ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΚΑΙ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗ ΛΙΠΑΣΜΑΤΩΝ

Ὑπὸ

ΓΙΑΝΝΗ ΘΕΟΔΩΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ*

Στὴν παροῦσα μελέτη περιγράφουμε σὲ γενικὴ μορφὴ τὸν τρόπο ἀνάλυσης καὶ ἐπίλυσης, μεταφορικῶν προβλημάτων μὲ περιοδικὴ ἐπανάληψη τοῦ φαινομένου παραγωγὴ—μεταφορὰ—κατανάλωση καὶ χρήση ἀποθηκῶν στὶς περιοχὲς κατανάλωσης, ἔτσι ὥστε τὸ ὁλικὸ κόστος μεταφορᾶς καὶ κόστος ἀποθηκῶν νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστο.

Σκοπὸς αὐτῆς τῆς μελέτης εἶναι τὸ συγκεκριμένο πρόβλημα τῆς Α.Τ.Ε., ὅπου κατὰ τὴν διάρκεια ἑνὸς χρόνου 1.500.000 τόνοι λιπασμάτων μεταφέρονται ἀπὸ τέσσερα ἐργοστάσια σὲ 180 περιοχὲς σὲ μιὰ περιοδικὴ βάση.

Προκαταβολικὰ ἀναφέρουμε ὅτι ἡ ἐφαρμογὴ μιᾶς ἐπιστημονικῆς μεθόδου γιὰ ἐπίλυση θὰ «κατεβάσει» τὸ συνολικὸ κόστος σὲ μεγάλο ποσοστὸ ἴσως καὶ 50 %. Λόγω τῆς πολυπλοκότητας καὶ τῆς διάστασης τοῦ προβλήματος ἡ ὁποιαδήποτε «πρακτικὴ» ποὺ χρησιμοποιεῖται σήμερα στὸν τρόπο μεταφορᾶς καὶ καθορισμοῦ ἀποθηκῶν, ὑπόκειται σὲ μεγάλα σφάλματα καὶ σὲ μεγάλη ἀπόκλιση ἀπὸ τὸ optimum κόστος.

Ἡ θεωρητικὴ μορφὴ τῆς ἐργασίας ἔχει σὰν σκοπὸ τὴν γενίκευση τοῦ θέματος καὶ εἶναι ἄμεσα ἐφαρμόσιμη στὴν πράξη.

Ἔστω N ὁ ἀριθμὸς τῶν περιοχῶν παραγωγῆς καὶ M ὁ ἀριθμὸς τῶν περιοχῶν κατανάλωσης ἑνὸς προϊόντος. Ζητᾶμε ἕνα πρόγραμμα μεταφορᾶς τῶν προϊόντων ἀπὸ τὶς περιοχὲς παραγωγῆς στὶς περιοχὲς κατανάλωσης ἔτσι ὥστε τὸ ἀντίστοιχο μεταφορικὸ κόστος νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστο.

Δίδεται ὅτι ὑπάρχει διαθέσιμο ἕνα μεταφορικὸ δίκτυο τὸ ὁποῖο συνδέει τὰ σημεῖα παραγωγῆς μὲ τὰ σημεῖα κατανάλωσης, μέσω τοῦ ὁποίου εἶναι δυνατὸν νὰ γίνει ἡ μεταφορὰ τῶν προϊόντων.

Θεωροῦμε ὅτι τὸ φαινόμενο παραγωγῆς - κατανάλωσης ἐπαναλαμβάνεται γιὰ ἕνα πλῆθος T περιόδων. Ἔτσι, σὲ μιὰ περίοδο t ἡ ποσότητα παραγωγῆς στὴν περιοχὴ (ἢ ἐργοστάσιο) η συμβολίζεται μὲ p(η,t) καὶ ἡ ποσότητα ζήτησης στὴν πε-

* Ἀγροτικὴ Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος.

ριοχὴ m συμβολίζεται μὲ $q(m,t)$ ὅπου $\eta = 1, 2, \ldots, N$, $m = 1,2,\ldots,M$ $t = 1,2\ldots,T$.

Ἔστω $P(t)$ ἡ συνολικὴ ποσότητα παραγωγῆς τῶν ἐργοστασίων καὶ $Q(t)$ ἡ συνολικὴ ποσότητα ζητήσεως τῶν περιοχῶν γιὰ τὴν περίοδο t, μὲ

$$P(t) = \sum_{\eta=1}^{N} p(\eta,t)$$

καὶ

$$Q(t) = \sum_{m=1}^{M} q(m,t)$$

τότε γιὰ αὐτὴ τὴν περίοδο t διακρίνουμε τὶς περιπτώσεις :

1) $P(t) > Q(t)$
2) $P(t) = Q(t)$
3) $P(t) < Q(t)$

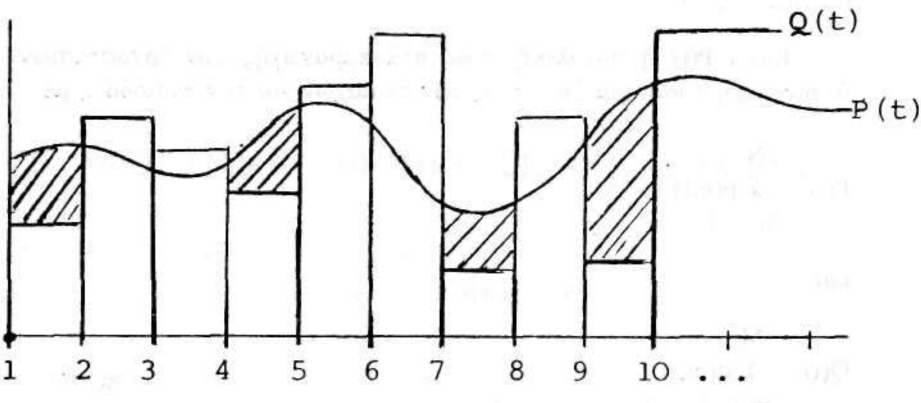
Ἔτσι στὴν περίπτωση (1) ἡ συνολικὴ παραγωγὴ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν συνολικὴ ζήτηση, στὴν (2) εἶναι ἴση καὶ στὴν (3) μικρότερη.

Θεωροῦμε μία περίοδο $t' \neq t$ στὴν ὁποία ἀντιστοιχοῦμε τὶς ποσότητες $P(t')$ καὶ $Q(t')$ μὲ τὴν ἔννοια ποὺ ὁρίστηκαν προηγουμένως καὶ διακρίνουμε ὅπως καὶ στὴν t τὶς περιπτώσεις (1), (2) καὶ (3). Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ περίοδος t προηγεῖται τῆς t' καὶ ὅτι $P(t)>Q(t)$ τότε στὴν περίπτωση ποὺ γιὰ τὴν περίοδο t' εἶναι $P(t')<Q(t')$ ἡ ποσότητα $D(t) = P(t) - Q(t)$ μπορεῖ νὰ διατεθεῖ γιὰ νὰ καλύψει μερικὰ ἢ ὁλικὰ τὴν ζήτηση τῆς περιόδου t'.

Βασισμένοι στὴν προηγούμενη παρατήρηση θεωροῦμε τὸ πρόβλημα γιὰ ἕνα πλῆθος T περιόδων καὶ χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας τοῦ προβλήματος ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ἀποθήκευση ποσοτήτων στὰ σημεῖα παραγωγῆς εἶναι ἀπαγορευτική. Ἔτσι, ἂν σὲ μιὰ περίοδο εἶναι $P(t)>Q(t)$, μὲ $D(t) = P(t) - Q(t)$, τότε ἡ ποσότητα $D(t)$ ἢ μέρος αὐτῆς μπορεῖ νὰ διατεθεῖ γιὰ νὰ συμπληρώσει τὴνζήτησημιᾶς μελλοντικῆς περιόδου t' μὲ $P(t')<Q(t')$ μὲ τὴν προϋπόθεση ὅτι ἡ μεταφορὰ αὐτῆς τῆς ποσότητας ἀπὸ ὁποιοδήποτε ἐργοστάσιο ἢ ἐργοστάσια θὰ γίνει τὴν περίοδο t.

Ἡ συσχέτιση τῶν ποσοτήτων $P(t)$ καὶ $Q(t)$ γιὰ ἕνα πλῆθος T περιόδων, δίνεται στὸ σχῆμα 1,
ὅπου τὰ ὀρθογώνια ἀπεικονίζουν τὴν συνολικὴ ζήτηση καὶ ἡ καμπύλη γραμμὴ ἀπεικονίζει τὴν συνολικὴ παραγωγὴ (ἢ προσφορά). Εὔκολα βλέπουμε ὅτι ἂν σὲ

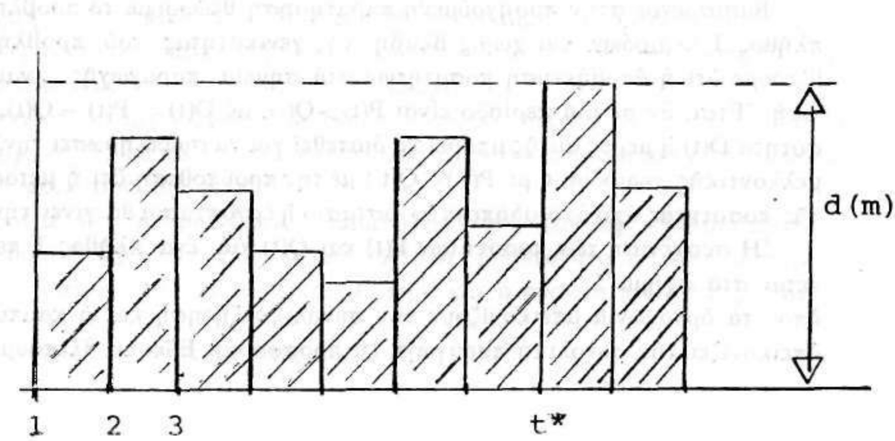
Σχῆμα 1



μιὰ περίοδο t ἡ καπύλη γραμμὴ P(t) εὑρίσκεται ὑψηλότερα τῆς Q(t)τότε ἡ ποσότητα P(t) — Q(t) μπορεῖ νὰ καλύψει μερικὰ ἢ ὁλικὰ μιὰ μελλοντικὴ ἔλλειψη γιὰ περιόδους t + 1, t + 2,. . ., T. Μία τέτοια ἀπεικόνιση εἶναι πολὺ συνηθισμένη στὴν πράξη καὶ στὴν παροῦσα ἀνάλυση τελείως τυχαία μὲ σκοπὸ τὴ γενίκευση.

Συμπερασματικά, μὲ τὴν προϋπόθεση ὅτι ἡ συνολικὴ ζήτηση ὅλων τῶν περιοχῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ἱκανοποιηθεῖ κατὰ τοὺς τρόπους ποὺ ἀναφέραμε, τότε ποσότητες τῆς παραγωγῆς ποὺ ὑπερβαίνουν τὴν συνολικὴ ζήτηση δὲν παραγγέλλονται. Στὴν ἀντίθετη περίπτωση ποὺ ἡ ἱκανοποίηση τῆς ζήτησης σὲ μιὰ περίοδο εἶναι ἀνέφικτη ἀπὸ τὴν παραγωγὴ τῶν ἐργοστασίων κατὰ ὁποιονδήποτε τρόπο, τότε ἀναφερόμεθα σὲ ἄλλες πηγὲς παραγωγῆς ἢ γιὰ τὴν προκειμένη περίπτωση εἰσάγουμε. Στὴν συνέχεια ἐξετάζουμε τὶς περιοχὲς ζήτησης τοῦ προϊόντος. Θεωροῦμε μιὰ περιοχὴ m ὅπου m = 1, 2,. . ., M μὲ ζήτηση q(m,t) γιὰ τὴν περίοδο t. Στὸ σχῆμα 2 ἔχουμε ἀπεικονίσει τὴν ζήτηση τῆς περιοχῆς m γιὰ κάθε περίοδο t = 1, 2,. . ., T.

Σχῆμα 2



Ἔστω γιὰ $t = t^*$ εἶναι $q(m,t^*) = \max_t [q(m,t]$ ὅπου $q(m.t^*)$ εἶναι ἡ μεγίστη ζήτηση ποὺ ἀπαιτεῖ ἡ περιοχὴ m μέσα στὸ διάστημα ὅλων τῶν περιόδων. Συμβολίζουμε μὲ $d(m) = q(m,t^*)$ καὶ ὑποθέτουμε :

(α) ἡ μεταφορὰ τῶν προϊόντων ἀπὸ τὰ ἐργοστάσια στὴν περιοχὴ m γίνεται στὴν ἀρχὴ τῆς κάθε περιόδου καὶ ὄχι τμηματικά.

(β) Οἱ ποσότητες ποὺ μεταφέρονται στὴν περιοχὴ m δὲν προωθοῦνται στὸν τελικὸ καταναλωτὴ ἀλλὰ ἀποθηκεύονται.

Βάσει τῶν (α) καὶ (β) σὲ κάθε περιοχὴ m προσαρτίζουμε ἕνα ἀποθηκευτικὸ χῶρο χωρητικότητας $d(m) = \max_t [q(m,t)]$. Σὲ περιπτώσεις ἀντίθετες τῶν (α) καὶ (β) τὸ μέγεθος τῆς d(m) ἐξαρτᾶται κυρίως :

1) Ἀπὸ τὴν συχνότητα τῆς τμηματικῆς μεταφορᾶς τῆς ποσότητας q(m,t), ποὺ ἀπαιτεῖται γιὰ τὴν περίοδο t.

2) Ἀπὸ τὴν ποσότητα ποὺ εἶναι δυνατὸν νὰ προωθηθεῖ στὸν τελικὸ καταναλωτὴ χωρὶς ἀποθήκευση.

Παρ' ὅλο ποὺ οἱ ὑποθέσεις (α) καὶ (β) εἶναι κατὰ κάποιο τρόπο ἰδανικές, ἐν τούτοις εἶναι ἀρκετὰ δύσκολο νὰ προσδιορίσουμε τὶς συνθῆκες 1) καὶ 2) ἔτσι ὥστε κάθε ποσότητα ποὺ μεταφέρεται σὲ μιὰ περιοχὴ νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποθηκευτεῖ. Ἔτσι παρατηροῦμε ἡ προσάρτιση ἀποθήκης σὲ κάθε περιοχὴ εἶναι ἀναγκαία καὶ συμφωνοῦμε ὅτι εἶναι ἐφικτὸ νὰ προσδιορίσουμε τὸ μέγεθος τῆς d(m) γιὰ κάθε περιοχὴ κατὰ τέτοιο τρόπο ὥστε ἡ χωρητικότητα τῆς d(m) νὰ παρέχει ἀποθηκευτικὴ ἀσφάλεια μὲ τὸ ἐλάχιστο προκαταβολικὸ κόστος ποὺ συνήθως ἀναφέρεται σὲ ἐνοίκιο.

Μὲ τὴν προσάρτηση τῆς ἀποθήκης d(m), σὲ κάθε περιοχὴ m, καὶ μετὰ τὴν παραλαβὴ τῆς ποσότητας q(m,t), ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἐλεύθερος ἀποθηκευτικὸς χῶρος ἔστω d(m,t) ὁ ὁποῖος σὲ χωρητικότητα εἶναι ἴσος μὲ τὴ διαφορὰ $d(m) - q(m,t)$ γιὰ κάθε $t = 1, 2, \ldots, T$. Ἀπὸ τὰ παραπάνω λοιπόν, εἶναι φανερὸ ὅτι σὲ κάθε περιοχὴ m ἀντιστοιχεῖ γιὰ κάθε περίοδο t ἕνας κενὸς χῶρος ἀποθήκης $d(m,t) \geq 0$, ὁ ὁποῖος, σύμφωνα μὲ τὴ διαμόρφωση τοῦ προβλήματος γιὰ T περιόδους, μπορεῖ νὰ διατεθεῖ γιὰ νὰ ἀποθηκεύσει μιὰ ποσότητα q ἐφοδίων μὲ $d(m,t) \geq q \geq 0$ ὅπου ἡ ποσότητα q θὰ τροφοδοτήσει μελλοντικὴ ζήτηση. Ὁπότε σὲ μιὰ περίοδο t μὲ ζήτηση q(m,t) εἶναι δυνατὸν νὰ παραλάβουμε μία ποσότητα ἔστω Π, μὲ $\Pi = q(m,t) + q$, καὶ $d(m,t) \geq q \geq 0$, ὅπου ἡ ποσότητα q(m,t) θὰ ἱκανοποιήσει τὴ ζήτηση γιὰ τὴν τρέχουσα περίοδο t καὶ ἡ ποσότητα q ἀφοῦ ἀποθηκευτεῖ θὰ τροφοδοτήσει μία μελλοντικὴ ζήτηση τῆς περιοχῆς γιὰ κάποια περίοδο $\tau = t + 1, \ldots, T$. Ἡ παρατήρηση αὐτὴ εἶναι πλήρως συμβιβαστὴ μὲ αὐτὰ ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω γιὰ τὶς ποσότητες P(t) καὶ Q(t), καὶ μὲ τὴν συνθήκη $P(t) > Q(t)$ γιὰ τὴν περίοδο t. Σὰν συμπέρασμα ἀπὸ τὴν προηγούμενη ἀνάλυση ἔχουμε ὅτι, ὁ κενὸς ἀποθηκευτικὸς χῶρος ποὺ ὑπάρχει διαθέσιμος σὲ μία περιοχὴ γιὰ μία περίοδο, εἶναι δυνατὸν σύμφωνα μὲ τὶς συνθῆκες τοῦ προβλήματος, νὰ χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὴν ἀποθήκευση μιᾶς ποσότητας ἡ ὁποία θὰ τροφοδοτήσει τὴν ζήτηση τῆς περυχῆς γιὰ κάποια ἑπόμενη περίοδο.

Στὸ σχῆμα 3 ἔχουμε ἀπεικονίσει τὴν περιοχὴ m μὲ περιοδικὴ ζήτηση $q(m,t)$ καὶ διαθέσιμη ἀποθήκη $d(m,t)$ γιὰ κάθε περίοδο $t = 1, 2, \ldots, T$.

Γιὰ προσωρινὴ εὐκολία θεωροῦμε αὐτὴ τὴν περιοχὴ ἀπομονωμένη καὶ δὲν ἔχουμε ἀπεικονίσει τὰ ἐργοστάσια παραγωγῆς, οὔτε τοὺς δρόμους μεταφορᾶς οἱ ὁποῖοι συνδέουν τὰ ἐργοστάσια μὲ τὴν περιοχὴ m, ἔτσι ὥστε τὸ σχῆμα 3 νὰ δείχνει τοὺς δυνατοὺς τρόπους μὲ τοὺς ὁποίους μπορεῖ νὰ ἱκανοποιηθεῖ ἡ ζήτηση τῆς περιοχῆς γιὰ κάθε περίοδο $t = 1, 2, \ldots, T$ μὲ ἄμεση τροφοδοσία ἀπὸ τὰ ἐργοστάσια ἢ μὲ ἔμμεση τροφοδοσία μέσω τῆς διαθέσιμης ἀποθήκης ἢ μέσω extra ἀποθήκης.

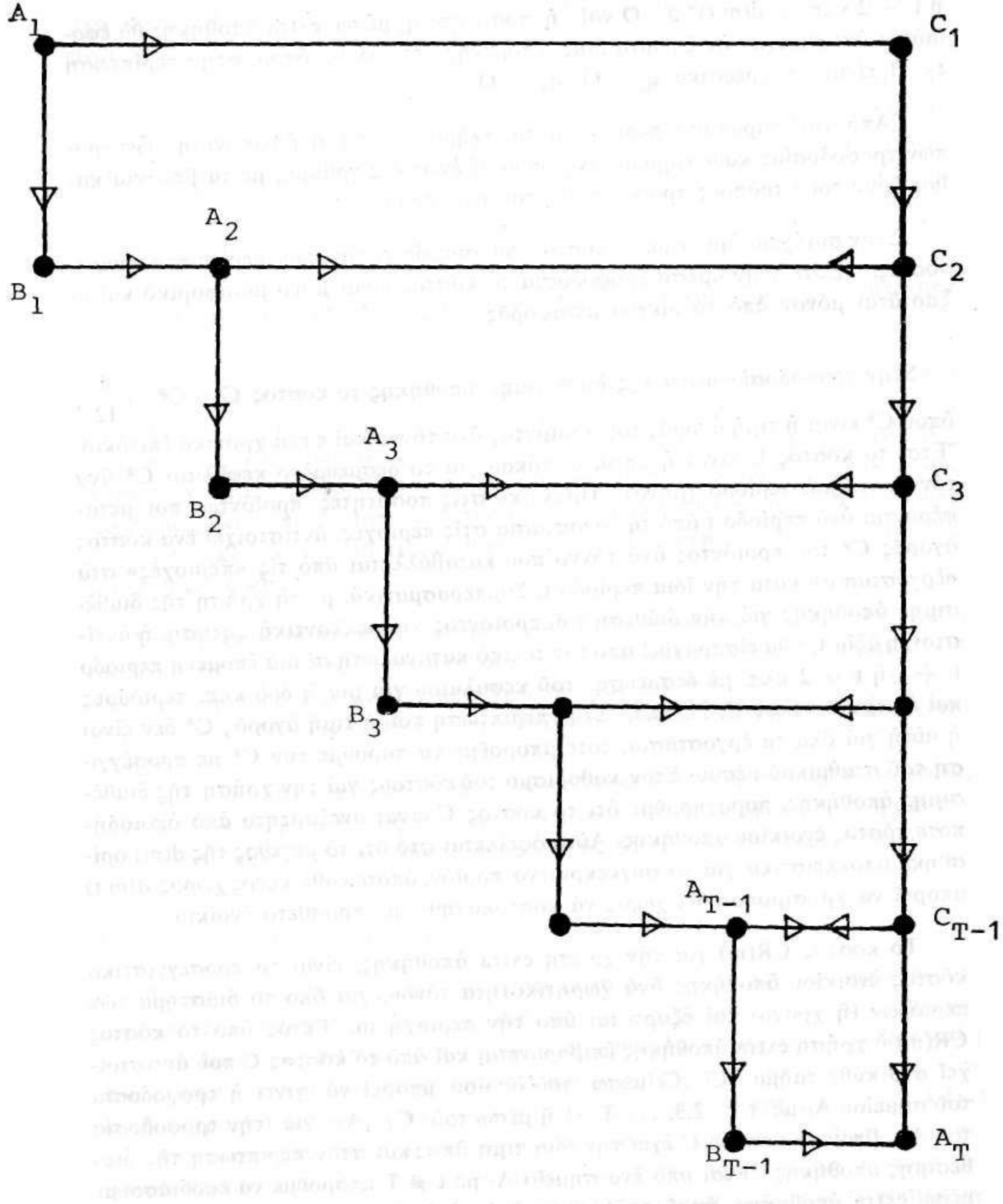
Κάθε σημεῖο A_t συμβολίζει συγχρόνως τὴν κατάληξη τῶν μεταφορικῶν δρόμων γιὰ τὴν περιοχὴ m, καὶ τὴν «θέση» συγκεντρώσεως τῆς ζήτησης $q(m,t)$ γιὰ $t = 1, 2, \ldots, T$. Μὲ αὐτὴ τὴν ἰδιότητα γιὰ κάθε σημεῖο A_t παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἐφοδιασμὸς τῆς περιοχῆς m ,μπορεῖ νὰ γίνει ἄμεσα ἀπὸ τὰ ἐργοστάσια μέσω τοῦ διαθέσιμου μεταφορικοῦ δικτύου γιὰ τὴν κάθε περίοδο $t = 1, 2, \ldots, T$.

Τὰ τμήματα A_tB_t συμβολίζουν τὶς διαθέσιμες ἀποθῆκες $d(m,t)$ μὲ ἀποθηκευτικὸ κόστος C γιὰ $t = 1, 2, \ldots, T-1$. Τὰ τμήματα B_tA_{t+1} ἐπιτρέπουν τὸν ἐφοδιασμὸ τοῦ A_{t+1}, μέσω τῆς ἀντίστοιχης διαθέσιμης ἀποθήκης A_tB_t μὲ κόστος O καὶ $t = 1, 2, \ldots, T-1$.

Εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι μιὰ ποσότητα Π ἡ ὁποία μεταφέρεται ἀπὸ τὰ ἐργοστάσια κατὰ τὴν περίοδο t, μπορεῖ νὰ ἐφοδιάσει τὴν ἀντίστοιχη ζήτηση $q(m,t)$ στὸ σημεῖο A_t καθὼς ἐπίσης μέσω τῶν τμημάτων A_tB_t καὶ B_tA_{t+1} τὴν ζήτηση $q(m,t+1)$ τοῦ σημείου A_{t+1} ἢ κατὰ τὴν ἴδια ἔννοια νὰ ἐφοδιάσει τὸ σημεῖο A_{t+2} κλπ.

Ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς παραπάνω τρόπους τροφοδοσίας ὁ ἐφοδιασμὸς ἑνὸς σημείου A_t, μὲ $t = 2, 3, \ldots, T$, μπορεῖ νὰ γίνει καὶ μέσω extra ἀποθήκης. Τὰ τμήματα A_tC_t συμβολίζουν τὴ χρήση extra ἀποθήκης μὲ κόστος $CR(m)$ καὶ $t = 1, 2, \ldots, T-1$ ἐνῶ ὁ ἐφοδιασμὸς τοῦ σημείου A_t μέσω extra ἀποθήκης γίνεται ἀπὸ τὴν ἀντίθετη διεύθυνση C_tA_t μὲ κόστος O καὶ μέσω τοῦ τμήματος $C_{t-1}C_t$ μὲ κόστος C καὶ $t = 2, 3, \ldots, T-1$.

Συμπερασματικά, σὲ μιὰ περιοχὴ m μπορεῖ νὰ μεταφερθεῖ κατὰ τὴν περίοδο t μία ποσότητα Π μὲ $\Pi = q_1 + q_2 + q_3$ ὅπου ἡ ποσότητα q_1 θὰ ἐφοδιάσε τὴν ζήτηση τῆς περιοχῆς γιὰ τὴν περίοδο t μὲ $q(m,t) \geqslant q_1 \geqslant O$, ἡ ποσότητα q_2 θὰ ἐφοδιάσει μέσω τῆς διαθέσιμης ἀποθήκης τὴν ζήτηση μιᾶς ἑπόμενης περιόδου $t + 1$



Σχῆμα: 3

ἢ $t+2$ κλπ. μὲ $d(m,t) \geq q_2 \geq O$ καὶ ἡ ποσότητα q_3 μέσω extra ἀποθήκης θὰ ἐφοδιάσει ἀντίστοιχα τὴν ζήτηση μιᾶς ἑπόμενης περιόδου, ὅπου στὴν περίπτωση $t=T$ εἶναι ὑποχρεωτικὰ $q_2 = O$, $q_3 = O$.

Ἀπὸ τὴν παραπάνω περιγραφὴ τὸ σχῆμα 3 εἶναι ἡ ἀπεικόνιση τῶν τρόπων τροφοδοσίας κάθε σημείου A_t, ὅπου οἱ ἑνωτικὲς γραμμὲς μὲ τὰ βελάκια καθορίζουν τοὺς τρόπους τροφοδοσίας ποὺ ἀναφέραμε.

Στὴν συνέχεια ὁρίζουμε τὸ κόστος ποὺ συνοδεύει τὴν κάθε περίπτωση τροφοδοσίας. Ἔτσι στὴν ἄμεση τροφοδοσία τὸ κόστος εἶναι μόνο μεταφορικὸ καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ δίκτυο μεταφορᾶς.

Στὴν τροφοδοσία μέσω τῆς διαθέσιμης ἀποθήκης τὸ κόστος $C = C^* \cdot \frac{\varepsilon}{12}$, ὅπου C^* εἶναι ἡ τιμὴ ἀγορᾶς τοῦ προϊόντος ἀνὰ τόννο καὶ ε ἕνα χρονικὸ ἐπιτόκιο. Ἔτσι τὸ κόστος C εἶναι ἡ ἀπώλεια τόκου γιὰ τὸ δεσμευμένο κεφάλαιο C^* ἀνὰ τόννο, γιὰ μιὰ περίοδο (μήνα). Πρακτικὰ στὶς ποσότητες προϊόντων ποὺ μεταφέρονται ἀνὰ περίοδο t ἀπὸ τὰ ἐργοστάσια στὶς περιοχές, ἀντιστοιχεῖ ἕνα κόστος ἀγορᾶς C^* τοῦ προϊόντος ἀνὰ τόννο ποὺ καταβάλλεται ἀπὸ τὶς «περιοχὲς» στὰ «ἐργοστάσια» κατὰ τὴν ἴδια περίοδο t. Συμπερασματικά, μὲ τὴ χρήση τῆς διαθέσιμης ἀποθήκης γιὰ τὴν διάθεση τοῦ προϊόντος γιὰ μελλοντικὴ ζήτηση, ἡ ἀντίστοιχη ἀξία C^* θὰ εἰσπραχθεῖ ἀπὸ τὸν τελικὸ καταναλωτὴ σὲ μιὰ ἑπόμενη περίοδο $t+1$ ἢ $t+2$ κλπ. μὲ δέσμευση τοῦ κεφαλαίου γιὰ μιὰ ἢ δυὸ κλπ. περιόδους καὶ ἀπώλεια τόκου C, 2C κλπ. Στὴν περίπτωση ποὺ ἡ τιμὴ ἀγορᾶς C^* δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ γιὰ ὅλα τὰ ἐργοστάσια, τότε μποροῦμε νὰ πάρουμε τὴν C^* μὲ προσέγγιση τοῦ σταθμικοῦ μέσου. Στὸν καθορισμὸ τοῦ κόστους γιὰ τὴν χρήση τῆς διαθέσιμης ἀποθήκης, παρατηροῦμε ὅτι τὸ κόστος C εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ ὁποιοδήποτε κόστος ἐνοικίου ἀποθήκης. Αὐτὸ ὀφείλεται στὸ ὅτι τὸ μέγεθος τῆς $d(m)$ ὁρίσθηκε ἀποκλειστικὰ γιὰ τὸ συγκεκριμένο προϊόν, ὁπότε κάθε κενὸς χῶρος $d(m,t)$ μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ χωρὶς νὰ κοστολογηθεῖ μὲ πρόσθετο ἐνοίκιο.

Τὸ κόστος $CR(m)$ γιὰ τὴν χρήση extra ἀποθήκης, εἶναι τὸ προσεγγιστικὸ κόστος ἐνοικίου ἀποθήκης ἀνὰ χωρητικότητα τόνου, γιὰ ὅλο τὸ διάστημα τῶν περιόδων (ἢ χρόνο) καὶ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν περιοχὴ m. Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ κόστος $CR(m)$ ἡ χρήση extra ἀποθήκης ἐπιβαρύνεται καὶ ἀπὸ τὸ κόστος C ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ κάθε τμῆμα $C_{t-1}C_t$ μέσω τοῦ ὁποίου μπορεῖ νὰ γίνει ἡ τροφοδοσία τοῦ σημείου A_t μὲ $t = 2,3, \ldots T-1$ ἢ μέσω τοῦ $C_{T-1}A_T$ γιὰ τὴν τροφοδοσία τοῦ A_T, ὅπου τὸ κόστος C ἔχει τὴν ἴδια τιμὴ ὅπως καὶ στὴν περίπτωση τῆς διαθέσιμης ἀποθήκης. Ἔτσι ἀπὸ ἕνα σημεῖο A_t μὲ $t \neq T$ μποροῦμε νὰ ἐφοδιάσουμε μέσω extra ἀποθήκης, ἀφοῦ περάσουμε ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα διαδοχικὰ τμήματα, ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο $A_{t'}$ μὲ $t' > t$ καὶ $t' = 2, 3, \ldots, T$ μὲ ἀντίστοιχο προσθετικὸ κόστος $CR(m) + (t' - t).C$, ὅπου τὸ κόστος κατὰ τὴν διεύθυνση $C_t'A_t'$ εἶναι O γιὰ $t' \neq T$.

Ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς τρόπους τροφοδοσίας ποὺ ἀφοροῦν τὸν ἐφοδιασμὸ μιᾶς περιοχῆς μέσω τῶν ἀποθηκῶν της, ἐξετάζουμε καὶ τὴν ἀκόλουθη περίπτωση. Μία ποσότητα προϊόντων ἀποθηκευμένη στὴν διαθέσιμη ἀποθήκη d(m,t) ἢA_tB_t μπορεῖ νὰ ἐφοδιάσει ἀπὸ τὸ B_t τὴ ζήτηση τοῦ σημείου A_{t+1} ἢ ἀπὸ τὸ B_t νὰ ἐφοδιάσει τὴν ζήτηση A'_{t+1} μιᾶς ἄλλης περιοχῆς m' μέσω τοῦ ἀντίστοιχου σημείου B'_t.

Στὸ σχῆμα 4 ἔχουμε ἀπεικονίσει τὶς δύο περιοχὲς m καὶ m' μὲ τὴν δυνατότητα ἐφοδιασμοῦ μεταξύ των κατὰ τὸν τρόπο ποὺ περιγράψαμε.

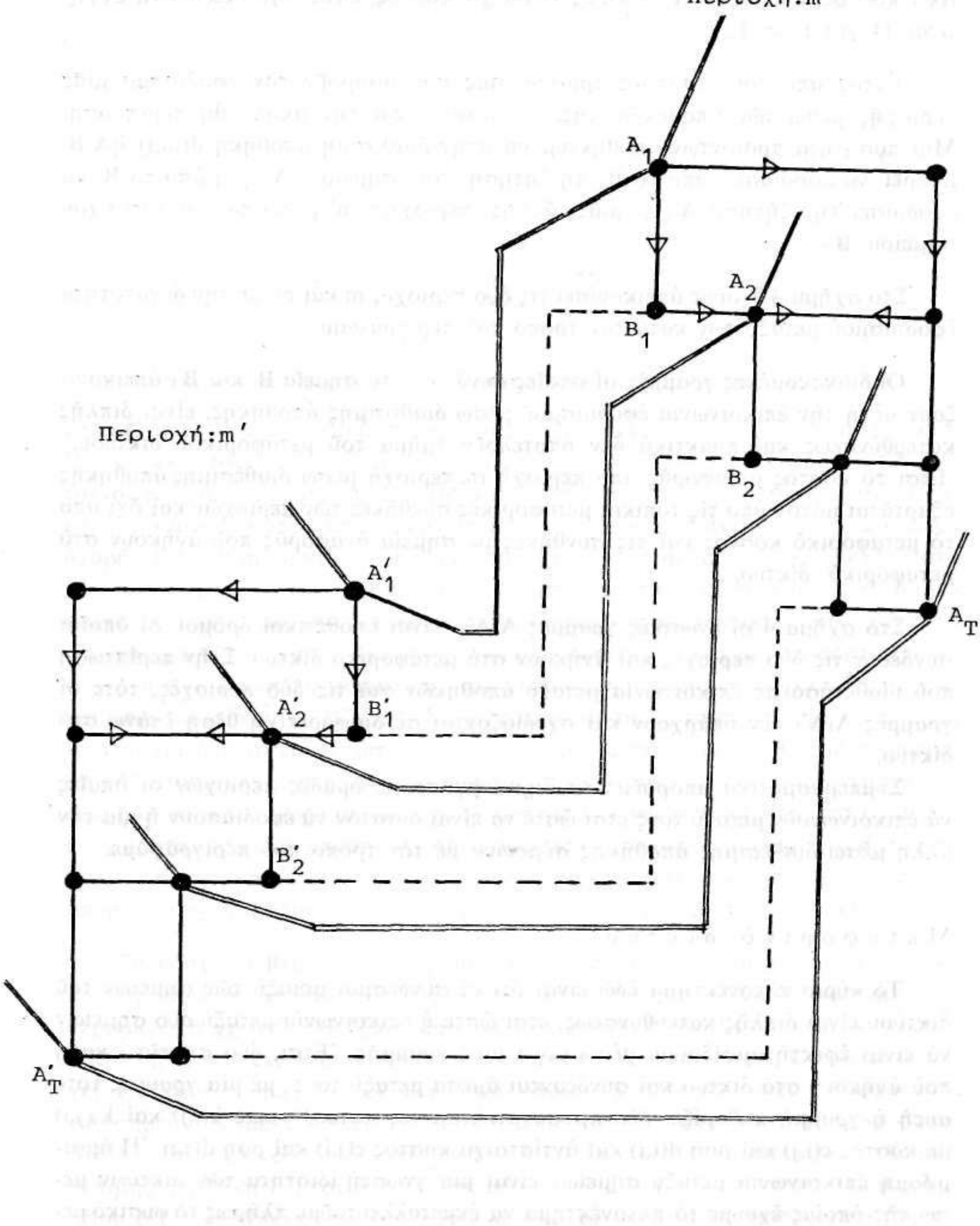
Οἱ διακεκομένες γραμμὲς οἱ ὁποῖες συνδέουν τὰ σημεῖα B_t καὶ B'_t ἀπεικονίζουν αὐτὴ τὴν ἐπικοινωνία ἐφοδιασμοῦ μέσω διαθέσιμης ἀποθήκης, εἶναι διπλῆς κατευθύνσεως καὶ πρακτικὰ δὲν ἀποτελοῦν τμῆμα τοῦ μεταφορικοῦ δικτύου. Ἔτσι τὸ κόστος μεταφορᾶς ἀπὸ περιοχὴ σὲ περιοχὴ μέσω διαθέσιμης ἀποθήκης ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὶς τοπικὲς μεταφορικὲς συνθῆκες τῶν περιοχῶν καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ μεταφορικὸ κόστος καὶ τὶς συνθῆκες μὲ σημεῖα ἀναφορᾶς ποὺ ἀνήκουν στὸ μεταφορικὸ δίκτυο.

Στὸ σχῆμα 4 οἱ ἑνωτικὲς γραμμὲς $A_tA'_t$ εἶναι ὑποθετικοὶ δρόμοι οἱ ὁποῖοι συνδέουν τὶς δύο περιοχὲς καὶ ἀνήκουν στὸ μεταφορικὸ δίκτυο. Στὴν περίπτωση ποὺ υἱοθετήσουμε ἐπικοινωνία μεταξὺ ἀποθηκῶν γιὰ τὶς δύο περιοχές, τότε οἱ γραμμὲς $A_tA'_t$ δὲν ὑπάρχουν καὶ σχεδιάζονται σὲ διαφορετικὴ θέση ἐπάνω στὸ δίκτυο.

Συμπερασματικὰ μποροῦμε νὰ δημιουργήσουμε ὁμάδες περιοχῶν οἱ ὁποῖες νὰ ἐπικοινωνοῦν μεταξύ τους ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφοδιάσουν ἡ μία τὴν ἄλλη μέσω διαθέσιμης ἀποθήκης σύμφωνα μὲ τὸν τρόπο ποὺ περιγράψαμε.

Μεταφορικὸ δίκτυο

Τὸ κύριο πλεονέκτημα ἐδῶ εἶναι ὅτι οἱ σύνδεσμοι μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ δικτύου εἶναι διπλῆς κατευθύνσεως, ἔτσι ὥστε ἡ ἐπικοινωνία μεταξὺ δύο σημείων νὰ εἶναι ἐφικτὴ ἀμφίδρομα μέσω μόνο μίας γραμμῆς. Ἔτσι, δύο σημεῖα i καὶ j ποὺ ἀνήκουν στὸ δίκτυο καὶ συνδέονται ἄμεσα μεταξύ τους μὲ μία γραμμή, τότε αὐτὴ ἡ γραμμὴ καθορίζει δύο προσανατολισμένες κατευθύνσεις k(i,j) καὶ k (j,i) μὲ κόστος c(i,j) καὶ ροὴ d(i,j) καὶ ἀντίστοιχα κόστος c(j,i) καὶ ροὴ d(j,i). Ἡ ἀμφίρδομη ἐπικοινωνία μεταξὺ σημείων εἶναι μία γνωστὴ ἰδιότητα τῶν δικτύων μέσω τῆς ὁποίας ἔχουμε τὸ πλεονέκτημα νὰ ἐκμεταλλευτοῦμε πλήρως τὸ φυσικὸ μεταφορικὸ δίκτυο. Ἕνα ἐμπόδιο σ' αὐτὸ τὸ πλεονέκτημα εἶναι ὅτι γιὰ τὴν ἐπίλυση



Σχήμα : 4

προβλημάτων μέσω ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ ἀπαιτεῖται μία κωδικοποίηση βάσει τῆς ὁποίας διευκολύνεται ἡ ἐφαρμογὴ ἑνὸς ἀλγορίθμου ἐπίλυσης. Αὐτὴ ἡ κωδικοποίηση, στὴν περίπτωση δικτύων μὲ πολλὰ σημεῖα, ἐὰν δὲν γίνεται αὐτόματα, εἶναι πολὺ ἐπίπονη ἐργασία στὸ νὰ γίνει μὲ manual τρόπο γιὰ νὰ δοθεῖ στὸν ὑπολογιστή.

Ἕνας τρόπος γιὰ νὰ ἀποφύγουμε τὴν δυσκολία κωδικοποίησης εἶναι, νὰ δώσουμε στὸ μεταφορικὸ δίκτυο μία συμμετρικὴ μορφὴ πάνω στὴν ὁποία εὔκολα γίνεται αὐτόματη κωδικοποίηση. Κάτι τέτοιο ὅμως ἔχει σὰν ἀποτέλεσμα νὰ χάνουμε ἐπαφὴ μὲ τὸ φυσικὸ μεταφορικὸ δίκτυο, καὶ τὸ μοντέλο μὲ τὸ ὁποῖο περιγράφουμε τὸ φαινόμενο νὰ μὴν εἶναι πολὺ εὐέλικτο.

Εὐτυχῶς τὸ ἐμπόδιο γιὰ αὐτόματη κωδικοποίηση ξεπεράστηκε μὲ ὡρισμένες μαθηματικὲς τεχνικὲς ἀμφιμονοσήμαντης ἀντιστοιχίας μεταξὺ σημείων.

Ὑποθέτοντας ὅτι τὸ δίκτυο ἔχει N σημεῖα τὰ ὁποῖα συνδέονται σύμφωνα μὲ τὸ φυσικὸ μεταφορικὸ δίκτυο, τότε σὲ κάθε σημεῖο η τοῦ δικτύου, ὅπου $\eta = 1, 2, \ldots, N$, προσαρτίζουμε δύο ἀκέραιες συναρτήσεις $f1(\eta)$ καὶ $f2(\eta)$. Θεωροῦμε μία συγκεκριμένη διάταξη Δ τῶν σημείων τοῦ δικτύου, καὶ ἔστω $\Delta = \{1,2,\ldots N\}$, τότε ἡ $f2(\eta)$ ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν σημείων τοῦ δικτύου τὰ ὁποῖα συνδέονται ἄμεσα μὲ τὸ η, καὶ ἡ $f1(\eta)$ ὁρίζεται ὡς τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν f2 ποὺ προηγοῦνται τοῦ

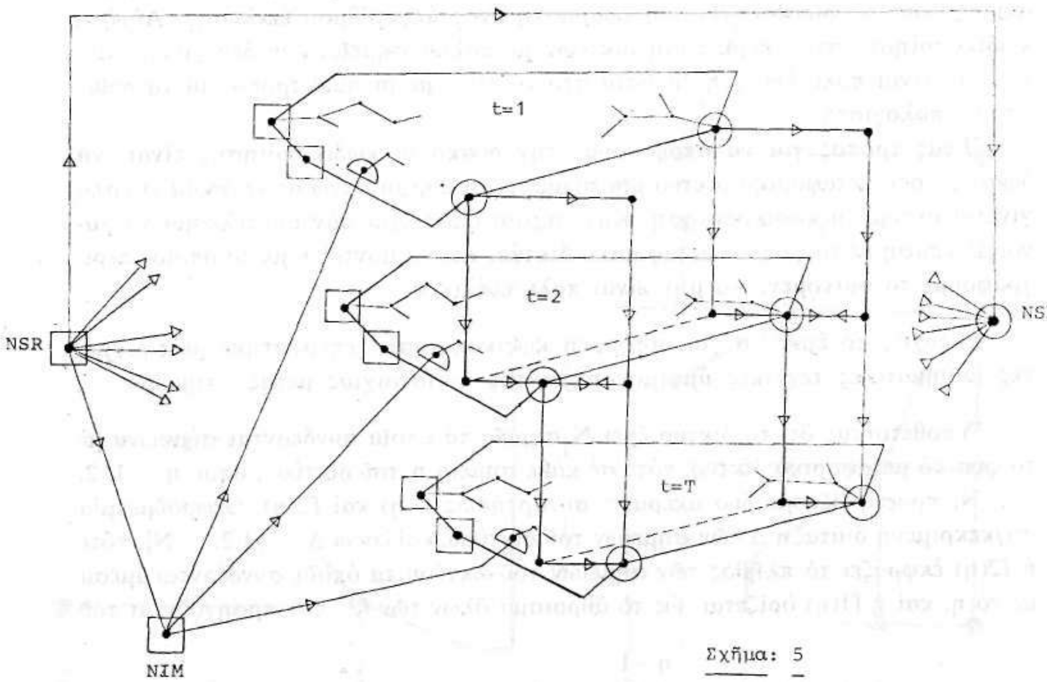
η σύμφωνα μὲ τὴν Δ ἢ $f1(\eta) = \sum_{i=1}^{\eta-1} f2(i)$ γιὰ ὅλα τὰ $\eta = 1, 2, \ldots N$.

Βάσει τῶν παραπάνω σὲ κάθε η μὲ $f1(\eta)$, $f2(\eta)$ καὶ τὴν Δ, ἡ συνάρτηση $f(j)$ εἶναι ἕνα σημεῖο η΄ τοῦ δικτύου τὸ ὁποῖο συνδέεται μὲ τὸ η, καὶ j εἶναι ἕνας δείκτης ἐξαρτώμενος ἀπὸ τὶς $f1(\eta)$ καὶ $f2(\eta)$. Ἀπὸ αὐτὲς τὶς συναρτήσεις καὶ μὲ μία ἁπλῆ τροφοδοσία στὸν ἠλεκτρονικὸ ὑπολογιστή, ἐπιτυγχάνουμε τελείως αὐτόματα μία full computerized κωδικοποίηση, σημείων, ἑνωτικῶν γραμμῶν, κατευθύνσεων, κόστους καὶ ροῆς σύμφωνα μὲ τὰ δεδομένα τοῦ μεταφορικοῦ δικτύου.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀρχικὸς στόχος εἶναι ἡ περιγραφὴ ἑνὸς μοντέλου γιὰ ὅλο τὸ πλῆθος τῶν περιόδων, αὐτὴ ἡ κωδικοποίηση μὲ κατάλληλες ἀριθμητικὲς τεχνικές, γίνεται ἐκμεταλλεύσιμη γιὰ κάθε περίοδο $t = 1, 2, \ldots, T$.

Τὸ Μαθηματικὸ μοντέλο

Ἐὰν φαντασθοῦμε ὅτι τὸ μεταφορικὸ δίκτυο εὑρίσκεται ἐπάνω σ᾽ ἕνα ἐπίπεδο , τότε τὸ σχῆμα 5, ἀπεικονίζει τὸ μεταφορικὸ δίκτυο καὶ τὶς ἀποθῆκες γιὰ κάθε περίοδο $t = 1, 2, \ldots, T$. Μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο, τὸ μαθηματικὸ μοντέλο ποὺ



Σχῆμα: 5

περιγράφει τὸ φαινόμενο γιὰ ὅλες τὶς περιόδους, εἶναι ἕνα μαθηματικὸ δίκτυο.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα NSR καὶ NSI ποὺ δὲν ἔχουν συγκεκριμένη ἔννοια, ἀλλὰ μόνον ἀλγοριθμική, ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα ἔχουν συγκεκριμένη σημασία. Π.χ. τὰ σημεῖα μέσα στὰ τετράγωνα εἶναι ἐργοστάσια, τὰ σημεῖα σὲ κύκλους εἶναι περιοχὲς καὶ τὰ σημεῖα σὲ ἡμικύκλια ἀπεικονίζουν τὴν δυνατὴ τροφοδοσία τῶν περιοχῶν μέσω εἰσαγομένου προϊόντος, στὴν περίπτωση ποὺ ἡ παραγωγὴ τῶν ἐργοστασίων δὲν εἶναι ἐπαρκής. Τὸ σημεῖο NIM ἔχει πλασματικὴ ἔννοια ἐργοστασίου καὶ συνδέεται μὲ τὰ ἡμικύκλια μὲ ἀντίστοιχο μεταφορικὸ κόστος ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴ θέση τῆς παραγωγικῆς πηγῆς ποὺ μπορεῖ νὰ μᾶς διαθέσει τὴν ἀπαιτούμενη ποσότητα εἰσαγωγῆς.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα NSR, NSI, NIM τὰ ὁποῖα εἶναι μοναδικά, ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα ποὺ ἀναφέραμε καὶ ὁτιδήποτε ἄλλα συνδετικὰ σημεῖα τοῦ μεταφορικοῦ δικτύου, εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι πολλὰ σύμφωνα μὲ τὸ μεταφορικὸ δίκτυο.

Βάσει τῆς κωδικοποίησης τὸ κωδικοποιημένο μοντέλο γιὰ ὅλες τὶς περιόδους, ὅπως περιγράφεται στὸ σχῆμα, ἀναπτύσσεται κατάλληλα μέσα στὸν Ἠλεκτρονικὸ ὑπολογιστὴ ὑπὸ μορφὴ δικτύου καὶ ἐπιλύεται μὲ τὴν ἐφαρμογὴ ἑνὸς μαθηματικοῦ ἀλγορίθμου.

Ἀλγόριθμος

Ἡ μέθοδος ἡ ὁποία ἐπιλύει αὐτῆς τῆς μορφῆς τὰ προβλήματα, εἶναι ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς μὲ μιὰ εἰδικὴ διαμόρφωση γιὰ προβλήματα ὑπὸ μορφὴ δικτύου. Ἐδῶ χρησιμοποιήσαμε τὴν κλασσικὴ Οὐγγρικὴ μέθοδο, ἡ ὁποία βασίζεται στὴν τεχνικὴ Primal - Dual καὶ στὸ περίφημο maxime flow— minimal cut θεώρημα τῶν Ford - Fulkerson. Ἡ μέθοδος ἐπίλυσης στὴν γενικὴ βιβλιογραφία ἀπαντᾶται καὶ μὲ ἄλλα ὀνόματα ἢ μὲ ἄλλες μικροδιαφορὲς στὴν ἀλγοριθμικὴ ἐφαρμογὴ ἢ τὶς ἀρχικὲς συνθῆκες στὴν Primal - Dual. Ἐπίσης ἀναφέρουμε ὅτι στὴν ἐφαρμογὴ αὐτῆς τῆς μεθόδου, ἡ διέλευση ποσότητας μεταξὺ δύο σημείων ἔχει ἀλγεβρικὴ ἔννοια μὲ ἀποτέλεσμα μία ἑνωτικὴ γραμμὴ μεταξὺ δύο σημείων νὰ ὁρίζει δύο ἀντίθετες διευθύνσεις μὲ χρήση μόνον μίας γραμμῆς. Αὐτὸ στὴν πρακτικὴ ἐπίλυση προβλημάτων, κατεβάζει τὸ χρησιμοποιούμενο Dimension στὸ μισό.

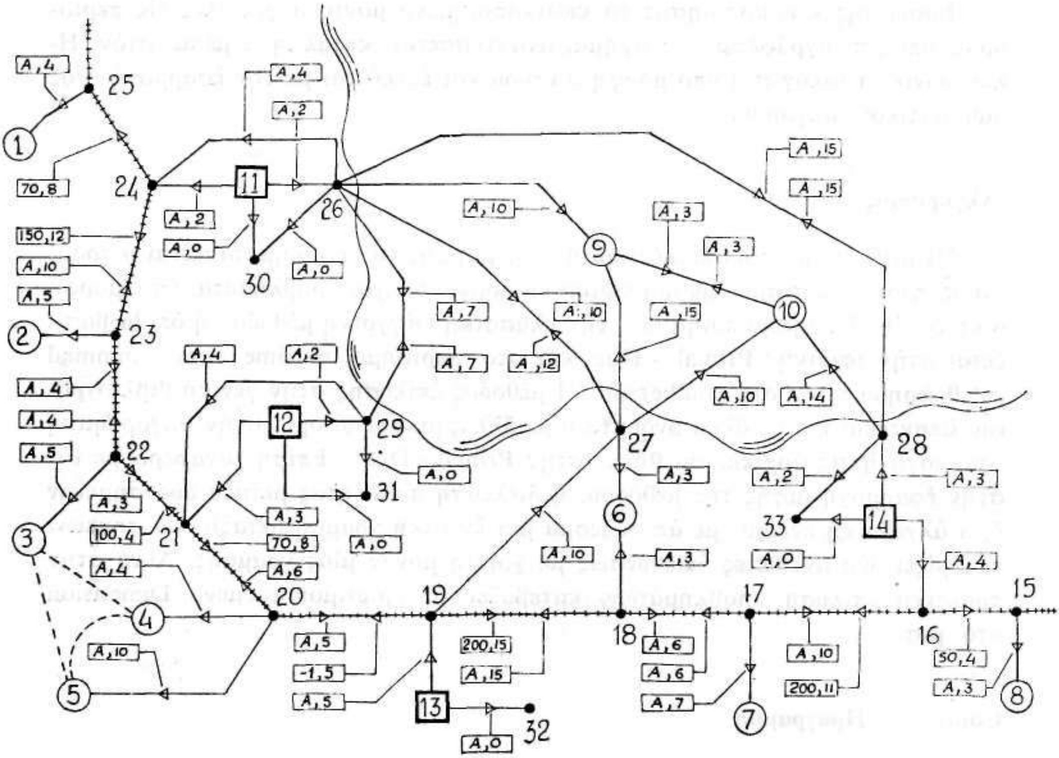
Computer **Πρόγραμμα**

Γιὰ τὸ μοντέλο ποὺ περιγράψαμε ἀναπτύχθηκε ἕνα πρόγραμμα σὲ Fortran IV τὸ ὁποῖο σὲ μορφὴ τὲστ ἔδωσε ἀποτελέσματα μὲ minimum μεταφορικὸ κόστος μὲ προσέγγιση στὴν optimum λύση ἀρκετὰ γρήγορη σὲ IBM - 370. Στὴν ἐφαρμογὴ τοῦ ἀλγορίθμου χρησιμοποιήθηκε ἡ τεχνικὴ διατηρήσεως τῶν labeled σημείων γιὰ πιὸ γρήγορη σύγκλιση στὸ optimum.

Στὴ συνέχεια ἀναφέρουμε ἕνα χαρακτηριστικὸ παράδειγμα ἐφαρμογῆς, στὸ ὁποῖο τὸ φαινόμενο παραγωγὴ - μεταφορὰ - κατανάλωση ἐπαναλαμβάνεται γιὰ 12 μῆνες, ὅπου οἱ ποσότητες παραγωγῆς καὶ κατανάλωσης ἔχουν διάφορα μεγέθη στὴν μηνιαία ἐπανάληψη τοῦ φαινομένου.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Τὸ σχῆμα 6 παριστᾶ ἕνα ὑποθετικὸ μεταφορικὸ δίκτυο μὲ τὴν διαθέσιμη ποικιλία μεταφορικῶν μέσων, σιδηροδρομικὸ δίκτυο, θαλάσσιο δίκτυο, λιμάνια, φορτηγὰ κλπ. Ἐδῶ τὰ σημεῖα σὲ κύκλους ἀπὸ 1 ἕως 10 εἶναι οἱ περιοχὲς κατανάλωσης , τὰ σημεῖα στὰ τετράγωνα 11 ἕως 14 εἶναι ἐργοστάσια καὶ τὰ ὑπόλοιπα σημεῖα παριστοῦν κόμβους σύμφωνα μὲ τὴν θέση τους ἐπάνω στὸ δίκτυο καὶ εἶναι συνδεδεμένα μὲ τὸν τρόπο ποὺ ἀπεικονίζονται.

Ἐπειδὴ στὴν πράξη, ἡ χρήση ἑνὸς τμήματος μεταξὺ δύο σημείων ἑνὸς δικτύου



Σχῆμα: 6

δὲν ἔχει τὸ ἴδιο μεταφορικὸ κόστος ἂν χρησιμοποιηθεῖ σὰν κοινὴ δίοδος ἀπὸ διαφορετικὰ σημεῖα ἀναφορᾶς, γι' αὐτοὺς τοὺς λόγους καθορίζουμε στὸ γενικὸ μοντέλο σημεῖα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἔννοια τῆς κατ' εὐθείαν μεταφορᾶς ἀπὸ κάθε τέτοιο σημεῖο πρὸς ὅλες τὶς περιοχὲς μὲ τὸ ἀντίστοιχο μεταφορικὸ κόστος, τὸ ὁποῖο ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὶς συνθῆκες ποὺ ἐπικρατοῦν στὴν περιοχὴ κάθε τέτοιου σημείου καὶ τὴν ἀπόσταση ἀπὸ κάθε περιοχὴ κατανάλωσης. Αὐτὸ γίνεται κυρίως στὴν χρήση φορτηγῶν αὐτοκινήτων γιὰ μεταφορά. Πολὺ συχνὰ στὴν πράξη τὸ μεταφορικὸ κόστος ἀπὸ ἕνα τόπο Α πρὸς δύο συνεχόμενους Β καὶ Γ δίνεται ἀπὸ τὸ Α στὸ Β καὶ ἀπὸ τὸ Α στὸ Γ.

Στὸ παράδειγμα τὰ σημεῖα 30 ἕως 33 ἔχουν τὴν ἔννοια τῆς κατ' εὐθείαν μεταφορᾶς μὲ φορτηγὰ αὐτοκίνητα, καὶ στὸ σχῆμα 6 δὲν ἔχουμε σχεδιάσει τὶς ἀντίστοιχες ἑνωτικὲς γραμμές, μὲ τὶς περιοχὲς κατανάλωσης. Τέλος, οἱ περιοχὲς 3, 4 καὶ 5 ἀποτελοῦν μία ὁμάδα οἱ ὁποῖες ἐπικοινωνοῦν μέσω ἀποθηκῶν καὶ τὰ σημεῖα 28, 29 εἶναι π.χ. λιμάνια ἀπὸ τὰ ὁποῖα σὲ περίπτωση ἀνεπάρκειας τῆς παραγωγῆς, νὰ μποροῦμε νὰ ἐφοδιάσουμε τὶς περιοχὲς μὲ εἰσαγόμενο προϊὸν ἀπὸ μία παραγωγικὴ πηγὴ ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ μεταφορικοῦ δικτύου καὶ ἡ ὁποία συνδέεται μὲ τὰ σημεῖα 28, 29 μὲ ἕνα ἀντίστοιχο μεταφορικὸ κόστος.

Κάθε ἑνωτικὴ γραμμὴ μεταξὺ δύο σημείων τοῦ σχήματος, εἶναι διπλῆς κατευθύνσεως καὶ κάθε διεύθυνση συνοδεύεται ἀπὸ τὶς ποσότητες ἐπιτρεπτῆς ροῆς καὶ κόστους, οἱ ὁποῖες καθορίζονται ἀπὸ τὸ μεταφορικὸ δίκτυο. Αὐτὲς οἱ ποσότητες στὸ σχῆμα περικλείονται μέσα στὰ ὀρθογώνια καὶ ὑποδεικνύουν τὴν διεύθυνση στὴν ὁποία ἀναφέρονται.

Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς μέσα σὲ κάθε ὀρθογώνιο ἀφορᾶ τὴν δυνατότητα ροῆς σὲ μονάδες καὶ ὁ δεύτερος τὸ κόστος μεταφορᾶς ἀνὰ μονάδα. Μία ἑνωτικὴ γραμμὴ ποὺ καθορίζεται κατὰ τὴν μία μόνο διεύθυνση, ἡ ἀντίθετή της ἔχει ροὴ O καὶ κόστος ἄπειρο, ἔτσι ὥστε ἡ κυκλοφορία νὰ εἶναι δυνατὴ σύμφωνα μὲ τὴν καθορισμένη διεύθυνση.

Ροή, ἡ ὁποία παρίσταται μὲ τὸ γράμμα A συνεπάγεται ἀπεριόριστο διέλευση, χωρὶς φράγμα. Σὲ περίπτωση ποὺ ἡ μεταφορικὴ ἱκανότητα μεταξὺ δύο σημείων εἶναι μεταβλητὴ σὲ κάθε περίοδο, τότε ἡ ροὴ παρίσταται μὲ ἕνα ἀκέραιο ἀρνητικὸ ἀριθμό, ἔστω h καὶ ἡ πραγματικὴ ροή, γιὰ κάθε περίοδο, δίδεται ἀπὸ τὴν σχέση $d = d(x,t)$

ὅπου $x = -h$ καὶ $t = 1, 2, \ldots, T$.

Ἔτσι ἐὰν ὑπάρχουν X τέτοιες διευθύνσεις μὲ μεταβλητὴ ροὴ ἀνὰ περίοδο, τότε καθορίζουμε τὶς ἀντίστοιχες ροὲς μὲ h ὅπου $O > h \geqslant -X$.

Τέλος χωρὶς βλάβη ὑποθέτουμε ὅτι τὸ κόστος μεταφορᾶς, σὲ κάθε διεύθυνση, παραμένει σταθερὸ σὲ ὅλο τὸ διάστημα τῶν περιόδων τοῦ φαινομένου.

Μὲ τὸ διαθέσιμο μεταφορικὸ δίκτυο, καὶ δίνοντας τυχαῖες τιμὲς παραγωγῆς καὶ κατανάλωσης ἀνὰ περίοδο, αὐτὸ τὸ πρόβλημα πῆρε τὴν μορφὴ μοντέλου ὅπως δίνεται στὸ σχῆμα 5 μὲ διαθέσιμες καὶ extra ἀποθῆκες καὶ λύθηκε ταυτόχρονα γιὰ τοὺς 12 μῆνες. Ἐπειδὴ τὸ computer output τῆς λύσεως εἶναι ἀρκετὰ ἐκτεταμένο, ἀναφέρουμε ὅτι λύση ποὺ πήραμε μὲ minimum κόστος μεταφορᾶς καὶ ἀποθηκῶν, ἦταν ἀρκετὰ ἐνδεικτικὴ στὴν χρήση τῶν διαθεσίμων ἀποθηκῶν ἐπίσης ἔδοσε λύση μεταξὺ ἀποθηκῶν γιὰ τὶς περιοχὲς 3, 4 καὶ 5 καὶ τέλος τὴν εἰσαγωγὴ προϊόντος ἀπὸ τὰ σημεῖα 28, 29.

Ἡ σελίδα 708 εἶναι ἕνα ἀντίγραφο τοῦ computer output γιὰ τὴν λύση στὸν 10ο μήνα.

```
1  NETWORK ON MONTH 10
2  FROM  9 TO 10 LINK 10 AMOUNT 100
3  FROM 11 TO 24 LINK 15 AMOUNT 220
4  FROM 11 TO 25 LINK 16 AMOUNT 250
5  FROM 11 TO 30 LINK 17 AMOUNT  30
6  FROM 12 TO 21 LINK 18 AMOUNT 100
7  FROM 13 TO 19 LINK 21 AMOUNT 150
8  FROM 14 TO 15 LINK 23 AMOUNT 150
9  FROM 14 TO 33 LINK 25 AMOUNT  50
10 FROM 15 TO  8 LINK  9 AMOUNT  50
11 FROM 16 TO 15 LINK 26 AMOUNT  50
12 FROM 16 TO 17 LINK 27 AMOUNT 100
13 FROM 17 TO  7 LINK  8 AMOUNT 100
14 FROM 19 TO 20 LINK 30 AMOUNT 100
15 FROM 19 TO 27 LINK 31 AMOUNT  50
16 FROM 20 TO  4 LINK  4 AMOUNT  50
17 FROM 20 TO  5 LINK  5 AMOUNT  50
18 FROM 21 TO 22 LINK 33 AMOUNT 100
19 FROM 22 TO  3 LINK  3 AMOUNT 100
20 FROM 23 TO  2 LINK  2 AMOUNT 150
21 FROM 24 TO 23 LINK 36 AMOUNT 150
22 FROM 24 TO 25 LINK 37 AMOUNT  70
23 FROM 25 TO  1 LINK  1 AMOUNT  70
24 FROM 26 TO  9 LINK 11 AMOUNT 200
25 FROM 26 TO 27 LINK 39 AMOUNT  50
26 FROM 27 TO  6 LINK  7 AMOUNT 100
27 FROM 30 TO  1 LINK 45 AMOUNT  30
28 FROM 33 TO  8 LINK 82 AMOUNT  50
```

῾Ο κύριος λόγος ποὺ δώσαμε αὐτὸ τὸ παράδειγμα εἶναι ὅ,τι, σὲ ἕνα συγκεκριμένο πρόβλημα μεταφορᾶς τὸ ὁποῖο γίνεται ἐπάνω σ᾽ ἕνα διαθέσιμο μεταφορικὸ δίκτυο, μποροῦμε νὰ ἔχουμε μία ἄμεση ἐπαφὴ μὲ τὴν φυσικὴ κατάσταση τοῦ φαινομένου. Ἔτσι παίρνοντας ἕνα γεωγραφικὸ χάρτη, ἀριθμοῦμε ἐπάνω στὸν χάρτη ὅλα τὰ σημεῖα ποὺ παίρνουν μέρος στὴν παραγωγὴ - μεταφορὰ - κατανάλωση καὶ μὲ αὐτὴ τὴν κωδικοποίηση ἐπιλύουμε τὸ πρόβλημα γιὰ 12 μῆνες.

Αὐτὴ ἡ εὐκολία ἐπαφῆς μὲ τὸ μεταφορικὸ δίκτυο εἶναι μεγάλο πλεονέκτημα γιὰ μεγάλα καὶ πολύπλοκα μεταφορικὰ δίκτυα.

Στὴ συνέχεια ἀναφέρουμε ὁρισμένες παρατηρήσεις, μειονεκτήματα καὶ πλεονεκτήματα στὴν ἐφαρμογὴ αὐτῆς τῆς μεθόδου ποὺ περιγράψαμε.

Παρατηρήσεις

1. Ἀναφέραμε παραπάνω ὅτι τὸ κόστος CR(m) γιὰ τὴν χρήση extra ἀποθήκης, εἶναι τὸ προσεγγιστικὸ κόστος ἐνοικίου ἀποθήκης ἀνὰ χωρητικότητα τόννου γιὰ ὅλο τὸ διάστημα τῶν περιόδων (ἢ χρόνο) ποὺ διατίθεται στὴν περιοχὴ m. Αὐτὸ γίνεται διότι πρακτικὰ ἡ ἐνοικίαση μιᾶς ἀποθήκης παραχωρεῖται τουλάχιστον γιὰ ἕνα χρόνο. Ἔτσι μία ποσότητα προϊόντων Q ποὺ θὰ ἀποθηκευτεῖ σὲ extra ἀποθήκη γιὰ νὰ ἐφοδιάσει μία περίοδο t, μετὰ τὸ τέλος τῆς περιόδου t ὁ χῶρος Q θὰ εἶναι κενός, ἄρα διαθέσιμος καὶ πρακτικὰ κοστολογημένος γιὰ ἕνα χρόνο. Λογικὰ ἀναμένεται ὅτι ἡ διαθέσιμη ἀποθήκη μετὰ τὴν περίοδο t θὰ ἔχει αὐξηθεῖ κατὰ Q, ἔτσι ὥστε μετὰ τὴν περίοδο t ἐκτὸς ἀπὸ τὴν διαθέσιμη ἀποθήκη d(m,t), ἐὰν εἶναι ἀνάγκη, ὁ χῶρος Q νὰ μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ σὰν ἀποθήκη γιὰ νὰ ἐφοδιάσει μία περίοδο t′ μετὰ τὴν t μὲ μία ποσότητα τουλάχιστον Q χωρὶς νὰ κοστολογηθεῖ μὲ ἐνοίκιο. Ἡ ἀνάλυση ποὺ περιγράψαμε καὶ τὸ μοντέλο ποὺ χρησιμοποιοῦμε κάτι τέτοιο δὲν τὸ «προβλέπει» καὶ πάντοτε κοστολογεῖ τὴν χρήση extra ἀποθήκης ἄσχετα μὲ τὸ παρελθόν. Αὐτὴ ἡ ἀδυναμία ὀφείλεται στὴν στατικὴ δομὴ τοῦ μοντέλου καὶ πρακτικὰ ἦταν ἀναπόφευκτη.

Ἡ ἀποτελεσματικὴ ἐπίλυση αὐτῆς τῆς μορφῆς προβλημάτων, στὰ ὁποῖα ὑπεισέρχεται σὰν παράμετρος ὁ χρόνος μὲ τὴν ἔννοια τῶν περιοδικῶν καταστάσεων τοῦ φαινομένου, γίνεται μὲ τὴν μέθοδο τοῦ Δυναμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

Δυστυχῶς ὅμως ἡ πρακτικὴ ἐφαρμογὴ αὐτῆς τῆς μεθόδου γιὰ τὸ συγκεκριμένο πρόβλημα εἶναι ἀδύνατος λόγω τῆς «πολυδιαστάσεως» τοῦ προβλήματος, ποὺ εἶναι πρακτικὸς περιορισμὸς στὴν ἐφαρμογὴ τοῦ Δυναμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

Παρακάτω ἀναφέρουμε ἕνα τρόπο μὲ τὸ ὁποῖον ἀντιμετωπίζεται μὲ ἐπιτυχία ἡ περίπτωση ἐπανακοστολόγησης extra ἀποθήκης.

2. Ἐκεῖνο ποὺ πρέπει νὰ προσέξουμε στὴν κατάστρωση αὐτοῦ τοῦ προβλή-

ματος, εἶναι οἱ ἀρχικὲς διαθέσιμες ἀποθῆκες d(m) ἔτσι ὥστε κάθε ποσότητα ποὺ μεταφέρεται ἀπὸ τὰ ἐργοστάσια σὲ κάθε περιοχὴ σὲ συσχέτιση μὲ τὴν περιοδικὴ ζήτηση q(m,t) νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποθηκεύεται.

Ὅπως ἀναφέραμε στὴν ἀρχή, ἡ τμηματικὴ μεταφορὰ καὶ ἡ κατ' εὐθείαν προώθηση στὸν τελικὸ καταναλωτὴ εἶναι δύο παράγοντες ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἐξαρτᾶται τὸ μέγεθος τῆς d(m) καὶ μὲ σωστὸ ὑπολογισμὸ αὐτῶν τῶν παραγόντων μπορεῖ νὰ ἐλαττωθεῖ.

Ἐπίσης ἕνας ἄλλος παράγων εἶναι καὶ ἡ κατανομὴ ζητήσεως σὲ κάθε περιοχὴ ἀπὸ τὸν τελικὸ καταναλωτή. Σ' ἕνα συγκεκριμένο πρόβλημα προτοῦ καθορίσουμε τὴν d(m) εἶναι σωστὸ νὰ ἐξετάσουμε αὐτὲς τὶς περιπτώσεις ποὺ ἀναφέραμε.

3. Ἀναφέραμε παραπάνω μία ἀδυναμία σχετικὰ μὲ τὶς extra ἀποθῆκες. Εὔκολα διαπιτώνουμε ὅτι ὅσο μικρότερο εἶναι τὸ μέγεθος τῶν κενῶν ἀποθηκῶν, τόσο πιθανότερο εἶναι νὰ ἀπαιτηθεῖ extra ἀποθήκη ἢ ἀκόμη, ὅταν οἱ γενικώτερες συνθῆκες προσφορᾶς - ζήτησης σὲ περιοδικὴ βάση δὲν εἶναι ὁμαλές. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι τὸ κόστος γιὰ extra ἀποθήκη εἶναι $CR(m) + (t' - t).C$ γιὰ τροφοδοσία ἀπὸ t περίοδο σὲ t', ἐνῶ τὸ κόστος γιὰ χρήση τῆς διαθέσιμης ἀποθήκης, εἶναι $(t' - t).C$ πολὺ οἰκονομικότερο, λόγω τοῦ ὑψηλοῦ κόστους ἐνοικίου CR(m).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. E. Goldstein - D. Youdine «Problemes particuliers de la programmation lineaire» - Editions MIR - Moscou.

2. R. Potts - R. Oliver «Flows in Transportation Networks», Academic Press.

3. T. C. Hu «Integer Programming and Network Flows», Addison - Wesley.

4. J. A. Tomlin «Minim um-Cost Multi-Commodity Network Flows», J. ORSA 14 1).