ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΟΣ

(ΜΕΡΟΣ Ι)

Ὑπὸ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΔΙΑΚΟΓΙΑΝΝΗ (B. sc, M. sc, M. sc.)

Εἰς τὰ 15 τελευταῖα ἔτη ἡ σύγχρονος θεωρία τοῦ Χαρτοφυλακίου ἐξειλίχθη ἁλματωδῶς. Πρωτεργάτης αὐτῆς τῆς θεωρίας εἶναι ὁ Markowitz[1]. Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ Markowitz[2] ἐπεξετάθησαν ἀπὸ τὸν ἴδιο καὶ ἀπὸ τοὺς Tobin, Sharpe Mossin, Treymor, Fama, Black [3].

Αἱ κυριώτεραι ὑποθέσεις τῆς θεωρίας τοῦ Χαρτοφυλακίου διὰ τὸ καλούμενον διπαραμετρικὸν ὑπόδειγμα κέρδους/κινδύνου εἶναι :

α. Ἡ συνάρτησις χρησιμότητος ἑνὸς μὴ ριψοκινδύνου ἐπενδυτοῦ προσεγγίζεται ἀπὸ ἕνα πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ.

β. Αἱ πιθανότητες κατανομῶν τῶν κερδῶν τῶν χρεωγράφων, τὰ ὁποῖα ἀπαρτίζουν τὰ χαρτοφυλάκια ἑνὸς μὴ ριψοκινδύνου ἐπενδυτοῦ προσεγγίζουν τὰς κανονικὰς κατανομάς.

Ὑποθέτομεν ὅτι, ὁ ἀντικειμενικὸς στόχος ἑνὸς μὴ ριψοκινδύνου ἐπενδυτοῦ εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς ἀναμενομένης χρησιμότητός του. Τοιαύτη μεγιστοποίησις ἔχει σὰν ἀποτέλεσμα τὴν τοποθέτησιν τοῦ ἀρίστου χαρτοφυλακίου[4]

---

1. Βλέπε [M1]

2. Βλέπε [M2]

3. Βλέπε [T1], [S1], [L1], [M3], [T2], [F1], [B1]

4. Λέγοντες ἄριστον χαρτοφυλάκιον ἐννοοῦμεν τὸ χαρτοφυλάκιον τὸ ὁποῖον μεγιστοποιεῖ τὴν ἀναμενομένην χρησιμότητα τοῦ ἐπενδυτοῦ. Διὰ μίαν ἐκτεταμένην μαθηματικὴν μελέτην τῆς ἀναλύσεως τοῦ χαρτοφυλακίου βλέπε [D1].

τοῦ ἐπενδυτοῦ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς καμπύλης ἀδιαφορίας καὶ τοῦ κέρδους/κινδύνου ἀποδοτικοῦ συνόλου[5].

Πολλοὶ ἐρευνηταὶ καὶ συγγραφεῖς ἔχουν ἀσχοληθεῖ γενικῶς μὲ τὴν ἐπιλογὴ τοῦ χαρτοφυλακίου.

Ὁ Markowitz [6] μὲ τὴν βοήθεια τῆς ὑποθέσεως α′ παρήγαγε εἰς τὸν κέρδους/κινδύνου χῶρον τὰς καμπύλας ἀδιαφορίας ἑνὸς ἐπενδυτοῦ. Ἀκόμη ἐτόνισε ὅτι, ἡ δευτεροβάθμιος συνάρτησις χρησιμότητος δύναται νὰ χρησιμοποιηθεῖ ὡς μία προσέγγισις ἄλλων κοίλων συναρτήσεων. Ὁ Tobin [7] στηριζόμενος εἰς τὴν ὑπόθεσιν α′ ἀπέδειξεν, ὅτι, εἰς τὸν χῶρον κέρδους/κινδύνου αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας ἑνὸς μὴ ριψοκινδύνου ἐπενδυτοῦ εἶναι κυρταί.

Ὁ Farrar[8] ἔχοντας ὡς βάσιν τὴν ὑπόθεσιν α′ ἀναφέρει ὅτι, αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας εἰς τὸν χῶρον κέρδους/κινδύνου παριστοῦν εὐθείας γραμμάς.

Ὁ Sharpe λαμβάνει ὑπ' ὄψιν του τὴν ὑπόθεσιν α′ καὶ ἀποδεικνύει ἀναλυτικά ὅτι, αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας εἰς τὸν χῶρον εἶναι ὁμόκεντροι κύκλοι μὲ κέν-

---

5. Ὑπὸ τὰς ὑποθέσεις, Α ἢ Β, ὁ κίνδυνος ἑνὸς χαρτοφυλακίου μετρεῖται ἀπὸ τὴν διακύμανσιν τόν κερδῶν ἢ ἀπὸ τὴν τυπικὴν ἀπόκλισιν τῶν κερδῶν. Γενικῶς ἕνα χαρτοφυλάκιον καλεῖται κέρδους/κινδύνου ἀποδοτικόν, ἐάν :

(Α1) Δὲν ὑπάρχει ἄλλο χαρτοφυλάκιον, μὲ τὸ αὐτὸ ἀναμενόμενον κέρδος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ μικρότερον κίνδυνον.

(Α2) Δὲν ὑπάρχει ἄλλο χαρτοφυλάκιον, μὲ τὸν αὐτὸν ἢ μικρότερον κίνδυνον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ μεγαλύτερον ἀναμενόμενον κέρδος.

Τὸ ἐλαχίστης διακυμάνσεως σύνολον δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\sigma^2_{M_1} = X_{M_1} V X_{M_1}$$

ὅπου X_{M_1} εὑρίσκεται ἀπὸ τὸ κάτωθι πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως :

ἐλαχιστοποιήσατε τὸ $X^t V X$
ὑποκείμενον εἰς τοὺς
περιορισμούς : $\Gamma = X^t R$ καὶ $X^t \iota = 1$

Τὸ τμῆμα θετικῆς λύσεως τοῦ συνόλου ἐλαχίστης διασπορᾶς ἀποτελεῖ τὸ ($\Gamma\sigma^2$) ἀποδοτικὸν σύνολον.

Ὁμοίως τὸ τμῆμα θετικῆς κλίσεως τοῦ δυνόλου ἐλαχίστης διασπορᾶς ἀποτελεῖ τὸ (Γσ) ἀποδοτικὸν σύνολον.

6. Βλέπε [Μ1] σ. 274 - 286.

7. Βλέπε [Τ1]

Ὑποθέτομεν τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς μοναδικοῦ ἐλευθέρου κινδύνου περιουσιακοῦ στοιχείου F, παράγοντος σταθερὸν ἀναμενόμενον κέρδος Γρ. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὸ θετικῆς κλίσεως τμῆμα τοῦ συνόλου τῆς ἐλαχίστης τυπικῆς ἀποκλίσεως παύει νὰ εἶναι τὸ (Γσ) ἀποδοτικὸν σύνολον. Τὸ νέον ἀποδοτικὸν σύνολον (Γ′σ′) εἶναι τότε μία εὐθεία γραμμὴ τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν Γ εἰς τὸ Γ_F καὶ ἐφαπτομένη τοῦ τμήματος θετικῆς κλίσεως τοῦ συνόλου ἐλαχίστης τυπικῆς ἀποκλίσεως εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ὁ Tobin ὑπέθεσε ὅτι δὲν ὑπάρχουν εὐκαιρίαι δανεισμοῦ καὶ ἐπὶ πλέον ὅτι ὑπάρχουν μόνον θετικαὶ ἐπενδυτικαὶ ἀναλογίαι εἰς ἕνα χαρτοφυλάκιο.

8. Βλέπε [F3]

τρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν κερδῶν. Οὕτω, ἐπικρίνει τὸν Farrar διά τὸ συμπέρασμά του. Ἡ κρίσις του αὐτὴ γίνεται ἀποδεκτὴ ἀργότερον ἀπὸ τὸν Farrar εἰς τὴν βελτιωμένην ἔκδοσιν τῆς ἐργασίας του.

Ὁ Sharpe καὶ ὁ Lintner[9] ἐπεκτείνουν τὴν ἐπιβολὴν τοῦ χαρτοφυλακίου καὶ διὰ τὸ (Γ′ σ′) ἀποδοτικὸν σύνολον,

Ὁ Fama καὶ ὁ Miller [11] μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ὑποθέσεως α′ ἀπέδειξαν ὅτι τὸ ἄριστον χαρτοφυλάκιον ἑνὸς μὴ ριψοκινδύνου ἐπενδυτοῦ εἶναι κέρδους/κινδύνου ἀποδοτικόν. Δηλαδὴ ἀπέδειξαν τὸ καλούμενον θεώρημα «ἀποδοτικοῦ συνόλου».

Ὁ Fama καὶ ὁ Miller δὲν ἀναφέρουν καθόλου τὰ συμπεράσματα τοῦ Sharpe περὶ ὁμοκέντρων κύκλων.

Ὁ Mossin [12] λαμβάνει ὑπ᾽ ὄψιν του ὑπόθεσιν α′ καὶ ἀναφέρει ὅτι, αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας ἑνὸς μὴ ριψοκινδύνου ἐπενδυτοῦ εἶναι εἰς τὸν (Γ′ σ′) χῶρον ὁμόκεντροι κύκλοι μὲ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν κερδῶν.

Ὅταν ἐμφανίσηκαν εἰς τὸν χῶρον τῆς θεωρίας τοῦ Χαρτοφυλακίου τὰ συμπεράσματα τοῦ Black [13], ἡ ἐπιλογὴ τοῦ χαρτοφυλακίου ἐγένοντο ἀριβῶς ὡς καὶ προηγουμένως. Μὲ τὴν μόνην διαφορὰν ὅτι εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὸ ἀποδοτικὸν σύνολον εἶναι εὐθεία γραμμή, ἐφαπτομένη τοῦ τμήματος θετικῆς κλίσεως τοῦ συνόλου ἐλαχίστης τυπικῆς ἀποκλίσεως εἰς τὸ σημεῖον Μ. Μία τοιαύτη εὐθεία, τέμνει τὸν ἄξονα τῶν Γ εἰς τὸ σημεῖο $Γ_Z'$ ὅπου τὸ Ζ′ ἔχει μὲ τὸ Μ συνδιακύμανσιν ἴσην μὲ τὸ μηδὲν (καλούμενον οὕτω ὀρθογώνιο τοῦ Μ.).

Ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω ἀναφερομένους ἐρευνητὰς οὐδεὶς ἔχει ἑρμηνεύσει ἀλγεβρικῶς τὴν ἰσορροπίαν τοῦ ἐπενδυτοῦ.

Ὁ σκοπὸς τῆς ἐργασίας αὐτῆς εἶναι νὰ δώση μὲ τὴν βοήθειαν τῆς κυρίας ὑποθέσεως α′, μίαν πλήρην εἰκόνα τῆς ἐπιλογῆς τοῦ χαρτοφυλακίου. Ἀναλυτικώτερον εἰς τὸ πρῶτον τμῆμα ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα τοῦ ἀποδοτικοῦ συνόλου. Ἡ ἀπόδειξις ἡ ὁποία ἐκτίθεται εἶναι περισσότερον πλήρης καὶ σαφὴς τῶν μέχρι σήμερον ἐκτεθιμένων ἀποδείξεων. Ἐπίσης ἑρμηνεύεται ἀλγεβρικῶς ἡ ἰσορροπία τοῦ ἐπενδυτοῦ καὶ σημειώνεται ἡ μορφὴ τῶν καμπυλῶν ἀδιαφορίας εἰς τὸν κέρδους/κινδύνου χῶρον.

---

9. Βλέπε [S2]

10. Βλέπε [L1]

11. Βλέπε [F2]

12. Βλέπε [M4]

13. Βλέπε [B1]

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος ἀποδεικνύονται παρόμοια συμπεράσματα ἀλλὰ αὐτὴν τὴν φορὰν ὑπάρχει τὸ (Γ'σ') ἀποδοτικὸν σύνολον. Εἰς τὸ τρίτο μέρος τέλος ἐκτίθενται ὡρισμέναι κοῖλαι συναρτήσεις χρησιμότητος, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ προσεγγισθοῦν ἐξ ἑνὸς πολυωνύμου δευτέρου βαθμοῦ.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Ὑποθέτομεν ὅτι δίδεται ἕνας ἀριθμὸς Ν χρεωγράφων κινδύνου, ὅπου Ν = =1, 2, ..., n. Εἰς τὴν ἐργασίαν θὰ χρησιμοποιηθοῦν οἱ κάτωθι συμβολισμοί :

V : Ὁ (Nx N) πίναξ διακυμάνσεως τῶν κερδῶν τῶν Ν χρεωγράφων κινδύνου
R : Τὸ (Nx 1) διάνυσμα τῶν ἀναμενομένων (ἢ μέσων) κερδῶν τῶν Ν χρεωγράφων κινδύνου.

ι : Τὸ (N x 1) μοναδιαῖο διάνυσμα.

X_ρ : Ἕνα (N x 1) διάνυσμα ἀποφάσεων ἐπενδυτικῶν ἀναλογιῶν, ὁρίζων ἕνα αὐθαίρετον χαρτοφυλάκιον $_\rho$.

Ὁ περιορισμὸς τὸν ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὸ διάνυσμα Xρ δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς

$$X_p^t \, \iota = 1$$

Γ_ρ : Τὸ (βαθμωτὸν) ἀναμενόμενον (ἢ μέσον) κέρδος ἑνὸς χαρτοφυλακίου $_\rho$.
σ^2_ρ : Ἡ (βαθμωτὴ) διακύμανσις τῶν κερδῶν ἑνὸς χαρτοφυλακίου $_\rho$.
U : Παράγων, συμβολίζων μίαν συνάρτησιν χρησιμότητος.
E : Παράγων, δηλώνων ἀναμενομένας ἢ μέσας τιμάς.

Ὁποιοδήποτε πρόσθετον σύμβολον χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν παροσῦαν ἐργασίαν, ἐξηγεῖται ὅπου τὸ σύμβολον πρωτοεμφανίζεται.

Ἕκαστον χαρτοφυλάκιον $_\rho$ ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας :
(P1) Ἀναμενόμενον (ἢ μέσον) κέρδος τοῦ $_\rho$. $\Gamma_\rho = X^t R$
(P2) Διακύμανσις τῶν κερδῶν τοῦ $_\rho$ $\sigma^2_\rho = X^t V X$
(P3) Τυπικὴ ἀπόκλισις τῶν κερδῶν τοῦ $_\rho$ $\sigma_\rho = \sqrt{X^t V X}$

Καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν τῆς ἐργασίας αὐτῆς ὑποθέτομεν :
(H1) Ὁ Πίναξ V εἶναι μὴ ἰδιάζων
(H2) Τὸ διάνυσμα R περιέχει τουλάχιστον δύο διαφορετικὰ ἀναμενόμενα κέρδη.
(H3) Τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος X_ρ δύναται νὰ εἶναι ὁποιοιδήποτε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε $X_\rho^t \, \iota = 1$.

I. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ χρησιμότης ἑνὸς μὴ ριψοκινδύνου ἐπενδυτοῦ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς :

$$U\ (R_\rho) = R_\rho + \xi\ R^2_\rho \qquad (I\ 1)$$

ὅπου Rρ εἶναι τὸ μιᾶς περιόδου κέρδος τοῦ χαρτοφυλακίου τοῦ ἐπενδυτοῦ, $\xi \in (-\infty,\ 0)$ καὶ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ R_ρ.

Εἰς τὴν συνέχεια ἂς ἀναφέρωμεν καὶ ἂς ἀποδείξωμεν δύο βασικὰ λήμματα :

ΛΗΜΜΑ I 1. Ὑποθέτομεν ὅτι, $U\ (R_\rho) = R\rho + \xi\ R^2_\rho$ ὅπου $\xi \in (-\infty,\ 0)$. Τότε ἡ ἀναμενομένη χρησιμότης $E[U(R_\rho)]$ εἶναι συνάρτησις μόνον τοῦ ἀναμενομένου κέρδους Γ_ρ καὶ τῆς διακυμάνσεως τῶν κερδῶν σ^2_ρ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

Λαμβάνοντες ἀναμενομένας τιμὰς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (I 1) ἔχομεν

$E\ [U\ (R_\rho)] = E\ (R_\rho) + \xi\ E\ (R^2_\rho)$

ἢ ἰσοδυνάμως

$$E\ [U\ (R_\rho)\ ] = \Gamma_\rho + \xi\ \Gamma^2_\rho + \xi\, \sigma^2_\rho \qquad (I\ 2)$$

Ο.Ε.Δ.

ΛΗΜΜΑ I 2. Ἔστω ὅτι ἡ ἀναμενομένη χρησιμότης ἑνὸς μὴ ριψοκινδύνου ἐπενδυτοῦ δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (I 2). Τότε διὰ σταθερὰν τιμὴν τοῦ σ^2_ρ ἡ

$E\ [U(R_\rho)]$

εἶναι μία γνησίως αὔξουσα συνάρτησις τοῦ Γ_ρ εἰς τὸ ἀνοικτὸ διάστημα

$\left(-\infty,\ \dfrac{1}{2\,\xi}\right))$ ὅπου $\xi \varepsilon\ (-\infty,\ 0)$.

'Ἀπὸ τὴν ἄλλην πλευρὰ διὰ σταθερὰν τιμὴν τοῦ Γ_ρ ἡ $E[U(R_\rho)]$ εἶναι μία φθίνουσα συνάρτησις τοῦ σ^2_ρ εἰς τὸ ἀνοικτὸ διάστημα $(0, +\infty)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

Θεωροῦντες ὅτι, τὸ σ^2_ρ ἔχει σταθερὰν τιμὴν καὶ παραγωγίζοντες τῆν $E[U(R_\rho)]$ ὡς πρὸς Γ_ρ λαμβάνομεν

$$\frac{dE[U(R\rho)]}{d\ \Gamma_\rho} = 1 + 2\ \xi\ \Gamma_\rho \qquad (I\ 3)$$

Οὕτω

$$\frac{E\,[U\,(R_\rho)]}{d\ \Gamma_\rho} > 0 \text{ διὰ } \Gamma_\rho \in \left(-\infty,\ \frac{1}{2\,\xi}\right) \text{ μὲ } \xi\ \varepsilon\ (-\infty,\ 0)$$

'Ἐξ ἄλλου θεωροῦντες ὅτι τὸ Γ_ρ ἔχει σταθερὰν τιμὴν καὶ παραγωγίζοντες τὴν $E\,[U(R_\rho)]$ ὡς πρὸς σ^2_ρ παράγομεν τὴν

$$\frac{d\ E\,[U(R_\rho)]}{d\sigma^2_\rho} = \xi < 0 \qquad (I\ 4)$$

Ο.Ε.Δ.

Ἄς ἀποδείξωμεν τώρα τὸ καλούμενον θεώρημα ἀποδοτικοῦ συνόλου καὶ ἄς δώσωμεν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν τῆς ἰσορροπίας τοῦ ἐπενδυτοῦ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ Ι 3

Τὸ ἄριστον χαρτοφυλάκιον ἑνὸς μὴ ριψοκινδύνου ἐπενδυτοῦ εἶναι κέρδος / κινδύνου ἀποδοτικόν[14].

---

14. Τὸ ἄριστον χαρτοφυλάκιον ἑνὸς μὴ ριψοκινδύνου ἐπενδυτοῦ εἶναι διάφορον τοῦ σφαιρικοῦ χαρτοφυλακίου ἐλαχίστης διασπορᾶς.

Πληροφορίαι διὰ τὸ σφαιρικὸν χαρτοφυλάκιον ἐλαχίστης διασπορᾶς δίδονται ὑπὸ τοῦ [D1]

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

Ὁ ἀντικειμενικὸς στόχος τοῦ ἐπενδυτοῦ εἶναι νὰ μεγιστοποιήση τὴν ἀναμενομένην χρησιμότητα:

$$E[U(R_\rho)] = X^t R + \xi \ (X^t R)^2 + \xi X^t \ VX \tag{I 5}$$

ὑποκειμένην εἰς τὸν περιορισμὸν

$$X^t \iota = 1 \tag{I 6}$$

ὅπου

$$\Gamma_\rho = X^t R \tag{I 7}$$

$$\sigma^2_\rho = X^t V X$$

Πράγματι ἡ ἐξίσωσις τοῦ Lagrange εἶναι

$$L = X^t R + \xi . \ (X^t \ R)^2 + \xi \ X^t V X + \lambda \ (1 - X^t \ \iota)$$

ὅπου λ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστὴς τοῦ Lagrange.

Αἱ συνθῆκαι πρώτης τάξεως διὰ μέγιστας τιμὰς εἶναι

$$R + 2 \ \xi (X^t R) R + 2 \ \xi VX - \lambda\iota = 0 \tag{I 8}$$

Η τελευταῖα ἐξίσωσις δίδει

$$\frac{-\xi}{1 + 2 \xi \Gamma_{M_1}} \ VX = (R\iota)^t \left(- \frac{\frac{1}{2}\lambda}{2(1 + 2 \xi \Gamma_{M_1}} \right) \tag{I 9}$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (I 9) μὲ $V^{-1}(R\iota)$ ἔχομεν

$$\frac{-\xi}{1 + 2 \xi \Gamma_{M_1}} \begin{pmatrix} \Gamma_{M_1} \\ 1 \end{pmatrix} = (R \ \iota)^t \ V^{-1} \ (R\iota) \left(\frac{-\frac{1}{2}\lambda}{2(1 + 2 \xi \ \Gamma_{M_1})} \right) \tag{I 10}$$

Ἔστω

$$A = (R \ \iota)^t \ V^{-1} \ (Rc) \ = \ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{15} \tag{I 11}$$

---

15. Πληροφορίαι διὰ τὸν πίνακα A δίδονται ἀπὸ [D1].
Ὑποθέτομεν καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν αὐτῆς τῆς ἐργασίας b>0

'Επειδὴ ὁ A εἶναι ἕνας καθωρισμένος θετικὸς πίναξ, ἡ ἐξίσωσις (I 11) συνεπάγει

$$\left(\frac{-\lambda^{\frac{1}{2}}}{2(1+2\,\xi\,\Gamma_{M_1})} \right) = \frac{-\xi}{1+2\Gamma_{M_1}}\, A^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma_{M_1} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(I 12)}$$

'Αντικαθιστῶντες τὴν ἐξίσωσν (I 12) εἰς τὴν ἐξίσωσιν (I 9) καὶ ἁπλοποιοῦντες ἔχομεν

$$X = V^{-1}\,(R\,\iota)\,A^{-1} \begin{pmatrix} (\Gamma_{M_1} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{I 13)}$$

'Επομένως, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Roll[16] δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι τὸ ἄριστον χαρτοφυλάκιον ἑνὸς ἐπενδυτοῦ ἔχοντος συνάρτησιν χρησιμότητος διδομένην ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (I 1) θὰ εἶναι ἐλαχίστης διασπορᾶς. Οὕτω μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ λήμματος I 1 συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ἄριστον χαρτοφυλάκιον ἑνὸς τοιούτου ἐπενδυτοῦ θὰ εἶναι κέρδος /κινδύνου ἀποδοτικόν.

Ο.Ε.Δ.

'Εξ ἄλλου ἡ ἐξίσωσις (I 12) δίδει

$$\frac{-\xi}{1+2\,\xi\,\Gamma_{M_1}} = \frac{ac-b^2}{2\,(c\Gamma_{M_1}-b)} \qquad \text{((I 14)}$$

ἤτοι ἀποδείξαμεν ἀλγεβρικῶς τὴν ἰσορροπίαν τοῦ ἐπενδυτοῦ.

'Εκ τῆς ἐξισώσεως (I 14) συνεπάγεται

$$\xi = \frac{-(ac-b^2)}{2\,[\,\Gamma_{M_1}\,(ac-b^2)+c\Gamma_{M_1}-b\,]} \qquad \text{(I 15)}$$

16. Βλέπε [R1]

Ἑπομένως ἡ μεγίστη ἀναμενομένη χρησιμότης τοῦ τοιούτου ἐπενδυτοῦ εἶναι

$$E[U(R_\rho)] = \frac{c\Gamma_{M_1}^2 - a + \Gamma_{M_1}^2 (ac - b^2)}{2[c\,\Gamma_{M_1} - b + \Gamma_{M_1}\,(ac - b^2)]} \tag{I 16}$$

Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ ἀποδοτικὸν σύνολον κέρδος κινδύνου. Τότε τὸ ἄριστον χαρτοφυλάκιον ἑνὸς μὴ ριψοκινδύνου ἐπενδυτοῦ ἔχοντος δεδομένην συνάρτησιν χρησιμότητος προσεγγιζομένην ἐξ ἑνὸς πολυωνύμου δευτέρου βαθμοῦ θὰ ἔχει

$$\Gamma_{M_1} = \frac{2\,\xi\,b - (ac - b^2)}{2\,\xi\,(ac - b^2 + c)} \tag{I 17}$$

$$\sigma_{M_1} = \frac{1}{c} + \frac{C}{ac - b^2}\left(\frac{2\,\xi\,b - (ac - b^2)}{2\,\xi\,(ac - b^2 + c)} - \frac{b}{c}\right)^2 \qquad \text{(I 18}$$

Ἄς ἀσχοληθῶμεν τώρα μὲ τὸ σχῆμα τῶν καμπυλῶν ἀδιαφορίας εἰς τὸν (Γσ) χῶρον, ὑποθέτοντες φυσικὰ τὴν ἰσχὺν τῆς ἐξισώσεως.

Πράγματι, διὰ μιᾶς ἁπλῆς διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶ μελῶν τῆς ἐξισώσεως (I 2) διὰ ξ, καταλήγωμεν εἰς (I 22)

$$\Gamma_\rho + \sigma_\rho^2 + \frac{1}{\xi}\,\Gamma_\rho = \frac{E[U(R_\rho)]}{\xi}$$

Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως τὸ $\frac{1}{4\xi^2}$ καὶ συλλέγοντες ὅρους, λαμβάνομεν

$$(\Gamma_\rho + \frac{1}{2\,\xi})^2 + (\sigma_\rho - o)^2 = \frac{E[U(R\rho)]}{\xi} + \frac{1}{4\xi^2}$$

῾Επομένως, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης καμπύλης ἀδιαφορίας εἰς τὸ M_1 ἑνὸς ἐναντίον κινδύνου ἐπενδυτοῦ, ἔχοντος συνάρτησιν χρησιμότητος, διδομένην, ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς :

$$\left[\Gamma_\rho - (\Gamma_{M_1} + \frac{c\Gamma_{M_1} - b}{ac - b^2}) \right]^2 + \left[\sigma_\rho - o \right]^2 = \sigma_{M_1}^2 + \left(\frac{c\Gamma_{M_1} - b}{ac - b^2} \right)^2 \qquad (I\ 23)$$

ὅπου

$$\Gamma_{M_1} + \frac{c\Gamma_{M_1} - b}{ac - b^2} - \sqrt{\sigma_{M_1}^1 + \left(\frac{c\Gamma_{M_1} - b}{ac - b^2} \right)^2} \leqslant \Gamma\rho < \Gamma_{M_1} + \left(\frac{c\Gamma_{M_1} - b}{ac - b^2} \right) \qquad (I\ 24)$$

῾Επομένως, εἰς τὸν (Γσ) χῶρον αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας ἑνὸς ἐναντίον κινδύνου ἐπενδυτοῦ, ἔχοντος συνάρτησιν χρησιμότητος διδομένην ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν εἶναι ὁμόκεντροι κύκλοι μὲ κέντρον

$$(\Gamma_{M_1} + \frac{c\Gamma_{M_1} - b}{ac - b^2},\ 0)$$

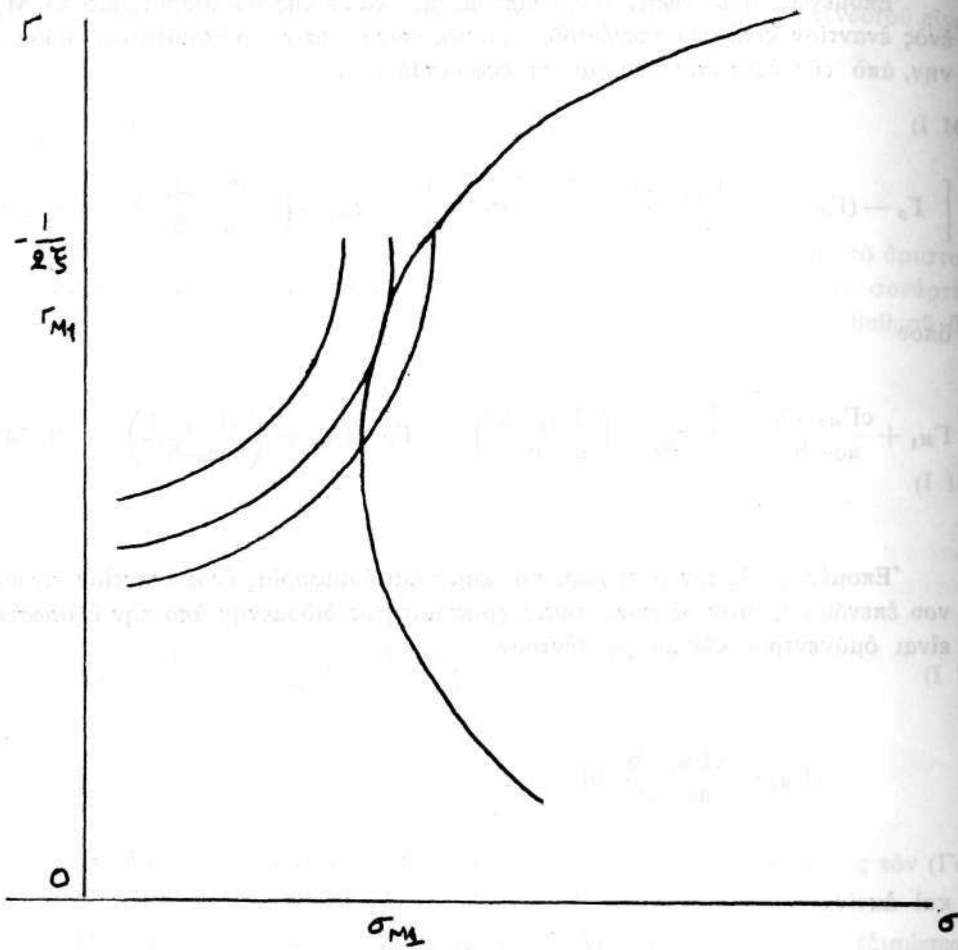
καὶ ἀκτίνα

$$\Phi = \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \left(\frac{c\Gamma_{M_1} - b}{ac - b^2} \right)}$$

ὅπου

$O \leqslant \sigma\varepsilon < \sigma_{M_1}$
ἢ $\infty > \sigma_b \geqslant \sigma_{M_1}$

(Βλέπε σχῆμα I 1)



Σχῆμα Ι 1

ΙΙ. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΕΙΣ ΤΟΝ (Γ΄σ΄) ΧΩΡΟΝ

Ἕκαστον χαρτοφυλάκιον ἐλαχίστης διασπορᾶς (ἢ ἐλαχίστης τυπικῆς ἀποκλίσεως), ἐκτὸς τοῦ σφαιρικοῦ χαρτοφυλακίου ἐλαχίστης διασπορᾶς (ἢ ἐλαχίστης τυπικῆς ἀποκλίσεως), ἔχει ἕνα ἄπειρον ἀριθμὸν ὀρθογωνίων χαρτοφυλακίων μὲ τὸ αὐτὸ ἀναμενόμενον κέρδος.

Ὑποθέτομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν ὅλα τὰ ὀρθογώνια χαρτοφυλάκια, ἑνὸς ἐλαχίστης τυπικῆς ἀποκλίσεως χαρτοφυλακίου, ἔστω Μ[17]. Τότε μεταξὺ αὐτῶν θὰ ὑπάρχη ἕνα χαρτοφυλάκιο, ἔστω Z'_M τὸ ὁποῖον ἔχει

$$\Gamma_{Z'_M} = \frac{a - b\Gamma_M}{b - c\Gamma_M} \qquad \text{(II 1)}$$

καὶ

$$\sigma_{Z'_M} = 0 \qquad \text{(II 2)}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ΙΙ 1. Τὸ χαρτοφυλάκιον Z'_m εἶναι μοναδικόν.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

Ἡ συνάρτησις

$$f_z : \mathrm{I\,R} - \left\{ \frac{b}{c} \right\} \to \mathrm{IR} - \left\{ \frac{b}{c} \right\} \; : \; \Gamma \to f_z(\Gamma) = \Gamma_z = \frac{b\Gamma - a}{c\Gamma - b}$$

εἶναι 1—1 καὶ ἐπὶ (βλέπε [D1] σ. 39).

Ἑπομένως διὰ κάθε $\Gamma \mathrm{E}\ \mathrm{I\,R} - \left[\frac{b}{c} \right]$ ὑπάρχει ἕνα μοναδικὸ $\Gamma z \in \mathrm{R}$ μὲ

$$\Gamma_Z = \frac{a - b\Gamma}{b - c\Gamma}$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις εἰς τὸν κέρδους/κινδύνου χῶρον εἶναι εὐθεία γραμμὴ παράλληλος πρὸς τὸν σ^2 ἄξονα (ἢ σ ἄξονα). Προφανῶς μία τοιαύτη εὐθεῖα γραμμὴ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν Γ εἰς ἕνα μόνον σημεῖον, Z'_M. Ο.Ε.Δ.

Ἄς ἀποδείξωμεν τώρα τὸ θεώρημα ἀποδοτικοῦ συνόλου.

17. Περισσοτέρας πληροφορίας διὰ ὀρθογώνια χαρτοφυλάκια βλέπε [R1] καὶ [D1]

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΙΙ 2

Τὸ ἄριστον χαρτοφυλάκιον ἑνὸςἐναντίον κινδύνου ἐπενδυτοῦ εἶναι (Γ′ σ′) ἀποδοτικόν.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

Ἔστω ρ τὸ χαρτοφυλάκιο τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τοῦ Μ καὶ τοῦ Z'_n.

Τότε

$$\Gamma_\rho = = X^t R + (1 - X^t\iota)\Gamma_{ZM} \tag{II 3}$$

$$\sigma_\rho^2 = X^t V X \tag{II 4}$$

Οὕτω ἔχομεν

$$E[U(R\rho)] = X^t R + (1 - X^t\iota)\,\Gamma_{Z'M} + \xi\,(X^t R + (1 - X\iota)\,\Gamma'_{ZM})^2 + \xi X^t V X \tag{II 5}$$

Ὁ ἀντικειμενικὸς στόχος τοῦ ἐπενδυτοῦ εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς $E[U(R_\rho)]$. Πράγματι, αἱ συνθῆκαι πρώτης τάξεως εἶναι

$$R - \Gamma_{Z'M}\,\iota + 2\Gamma_q\,\xi\,(R - \Gamma_{Z'M}\iota) + 2\,\xi\,VX = 0 \tag{II 6}$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (ΙΙ 6) μὲ $1 + 2\xi\Gamma_q$ καὶ διευθετοῦντες τοὺς ὅρους ἐκ νέου παράγομεν τὴν

$$-\ \frac{2\,\xi}{1 + 2\xi\Gamma_q}\ VX = R - \Gamma_{Z'M}\iota \tag{II 7}$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (ΙΙ 7) μὲ

$$X_1 = \begin{bmatrix} X \\ 1 - X^t\iota \end{bmatrix} \tag{II 8}$$

καταλήγομεν εἰς τὴν

$$-\ \frac{2\,\xi}{1 + 2\,\xi\,\Gamma_q}\ \sigma'_q = \frac{\Gamma_q - \Gamma_{ZN}}{\sigma_q} \tag{II 9}$$

Ἐξ ἄλλου ἡ ἐξίσωσις (ΙΙ 7) δίδει

$$X = -\frac{1+2\xi\Gamma_q}{2\xi} V^{-1} (R - \Gamma_{Z'M}\iota) \qquad \text{(II 10)}$$

Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (II 10) πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ $(R - \Gamma_{Z'M}\iota)$ καὶ ληφθεῖ ὑπ' ὄψιν ἡ ἐξίσωσις (II 3) ἔχομεν

$$-\frac{1+2\xi\Gamma_q}{2\xi} = \frac{\Gamma_q - \Gamma_{Z'M}}{a - 2b\,\Gamma_{Z'M} + C\Gamma^2_{Z'M}} \qquad \text{(II 11)}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν ἐξίσωσιν (II 11) εἰς τὴν ἐξίσωσιν (II 10) λαμβάνομεν

$$X = \frac{\Gamma_q - \Gamma_{Z'M}}{a - 2b\Gamma_{Z'M} + c\Gamma^2_{Z'M}} V^{-1} (R - \Gamma_{Z'M}) \qquad \text{(II 12)}$$

Ἑπομένως, τὸ ἄριστον χαρτοφυλάκιον τοῦ ἐπενδυτοῦ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν εἶναι ἐλαχίστου κινδύνου.

Ἀλλὰ μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{E[U(R)_\rho]}{d\Gamma_q} = 1 + 2\,\xi\,\Gamma_q$$

ὁπότε

$$\frac{E[U(R_\rho)]}{d\Gamma_q} > 0$$

διὰ $\Gamma_q E\,(-\infty, \frac{1}{2\xi})$ ὅπου ξ E $(-\infty, o)$

Ἄρα τὸ ἄριστον χαρτοφυλάκιον τοῦ ἐπενδυτοῦ εἶναι κέρδους/κινδύνου ἀποδοτικόν.

Ο.Ε.Δ.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν

$$\frac{\dfrac{dE\,[U\,(R_\rho)]}{d\sigma_\rho}}{\dfrac{\delta E[U(R\rho)}{n\sigma,}} = \frac{\Gamma_q - \Gamma_{Z'M}}{\sigma_q} \qquad \text{(II 13)}$$

Ἑπομένως, ἡ καμπύλη ἀδιαφορίας, ἡ ὁποία δίδει τὴν μεγίστην ἀναμενομένην χρησιμότητα εἰς τὸν ἐπενδυτὴν ἐφάπτεται τοῦ ($\Gamma'\sigma'$) ἀποδοτικοῦ συνόλου.

Λαμβάνοντες τὴν ἐξίσωσιν (II 5) καὶ λύοντες ὡς πρὸς ξ ἔχομεν

$$\xi = -\frac{\Gamma_q - \Gamma_{Z'M}}{2[\Gamma_q(\Gamma_q - \Gamma_{Z'M}) + \sigma_q^2]} \tag{II 14}$$

ἀλλὰ

$$\sigma_\rho^2 = \frac{(\Gamma_q - \Gamma_{Zm})^2}{a - 2b\Gamma_{Z'M} + c\Gamma_{Z'M}} = \frac{(\Gamma_q - \Gamma_{Z'M})^2\,(b - c\Gamma_M)^2}{(ac - b^2)^2\sigma^2_M} \tag{II 15}$$

Ἑπομένως, ἀντικαθιστῶντες τὴν ἐξίσωσιν (II 15) εἰς τὴν ἐξίσωσιν (II 14) καὶ χειριζόμενοι καταλλήλως τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν, παράγωμεν τὴν

$$\xi = \frac{\sigma^2{}_M\,(ac - b^2)^2}{2\,[\sigma^2(ac - b^2)^2\Gamma_q + (\Gamma_q - \Gamma_{Z'M})\,(b - c\Gamma_M)^2\,]} \tag{II 16}$$

Οὕτω, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἀναμενομένη χρησιμότης δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν

$$E[U(R_\rho)] = \frac{\sigma^2_M(ac - b^2)^2\ \Gamma_q{}^2 + (b - c\Gamma_M)^2\Gamma_q{}^2 - \Gamma^2_{Z'N}(b - c\Gamma_M)^2}{2\,[\sigma_M{}^2(ac - b^2)^2\Gamma_q + (\Gamma_q - \Gamma_{ZM})\,(b - c\Gamma_M)^2]} \tag{II 17}$$

Τὸ ἄριστον χαρτοφυλάκιον ἑνὸς τοιούτου ἐπενδυτοῦ θὰ ἔχει

$$\Gamma_q = \frac{2\,\xi\,\Gamma_{Z'M}\,(b - c\Gamma_M)^2 - \sigma^2_M\,(ac - b^2)}{2\,\xi\,\sigma^2_M\,(ac - b^2)\Gamma_q + (b - c\Gamma_M)^2]} \tag{II 18}$$

$$\sigma_q = \frac{2\,\xi\,\sigma^2_M{}^2(ac - b^2)^2\Gamma_{Z'M} - \sigma^2_M(ac - b^2)^2}{2\,\xi\Big[\sqrt{a - 2b\Gamma_{Z'M} + c\Gamma^2_{Z'M}}\,\sigma^2_M\,(ac - b^2)^2 + \sqrt{a - 2b\Gamma_{Z'M} + c\Gamma^2_{Z'M}}\,(b - c\Gamma_M)^2\sigma_q\Big]} \tag{II 19}$$

$$(\Gamma_q + \frac{1}{2\ \xi})^2 + (\sigma_q - o)^2 = \frac{E[U(R_\rho)]}{\xi} + \frac{1}{4\xi^2}$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης καμπύλης ἀδιαφορίας θὰ εἶναι εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν

$$\left[\Gamma_q - (\Gamma_q + \frac{(\Gamma_q - \Gamma z'_M)\ (b - c\Gamma_M)^2)}{\sigma_M{}^2(ac - b^2)^2} \right]^2 + [\sigma_q - o]^2 = \sigma_q{}^2 + \left(\frac{\Gamma_q - \Gamma z'_M)(b - c\Gamma_M)^2}{\sigma^2_M\ (ac - b^2)^2} \right) \tag{II 20}$$

ὅπου

$$\Gamma_q + \frac{(\Gamma_q - \Gamma z'_M)(b - c\Gamma_M)^2}{\sigma^2_M\ (ac - b^2)^2} - \sqrt{\sigma_q{}^2 + \left(\frac{\Gamma_q - \Gamma z'_M)\ (b - c\Gamma_M)^2)^2}{\sigma_M(ac - b^2)} \right)}$$

$$\leqslant \Gamma_q < \Gamma_q + (\frac{\Gamma_q - \Gamma z'_M)\ (b - c\Gamma_M}{\sigma_M(ac - b^2)^2}) \tag{II 21}$$

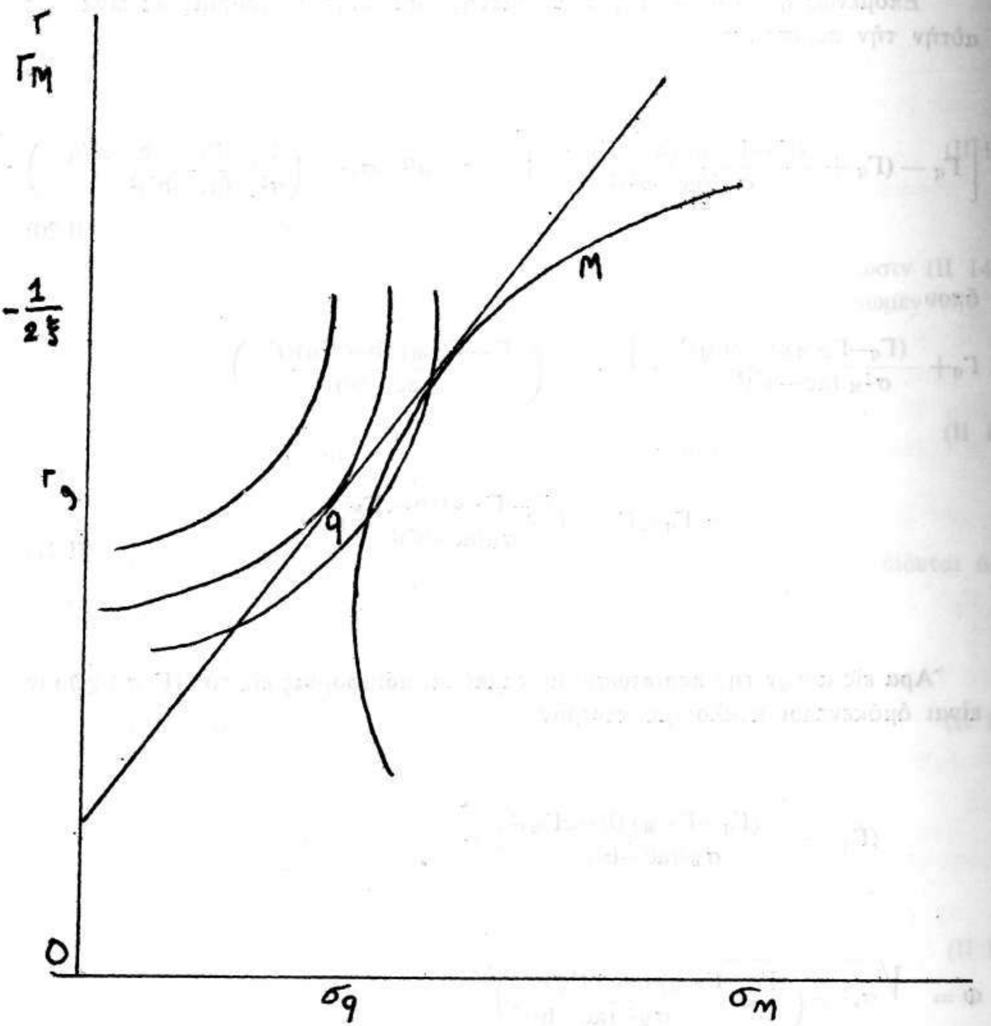
Ἄρα εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας εἰς τὸν (Γ σ′) χῶρον εἶναι ὁμόκεντροι κύκλοι μὲ κέντρον

$$(\Gamma_q + \frac{(\Gamma_q - \Gamma z'_M)\ (b - c\Gamma_M)^2}{\sigma_M{}^2(ac - b^2)},\ 0$$

$$\Phi = \sqrt{\sigma_\varepsilon{}^2 + \left(\frac{(\Gamma_q - \Gamma z'_M)\ (b - c\Gamma_M)^2}{\sigma_M{}^2\ (ac - b^2)^2} \right)^2}$$

ὅπου

$0 \leqslant \sigma_\varepsilon < \sigma_q$ ἢ $\infty > \sigma_\varepsilon \geqslant \sigma_{Mi}$ (Βλέπε Σχῆμα Ι2)


r
r_M
$-\frac{1}{2\xi}$
r_q
M
q
O
σ_q
σ_M
σ

III. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΣ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΚΟΙΛΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΟΣ ΔΙ' ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΚΕΡΔΟΣ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Ἕνα πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς Rρ, δύναται νά θεωρηθῆ ὡς μία ἱκανοποιητικὴ προσέγγισις ὡρισμένων κοίλων συναρτήσεων τοῦ Rρ. Μεταξὺ αὐτῶν αἱ κυριώτεραι εἶναι :

(ι) Ἔστω

$$U_1(R\rho) = -\ \varepsilon^{-\theta R_\rho} \tag{III 1}$$

ὅπου θε (0 + ∞) καὶ θ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ R_ρ.

Ἀναπτύσσοντες τὴν συνάρτησιν U(Rρ) πέριξ τοῦ O, χρησιμοποιοῦντες τὸ θεώρημα τοῦ Taylor παράγωμεν τὴν

$$U_1(R_\rho) = U_1(O) + R_\rho \ \frac{dU_1(O)}{dR_\rho} + \frac{R_\rho^2}{2} \cdot \frac{dU_1(O)}{dR_\rho} + \dots \tag{III 2}$$

Ἡ ἐξίσωσις (III 2) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$U_1(R\rho) = -1 + \theta R_1 \ \frac{\theta^2}{2} \ R_\rho^2 + \ \dots \tag{III 3}$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ χρησιμότης U(Rρ) δύναται νὰ προσεγγισθῆ ἐξ ἑνὸς πολυωνύμου δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς Rρ, λαμβάνομεν

$$U_1(R\rho) = 1 - \theta R_\rho - \frac{\theta^2}{2} \ R_\rho^2 \tag{III 4}$$

Λαμβάνοντες ἀναμενομένας τιμὰς εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (III 4), καταλήγομεν εἰς

$$E[U_1(R\rho)] = -1 + \theta\Gamma_\rho - \frac{\theta^2}{2} \ \Gamma_\rho \frac{\theta^2}{2} - \sigma_\rho^2 \tag{III 5}$$

Ἐργαζόμενοι μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, ὅπως εἰς τὸ τμῆμα I, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα ἀποδοτικοῦ συνόλου καὶ νὰ ἑρμηνεύσωμεν τὴν ἰσορροπίαν τοῦ ἐπενδυτοῦ εἰς τὸν (κέρδους/κινδύνου) χῶρον.

Ἀκόμη, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξομεν

$$\theta = \frac{ac-b^2}{c\Gamma_{M_1}-b+\Gamma_{Mi}(ac-b^2)} \qquad \text{(III 6)}$$

καὶ

$$E[U_1(R_\rho)] = -1 + \frac{[c\Gamma^2_{M_1} - a + \Gamma^2_{M_1}(ac-b^2)][ac-b^2]}{2[c\Gamma_{M_1}-b+\Gamma_{M_1}(ac-b^2)]^2} \qquad \text{(III 7)}$$

Αἱ ἐξισώσεις III 6 καὶ III 7 δίδουν ἀντιστοίχως

$$\Gamma_{M_1} = \frac{\theta b + (ac-b^2)}{\theta(ac-b^2+c)}$$

καὶ

$$\sigma_{M_1} = \frac{1}{c} + \frac{c}{(ac-b^2)} \cdot \left(\frac{(ac-b^2)+\theta b}{\theta(ac-b^2+c)} - \frac{b}{c} \right)^2$$

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας εἶναι εἰς τὸν ($\Gamma\ \sigma^2$) χῶρον παραβολαί, ἐνῶ εἰς τὸν ($\Gamma\ \sigma$) χῶρον εἶναι ὁμόκεντροι κύκλοι μὲ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν Γ.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα μὲ τὰς

$U_2(R_\rho) - \ln\ (R_\rho + \mu)$

Ὅπου $\mu \in (O, +\infty)$, $R_\rho + \mu > O$

$U_3(R_\rho) = \sqrt{R_\rho + t}$

ὅπου $t \in (O, +\infty)$, $R_\rho + t > O$

ΒΙΒΙΟΓΡΑΦΙΑ

[B] Black F. : «Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing» Journal of Business, July 1972, pp. 444 -'.

[D1] Diacogiannis G. P. : «On Efficient Set Mathematics and Return-Beta Linearity» MSC Thesis by Research, U.M.I. S.T. 1979.

[F1] Fama E. F. : «Risk Return and Equilibrium» Journal of Political Economy January-February 1971, pp. 30 - 35.

[F2] Fama E. F. and Miller M. H. : «The Theory of Finance», Driden Press Hinsdale Illinois 1972.

[F3] Farrar D. E. : «The Investment Decision under Uncertainty», Markham Publishing Company Chicago 1962.

[L1] Lintner J. : «The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets» Review of Economics and Statistics, February 1965, pp. 13 - 37.

[M1] Markowitz H.: «Portfolio Selection» Journal of Finance, No. 1, March 1952, pp. 77 - 91.

[M2] ——— «Portfolio Selection Efficient Diversification of Investment (Cowles Foundation Monograph 16) Yale University Press New Haven 1959.

[M3] Mossin «Equilibrium in a Capital Asset Market», Econometrica, October 1966, pp. 768 - 83.

[M4] ——— «Theory of Financial Markets» Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs N. S. 1973.

[R1] Roll R. : «A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests, Part I on the Past and Potential Testability, of the Theory», Journal of Financial Economics, March 1977, ee 29-77.

[S1] Sharpe W. F. : «Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Risk» under Risk» Journal of Finance, No. 3, September 1964, pp. 425 - 42

[S2] ——— «Portfolio Theory and Capital Markets» New York McGraw-Hall 1970.

[T1] Tobin J. : «Liquidity Preference as Behavior Toward Risk» Rev. of Economic Studies. February 1958, pp. 65 - 86.

[T2] Treynor S. L. : «Toward a Theory of Market Value of Risky Assets» Unapublished Manuscript 1961.