-1} X) (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \\
&\quad - 2 (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' X' R^{-1} (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}}) \\
&\quad + (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})' [\, R^{-1} - (R + X\Sigma_0 X')^{-1} \,] (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})
\end{aligned} \tag{6.δ}$$

Ἔχοντας ὑπόψη τὴ ταυτότητα μητρῶν τοῦ Hauseholder ἡ μήτρα $(R + X\Sigma_0 X')^{-1}$ γράφεται

$$\begin{aligned}
&(R + X\Sigma_0 X)^{-1} = R^{-1} - R^{-1} X(\Sigma_0^{-1} + X' R^{-1} X)^{-1} X' R^{-1} \\
&= R^{-1} - R^{-1} X\Gamma X' R^{-1} \ \{\text{ἀπὸ τὴ σχέση } (6.\beta)\}
\end{aligned}$$

Συνεπῶς ἡ μήτρα $R^{-1} - (R + X\Sigma_0 X')^{-1}$ στὴ σχέση (6.δ) γράφεται

$$R^{-1} - R^{-1} + R^{-1} X\Gamma X' R^{-1} = R^{-1} X\Gamma X' R^{-1}$$

Ἔτσι ἡ τελικὴ μορφὴ τῆς παράστασης P_1 θὰ εἶναι

$$\begin{aligned}
P_1 &= (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' (\Sigma_0^{-1} + X' R^{-1} X) (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \\
&\quad - 2 (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})' X' R^{-1} (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}}) \\
&\quad + (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})' R^{-1} X\Gamma X' R^{-1} (\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})
\end{aligned} \tag{6.ε}$$

'Αναπτύσσοντας περαιτέρω τὴν παραπάνω παράσταση καὶ παραλείποντας τοὺς ὅρους ποὺ δὲν περιέχουν τὸ διάνυσμα **b** , βρίσκουμε τὴν παράσταση P_2, ἤτοι

$$P_2 = \mathbf{b}' (\Sigma_0^{-1} + X' R^{-1} X)\mathbf{b} - 2\mathbf{b}' (\Sigma_0^{-1} + X' R^{-1} X)\bar{\mathbf{b}} - 2\mathbf{b}' \mathbf{X}' \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\bar{\mathbf{b}})$$

καὶ $$\frac{\partial P_2}{\partial \mathbf{b}'} = 2\Gamma^{-1} \mathbf{b} - 2\Gamma^{-1} \bar{\mathbf{b}} - 2X' R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\bar{\mathbf{b}}) \qquad (6.\zeta)$$

δεδομένου ὅτι ἡ μήτρα Γ εἶναι συμμετρική.

'Εξισώνοντας τὴ σχέση (6.ζ) μὲ τὸ μηδενικὸ διάνυσμα θὰ προκύψει

$$\mathbf{b}^* = \Gamma\Gamma^{-1} \bar{\mathbf{b}} + \Gamma X' R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\bar{\mathbf{b}})$$

ὅπου $\Gamma = (\Sigma_0^{-1} + X' R^{-1} X)^{-1}$ εἶναι ἡ μήτρα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων τοῦ διανύσματος $\mathbf{b}^*$. Σύμφωνα μὲ τὴν ταυτότητα μητρῶν τοῦ Hauseholder θὰ ἔχουμε

$$\Gamma = \Sigma_0 - \Sigma_0 X' (R + X\Sigma_0 X')^{-1} X\Sigma_0$$

Τελικὰ βρίσκεται

$$\mathbf{b}^* = \bar{\mathbf{b}} + \Gamma X' R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\bar{\mathbf{b}})$$

ὅπου $\mathbf{b}^*$ τὸ διάνυσμα τῶν ἐκτιμητῶν τῶν θεωρητικῶν συντελεστῶν ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν Bayesian μέθοδο.

Ἡ παραπάνω ἀνάπτυξη ἀναφέρεται στὴ γενικώτερη μορφὴ τῆς Bayesian μεθόδου. Γιὰ τὴ συγκεκριμένη περίπτωση εἶναι δυνατὸ νὰ καταλήξουμε στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα μὲ λιγότερη ὑπολογιστικὴ διαδικασία. Ἡ ἐπὶ πλέον ὑπόθεση ποὺ χρειάζεται εἶναι ὅτι τὰ διανύσματα **b** καὶ **u** εἶναι ἀνεξάρτητα.

'Απὸ τὴ σχέση $$f(\mathbf{b}|\mathbf{Y}) = \frac{f(\mathbf{b},\mathbf{Y})}{f(\mathbf{Y})}$$

καὶ θεωρώντας τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος, ἔχουμε

$$f(\mathbf{b},\mathbf{Y}) = f(\mathbf{b},\mathbf{u}) \mid J \mid$$

ὅπου $|J|$ παριστάνει τὴν 'Ιακωβιανὴ ὁρίζουσα τοῦ μετασχηματισμοῦ, ποὺ στὴ συγκεκριμένη περίπτωση ἰσοῦται μὲ τὴ μονάδα.

Δεδομένου ὅτι $\mathbf{u} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b}$ καὶ ὅτι τὰ διανύσματα **b** καὶ **u** εἶναι ἀνεξάρτητα, θὰ εἶναι

$$f(\mathbf{b},\mathbf{Y}) = f(\mathbf{b},\mathbf{u}) = f(\mathbf{b})f(\mathbf{u}) \doteq f(\mathbf{b})f(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b})$$

Δεδομένων ὅλων τῶν προηγουμένων ὑποθέσεων θὰ εἶναι

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}) &= E(X\mathbf{b}) \qquad (\text{ἀφοῦ } E(\mathbf{u}) = \mathbf{O}) \\ &= X\bar{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

καὶ $E[\,(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y})\,)\,(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y})\,)'\,]$

$$\begin{aligned} &= E[\,(\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})\,(\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}})'\,] \\ &= E[\,(X\mathbf{b} + \mathbf{u} - X\bar{\mathbf{b}})\,(X\mathbf{b} + \mathbf{u} - X\bar{\mathbf{b}})'\,] \\ &= E[\,(X(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) + \mathbf{u})\,(X(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) + \mathbf{u})'\,] \\ &= E[\,X(\mathbf{b}-\bar{\mathbf{b}})\,(\mathbf{b}-\bar{\mathbf{b}})'X' + X(\mathbf{b}-\bar{\mathbf{b}})\,\mathbf{u}' + \mathbf{u}(\mathbf{b}-\bar{\mathbf{b}})'X' + \mathbf{u}\mathbf{u}'\,] \\ &= XE[\,(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})\,(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})'\,]X' + E(\mathbf{u}\mathbf{u}') \\ &= X\Sigma_0X' + R \end{aligned}$$

Σημειώνεται ὅτι ἡ μήτρα διακυμάνσεων — συνδιακυμάνσεων $(X\Sigma_0X' + R)$ καθορίζεται στὴ σχέση (6.γ)

Κατὰ συνέπεια ἡ $f(\mathbf{Y})$ ἀκολουθεῖ τὴν κανονικὴ κατανομὴ καὶ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$f(\mathbf{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\,|X\Sigma_0X'+R|^{-1/2}\,.\exp(-1/2\,\|\mathbf{Y}-X\bar{\mathbf{b}}\|^2_{(X\Sigma_0X'+R)^{-1}})$$

Δεδομένου ὅτι

$$f(\mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,|\Sigma_0|^{-1/2}\,.\exp(-1/2\,\|\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\|^2_{\Sigma_0^{-1}})$$

καὶ

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{Y}-X\mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\,|R|^{-1/2}\,.\exp(-1/2\,\|\mathbf{Y}-X\mathbf{b}\|^2_{R^{-1}})$$

θὰ εἶναι $f(\mathbf{b}|\mathbf{Y}) = CP_1$

ὅπου

$$C = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{|X\Sigma_0X' + R|^{1/2}}{|\Sigma_0|^{1/2}\,|R|^{1/2}}$$

Μεγιστοποιώντας στὴ συνέχεια τὴν $f(\mathbf{b}|\mathbf{Y})$ — ἢ ἐλαχιστοποιώντας τὴν παράσταση P_1, μὲ τὸν τρόπο ποὺ ἀναλύθηκε προηγουμένως — βρίσκουμε

$$\mathbf{b}^* = \bar{\mathbf{b}} + (\Sigma_0^{-1}\,X'\,R^{-1}\,X)^{-1}\,X'\,R^{-1}\,(\mathbf{Y} - X\bar{\mathbf{b}}) \tag{6.n}$$

Σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω σχέση, ἡ συνάρτηση $f(\mathbf{b}|\mathbf{Y})$ γράφεται

$$f(\mathbf{b}|\mathbf{Y}) = C.\exp(-1/2\ (\mathbf{b} - \mathbf{b^*})\ \Gamma^{-1}\ (\mathbf{b} - \mathbf{b^*})\ )$$

ὁπότε εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ $f(\mathbf{b}|\mathbf{Y})$ εἶναι συμμετρικὴ περὶ τὸ διάνυσμα $\mathbf{b^*}$ καὶ ἔχει ἕνα μέγιστο στὸ $\mathbf{b^*}$ (symmetric and unimodal about $\mathbf{b^*}$) καὶ συνεπῶς οἱ τρεῖς ἐκτιμητὲς δηλ. ὁ κατὰ συνθήκη μέσος ($E(\mathbf{b}|\mathbf{Y})$), ὁ διάμεσος καὶ ὁ τύπος τῆς $f(\mathbf{b}|\mathbf{Y})$, δίδονται ὑπὸ τοῦ διανύσματος $\mathbf{b^*}$.

Ἂν τώρα τὸ διάνυσμα $\bar{\mathbf{b}}$ στὴν παραπάνω σχέση (6.n) ἀντικατασταθεῖ ἀπὸ τὸ διάνυσμα $\hat{\mathbf{b}}$ ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴ μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων δεδομένου τοῦ διανύσματος $\mathbf{Y}$ καὶ ἔχοντας ὑπόψη ὅτι $R^{-1} = 1/\sigma^2\ I$, σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχικὴ ὑπόθεση, θὰ προκύψει

$$\Sigma_0 = \sigma^2\ (X'X)^{-1} \qquad \text{καὶ}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b^*} &= (X'X)^{-1}\ X'\mathbf{Y}+[\ 1/\sigma^2(X'X)+1/\sigma^2(X'X)]^{-1}\ 1/\sigma^2X'(\mathbf{Y}-X(X'X)^{-1}\ X'\mathbf{Y})\\ &= (X'X)^{-1}\ X'\mathbf{Y} + [2/\sigma^2(X'X)\ ]^{-1}\ 1/\sigma^2X'(\mathbf{Y}-X(X'X)^{-1}\ X'\mathbf{Y})\\ &= (X'X)^{-1}\ X'\mathbf{Y}+1/2(X'X)^{-1}\ X'\mathbf{Y}-1/2(X'X)^{-1}\ X'X(X'X)^{-1}\ X'\mathbf{Y}\\ &= (X'X)^{-1}\ X'\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{b}}\end{aligned}$$

Ἔτσι διαπιστώνεται ὅτι κάτω ἀπὸ τελείως ὁρισμένες ὑποθέσεις, ἡ Bayesian μέθοδος εἶναι δυνατὸ νὰ καταλήξει στὸ ἀποτέλεσμα ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴ μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Θὰ δείξουμε στὴ συνέχεια ὅτι τὸ διάνυσμα $\hat{\mathbf{b}}$ εἶναι ἄριστος, γραμμικός, ἀμερόληπτος (BLU) ἐκτιμητὴς τοῦ θεωρητικοῦ διανύσματος $\mathbf{b}$.

II Ἀπόδειξη ὅτι τὸ διάνυσμα $\hat{\mathbf{b}}$ εἶναι BLU ἐκτιμητὴς τοῦ διανύσματος b.

Ἔστω $\tilde{\mathbf{b}}$ εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε γραμμικὸς ἐκτιμητὴς τοῦ $\mathbf{b}$ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση $\tilde{\mathbf{b}} = A\mathbf{Y}$ (7)

Ἡ πραγματικὴ μήτρα A ὁρίζεται στὸ $E^n \times E^m$ καὶ ὑποτίθεται ὅτι τὰ στοιχεῖα της εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $\mathbf{Y}$.

Δεδομένου ὅτι

$\mathbf{Y} = X\mathbf{b} + \mathbf{u}$ (ἀναφέρεται στὸν πληθυσμό)

μὲ ἀντικατάσταση στὴ σχέση (7) βρίσκεται

$$\tilde{\mathbf{b}} = A(X\mathbf{b} + \mathbf{u})$$

$$\text{καὶ} \quad E(\tilde{\mathbf{b}}) = AE(\mathbf{Y}) \tag{8}$$

$$\Rightarrow E(\tilde{\mathbf{b}}) = AX\mathbf{b} \text{ (δεδομένου ὅτι } E(\mathbf{u}) = \mathbf{O}) \tag{9}$$

Γιὰ νὰ εἶναι τὸ διάνυσμα $\tilde{\mathbf{b}}$ ἀμερόληπτος ἐκτιμητὴς τοῦ $\mathbf{b}$ θὰ πρέπει νὰ ἰσχύει ἡ σχέση

$$AX = I$$

ὁπότε θὰ εἶναι $E(\tilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{b}$

Ἡ μήτρα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων τοῦ διανύσματος $\tilde{\mathbf{b}}$ παριστάνεται σὰν $\Sigma_{\tilde{b}}$ καὶ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{b}} &= E\,[\,(\tilde{\mathbf{b}} - E(\tilde{\mathbf{b}})\,)\,(\tilde{\mathbf{b}} - E(\tilde{\mathbf{b}})\,)'\,] \\ &= E\,[\,(A\mathbf{Y} - AE(\mathbf{Y})\,)\,(A\mathbf{Y} - AE(\mathbf{Y})\,)'\,] \\ &= E\,[\,A(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y})\,)\,(A(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y})\,)\,)'\,] \\ &= E\,[\,A\mathbf{u}(A\mathbf{u})'\,] \quad (\text{δεδομένου ὅτι } \mathbf{Y} - E(\mathbf{Y}) = \mathbf{u}) \end{aligned}$$

καὶ

$$\Sigma_{\tilde{b}} = E[\,A\mathbf{u}\mathbf{u}'\,A'\,] = AE[\,\mathbf{u}\mathbf{u}'\,]\,A' = A\sigma^2IA' = \sigma^2AA' \qquad (10)$$

(δεδομένου ὅτι $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2 I$)

Γιὰ νὰ εἶναι τὸ διάνυσμα $\tilde{\mathbf{b}}$ καὶ ἄριστος ἐκτιμητὴς τοῦ θεωρητικοῦ διανύσματος $\mathbf{b}$ θὰ πρέπει (πέρα ἀπὸ τὸν περιορισμὸ $AX = I$) νὰ ἔχει τὴν ἐλάχιστη μήτρα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων.

Τὸ πρόβλημα συνεπῶς, ποὺ ἔχουμε νά ἐπιλύσουμε εἶναι:

$$\begin{aligned} &\min\ \sigma^2AA' \\ &\quad \text{s.t.} \\ &\quad AX = I \end{aligned}$$

$[\ \text{ἢ} \min\ (\sigma^2AA' \mid AX = I)\ ]$

Ἂν λάβουμε ὑπόψη ὅτι οὐσιαστικὰ θέλουμε νὰ ἐλαχιστοποιήσουμε τὴ διακύμανση τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος $\mathbf{b}$, ὑπὸ τοὺς τεθέντες περιορισμούς, τότε ἐξυπακούεται ὅτι θὰ πρέπει νὰ ἐλαχιστοποιήσουμε τὰ διαγώνια στοιχεῖα τῆς μήτρας σ^2AA' τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ οἱ διακυμάνσεις τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος $\mathbf{b}$ (τὰ μὴ διαγώνια στοιχεῖα τῆς σ^2AA' εἶναι οἱ συνδυακυμάνσεις τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbf{b}$).

Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ αὐτό, γενικὰ θὰ μπορούσαμε νὰ ποῦμε τὰ ἑξῆς: Δεδομένου ὅτι ἡ μήτρα A ἀποτελεῖται ἀπὸ n διανύσματα – σειρές, τὰ ὁποῖα συμβολίζονται μὲ $\mathbf{a}_i'$ ($i = 1, 2, ..., n$), τότε ἡ ὑπὸ συνθήκη ἐλαχιστοποίηση τοῦ γινομένου AA' ἐπιτυγχάνεται ἂν τὸ τετράγωνο τοῦ Εὐκλείδιου μέτρου κάθε διανύσματος $\mathbf{a}_i$ (ἤτοι $\|\mathbf{a}_i\|^2$) εἶναι ἐλάχιστο, λαμβανομένων φυσικὰ ὑπόψη τῶν τεθέντων περιορισμῶν. Σημειώνεται ὅτι τὰ $\|\mathbf{a}_i\|^2$, $i = 1, 2, ..., n$, εἶναι τὰ διαγώνια στοιχεῖα τοῦ γινομένου AA'.

Συνεπῶς ἡ (διανυσματική) παράσταση ποὺ θὰ πρέπει νὰ ἐλαχιστοποιηθεῖ εἶναι

$$\min \operatorname{diag}(\sigma^2 AA')$$
ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς
$$AX = I$$

Ὁ συμβολισμὸς diag (Z) ὑποδηλώνει ὅτι θεωροῦνται μόνο τὰ διαγώνια στοιχεῖα τῆς (τετραγωνικῆς) μήτρας Z.

Γιὰ τὴν ἐπίλυση τοῦ παραπάνω προβλήματος ἀκολουθεῖται ἡ ἑξῆς διαδικασία:

Σχηματίζουμε τὴ διανυσματικὴ συνάρτηση (vector – valued function), L (Lagrangean), ποὺ στὴν προκειμένη περίπτωση θὰ εἶναι

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\sigma^2 AA') + \operatorname{diag}[\,(I-AX)\Lambda\,] \tag{11}$$

ὅπου ἡ μήτρα Λ ὁρίζεται στὸ $E^n \times E^n$ καὶ τὰ στοιχεῖα της, λ_{ij} εἶναι οἱ πολλαπλασιαστὲς τοῦ Lagrange (θὰ ἀποδειχθεῖ στὴ συνέχεια ὅτι ἡ μήτρα Λ εἶναι συμμετρική).

Μὲ ἄλλους λόγους, θὰ μπορούσαμε νὰ ποῦμε ὅτι ἡ μήτρα Λ ἀποτελεῖται ἀπὸ n διανύσματα – στῆλες ποὺ παριστάνονται μὲ $\boldsymbol{\lambda}_i \in E^n$ (i = 1, 2, ..., n).

Ἡ παράσταση (11) γράφεται ἐπίσης

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}[\sigma^2 AA' + (I-AX)\Lambda\,]$$

Οἱ κανονικὲς ἐξισώσεις προκύπτουν ὡς ἑξῆς:

– i)

$$\frac{\partial l_1}{\partial \alpha_{1j}} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial l_n}{\partial \alpha_{nj}} = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}_{\alpha_i} l_i = 0$$

$i = 1, 2, \ldots, n$

$j = 1, 2, \ldots, m$

(Τὸ ∇_z K συμβολίζει τὴν κλίση (gradient) τῆς συναρτήσεως K ὡς πρὸς τὸ διάνυσμα **Z**).

(Ἀπὸ τὶς παραπάνω σχέσεις τὸ πρῶτο set τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων ἔχει τὴ μορφή: $2\sigma^2 A' = X\Lambda$)

— καὶ ii)

$$\frac{\partial l_1}{\partial \lambda_{i1}} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial l_n}{\partial \lambda_{in}} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_{\lambda_i} l_i = 0$$

$i = 1, 2, \ldots, n$

(Ἀπὸ τὶς σχέσεις αὐτὲς τὸ δεύτερο set τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων ἔχει τὴ μορφή: $AX = I$).

Ἔτσι τὸ σύνολο τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων εἶναι

$$2\sigma^2 A' = X\Lambda \tag{12}$$

$$AX = I \Rightarrow X'A' = I \tag{13}$$

(Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἡ πραγματικὴ μήτρα X ὁρίζεται στὸ $E^m \times E^n$).

Ἀπὸ τὴ σχέση (12) ἔχουμε

$$A' = 1/2\sigma^2 \, X\Lambda \tag{14}$$

Τὴν τιμὴ τῆς A΄ ἀντικαθιστοῦμε στὴ σχέση (13) καὶ ἔχουμε

$$1/2\sigma^2 \, X'X\lambda = I \Rightarrow X'X\Lambda = 2\sigma^2 I \Rightarrow \Lambda = 2\sigma^2 \, (X'X)^{-1} \tag{15}$$

Ἀποδεικνύεται ἔτσι ὅτι ἡ μήτρα Λ εἶναι συμμετρική.

Ἀντικαθιστώντας τὴ σχέση (15) στὴν (14) γιὰ Λ ἔχουμε

$$\tilde{\mathbf{b}} = A\mathbf{Y} \Rightarrow \tilde{\mathbf{b}} = (X'X)^{-1} \, X'\mathbf{Y} = \boldsymbol{\hat{b}}$$

Ἀποδεικνύεται ἔτσι, ἀφοῦ $\tilde{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\hat{b}}$, ὅτι τὸ διάνυσμα $\boldsymbol{\hat{b}}$ ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εἶναι ἄριστος, γραμμικὸς καὶ ἀμερόληπτος ἐκτιμητὴς τοῦ θεωρητικοῦ διανύσματος **b.**

Ἡ μήτρα διακυμάνσεων — συνδιακυμάνσεων τοῦ διανύσματος $\boldsymbol{\hat{b}}$, $\Sigma_{\hat{b}}$, ὑπολογίζεται ἀπὸ τὶς σχέσεις (10) καὶ (16), λαμβανομένου ὑπόψη ὅτι $\Sigma_{\hat{b}} = \Sigma_{\tilde{b}}$

$$\Sigma_{\hat{b}} = \sigma^2 AA' = \sigma^2 (X'X)^{-1} X'X(X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

Μὲ τὰ παραπάνω ἁπλοποιεῖται κατὰ πολὺ ἡ ἀπόδειξη ὅτι τὸ διάνυσμα $\hat{\mathbf{b}}$ εἶναι BLU ἐκτιμητὴς τοῦ **b.** Σημειώνεται καὶ πάλι ὅτι ἀντίθετα μὲ τὶς κλασσικὲς μεθόδους, ἡ ἀπόδειξη ποὺ παραθέσαμε ἀναφέρεται σὲ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $\hat{\mathbf{b}}$.

Στὸ παράρτημα δίδεται σχετικὸ παράδειγμα καὶ γιὰ τὴν πρακτικὴ θεμελίωση τῆς θεωρητικῆς ἀναλύσεως.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Θεωροῦμε τὸ ἁπλὸ ὑπόδειγμα $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ ($i = 1, 2, 3$) ποὺ ὑπὸ μορφὴ μητρῶν γράφεται

$$\mathbf{Y} = X\mathbf{b} + \mathbf{u}$$

ὅπου $X = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ 1 & X_3 \end{bmatrix}$

Ὁρίζουμε ἐπίσης τὶς μῆτρες

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1' \\ \boldsymbol{\alpha}_2' \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 & \boldsymbol{\lambda}_2 \end{bmatrix}$$

Θὰ εἶναι συνεπῶς

$$\sigma^2 AA' = \sigma^2 \begin{bmatrix} \alpha^2_{11} + \alpha^2_{12} + \alpha^2_{13} & \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} \\ \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} & \alpha^2_{21} + \alpha^2_{22} + \alpha^2_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1' \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1' \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_1' \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2' \boldsymbol{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{diag}(\sigma^2 AA') = \sigma^2 \begin{bmatrix} \alpha^2_{11} + \alpha^2_{12} + \alpha^2_{13} \\ \alpha^2_{21} + \alpha^2_{22} + \alpha^2_{23} \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1' \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2' \boldsymbol{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} & \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} & \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 \end{bmatrix}$$

$$(I-AX) = \begin{bmatrix} 1-\alpha_{11} -\alpha_{12} -\alpha_{13} & -\alpha_{11} X_1 -\alpha_{12} X_2 -\alpha_{13} X_3 \\ -\alpha_{21} -\alpha_{22} -\alpha_{23} & 1-\alpha_{21} X_1 -\alpha_{22} X_2 -\alpha_{23} X_3 \end{bmatrix}$$

$$(I-AX)\,\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} (1-\alpha_{11} -\alpha_{12} -\alpha_{13}) -\lambda_{21} (\alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3) & \lambda_{12} (1-\alpha_{11} -\alpha_{12} -\alpha_{13}) -\lambda_{22} (\alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3) \\ -\lambda_{11} (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}) +\lambda_{21} (1-\alpha_{21} X_1 -\alpha_{22} X_2 -\alpha_{23} X_3) & -\lambda_{12} (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}) +\lambda_{22} (1-\alpha_{21} X_1 -\alpha_{22} X_2 -\alpha_{23} X_3) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{diag}[\ (I-AX)\Lambda\ ] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} (1-\alpha_{11} -\alpha_{12} -\alpha_{13}) -\lambda_{21} (\alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3) \\ -\lambda_{12} (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}) +\lambda_{22} (1-\alpha_{21} X_1 -\alpha_{22} X_2 -\alpha_{23} X_3) \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\ (\sigma^2 AA') + \mathrm{diag}\ [\ (I-AX)\Lambda\ ]$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \alpha_{11} + \sigma^2 \alpha_{12} + \sigma^2 \alpha_{13} \\ \\ \sigma^2 \alpha_{21} + \sigma^2 \alpha_{22} + \sigma^2 \alpha_{23} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} (1-\alpha_{11} -\alpha_{12} -\alpha_{13}) -\lambda_{21} (\alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3) \\ -\lambda_{12} (\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}) +\lambda_{22} (1-\alpha_{21} X_1 -\alpha_{22} X_2 -\alpha_{23} X_3) \end{bmatrix}$$

Τὸ πρῶτο set τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων θὰ εἶναι

$$\frac{\partial l_1}{\partial \alpha_{11}} = 2\sigma^2\alpha_{11} - \lambda_{11} - \lambda_{21} X_1 = 0 \Rightarrow \quad 2\sigma^2\alpha_{11} = \lambda_{11} + \lambda_{21} X_1$$

$$\nabla_{\alpha_1} l_1 = 0 \Rightarrow \qquad \frac{\partial l_1}{\partial \alpha_{12}} = 2\sigma^2\alpha_{12} -\lambda_{11} -\lambda_{21} X_2 = 0 \Rightarrow \quad 2\sigma^2\alpha_{12} = \lambda_{11} + \lambda_{21} X_2$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial \alpha_{13}} = 2\sigma^2\alpha_{13} - \lambda_{11} - \lambda_{21} X_3 = 0 \Rightarrow \; 2\sigma^2\alpha_{13} = \lambda_{11} + \lambda_{21} X_3$$

C

$$\frac{\partial l_2}{\partial \alpha_{21}} = 2\sigma^2\alpha_{21} - \lambda_{21} - \lambda_{22} X_1 = 0 \Rightarrow \; 2\sigma^2\alpha_{21} = \lambda_{12} + \lambda_{22} X_1$$

$$\nabla_{\alpha_2} l_2 = 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial l_2}{\partial \alpha_{22}} = 2\sigma^2\alpha_{22} - \lambda_{21} - \lambda_{22} X_2 = 0 \Rightarrow \; 2\sigma^2\alpha_{22} = \lambda_{12} + \lambda_{22} X_2$$

$$\frac{\partial l_2}{\partial \sigma_{23}} = 2\sigma^2\alpha_{23} - \lambda_{21} - \lambda_{22} X_3 = 0 \Rightarrow \; 2\sigma^2\alpha_{23} = \lambda_{12} + \lambda_{22} X_3$$

Δεδομένου ὅτι

$$X\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ 1 & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ & \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} + \lambda_{21} X_1 & \lambda_{12} + \lambda_{22} X_1 \\ \lambda_{11} + \lambda_{21} X_2 & \lambda_{12} + \lambda_{22} X_2 \\ \lambda_{11} + \lambda_{21} X_3 & \lambda_{12} + \lambda_{22} X_3 \end{bmatrix}$$

Οἱ παραπάνω κανονικὲς ἐξισώσεις, ὑπὸ μορφὴ μητρῶν, γράφονται

$$2\sigma^2 A' = X\Lambda \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\sigma^2\alpha_{11} & 2\sigma^2\alpha_{21} \\ 2\sigma^2\alpha_{12} & 2\sigma^2\alpha_{22} \\ 2\sigma^2\alpha_{13} & 2\sigma^2\alpha_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} + \lambda_{21} X_1 & \lambda_{12} + \lambda_{22} X_1 \\ \lambda_{11} + \lambda_{21} X_2 & \lambda_{12} + \lambda_{22} X_2 \\ \lambda_{11} + \lambda_{21} X_3 & \lambda_{12} + \lambda_{22} X_3 \end{bmatrix}$$

Τὸ δεύτερο set τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων θὰ εἶναι

$$\frac{\partial l_1}{\partial \lambda_{11}} = 1 - \alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{13} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = 1$$

$$\nabla_{\lambda_1} l_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial \lambda_{21}} = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 = 0$$

D

$$\frac{\partial l_2}{\partial \lambda_{12}} = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = 0$$

$$\nabla_{\lambda_2} l_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial l_2}{\partial \lambda_{22}} = 1 - \alpha_{21} X_1 - \alpha_{22} X_2 - \alpha_{23} X_3 = 0 \Rightarrow \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 = 1$$

Οἱ παραπάνω σχέσεις, ὑπὸ μορφὴ μητρῶν, γράφονται

$AX = I$

ἤτοι
$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ 1 & X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} & \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} & \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος C βρίσκουμε

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} &= 1/2\sigma^2\ (\lambda_{11} + \lambda_{21}X_1) & a_{21} &= 1/2\sigma^2\ (\lambda_{21} + \lambda_{22}X_1) \\ \alpha_{12} &= 1/2\sigma^2\ (\lambda_{11} + \lambda_{21}X_2) & \alpha_{22} &= 1/2\sigma^2\ (\lambda_{21} + \lambda_{22}X_2) \\ \alpha_{13} &= 1/2\sigma^2\ (\lambda_{11} + \lambda_{21}X_3) & \alpha_{23} &= 1/2\sigma^2\ (\lambda_{21} + \lambda_{22}X_3) \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{H}$$

Ἀντικαθιστώντας τὶς τιμὲς αὐτὲς γιὰ τὰ α_{ij} στὶς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος D θὰ ἔχουμε

$$1/2\sigma^2\ (\lambda_{11} + \lambda_{21}X_1 + \lambda_{11} + \lambda_{21}X_2 + \lambda_{11} + \lambda_{21}X_3) = 1$$
$$1/2\sigma^2\ (\lambda_{11}X_1 + \lambda_{21}X^2_1 + \lambda_{11}X_2 + \lambda_{21}X^2_2 + \lambda_{11}X_3 + \lambda_{21}X^2_3) = 0$$
$$1/2\sigma^2\ (\lambda_{12} + \lambda_{22}X_1 + \lambda_{12} + \lambda_{22}X_2 + \lambda_{21} + \lambda_{22}X_3) = 0$$
$$1/2\sigma^2\ (\lambda_{12}X_1 + \lambda_{22}X^2_1 + \lambda_{12}X_2 + \lambda_{22}X^2_2 + \lambda_{12}X_3 + \lambda_{22}X^2_3) = 1$$

Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε

$$\left.\begin{aligned} &1/2\sigma^2\ [\ 3\lambda_{11} + \lambda_{21}\ (X_1 + X_2 + X_3)\ ] = 1 \\ &1/2\sigma^2\ [\ \lambda_{11}\ (X_1 + X_2 + X_3) + \lambda_{21}\ (X^2_1 + X^2_2 + X^2_3)\ ] = 0 \\ &1/2\sigma^2\ [\ 3\lambda_{12} + \lambda_{22}\ (X_1 + X_2 + X_3)\ ] = 0 \\ &1/2\sigma^2\ [\ \lambda_{12}\ (X_1 + X_2 + X_3) + \lambda_{22}\ (X^2_1 + X^2_2 + X^2_3)\ ] = 1 \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{F}$$

Ἀπὸ τὶς δύο πρῶτες ἐξισώσεις τοῦ παραπάνω συστήματος F ἔχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{3\lambda_{11}}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\lambda_{21}\ \Sigma X_i = 1 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\ &\frac{\lambda_{11}}{2\sigma^2}\ \Sigma X_i + \frac{1}{2\sigma^2}\lambda_{21}\ \Sigma X_i^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\frac{-3\lambda_{11}}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\lambda_{21}\ \Sigma X_i = -1 \\ &\frac{3\lambda_{11}}{2\sigma^2} + \frac{3\lambda_{21}}{2\sigma^2}\ \frac{\Sigma X_i^2}{\Sigma X_i} = 0 \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατὰ μέλη βρίσκουμε

$$\frac{3\lambda_{21}}{2\sigma^2}\frac{\Sigma X^2_i}{\Sigma X_i} - \frac{\lambda_{21}\,\Sigma X_i}{2\sigma^2} = -1 \Rightarrow \frac{\lambda_{21}}{2\sigma^2}\left(\frac{3\Sigma X^2_i}{\Sigma X_i} - \Sigma X_i\right) = -1$$

$$\text{καὶ}\quad \lambda_{21} = \frac{-2\sigma^2}{\dfrac{3\Sigma X^2_i - (\Sigma X_i)^2}{\Sigma X_i}} \Rightarrow \lambda_{21} = \frac{-2\sigma^2\,\Sigma X_i}{m\Sigma X^2_i - (\Sigma X_i)^2}$$

ὅπου m, ὅπως προαναφέρθηκε, εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων (στὴν προκειμένη περίπτωση $m = 3$).

Μὲ ἀντικατάσταση βρίσκουμε

$$\frac{3\lambda_{21}}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\cdot\frac{3.2\sigma^2\ \Sigma X_i}{3\Sigma X_i - (\Sigma X_i)^2}\cdot\frac{\Sigma X^2_i}{\Sigma X_i} = 0$$

$$\text{καὶ}\quad \lambda_{11} = \frac{2\sigma^2\,\Sigma X^2_i}{m\Sigma X_i - (\Sigma X_i)^2}$$

Ἀπὸ τὶς δυὸ τελευταῖες ἐξισώσεις τοῦ συστήματος F, μὲ ὅμοιο τρόπο, βρίσκουμε

$$\frac{3\lambda_{12}}{2\sigma^2} + \frac{\lambda_{22}}{2\sigma^2}\Sigma X_i = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\lambda_{12}}{2\sigma^2}\Sigma X_i + \frac{\lambda_{22}}{2\sigma^2}\Sigma X^2_i = 1$$

$$-\frac{3\lambda_{12}}{2\sigma^2} - \frac{\lambda_{22}}{2\sigma^2}\Sigma X_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3\lambda_{12}}{2\sigma^2} + \frac{3\lambda_{22}}{2\sigma^2}\frac{\Sigma X^2_i}{\Sigma X_i} = \frac{3}{\Sigma X_i}$$

Προσθέτοντας κατὰ μέλη ἔχουμε

$$\frac{3\lambda_{22}}{2\sigma^2}\frac{\Sigma X^2_i}{\Sigma X_i} - \frac{\lambda_{22}}{2\sigma^2}\Sigma X_i = \frac{3}{\Sigma X_i} \Rightarrow \frac{\lambda_{22}}{2\sigma^2}\left(\frac{3\Sigma X^2_i}{\Sigma X_i} - \Sigma X_i\right) = \frac{3}{\Sigma X_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_{22}}{2\sigma^2}\left[\frac{3\Sigma X^2_i - (\Sigma X_i)^2}{\Sigma X_i}\right] = \frac{3}{\Sigma X_i}\ \text{καὶ}\ \lambda_{22} = \frac{2\sigma^2\,m}{m\Sigma X^2_i - (\Sigma X_i)^2}$$

Μὲ ἀντικατάσταση βρίσκουμε

$$-\frac{3\lambda_{12}}{2\sigma^2}-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{2\sigma^2\cdot 3}{3\Sigma X_i^2-(\Sigma X_i)^2}\Sigma X_i = 0$$

$$\text{καὶ } \lambda_{12} = \frac{-2\sigma^2\,\Sigma X_i}{m\Sigma X_i^2-(\Sigma X_i)^2} = \lambda_{21}$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι τὰ λ_{ij}, εἶναι τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας $2\sigma^2\,(X'X)^{-1}$ ἡ ὁποία στὸ παρατιθέμενο παράδειγμα εἶναι

$$2\sigma^2\,(X'X)^{-1} = \frac{2\sigma^2}{m\Sigma X_i^2-(\Sigma X_i)^2}\begin{bmatrix}\Sigma X_i^2 & -\Sigma X_i\\ -\Sigma X_i & m\end{bmatrix} \qquad (m = 3)$$

Ἀντικαθιστώντας τὶς τιμὲς τῶν λ_{ij} στὶς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος Η βρίσκουμε τὶς τιμὲς τῶν α_{ij} ποὺ ἐλαχιστοποιοῦν τὴ διανυσματικὴ συνάρτηση L. Ἐπαληθεύεται εὔκολα — μὲ ἁπλὲς ἀριθμητικὲς πράξεις — ὅτι οἱ τιμὲς τῶν α_{ij} ποὺ ἐλαχιστοποιοῦν τὴν L εἶναι τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας $(X'X)^{-1}\ X'$.

Ἔτσι μὲ τὸ ἁπλὸ αὐτὸ παράδειγμα θεμελιώθηκε καὶ πρακτικὰ ἡ θεωρητικὴ ἀνάλυση ποὺ ἔγινε στὸ κυρίως κείμενο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Chow, G.C. (1975). Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, John Wiley, New York.

Dhrymes, P.J. (1970). Econometrics: Statistical Foundations and Applications. Happer and Row Publishers, New York.

Householder, A.S. (1953). Principle of Nùmerical Analysis, McGraw–Hill, New York.

Johnston, J. (1972). Econometric Methods (2nd Edition). McGraw–Hill, New York.

Kmenta, J. (1971). Elements of Econometrics. The McMillan Company, New York.

Theil, H. (1971). Principles of Econometrics. John Wiley, New York.

Wonnacott, T.H. and Wonnacott, R.J. (1970). Econometrics. John Wiley, New York.