ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΟΣ

Ὑπὸ

ΙΩΑΝΝΟΥ ΠΑΛΑΙΟΛΟΓΟΥ (M.A.), Ἐπιστ. Βοηθοῦ Α.Β.Σ.Π.

Σκοπὸς τοῦ παρόντος ἄρθρου εἶναι ἡ διατύπωσις βασικῶν προτάσεων, ἀναφερομένων εἰς τὴν ἀνάλυσιν διαστάσεων ἢ διαστασιακὴν ἀνάλυσιν (Dimensional Analysis) καὶ εἰς τὴν συνέχειαν ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀναλύσεως αὐτῆς εἰς τὴν θεωρίαν τῆς χρησιμότητος. Ὁ ἐνδιαφερόμενος ἀναγνώστης δύναται νὰ προσφύγῃ εἰς τὴν ἐργασίαν τοῦ Καθηγητοῦ Σ. Σαραντίδη [1], ποὺ πρῶτος εἰσήγαγε τὴν ἀνάλυσιν αὐτὴν εἰς τὴν Ἑλληνικὴν βιβλιογραφίαν, ὡς ἐπίσης καὶ εἰς τὰ ἔργα τῶν F. J. de Jong καὶ B. S. Massey [2] ἀπὸ πλευρᾶς ξενογλώσσου βιβλιογραφίας, προκειμένου νὰ τύχῃ λεπτομεροῦς ἐνημερώσεως σχετικῶς μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς διαστάσεως τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν, τὴν χρησιμότητα τῆς διαστασιακῆς ἀναλύσεως εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν (ἔλεγχος τῆς ὀρθότητος ἢ μή μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς διαστασιακῆς ὁμοιογενείας καὶ καθορισμὸς τῆς μορφῆς τῆς σχέσεως μεταξὺ οἰκονομικῶν ποσοτήτων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος, εἰς τὴν διαστασιακὴν ἀνάλυσιν, τοῦ Buckingham ἢ θεωρήματος τῶν Π), κλπ.

1. Βασικαὶ Προτάσεις τῆς Διαστασιακῆς Ἀναλύσεως.

Π ρ ό τ α σ ι ς 1.

Ἐὰν $a \in [R]$ καὶ $b \in [R]$, τότε $a \pm b \in [R]$.

---

(1) Σ. Α. Σαραντίδης : Διαστασιακὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις». Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «ΣΠΟΥΔΑΙ» Πειραιεύς, 1974.

(2) Fritis J„ de Jong "Dimensional Analys for Economists" Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1967. B. S Massey : "Units, Dimensional Analysis and Physical Similarity" London : Van Nostrand Reinhold, 1971.

ὅπου τὸ σύμβολον $\in$ σημαίνει « ἀνήκει εἰς.......» καὶ τὸ σύμβολον [R] συμβολίζει τὴν βασικὴν (primary)[3] διάστασιν τῶν πραγματικῶν ἀξιῶν (stocks).

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις δηλώνει ὅτι μόνον μεταβληταὶ ἢ σταθεραὶ ἀνήκουσαι εἰς τὴν ἰδίαν διάστασιν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀθροισθοῦν ἢ νὰ ἀφαιρεθοῦν. Π.χ. δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ἢ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἡμέρας καὶ ἑβδομάδας ὡς ἀνήκουσαι εἰς τὴν αὐτὴν βασικὴν διάστασιν τοῦ χρόνου [T], ἐνῶ δὲν δυνάμεθα νὰ ἀθροίσωμεν (ἢ νὰ ἀφαιρέσωμεν) ἡμέρας καὶ οἰκίας [R].

Πρότασις 2.

Ἐὰν $a \in [R]$ καὶ $b \in [M]$ τότε $ab \in [RM]$ καὶ $a/b \in [RM^{-1}]$.

Ἡ πρότασις αὐτὴ δηλώνει ὅτι ἡ ποσότης ab ἀνήκει εἰς τὴν παράγωγον (ἢ δευτερογενῆ) διάστασιν [RM], ἐνῶ ἡ ποσότης a/b εἰς τὴν παράγωγον διάστασιν $[RM^{-1}]$, ὅπου $M^{-1} = 1/M$.

Ἔστω ὅτι ἡ μηνιαίως ζητουμένη ποσότης ἑνὸς ἀγαθοῦ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον q^D. Ἐπειδὴ $q \in [R]$ καὶ $t \in [T]$, θὰ εἶναι $q^D \in [RT^{-1}]$. Δηλαδὴ ἡ ζητουμένη ποσότης μηνιαίως q^D ἀνήκει εἰς τὴν δευτερογενῆ ἢ παράγωγον (derived) διάστασιν $[RT^{-1}]$.

Περαιτέρω, εἶναι γνωστόν, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ αὐτοῦ ὁρίζεται ὡς τὸ πηλῖκον τῆς διαιρέσεως τῆς ζητουμένης ποσότητος ἐκπεφρασμένης εἰς νομισματικὰς ἀξίας (m) διὰ τῆς ποσότητος q, ὥστε $p = \frac{m}{q}$. Ἐπειδὴ ὅμως $m \in [M]$, θὰ εἶναι $p \in [MR^{-1}]$ (δηλαδὴ παράγωγος διάστασις). Ἐπὶ πλέον ἡ ὁλικὴ πρόσοδος $R = pq^D$, ἡ ὁποία ἀνήκει εἰς τὴν διάστασιν $R = pq^D \in [MR^{-1}]\ [RT^{-1}] = [MT^{-1}]$ (δηλαδὴ παράγωγος διάστασις). Ἐὰν τώρα $a \in [M]$ καὶ $b \in [M]$ τότε $ab \in [MM] = [M^2]$. Ὁμοίως $a/b \in [MM^{-1}] = [1]$ (δηλαδὴ ἄνευ διαστάσεως). Γενικῶς μὲ τὸ σύμβολον [1] παρίστανται αἱ ἀδιάστατοι ποσότητες. Ἐπίσης αἱ «ποσότητες»

---

(3) Ἡ Βασικὴ ἢ θεμελιώδης διάστασις δὲν ἐκφράζεται εἰς ὅρους οἱασδήποτε ἄλλης διαστάσεως π. χ. ὁ χρόνος, ἡ ἀπόστασις, ἡ μᾶζα, τὸ μῆκος, εἶναι πρωτογενεῖς μετρήσεις καὶ ἑπομένως βασικαὶ ἢ θεμελιώδεις διαστάσεις. Ἀντιθέτως ἡ παράγωγος ἢ δευτερογενὴς (secondary) διάστασις ἐκφράζεται εἰς ὅρους βασικῆς διαστάσεως π.χ. ἡ ταχύτης ἢ ὁ ὄγκος εἶναι δευτερογενεῖς διαστάσεις ἐπειδὴ προκύπτουν ἡ μὲν ταχύτης ὡς τὸ πηλῖκον τῆς διαιρέσεως τῆς ἀποστάσεως διὰ τοῦ χρόνου, ὁ δὲ ὄγκος ὡς τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ὑψώσεως εἰς τὴν τρίτην δύναμιν τῆς βασικῆς διαστάσεως «μῆκος», ὥστε νὰ εἶναι : ὄγκος ἀνήκει εἰς τὴν παράγωγον διάστασιν «Μῆκος^3» ἢ $[L^3]$. Αἱ κυριώτεραι βασικαὶ διαστάσεις εἶναι : ὁ χρόνος [T], αἱ χρηματικαὶ ἀξίαι [M], αἱ πραγματικαὶ ἀξίαι [R], καὶ ἡ διάστασις τῆς ἱκανοποιήσεως [S].

ὅλων τῶν ἐλαστικοτήτων εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν εἶναι ἀδιάστατοι «ποσότητες».

Π.χ. ἡ ἐλαστικότης ζητήσεως ἑνὸς ἀγαθοῦ ὡς πρὸς τὴν τιμήν του ὁρίζεται

ἀπὸ τὴν σχέσιν : $e_D = \frac{dq^D}{dp} \cdot \frac{p}{q^D}$. Εἶναι ὅμως : $q^D \in [RT^{-1}]$ καὶ $p \in [MR^{-1}]$, ὥστε : $p/q^D \in [MTR^{-2}]$.

Ὁπότε : $\frac{dq^D}{dp} \in \frac{[RT^{-1}]}{[MR^{-1}]} = [R^2M^{-1}T^{-1}]$ καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ εἶναι:

$$e_D = \frac{dq^D}{dp} \cdot \frac{p}{q^D} \in [R^2M^{-1}T^{-1}]\,[MTR^{-2}] = [1].$$

Ἐκτὸς τῶν ἐλαστικοτήτων, ὅλοι οἱ δεῖκται τιμῶν εἶναι «ποσότητες» ἄνευ διαστάσεων. Π. χ. ὁ δείκτης τιμῶν τοῦ Laspeyre $(P_L). = \frac{\Sigma p_t q_0}{\Sigma p_0 q_0}$, ὅπου οἱ δεῖκται t καὶ o ἀναφέρονται εἰς τὴν περίοδον t καὶ εἰς τὴν περίοδον βάσεως ἀντιστοίχως.

Ἐπειδὴ $P_t \in [MR^{-1}]$ καὶ $q_0 \in [RT^{-1}]$ (ὑποθέτοντες ὅτι ὅλα τὰ ἀγαθὰ ὑπάγονται εἰς τὴν κοινὴν διάστασιν [R]), θὰ εἶναι : $P_L = \frac{\Sigma p_t q_0}{\Sigma p_0 q_0} \in \frac{[MT^{-1}]}{[MT^{-1}]} = [1]$.

Πρότασις 3.

Ἐὰν $y \in [R]$ καὶ $y = g(x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n)$, τότε : $g(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \in [R]$

Ἡ πρότασις αὐτὴ δηλώνει ὅτι διὰ νὰ εἶναι ὀρθὴ μία ἐξίσωσις θὰ πρέπει τὰ ἑκατέρωθεν μέρη τῆς ἰσότητος νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν διάστασιν, ἤτοι ἡ ἐξίσωσις νὰ εἶναι διαστασιακῶς ὁμοιογενὴς (dimensionally homogeneous)[1]. Βεβαίως τὸ κριτήριον τῆς διαστασιακῆς ὁμοιογενείας ἀποτελεῖ ἀναγκαίαν ἀλλὰ ὄχι ἱκανὴν συνθήκην διὰ τὸν ἔλεγχον τῆς ὀρθότητος τῶν ἐξισώσεων.

---

(1). Σ. Α. Σαραντίδης op. cit. σελ. 15 - 7.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις:

$p = a+bq^s$, $b<0$, (ἀγοραία ἐξίσωσις τοῦ μονοπωλητοῦ ὁ ὁποῖος καθορίζει τὴν πρὸς διάθεσιν ποσότητα).

Ἤδη γνωρίζομεν ὅτι: $p\in[MR^{-1}]$ καὶ $q^s \in[RT^{-1}]$. Ἐπειδὴ $b = dp/dq^s$ θὰ εἶναι: $b = [MR^{-1}]/[RT^{-1}] = [MTR^{-2}]$. Τὸ ἐρώτημα τὸ ὁποῖο ἀνακύπτει εἶναι τὸ ἑξῆς: Εἶναι ὀρθὸν νὰ θεωροῦμεν ὅτι ἡ σταθερὰ a τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἀνήκει εἰς τὴν διάστασιν $[MR^{-1}]$, δοθέντος ὅτι $p\in[MR^{-1}]$ καὶ $bq^s\in[MR^{-1}]$; Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα θὰ ἐξαρτηθῇ ἐὰν ἡ πρὸς θεώρησιν ἐξίσωσις ἀνήκει εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν θεμελιωδῶν ἐξισώσεων.

Ὡς γνωστόν, ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις δὲν ἐξειδικεύεται ἀπὸ οἰκονομικὰ φαινόμενα, ἀλλὰ μᾶλλον ἀπὸ ψυχολογικά, τεχνολογικὰ ἢ φυσικὰ φαινόμενα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ὑλικὸν πρὸς ἐπεξεργασίαν καὶ οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν. Εἶναι ἐπίσης γνωστόν, ὅτι εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν διακρίνομε τέσσαρας μορφὰς ἐξισώσεων[1]: (α) ἐξισώσεις συμπεριφορᾶς (behavioral equations), (β) τεχνολογικὰς ἐξισώσεις ἢ δέσμοὺς (technological equations), (γ) θεσμολογικὰς ἐξισώσεις (institutional equations), καὶ (δ) ταυτολογικὰς ἐξισώσεις ἢ ἐξισώσεις ὁρισμοῦ (identities ἢ definitional equations).

Αἱ θεμελιώδεις ἐξισώσεις περιλαμβάνουν τὰς τελευταίας τρεῖς μορφὰς ἐξισώσεων. Αἱ σταθεραί, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν εἰς τὰς θεμελιώδεις ἐξισώσεις καλοῦνται διαστασιακαί σταθεραί, ἐφ' ὅσον δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ἀφηρημένων ἀριθμῶν. Ἀφ' ἑτέρου, αἱ σταθεραί, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι θεμελιώδεις, δὲν δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς σταθεραί ἀπὸ πλευρᾶς διαστασιακῆς ἀναλύσεως, ἐκτὸς καὶ ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθοῦν εἰς ὅρους σταθερῶν αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται εἰς τὰς θεμελιώδεις ἐξισώσεις. Εἰς τὴν συγκεκριμένην ἐξίσωσιν τοῦ μονοπωλητοῦ αὐτὴ εἶναι μία ἐξίσωσις συμπεριφορᾶς. Ἐφ' ὅσον ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ στηρίζεται εἰς τὸν νόμον τῆς φθινούσης ὁριακῆς χρησιμότητος (diminishing marginal utility law), ὁ ὁποῖος εἰς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν θεωρεῖται ὡς ψυχολογικὸς νόμος, εἶναι δυνατὸν ἡ ἐξίσωσις $p = a + bq^s$ νὰ θεωρηθῇ ὡς θεμελιώδης ἐξίσωσις, καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ παράμετρος a νὰ θεωρηθῇ ὡς διαστασιακὴσταθερὰ μὲ διάστασιν $[MT^{-1}]$. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν αἱ σταθεραὶ πρέπει νὰ θεωροῦνται ὡς καθαροὶ ἀριθμοὶ (ἀδιάστατοι «ποσότητες»)

Ἕνα δεύτερο παράδειγμα δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῶν ἀνταλλαγῶν τοῦ Fisher: $MV = PT$, ὅπου M = ποσότης χρήματος, V = ταχύτης κυ-

(1) Ἴδε καὶ Σ. Α. Σαραντίδης, «Μαθήματα Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως» Πειραιεὺς 1972 σελ. 83 - 5.

κλοφορίας τοῦ χρήματος, P = ἐπίπεδον τῶν τιμῶν καὶ T = ὄγκος συναλλαγῶν αἱ ὁποῖαι πραγματοποιοῦνται ἐντὸς τῆς ἐξεταζομένης περιόδου.

Ὁ Fisher, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸν Keynes, ὑποθέτει ὅτι ὅλα τὰ ἀγαθὰ καὶ αἱ ὑπηρεσίαι τὰ ὁποῖα συναλλάσσονται εἰς τὴν ἐξεταζομένην χρονικὴν περίοδον ἀνήκουν εἰς τὴν κοινὴν διάστασιν [R]. Δοθέντος ὅτι ἡ «ποσότης» T εἶναι μεταβλητὴ ροῆς (flow) προκύπτει ὅτι ὁ ὄγκος τῶν συναλλαγῶν (T) ἀνήκει εἰς τὴν διάστασιν $[RT^{-1}]$. Ἐπὶ πλέον ἡ μεταβλητὴ $p \in [MR^{-1}]$, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἔρχεται εἰς ἀντίθεσιν πρὸς τὸν δείκτην τιμῶν τοῦ Laspeyre, ἀπὸ πλευρᾶς διαστατικότητος. Τέλος, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $V = \frac{6}{1\ \text{ἔτος}} = n \frac{1}{t_0} \in [T^{-1}]$, ὅπου n=6 (καθαρὸς ἀριθμός), ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ βασικὸν μέτρον (standard) t_0 μὲ τὸ ὁποῖον μετρεῖται ὁ χρόνος. Ἀλλαγὴ τῶν μονάδων μετρήσεως ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὸν ἐπηρεασμὸν τοῦ καθαροῦ ἀριθμοῦ n, χωρὶς ὅμως ἡ ἀλλαγὴ αὐτὴ νὰ ἐπηρεάζῃ τὴν διάστασιν. Ἑπομένως ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προτάσεως 2 θὰ εἶναι :

$$[M]\,[T^{-1}] = [MR^{-1}]\,[RT^{-1}] \ \text{ἢ}\ [MT^{-1}] = [MT^{-1}].$$

Ὥστε ἡ Φισεριανὴ ἐξίσωσις τῶν ἀνταλλαγῶν καὶ εἰδικώτερον ἡ ἐξίσωσις τῶν συναλλαγῶν τοῦ Fisher (transactions version) εἶναι διαστασιακῶς ὁμοιογενὴς δι' οἱονδήποτε σύνολον βασικῶν διαστάσεων τὸ ὁποῖον εἶναι συνεπὲς μὲ τὴν γενομένην ὑπ' αὐτοῦ ὑπόθεσιν ὅσον ἀφορᾷ τὸ σύνολον τῶν συναλλασσομένων ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν.

2. Ἐφαρμογαὶ τῆς Διαστασιακῆς Ἀναλύσεως εἰς τὴν Θεωρίαν τῆς Χρησιμότητος.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι αἱ προτιμήσεις τοῦ καταναλωτοῦ μεταξὺ τῶν ὑπαρχόντων ἀγαθῶν παρίστανται ἀπὸ ἕναν δείκτην, ὁ ὁποῖος δεικνύει τὸν βαθμὸν τῆς ἱκανοποιήσεώς του (statisfaction) ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν κατανάλωσιν ἑνὸς συγκεκριμένου ἀριθμοῦ ἀγαθῶν. Αὐτὸς ὁ δείκτης καλεῖται συνάρτησις χρησιμότητος (utility function). Μὲ ἄλλα λόγια, ἡ συνάρτησις χρησιμότητος (ὠφελιμότητος) συνδέει ἀφ' ἑνὸς τὰς ποσότητας τῶν καταναλισκομένων ἀγαθῶν ἑνὸς συγκεκριμένου συνδυασμοῦ καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸν βαθμὸ τῆς χρησιμότητος ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ αὐτὸν τὸν συνδυασμὸν ἀγαθῶν. Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὶς συνθῆκες ἀριστοποιήσεως (ἰσορροπίας) τοῦ καταναλωτοῦ προκύπτει ἡ συνάρτησις ζητήσεως τοῦ καταναλωτοῦ δι' ἕκαστον ἀγαθὸν ὡς συνάρτησις τῶν τιμῶν τῶν ἀγαθῶν καὶ τοῦ εἰσοδήματος.

Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ προϊόντος καὶ τῶν συντελεστῶν εἶναι δεδομέναι, καὶ ὅτι τὸ εἰσόδημα τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι ἐπίσης δεδομένον καὶ σταθερὸν καὶ ὅτι δαπανᾶται ἐξ ὁλοκλήρου διὰ τὴν ἀπόκτησιν τοῦ συγκεκριμένου συνδυασμοῦ ποσοτήτων ἀγαθῶν.

Μαθηματικῶς τὸ πρόβλημα τοῦ καταναλωτοῦ περιορίζεται εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ὑπὸ τὸν περιορισμόν :

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n,$$

ὅπου U = συνολικὴ χρησιμότης, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τὰ καταναλισκόμενα ἀγαθά, y = τὸ δεδομένον εἰσόδημα τοῦ καταναλωτοῦ, καὶ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ αἱ δεδομέναι τιμαὶ τῶν ἀγαθῶν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ἀντιστοίχως. Διὰ λόγους ἁπλουστεύσεως θεωροῦμεν ὅτι ὁ καταναλωτὴς καταναλίσκει δύο μόνον ἀγαθά, x_1 καὶ x_2, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι :

$$\text{Μεγιστοποίηση : } U = U(x_1, x_2) \tag{1}$$

$$\text{Περιορισμός : } y = p_1x_1 + p_2x_2. \text{ (παράπλευρος συνθήκη)} \tag{2}$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς γνωστῆς μεθόδου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τοῦ Lagrange προκύπτει ὅτι ὁ καταναλωτὴς εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν ὅταν ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη[1] :

$$\frac{U_1}{P_1} = \frac{U_2}{P_2} = \bar{\lambda} \tag{3}$$

ὅπου

$$U_1 = \partial U / \partial x_1 \text{ καὶ } U_2 = \partial U / \partial x_2$$

εἶναι αἱ ὁριακαὶ χρησιμότητες διὰ τὰ ἀγαθὰ x^1 καὶ x^2 ἀντιστοίχως, τὸ δὲ $\bar{\lambda}$ (πολ/στὴς τοῦ Lagrange) δηλώνει τὸν ρυθμὸν μεταβολῆς τῆς ἱκανοποιήσεως τοῦ καταναλωτοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὡρισμένον εἰσόδημά του καὶ εἶναι γνωστὸς ὡς «ὁριακὴ χρησιμότης τοῦ εἰσοδήματος» (marginal utility of income). Ἡ σχέσις (3), ἡ ὁποία εἶναι γνωστὴ ὡς ὁ «Δεύτερος Νόμος τοῦ Gossen» ἢ «νόμος τῆς ἰσοοριακῆς χρησιμότητος» (law of equi-marginal utility), δηλώνει ὅτι ὁ λόγος τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος ἑνὸς ἀγαθοῦ πρὸς τὴν τιμήν του εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλα τὰ

---

(1) J. M. Henderson, καὶ R. E. Quandt : «Microeconomic Theory—A Mathematical Approach» 2nd ed., McGraw-Hill Co., 1971, σελ. 14 - 19.

ἀγαθὰ τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ καταναλωτοῦ. Ὑποθέτοντες ὅτι ὑπάρχουν δύο βασικαὶ διαστάσεις $[R_1]$ καὶ $[R_2]$ διὰ τὰ ἀγαθὰ x_1 καὶ x_2 ἀν- ἀντιστοίχως προκύπτει ὅτι :

$x_1 \in [R_1T^{-1}]$, $x_2 \in [R_2T^{-1}]$ καὶ $U \in [ST^{-1}]$ («ποσότητες» ροῆς).

Τὸ ἐρώτημα τὸ ὁποῖον ἀνακύπτει εἶναι εἰς ποίαν διάστασιν ἀνήκουν αἱ ὁριακαὶ χρησιμότητες U_1 καὶ U_2; Στηριζόμενοι εἰς τὰς προτάσεις 1 καὶ 2 ἔχομεν ὅτι :

$$U_1 = \frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} \in \frac{[ST^{-1}]}{[R_1T^{-1}]} = [SR_1^{-1}]$$

καὶ

$$U_2 = \frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} \in \frac{[ST^{-1}]}{[R_2T^{-1}]} = [SR_2^{-1}]$$

δοθέντος ὅτι ἡ «ποσότης» U ἀνήκει εἰς τὴν παράγωγον διάστασιν ροῆς $[ST^{-1}]$.

Ὅσον ἀφορᾶ τὸν ὁριακὸν ρυθμὸν ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν δύο ἀγαθῶν x_1 καὶ x_2 ἰσχύει :

$$MRS = \frac{U_1}{U_2} \in \frac{[SR_1^{-1}]}{[SR_2^{-1}]} = [R_1^{-1}R_2]$$

καὶ ἑπομένως ἡ «ποσότης» MRS εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν βασικὴν διάστασιν τῆς ἱκανοποιήσεως [S]. Δηλαδὴ ἐνῶ ἡ ὁριακὴ χρησιμότης (ὠφελιμότης) ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διάστασιν [S], ἡ ὁποία ἀποτελεῖ καὶ τὸ βασικὸν μέτρον (standard) διὰ τὴν συνολικὴν χρησιμότητα [U], ὁ ὁριακὸς ρυθμὸς ὑποκαταστάσεως (marginal rate of substitution), ὡς ἔννοια οἰκονομική, δὲν χάνει τὴν σημασίαν της ἀκόμη καὶ ἐὰν ἡ ὠφελιμότης εἶναι «ποσότης» μὴ δυναμένη νὰ μετρηθῇ.

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (3) καὶ $MRS = \frac{U_1}{U_2}$ προκύπτει ὅτι : $MRS = \frac{p_1}{p_2}$. Ἐπειδὴ ὅμως $p_1 \in [MR_1^{-1}]$ καὶ $p_2 \in [MR_2^{-1}]$, προκύπτει ὅτι ἡ σχέσις : $MRS = \frac{U_1}{U_2} = \frac{P_1}{P_2}$ (4)

εἶναι διαστασιακῶς ὁμοιογενής : $\frac{[SR_1^{-1}]}{[SR_2^{-1}]} = \frac{[MR_1^{-1}]}{[MR_2^{-1}]}$ ἢ $[R_1^{-1} R_2] = [R_1^{-1} R_2]$,

δηλ. ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν βασικὴν διάστασιν [S]. Δεχόμενοι, ὅπως ὁ I. Fisher, ὅτι ὅλα τὰ ἀγαθὰ καὶ αἱ ὑπηρεσίαι ἀνήκουν εἰς τὴν κοινὴν διάστασιν τῶν πραγματικῶν ἀξιῶν (stocks) [R], καταλήγομεν εἰς τὸ ὅτι ἡ σχέσις (4) εἶναι ὁμοιογενὴς καὶ ἀδιάστατος. Ἤτοι ἡ MRS εἶναι «ποσότης» ἀδιάστατος.

Ὅπως ἐλέχθη ἀνωτέρω ἀπὸ τὰς συνθήκας ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ προκύπτουν αἱ συναρτήσεις ζητήσεως διὰ τὰ ἐπὶ μέρους ἀγαθά. Πράγματι, λύοντας τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων :

$$\left\{\begin{array}{l} U_1=\bar{\lambda}p_1 \\ U_2=\bar{\lambda}p_2 \end{array}\right. \quad \text{ὡς πρὸς τὰ } x_1 \text{ καὶ } x_2 \text{ λαμβάνομεν ὅτι :}$$

$$x_1=f(p_1,\ p_2,\ y) \tag{5}$$

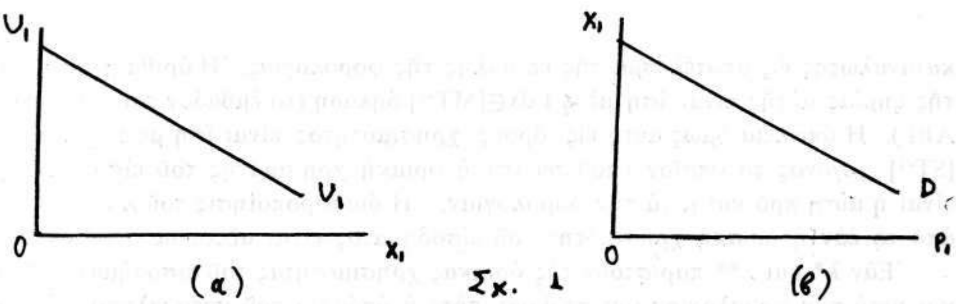
$$y=p_1x_1+p_2x_2 \quad \text{καὶ} \quad x_2=g(p_1,\ p_2,\ y) \tag{6}$$

Αἱ σχέσεις (5) καὶ (6) εἶναι αἱ συναρτήσεις ζητήσεως διὰ τὰ ἀγαθὰ x_1 καὶ x_2 ἀντιστοίχως. Εἶναι δυνατὸν νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ συναρτήσεις (5) καὶ (6) εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ τὸ βασικὸ μέτρο (διάστασις) τῆς χρησιμότητος [S], ἐὰν βεβαίως δεχθῶμεν ὅτι ὑπάρχει διάστασις εἰς τὴν ὁποίαν μετρᾶται ἡ χρησιμότης.

Ἐπανερχόμεθα τώρα εἰς τὴν σχέσιν (3). Ἐπειδὴ $U_1\in[SR_1^{-1}]$, $U_2\in[SR_2^{-1}]$, $p_1\in[MR_1^{-1}]$, $p_2\in[MR_2^{-1}]$ θὰ εἶναι :

$$\bar{\lambda}\in=\frac{[SR_1^{-1}]}{[MR_1^{-1}]}=\frac{[SR_1^{-1}]}{[MR_2^{-1}]}=[SM^{-1}],$$

δηλ. ἡ ὁριακὴ χρησιμότης τοῦ εἰσοδήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν βασικὴν διάστασιν [S], ἤτοι ἀπὸ τὴν μονάδα μετρήσεως τῆς χρησιμότητος. Αὐτὸ ὅμως ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νὰ δημιουργεῖ πρόβλημα ὅσον ἀφορᾶ τὴν ἐξαγωγὴ τῶν καμπύλων ζητήσεως ἀπὸ τὰς καμπύλας τῶν ὁριακῶν χρησιμοτήτων. Ὡς παράδειγμα ἂς λάβωμεν τὸ ἀγαθὸν x_1.

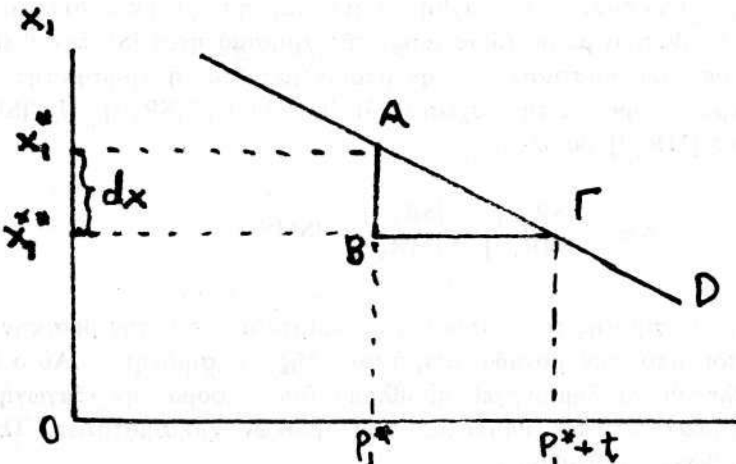


Σχ. 1

Εἰς τὸ σχῆμα 1 ἀπεικονίζονται αἱ καμπύλαι τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος (α) καὶ τῆς ζητήσεως (β) διὰ τὸ ἀγαθὸν χ_1. Ὁ ἄξων τῶν τιμῶν εἰς τὸ διάγραμμα (β) προκύπτει ἀπὸ τὸν λόγον $p_1 = U_1/\lambda$, γεγονὸς τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ τὴν διάστασιν [S] εἰς τὴν καμπύλην ζητήσεως. Ὅμως γενικῶς, ἡ τιμὴ τοῦ λ μειοῦται ὅταν τὸ εἰσόδημα y αὐξάνει.

Γεννᾶται ὅμως τὸ ἐρώτημα: Ποίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὸ λ; Ἂς δοῦμε ὅμως τὸ πρόβλημα χρησιμοποιῶντας τὴν ἔννοιαν τοῦ «πλεονάσματος τοῦ καταναλωτοῦ»[1] ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἐπιβολὴν φορολογίας. (t).

Συγκεκριμένως εἰς τὸ σχῆμα 2 ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀρχικὴ τιμὴ εἶναι P_1^* καὶ ἐν συνεχείᾳ μετὰ τὴν ἐπιβολὴν τοῦ φόρου (t) ἡ νέα τιμὴ ἰσοῦται μὲ $P_1^* + t$, μὲ ἀποτέλεσμα τὴν μείωσιν τῆς ζητουμένης ποσότητος ἀπὸ x_1^* εἰς x_1^{**}. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ δίδει τὸ πλεόνασμα τοῦ καταναλωτοῦ, τὸ ὁποῖον ζημιοῦται ὁ



Σχ. 2

καταναλωτὴς ὡς ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιβολῆς τῆς φορολογίας. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ζημίας αὐτῆς εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{2}$ t dx$\in[MT^{-1}]$ δηλαδὴ (τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ). Ἡ ἀπώλεια ὅμως αὐτὴ εἰς ὅρους χρησιμότητος εἶναι ἴση μὲ : $\frac{1}{2}$ λt dx$\in$ $[ST^{-1}]$, γεγονὸς τὸ ὁποῖον ὑποθέτει ὅτι ἡ ὁριακὴ χρησιμότης τοῦ εἰσοδήματος εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸ καὶ μετὰ τὴν φορολογίαν. Ἡ διαφοροποίησις τοῦ λ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἐὰν ἡ ὁριακὴ χρησιμότης τοῦ εἰσοδήματος εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα.

Ἐὰν λ^* καὶ λ^{**} παριστοῦν τὰς ὁριακὰς χρησιμότητας τοῦ εἰσοδήματος πρὸ καὶ μετὰ τὴν φορολογίαν ἀντιστοίχως, τότε ἡ ἀπώλεια τοῦ καταναλωτοῦ εἰς ὅ-

(1) A. Koutsoyiannis, «Modern Microeconomics» Macmillan Press Ltd, 1975, σελ. 32 - 35.

ρους χρησιμότητος θὰ εἶναι : $\frac{1}{2} t (\lambda^* x_1^* - \lambda^{**} x_1^{**})$. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ πρέπει νὰ τονισθεῖ ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ αὐτοῦ τοῦ ἀποτελέσματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ βασικὰ μέτρα (standards) μὲ τὰ ὁποῖα ἡ βασικὴ διάστασις [S] μετρεῖται.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σ. Α. Σαραντίδη : «Διαστασιακὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις». Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ περιοδικοῦ «ΣΠΟΥΔΑΙ», Πειραιεὺς 1974.
2. Σ. Α. Σαραντίδη : «Μαθήματα Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως» Πειραιεύς, 1972.
3. Fritis J. de Jong : «Dimensional Analysis for Economists» Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1967.
4. B. S. Massey : «Units, Dimensional Analysis and Physical Similarity»: Lonfdon: Van Nostrand Reinhold, 1971.
5. C. Christ : «Econometric Models and Methods» John Wiley & Sons, Inc., 1966.
6. J. M. Henderson, καὶ R. E. Quandt «Microeconomic Theory—A Mathematical Approach» 2nd ed., McGraw-Hill Co., 1971.
7. A. Koutsoyiannis : «Modern Microeconomics » Macmillan Press Ltd., 1975.