ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΗΜΟΣΙΕΣ ΕΠΕΝΔΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΟ ΑΚΑΘΑΡΙΣΤΟ ΕΘΝΙΚΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Ὑπὸ

ΑΝΤΩΝΙΟΥ ΖΗΣΟΥ καὶ **ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΤΖΙΑΦΕΤΑ**

Ὁ οἰκονομικὸς προγραμματισμὸς καὶ κυρίως ὁ χωροταξικὸς σχεδιασμὸς μιᾶς χώρας ἀπαιτοῦν αὐστηρὲς προδιαγραφὲς γιὰ τὴν ἐξέλιξη τῶν βασικῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν. Τὰ ἴδια ἰσχύουν καὶ γιὰ τὸν οἰκονομικὸ προγραμματισμὸ τῶν ἐπιχειρήσεων, ἀλλὰ σὲ μικρότερη κλίμακα. Εἶναι ἐπίσης γνωστὸ ὅτι εἶναι σχεδὸν ἀδύνατη ἡ προεκτίμηση τῶν μελλοντικῶν μεγεθῶν ἀπὸ μικροδεδομένα, λόγω ἐλλείψεως ἐπαρκῶν στοιχείων. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ ἀναγκάζει τοὺς προγραμματιστὲς νὰ καταφύγουν στὴν κατασκευὴ μονέλων μὲ βάση μακροδεδομένα τῶν τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν, ποὺ παρουσιάζουν, ὅμως, εὐρείας ἐκτάσεως ἀλληλο - καὶ αὐτοσυσχέτιση.

Στὴν ἐργασία αὐτὴ εἰσάγουμε τὴ στοχαστικὴ μεθοδολογία γιὰ τὴ διερεύνηση τῆς ἐξελίξεως τῶν βασικῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν, δηλαδὴ τοῦ ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος τῆς χώρας καὶ τῶν δημοσίων καὶ ἰδιωτικῶν ἐπενδύσεων. Ὅπως ἀποδεικνύεται καὶ ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀναλύσεως, ἡ ἐν γένει ἀναπτυξιακὴ πολιτικὴ μπορεῖ νὰ καθορισθεῖ μέσα στὰ πλαίσια ἐκθετικῶν στοχαστικῶν μοντέλων, δίνοντας ἔτσι τὴν δυνατότητα γιὰ ἐπαρκὴ πρόγνωση τῶν μελλοντικῶν ἐξελίξεων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Ἡ ἀνάπτυξη τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων καὶ ἰδιαίτερα τῆς Θεωρίας τῶν Στοχαστικῶν Ἀνελίξεων ποὺ ἀποτελεῖ τὸ δυναμικὸ μέρος αὐτῆς, ἔδωσαν τὴ δυνατότητα γιὰ μιὰ ρεαλιστικώτερη διατύπωση καὶ ἐπίλυση προβλημάτων σὲ ποικίλους ἐπιστημονικοὺς κλάδους. Τὸ προβάδισμα στὴν κίνηση αὐτὴ εἶχε ὁ τομέας τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν καὶ κυρίως ἡ μικρο - φυσική, ὅπου ἡ ἐπιτυχημένη ἐφαρμογή της στοχαστικῆς μεθοδολογίας ἀφενὸς μὲν ὡδήγησε στὴν ἐπίλυση πολλῶν προβλημάτων, ἀφετέρου δὲ ἀπέδειξε, σὲ μεγάλο βαθμό, τὴν ὕπαρξη τῆς στοχαστικῆς νομολογίας ποὺ διέπει τὰ φυσικὰ φαινόμενα.

Ἡ ἐφαρμογὴ στατιστικῶν μεθόδων στὴν Οἰκονομία καθυστέρησε σχεδὸν μισὸ αἰώνα (Tintner καὶ Sengupta, 1972) καὶ εἰσήχθη μόνο μετὰ τὴ χρησιμοποίηση μεθόδων τῆς Ἐπιχειρησιακῆς Ἔρευνας. Εἶναι γνωστὸ ὅτι μέθοδοι γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ χρησιμοποιήθηκαν μὲ ἐπιτυχία ἀπὸ ἀρκετοὺς οἰκονομολόγους (Dorfman, 1958). Αὐτὸ εἶχε σὰν ἀποτέλεσμα τὴν εὐρεία χρησιμοποίηση μεθόδων τῆς ἐπιχειρησιακῆς ἔρευνας ποὺ σὲ πολλὰ ἐξειδικευμένα προβλήματα εἰσήγαγε μεθόδους στοχαστικῆς ἀναλύσεως (Holt κ.ἄ. 1960, Whittle, 1963, Sengupta, 1967, Steindl, 1965).

Θὰ πρέπει στὸ σημεῖο αὐτὸ νὰ ἀναφέρουμε ὅτι ἡ ἐφαρμογὴ στοχαστικῶν μεθόδων στὸν Οἰκονομετρία ἔγινε παρεμπιπτόντως, χωρὶς ν' ἀλλάξει ἡ βασικὴ διατύπωση τοῦ προβλήματος. Οἱ οἰκονομέτρες, στὴν προσπάθειά τους νὰ ἐπεξηγήσουν τὶς διακυμάνσεις τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν, διαφοροποίησαν τὰ ντετερμινιστικὰ μοντέλα, εἰσάγοντας τυχαῖες μεταβλητὲς μὲ τὴ μορφὴ προσθετικῶν ὅρων. Π.χ., ὁ Haavelmo (1954) γιὰ τὴν κατασκευὴ μοντέλων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως θεωρεῖ κατ' ἀρχὴ τὸ βασικὸ μοντέλο :

$$y(t) = ay(t-1) + a_o$$

ποὺ ἀποτελεῖ πρώτης τάξεως διαφοροεξίσωση μὲ σταθεροὺς συντελεστὲς καὶ μὲ λύση:

$$y(T) = Aa^T + B \qquad T = 1, 2, \ldots\ldots, \tag{1.1}$$

ὅπου $B = a_o/(1-a)$ καὶ $y(0) = A + B$.

Περαιτέρω γιὰ νὰ ἑρμηνεύση τὴν ἐμφάνιση ἀποκλίσεων εἰσήγαγε τὴν τυχαία μεταβλητὴ u(t) μὲ γραμμικὴ σχέση, ὡς ἀκολούθως :

$$y(t) = ay(t-1) + a_o + u(t).$$

Ἔτσι, ἡ λύση διαφοροποιεῖται σημαντικά, ἔχοντας τὴ μορφή :

$$y(T) = Aa^T + B + \sum_{s=1}^{T-1} a^s u(T-s). \tag{1.2}$$

Ἐπὶ πλέον, ὑποθέτοντας ὅτι οἱ τυχαῖες μεταβλητὲς u (t) καὶ u (s) εἶναι στοχαστικὰ ἀνεξάρτητες, μὲ μέση τιμὴ 0 καὶ πεπερασμένη διασπορὰ σ^2, τότε, γιὰ $a^2 < 1$, βρίσκουμε τὴ διασπορὰ γιὰ τὴ μεταβλητὴ y (T) ἀπὸ τὴ σχέση :

$$\sigma^2_{y(T)} = \sigma^2 \sum_{s=1}^{T-1} a^{2s} = \frac{\sigma^2 (1-a^{2T})}{(1-a^2)}. \tag{1.3}$$

Κατ' αὐτὸ τὸν τρόπο εἶναι φανερὴ ἡ μεγάλη διαφοροποίηση ποὺ γίνεται στὸ μοντέλο μὲ τὴν εἰσαγωγὴ στοχαστικῶν ὅρων. Παρ' ὅλα αὐτά, ὅμως, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι δὲν ἀποκαλύπτεται ἡ στοχαστικὴ νομολογία ποὺ διέπει τὶς μεταβολὲς τῶν βασικῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν. Ὁ Bharucha - Reid (1960), στὸ ἱστορικὸ βιβλίο γιὰ τὶς ἐφαρμογὲς τῶν Στοχαστικῶν Ἀνελίξεων, παραθέτει ἀρκετὰ προβλήματα σὲ διαφόρους ἐπιστημονικοὺς κλάδους μὲ ἰδιαίτερη ἔμφαση στὴ στοχαστικὴ δομὴ τῶν ἐμφανιζομένων μεταβολῶν. Μὲ τὴ θεώρηση τῶν διερευνουμένων μεγεθῶν ὡς στοχαστικῶν ἀνελίξεων, ποὺ ἀκολουθοῦν συγκεκριμένη στοχαστικὴ νομολογία ὡς πρὸς τὸ χρόνο, ὁδηγούμαστε σὲ λύσεις ποὺ ἐπεξηγοῦν τὰ πραγματικὰ φαινόμενα κατὰ πολὺ ρεαλιστικώτερο τρόπο ἀπ' ὅτι τὰ καθαρὰ ντετερμινιστικὰ μοντέλα.

Ἔτσι, μὲ τὴ χρήση καθαρὰ στοχαστικῶν μεθόδων στὴ Φυσική, Χημεία καὶ ἀκόμα στὴν Ἐπιχειρησιακὴ Ἔρευνα, π.χ. στὴ θεωρία τῶν οὐρῶν, στὸν ἔλεγχο ἀποθεμάτων κ.λ.π., μπορεῖ νὰ ἐπεκταθεῖ κάλλιστα ἡ ἐφαρμογὴ σὲ καθαρὰ οἰκονομικὰ προβλήματα. Ὁ πατέρας τῆς Κυβερνητικῆς Wiener (1964) θίγει τὸ θέμα ὡς ἑξῆς : «I have found mathematical sociology and mathematical economics or econometrics suffering under a misapprehension of what is the proper use of mathematics in the social sciences....».

Σὲ μιὰ σχετικὰ πρόσφατη ἐργασία ὁ Murphy (1965) προσπάθησε νὰ ἐφαρμόσει μεθόδους στοχαστικῆς ἀναλύσεως στὴν Οἰκονομία. Ἡ ἐργασία τοῦ Steindl (1965) θεωρεῖται ἀντιπροσωπευτικώτερη στὸν τομέα αὐτό, ὅπου εἰσάγονται γιὰ πρώτη φορὰ ἔννοιες καὶ ἰδέες ἀπὸ τὴ Θεωρία τῶν Στοχαστικῶν Ἀνελίξεων γιὰ τὴ διατύπωση τῆς Θεωρίας τῶν Ἐπιχειρήσεων. Ἀκολούθησαν οἱ ἐργασίες τῶν Tintner καὶ Sengupta (1972) καὶ τῶν Fox, Sengupta καὶ Thorbecke (1966), ποὺ ἐπεξέτειναν τὸν προβληματισμὸ στὴ θεωρία ἐλέγχου.

2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ

Ἕνα ἀπὸ τὰ βασικώτερα προβλήματα ποὺ ἐμφανίζονται στὴ στοχαστικὴ ἀνάλυση εἶναι ἡ ἐξειδίκευση τῶν προτεινομένων μοντέλων σὲ συγκεκριμένες ἐφαρμογές. Τὸ γεγονὸς αὐτό μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιμέρους μελέτης τοῦ προβλήματος. Παρ' ὅλα αὐτά, ὅμως, ἡ μελέτη ἀποκτᾶ ἰδιαίτερη σημαντικότητα καθόσον ἀφενὸς μὲν θὰ ἐπιτρέψει τὴν ἐξαγωγὴ συμπερασμάτων ἀπὸ τὴν ἐφαρμογὴ τῆς στοχαστικῆς ἀναλύσεως στὰ οἰκονομικὰ δεδομένα τῆς Ἑλλάδας, ἀφετέρου δὲ θὰ δώσει τὴ δυνατότητα γιὰ συγκριτικὴ παράθεση, μετὰ ἀπὸ παράλληλες ἀναλύσεις σὲ ἄλλες χῶρες, γιὰ τὴν ἐξαγωγὴ γενικοτέρων συμπερασμάτων.

Σὰν πρώτη ἐφαρμογὴ τῆς Θεωρίας τῶν Στοχαστικῶν Ἀνελίξεων θεωροῦμε τὰ δεδομένα γιὰ τὸ ἀκαθάριστο ἐθνικὸ εἰσόδημα (Α.Ε.Ε.) στὴν Ἑλλάδα ἀπὸ τὸ 1963 ἕως τὸ 1977. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ μοναδικὴ δυνατὴ μεταβολὴ τοῦ μεγέθους X ποὺ συμβολίζει τὸ Α.Ε.Ε., κατὰ τὴ διάρκεια τοῦ στοιχειώδους χρονικοῦ διαστήματος $(t, t + \delta t)$, εἶναι ἡ αὔξηση κατὰ τὸ ποσὸ u μὲ πιθανότητα $L(\delta t) + o(\delta t)$. Ἔτσι, ἡ πιθανότητα οὐδεμίας ἀλλαγῆς θὰ εἶναι $1 - L(\delta t) + o(\delta t)$, ἐνῶ οἱ πιθανότητες ὁποιασδήποτε ἄλλης ἀλλαγῆς θὰ εἶναι τῆς τάξεως $o(\delta t)$. Κατ' αὐτὸ τὸν τρόπο ὁρίζουμε μία διαφοροποιημένη ἀνέλιξη γεννήσεων, τύπου Poisson, γιὰ τὴν ὁποία εἶναι εὔκολο νὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἱκανοποιεῖ τὴν ἀκόλουθη διαφορικὴ - διαφοροεξίσωση :

$$\dot{P}_x(t) = LP_{x-u}(t) - LP_x(t). \tag{2.1}$$

Γιὰ τὴν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως (2.1) εἰσάγουμε τὴ γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων, ἡ ὁποία βρίσκουμε ὅτι ἔχει τὴ μορφὴ τῆς κατανομῆς Poisson. Ἔτσι, τελικὰ προκύπτει :

$$P_x(t) = (Lt)^{(x/u)} \exp\{-Lt\} / (x/u)! \tag{2.2}$$

μὲ μέση τιμὴ $E(t) = uLt$ καὶ διασπορὰ $\Delta(X_t) = u^2Lt$.

Ἐὰν ὑποθέσουμε ὅτι οἱ παρατηρούμενες τιμὲς γιὰ τὸ Α.Ε.Ε. ἐλήφθησαν σὲ ἴσα χρονικὰ διαστήματα, κατὰ τὶς χρονικὲς στιγμὲς $t = 1, 2, \ldots, n$, τότε εἶναι εὔκολο νὰ ἐκτιμήσουμε τὶς παραμέτρους u καὶ L μὲ τὴ μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.) ἐλαχιστοποιώντας τὴν παράσταση :

$$\sum_{t=1}^{n} (X_t - Lut)^2.$$

Ἔτσι, βρίσκουμε ὅτι :

$$\hat{u}L = \sum_{t=1}^{n} tX_t \Big/ \sum_{t=1}^{n} t^2 = 29.473 \quad (n = 15)$$

$$\hat{u} = \sum_{t=1}^{n} (X_t - E(X_t))^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n} E(X_t) = 14.202$$

καὶ $\hat{L} = 2.075.$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ πιθανότητα γιὰ τὴν αὔξηση τοῦ Α.Ε.Ε. κατὰ 14.202, στὸ στοιχειῶδες χρονικὸ διάστημα $(t, t + \delta t)$, εἶναι κατὰ προσέγγιση 2.075 (δt).

Γιὰ τὴν πρόγνωση τὸ ἔτος 1980 $(t = 18)$ ἔχουμε μέση τιμὴ $E(X_t) = 530.514$ μὲ 90 % διάστημα ἐμπιστοσύνης 530.514 ± 142.786.

Προχωρώντας σὲ μιὰ πρώτη γενίκευση τοῦ μοντέλου θεωροῦμε ὅτι ἡ μέση τιμὴ συνδέεται γραμμικὰ μὲ τὸ χρόνο μὲ βάση τὴ σχέση :

$$E(X_t) = a + ubt \tag{2.3}$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι κατ' αὐτὸ τὸν τρόπο αὐξάνουμε τὸν ἀριθμὸ τῶν παραμέτρων τοῦ μοντέλου, γιὰ τὴν ἐκτίμηση τῶν ὁποίων καταφεύγουμε πάλι στὴν Μ.Ε.Τ. ἐλαχιστοποιώντας τὸ μέγεθος :

$$\sum_{t=1}^{n} (X_t - E(Xt))^2. \tag{2.4}$$

Ἔτσι, βρίσκουμε ὅτι :

$$E(X_t) = 118.867 + 17.979t, \qquad (R = 0.986)$$

δηλαδὴ $\hat{a} = 118.867$ καὶ $\hat{u}b = 17.979.$

Ἐπὶ πλέον, ἔχοντας ὑπόψη τὴ σχέση :

$$\hat{u}^2 b = \frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^{n} (X_t - E(X_t))^2 \frac{1}{t} = 29.615$$

βρίσκουμε ὅτι $\hat{u}b = 1.647$ καὶ $\hat{b} = 10.916$.

Γιὰ τὴν πρόγνωση, μὲ τὸ νέο διαφοροποιημένο μοντέλο, κατὰ τὸ ἔτος 1980 ($t = 18$), ἔχουμε μέση τιμὴ $E(X_t) = 442.489$ μὲ 90 % διάστημα ἐμπιστοσύνης 442.489 ± 38.657. Ἔτσι, γίνεται φανερὴ ἡ διαφοροποίηση μὲ τὴν ἐκτίμηση σὲ ἕνα πολὺ μικρότερο διάστημα ἐμπιστοσύνης.

Μία νέα διαφοροποίηση, στὴν ἴδια μορφὴ τοῦ μοντέλου, εἰσάγουμε στὴν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τοῦ μοντέλου, μὲ τὴν Μ.Ε.Τ., ἐλαχιστοποιώντας τὸ μέγεθος :

$$\sum_{t=1}^{n} (X_t - E(X_t))^2 / t. \tag{2.5}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Ἔτος Ἔτος	Ἀκαθάριστο ἐθνικὸ εἰσόδημα*	Ἀκαθάριστες ἐπενδύσεις	Δημόσιες ἐπενδύσεις*	Ἰδιωτικὲς ἐπενδύσεις*	t
1963	147.41	31.57	9.60	21.97	1
1964	163.48	38.58	10.82	27.76	2
1965	178.50	43.72	12.09	31.64	3
1966	186.11	46.44	12.58	33.86	4
1967	197.83	46.10	14.99	31.82	5
1968	212.89	54.84	15.76	39.08	6
1969	232.14	67.08	19.31	47.77	7
1970	252.25	68.36	20.34	47.93	8
1971	274.27	78.52	26.07	52.45	9
1972	305.64	95.83	31.08	64.45	10
1973	355.60	109.33	30.36	78.98	11
1974	333.46	79.67	24.01	55.66	12
1975	342.88	78.36	21.74	56.62	13
1976	371.63	86.46	23.17	63.29	14
1977	386.42	97.97	21.64	76.33	15

*Σὲ σταθερὲς τιμὲς μὲ ἔτος βάσεως τὸ 1970 σὲ δραχμὲς x 10^9.

Πηγή : Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ 1958-72, 1973-77.

Ἔτσι, βρίσκουμε τὶς τιμές :

$$E(X_t) = 126.087 + 17.077\,t \qquad (R = 0.970)$$

$$\hat{a} = 126.087, \qquad \hat{u} = 1.505, \qquad \hat{b} = 11.341,$$

μὲ πρόγνωση γιὰ τὴ μέση τιμὴ τὸ ἔτος 1080 ($t = 18$) $E(X_t) = 433.473$ καὶ 90 % διάστημα ἐμπιστοσύνης 433.473 ± 35.367.

Στὴν Οἰκονομία ἀσκεῖ βασικὸ ρόλο ἡ σχέση ποὺ ὑπάρχει ἀνάμεσα στὸ Α.Ε.Ε. καὶ στὶς ἀκαθάριστες ἐπενδύσεις (Α.Ε.). Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ σχέση αὐτὴ εἶναι γραμμικὴ σὲ σχέση μὲ τὴ μέση τιμὴ τοῦ Α.Ε.Ε., τότε εἶναι εὔκολο νὰ εἰσάγουμε νέα γενίκευση στὸ μοντέλο μὲ τὴ μορφή :

$$E(X_t) = a + ubt + cG_t, \tag{2.6}$$

ὅπου μὲ G_t συμβολίζουμε τὶς Α.Ε. καὶ c νέα παράμετρος ποὺ ἐκτιμοῦμε μὲ τὴν Μ.Ε.Τ.

Ἐλαχιστοποιώντας τὸ μέγεθος (2.4), βρίσκουμε ὅτι :

$$E(X_t) = 93.099 + 13.848\,t + 0.863\,G_t \qquad (R = 0.985)$$

καὶ $\hat{u} = 3.033, \qquad \hat{b} = 4.566.$

Γιὰ τὴν πρόγνωση τὸ ἔτος 1980 ($t = 18$) ἐξετάζουμε δύο ὑποθέσεις γιὰ τὶς Α.Ε. :

1) $G_t = 110.0$, ὁπότε $E(X_t) = 437.093$ μὲ 90 % διάστημα ἐμπιστοσύνης 437.093 ± 34.908.

2) $G_t = 125.0$, ὁπότε $E(X_t) = 450.238$ μὲ 90 % διάστημα ἐμπιστοσύνης 450.238 ± 34.908.

Ἐπὶ πλέον, ἐὰν ἀντὶ γιὰ τὸ μέγεθος (2.4), ἐλαχιστοποιήσουμε τὸ μέγεθος (2.5), τότε προκύπτει :

$$E(X_t) = 102.905 + 12.712\,t + 0.852\,G_t \qquad (R = 0.981)$$

καὶ $\hat{u} = 1.361, \qquad \hat{b} = 9.339,$

ὁπότε οἱ ἀντίστοιχες ὑποθέσεις καὶ οἱ προγνώσεις γιὰ τὸ ἔτος 1980 ($t = 18$) θὰ εἶναι :

1) $G_t = 110.0$, $E(X_t) = 425.441$ μὲ 90 % διάστημα ἐμπιστοσύνης 425.441 ± 71.858.

2) $G_t = 125.0$, $E(X_t) = 438.221$ μὲ 90 % διάστημα ἐμπιστοσύνης 438.221 ± 71.858.

Τέλος, εἰσάγουμε μία νέα γενίκευση στὸ μοντέλο, ὑποθέτοντας ὅτι ἡ πιθανότητα γιὰ τὴν αὔξηση τοῦ μεγέθους X κατὰ τὸ ποσὸ u, στὴ διάρκεια τοῦ χρονικοῦ διαστήματος $(t, \ t + \delta t)$ εἶναι ἴση πρὸς $b(t)\,(\delta t) + o(\delta t)$, ὅπου $b(t)$ συνάρτηση τοῦ χρόνου. Παρόμοια, ὑποθέτουμε ὅτι ἡ πιθαμότητα οὐδεμίας μεταβολῆς τοῦ X εἶναι $1 - b(t)\,(\delta t) + o(\delta t)$ καὶ ἡ πιθανότητα ὁποιασδήποτε ἄλλης μεταβολῆς εἶναι τῆς τάξεως $o(\delta t)$. Ἔτσι, ἡ κατανομὴ τοῦ τυχαίου μεγέθους X θὰ εἶναι :

$$P_x(t) = \frac{\left(\exp\left\{-\int_0^t b(z)dz\right\}\right]\left[\int_0^t b(z)dz\right]^{(x-a)/u}}{[(u-a)/u[!}$$

ὅπου $\chi = a, \ a + u, \ a + 2u, \ldots$

Ἡ συνάρτηση $b(t)$ εἶναι μὲν συνάρτηση τοῦ χρόνου, ἀλλὰ μπορεῖ νὰ εἶναι καὶ συνάρτηση τῶν ἀκαθαρίστων ἐπενδύσεων $G(t)$, ποὺ κατὰ τὰ γνωστὰ ἐμφανίζουν χρονικὲς ἐξαρτήσεις. Ἐὰν ὑποθέσουμε ὅτι :

$$b(t) = b_0 + b_1\,G(t)$$

καὶ ὅτι ἡ συνάρτηση $G(t)$ εἶναι βηματικὴ μὲ τὴ μορφή : $G(t) = G_v$ γιὰ $v - 1 \leqslant t < v$, τότε

$$\int_0^t b(z)\,dz = b_0 t + b_1 \sum_{v=1}^{t} G_v$$

Ἔτσι, προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτηση $G(t)$ θὰ ἐπενεργεῖ συσσωρευτικὰ στὴ μέση τιμὴ τοῦ Α.Ε.Ε. Στὴν πρικειμένη περίπτωση ἐφαρμόζοντας τὴν Μ.Ε.Τ., ἐλαχιστοποιώντας τὸ μέγεθος (2.4), βρίσκουμε ὅτι :

$$E(X_t) = 135.487 + 8.209\,t + 0.135 \sum_{v=1}^{t} G_v \qquad (R = 0.979)$$

καὶ $\hat{u} = 1.827, \qquad \hat{b} = 4.492,$

ὁπότε οἱ ἀντίστοιχες ὑποθέσεις καὶ οἱ προγνώσεις τοῦ ἔτος 1980 ($t = 18$) θὰ εἶναι :

1) $G_t = 110.0$, $E(X_t) = 465.881$ μὲ 90 % διάστημα ἐμπιστοσύνης 465.881 ± 34.343,

2) $G_t = 125.0$, $E(X_t) = 471.956$ μὲ 90 % διάστημα ἐμπιστοσύνης 471.956 ± 34.343.

3. ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΥΠΟΥ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ—ΘΑΝΑΤΩΝ

Σὲ μιὰ ἐπέκταση τῶν ἐφαρμογῶν τῆς Θεωρίας τῶν Στοχαστικῶν Ἀνελίξεων, γιὰ τὴ μελέτη τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν, θεωροῦμε τὴν ἀνέλιξη $X(t)$, ὁρισμένη σὲ διακριτὸ χῶρο καταστάσεων μὲ συνάρτηση πιθανότητας $P_\chi(t) = P(X(t) = \chi)$. Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ τυχαῖο μέγεθος $X(t)$, ποὺ παίρνει τὶς τιμὲς $\chi = 1, 2, 3, \ldots$ μπορεῖ νὰ αὐξηθεῖ κατὰ μονάδα, κατὰ τὴ διάρκεια τοῦ στοιχειώδους χρονικοῦ διαστήματος $(t, t+\delta t)$, μὲ πιθανότητα $\lambda_\chi(\delta t) + o(\delta t)$, ἢ νὰ μειωθεῖ κατὰ μονάδα μὲ πιθανότητα $\mu_\chi(\delta t) + o(\delta t)$ ἢ νὰ μὴ ὑποστεῖ μεταβολὴ μὲ πιθανότητα $1 - (\lambda_\chi + \mu_\chi)(\delta t) + o(\delta t)$. Ἡ πιθανότητα ὁποιασδήποτε ἄλλης ἀλλαγῆς εἶναι τῆς τάξεως $o(\delta t)$. Ἐπὶ πλέον, ὑποθέτουμε ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ τυχαίου μεγέθους $X(t)$ ἀπὸ τὴν τιμὴ χ στὴν τιμὴ $\chi + h$, $h = 1, 2, 3, \ldots$, εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν ἀρχικὴ τιμή, ἐνῶ ἂν λάβει τὴν τιμὴ $\chi = 0$, οὐδεμία μεταβολὴ θὰ εἶναι πλέον δυνατή.

Εἶναι εὔκολο νὰ ἀποδείξουμε, μὲ βάση τὶς παραπάνω προϋποθέσεις, ὅτι τὸ τυχαῖο μέγεθος $X(t)$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἀκόλουθη διαφορικὴ - διαφοροεξίσωση :

$$P_\chi(t) = \lambda_{\chi-1} P_{\chi-1}(t) - (\lambda_\chi + \mu_\chi) P_\chi(t) + \mu_{\chi+1} P_{\chi+1}(t)$$

μὲ ἀρχικὴ συνθήκη :

$$P_\chi(0) = \begin{cases} 1 & \text{γιὰ } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{ἀλλοῦ.} \end{cases}$$

Λύση τῆς ἐξισώσεως (3.1) ἔχουμε μόνον ὅταν οἱ συναρτήσεις λ_χ καὶ μ_χ ἔχουν συγκεκριμένη συναρτησιακὴ μορφή. Ἐάν, π.χ.,

$$\lambda_\chi(t) = \lambda\chi(t) \quad \text{καὶ} \quad \mu_\chi = \mu\chi(t), \tag{3.2}$$

ὅπου λ καὶ μ σταθερὲς παράμετροι, τότε ἐπανερχόμαστε στὶς ἁπλὲς ἀνελίξεις γεννήσεων, θεωρώντας ὅτι $\lambda = (\lambda - \mu)$. Ἐάν, μάλιστα, ἰσχύει

$$\lambda_\chi(t) - \mu_\chi(t) = (\lambda - \mu) = \bar{\lambda}, :$$

τότε ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως (3.1) θὰ εἶναι :

$$P_\chi(t) = \binom{(\chi-1)}{(\chi-j)} \exp\{-j\bar{\lambda}t\}\,[1-\exp\{-\bar{\lambda}t\}]^{\chi-j} \tag{3.3}$$

γιὰ $\chi > j \geqslant 1$.

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ παράμετρος λ μπορεῖ νὰ ἐκφράζει στὶς οἰκονομικὲς ἐφαρμογὲς τὴ μέση αὔξηση π.χ. τοῦ Α.Ε.Ε., ἐνῶ ἡ παράδετρος μ τὴ μέση μείωση τοῦ Α.Ε.Ε., ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴ μέση μείωση τῶν ἐπενδύσεων.

Στὴν περίπτωση ποὺ οἱ συναρτήσεις τῶν στοιχειωδῶν πιθανοτήτων ἔχουν τὴ μὴ γραμμικὴ μορφή :

$$\begin{aligned} \lambda_\chi &= \lambda\chi \qquad \text{καὶ} \qquad \lambda = \alpha(\kappa_2-\chi) \\ \mu_\chi &= \mu\chi \qquad \text{καὶ} \qquad \mu = \beta(\chi-\kappa_1), \end{aligned} \tag{3.4}$$

ὅπου α, β, κ_1, κ_2 σταθερὲς τέτοιες, ὥστε, γιὰ $t = 0$, $\chi(t)$ νὰ κεῖται στὸ κλειστὸ διάστημα $[\kappa_1, \kappa_2]$, ἡ ἐξίσωση (3.1) δὲν ἔχει λύση: Ἀποδεικνύεται (Feller, 1968) ὅτι στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ μέση τιμὴ $E(X_t)$ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση :

$$\dot{E}(X_t) = (\alpha\kappa_2 + \beta\kappa_1)\,E(X_t) - (\alpha + \beta)\,E(X_t^2). \tag{3.5}$$

Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι ἡ ἀνάλογη σχέση γιὰ τὸ Α.Ε.Ε. στὸ ντετερμινιστικὸ μοντέλο ἔχει τὴ μορφή :

$$\dot{\chi}(t) = (\alpha + \beta)\Big[\frac{\alpha\kappa_2 + \beta\kappa_1}{\alpha+\beta}\chi(t) - \chi^2(t)\Big], \tag{3.6}$$

ποὺ μπορεῖ νὰ συγκριθεῖ μὲ τὴ σχέση (3.5), ἂν ξαναγραφεῖ μὲ τὴ μορφὴ (3.7)

$$\dot{E}(X_t) = (\alpha + \beta)\Big\{\Big[\frac{\alpha\kappa_2 + \beta\kappa_1}{\alpha+\beta} E(X(t)) - E^2(X(t))\Big] - (\alpha + \beta)\,\Delta(X_t)\Big\}.$$

Ἔτσι, εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ στοχαστικὸ μοντέλο (3.7) διαφέρει ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχο ντετερμινιστικὸ μοντέλο κατὰ τὸν ὅρο τῆς διασπορᾶς $\Delta(X_t)$. Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ θὰ πρέπει νὰ ληφθεῖ σοβαρὰ ὑπ' ὄψη στὶς ἐφαρμογές.

Μία ἐνδιαφέρουσα μορφὴ τοῦ μοντέλου γεννήσεων - θανάτων εἰσάγουμε μὲ τὴ γραμμικότητα τῶν συναρτήσεων τῶν στοιχειωδῶν πιθανοτήτων ὑπὸ τὴ μορφή :

$$\lambda_\chi = ac \qquad \text{καὶ} \qquad \mu_\chi = c\chi. \tag{3.8}$$

Σὲ μιὰ ἐφαρμογὴ τοῦ μοντέλου (3.8) θεωροῦμε τὰ δεδομένα γιὰ τὸ ἐθνικὸ εἰσόδημα καὶ τὶς ἀκαθάριστες ἐπενδύσεις κατὰ τὸ χρονικὸ διάστημα 1963 - 77. Ἔτσι, προσδιορίζουμε κατ' ἀρχή, τὶς ἀκόλουθες αὐτοπαλινδρομικὲς ἐξισώσεις :

$$\chi_{1,t} = 18.78056 + 0.99327\chi_{1,t-1} \qquad \text{(γιὰ τὸ Α.Ε.Ε.)}$$

$$\chi_{2,t} = 14.83584 + 0.84717\chi_{2,t-1} \qquad \text{(γιὰ τὶς Α.Ε.)}$$

ποὺ ἔχουν λύσεις :

$$\chi_{1t,} = 2790.5736 - 2643.1636 \exp\{-0.00675\ t\}$$

$$\chi_{2,t} = 97.0741 - 65.5041 \exp\{-0.16585\ t\}$$

Διαιρώντας τὶς παραπάνω σχέσεις μὲ τὶς ἀντίστοιχες μέσες τιμὲς $\bar{\chi}_{1,t} = 262.7013$ καὶ $\bar{\chi}_{2,t} = 68.1687$, βρίσκουμε ὅτι:

$$E(X_{1,t}) = 10.6226 - 10.0615 \exp\{-0.00675\ t\}$$

$$E(X_{2,t}) = 1.4240 - 0.9609 \exp\{-0.16585\ t\},$$

ὁπότε ἔχοντας ὑπ' ὄψη ὅτι ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἀντίστοιχου ντετερμινιστικοῦ μοντέλου $\dot{\chi}(t) = ac - c\chi$, εἶναι $\chi(t) = a - (a-j)\exp\{-ct\}$, ὅπου $j = \chi(0)$, θὰ ἔχουμε

$$\lambda_1 = 0.07170 \qquad \mu_1 = 0.00675\ \chi(t)$$
$$\lambda_2 = 0.23617 \qquad \mu_2 = 0.16585\ \chi(t).$$

Κατ' αὐτὸ τὸν τρόπο ἡ διαφορικὴ-διαφοροεξίσωση, π.χ. γιὰ τὸ Α.Ε.Ε., ἔχει τὴ μορφή :

$$\dot{P}_{\chi 1}(t) = 0.07170 P_{\chi 1-1}(t) - (0.07170 + 0.00675_{\chi 1}(t))\, P_{\chi 1}(t)) + \\ + 0.00675(\chi_1(t) + 1)\, P_{\chi 1+1}(t) \tag{3.9}$$

Ἡ βασικὴ ὑπόθεση τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν διερευνουμένων οἰκονομικῶν μεγεθῶν δὲν μπορεῖ νὰ πιστοποιηθεῖ ἐμπειρικά. Ἀντίθετα, οἱ μεταβλητὲς εἶναι συνήθως, ὄχι μόνον ἐποχικά, ἀλλὰ μόνιμα αὐτο - καὶ ἀλληλο - ἐξαρτημένες.

Τὸ γεγονὸς αὐτό πρέπει νὰ λάβουμε σοβαρὰ ὑπ' ὄψη στὴν κατασκευὴ τῶν μοντέλων.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῶν κυρίων παραγόντων αἴρει πολλὰ ἀπὸ τὰ μειονεκτήματα αὐτὰ τῆς ἀναλύσεως, δίνοντας συγχρόνως τὴ δυνατότητα νὰ τεθοῦν τὰ διερευνούμενα μεγέθη σὰν συναρτήσεις ὅρων, οἱ ὁποῖοι εἶναι ὀρθογώνιοι μεταξύ τους.

Στὴν προκειμένη περίπτωση γιὰ τὴν ἀνάλυση τοῦ Α.Ε.Ε., καὶ τῶν Α.Ε. στὴν Ἑλλάδα μὲ τὴ μέθοδο τῶν κυρίων παραγόντων, θεωροῦμε τὸν πίνακα συσχετίσεων, γιὰ τὸ ὁποῖο βρίσκουμε τὶς τιμές :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \chi_{1,t} & \chi_{2,t} \end{array} \\ \begin{array}{c} \chi_{1,t} \\ \chi_{2,t} \end{array} & \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9346 \\ 0.9346 & 1.0000 \end{bmatrix} \end{array}$$

Οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ πίνακα εἶναι $\lambda_1 = 1.9346$ καὶ $\lambda_2 = 0.0654$ ποὺ ἐπεξηγοῦν κατὰ 96.73 % καὶ 3.27 % ἀντίστοιχα τὴ διασπορά. Τὰ χαρακτηριστικὰ διανύσματα, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς ἰδιοτιμὲς ποὺ βρήκαμε, εἶναι :

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9835 \\ 0.9835 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \kappa_{12} \\ \kappa_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0462 \\ -0.0462 \end{bmatrix}$$

Ετσι, τὰ τυποποιημένα μεγέθη $z_{i,t} = (\chi_{i,t} - (\overline{\chi_i}) / \sigma_i$ γράφονται σὰν συναρτήσειςτῶν κυρίων παραγόντων $u_{i,t}$ ὡς ἀκολούθως :

$$z_{1,t} = 0.9835u_{1,t} + 0.0462u_{2,t}$$
$$z_{2,t} = 0.9835u_{1,t} - 0.0462\, u_{2,t}$$

ἢ ἀντιστρόφως :

$$\begin{bmatrix} u_{1,t} \\ u_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5084 & 0.5084 \\ 10.8225 & -10.8225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix}$$

ὁπότε οἱ αὐτοπαλινδρομικὲς ἐξισώσεις πρώτης τάξεω, ὡς πρὸς τοὺς κύριους παράγοντες, θὰ εἶναι :

$$u_{1,t} = 31.87462 - 33.42662 \exp \{ -0.00680\, t\},$$
$$u_{2,t} = 0.09838 + 1.25462 \exp \{-0.47157\, t \}.$$

Κατ' αὐτὸ τὸν τρόπο ἡ ἐξίσωση γεννήσεων - θανάτων, π.χ. γιὰ τὸ Α.Ε.Ε., θὰ διαφοροποιηθεῖ σημαντικὰ ὡς πρὸς τὴν (3.9), ἔχοντας τὴ μορφή :

$$\dot{P}_{u_1}(t) = 0.21675\, P_{u_1-1}(t) - (0.21675 + 0.00680\, u_1(t)\, P_{u_1}(t) + + 0.00680\,(u_1 + 1)\, P_{u_1+1}(t), \tag{3.10}$$

ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ πιθανότητα νὰ αὐξηθεῖ ὁ πρῶτος κύριος παράγων κατὰ μονάδα, στὸ στοιχειῶδες χρονικὸ διάστημα, εἶναι 0.21675 (δt), ἐνῶ ἡ πιθανότητα νὰ μειωθεῖ εἶναι 0.00680 $u_1(t)$.

Οὐσιαστικὴ διαφοροποίηση τοῦ μοντέλου, στὴν περίπτωση ἀλληλοσυσχετιζομένων μεγεθῶν εἰσάγουμε μὲ τὴ θεώρηση, πολυδιαστάτων ἀνελίξεων. Ἔστω, π.χ., ἡ δισδιάστατη τυχαία μεταβλητὴ $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$, ὅπου κάθε μεταβλητὴ παίρνει τιμὲς στὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων $S = \{0, 1, 2, \ldots\ldots\}$, μὲ συνάρτηση πιθανότητας $P_\chi(t) = P(X(t) = \chi)$. Ἐὰν $\chi \varepsilon S^2$, τότε οἱ στοιχειώδεις πιθανότητες στὸ διάστημα $(t, t + \delta t)$ ὁρίζονται ὡς ἀκολούθως :

$$P(X_{t+\delta t} = \chi + \delta | X_t = \chi) = \lambda_\delta(\delta t) + o(\delta t)$$

καὶ

$$P(X_{t+\delta t} = \chi | X_t = \chi) = 1 - \lambda_\delta(\delta t) + o(\delta t),$$

ὅπου λ_δ σταθερή, γιὰ κάθε $\delta = (\delta_1, \delta_2) \neq 0$ καὶ $\delta_i = 0$ ἢ 1, γιὰ $i = 1, 2$.

Εἶναι εὔκολο νὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἡ συνάρτηση πιθανότητας $P_\chi(t)$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἀκόλουθη διαφορικὴ διαφοροεξίσωση :

$$\dot{P}_\chi(t) = \sum_{\delta \neq 0} \lambda_\delta [P_{\chi-\delta}(t) - P_\chi(t)]$$

ἀπὸ τὴν ὁποία μποροῦμε νὰ προσδιορίσουμε τὶς παραμέτρους μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεννητριῶν συναρτήσεων πιθανότητας.

Ἔτσι, προχωρώντας στὴν ἐφαρμογὴ τοῦ μοντέλου γιὰ τὶς δημόσιες (X_{1t}) καὶ ἰδιωτικὲς ἐπενδύσεις (X_{2t}) στὴν Ἑλλάδα βρίσκουμε ὅτι :

$$E(Y_{1t}) = 9.874 + 1.207\, t,$$

$$\hat{a}_1 = 9.874, \qquad \hat{u}_1 = 1.7233,$$

$$E(Y_{2t}) = 19.992 + 3.581\, t,$$

$$\hat{a}_2 = 19.992, \qquad \hat{u} = 1.5204,$$

$$\mathrm{Cov}\,(Y_{1t},\ Y_{2t}) = u_1 u_2 \lambda_{11} t = u_1^2\ 0.8332\ t,$$

$$\Delta\,(Y_{1t}) = u_t^2\ (\lambda_{10} + \lambda_{11})t = u_t^2\ 0.7004\ t,$$

$$(\Delta\ Y_{2t}) = u_2^2\ (\lambda_{01} + \lambda_{11})\ t = u_2^2\ 2.3553\ t,$$

ὅπου Y_{it} ἀποτελοῦν γραμμικὸ μετασχηματισμὸ τῆς μορφῆς $Y_{it}=a_i+u_iX_{it}$.

Τὶς παραπάνω ἐκτιμήσεις μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε γιὰ μελλοντικὲς προγνώσεις. Π.χ., γιὰ τὸ ἔτος 1980 ($t = 18$) βρίσκουμε ὅτι :

$$E\,(X_{1t}) = 31.600, \qquad \Delta\,(X_{1t}) = 37.440,$$

$$E\,(X_{2t}) = 84.450, \qquad \Delta\,(X_{2t}) = 98.002,$$

$$\mathrm{Cov}\,(X_{1t},\ X_{2t}) = 39.295.$$

Γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τῆς ἐλλείψεως ἐμπιστοσύνης θεωροῦμε τὴ τετραγωνικὴ μορφή :

$$Q\,(Y_{1t}, Y_{2t}) = \begin{bmatrix} Y_{1t} - 31.600 \\ Y_{2t} - 84.450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37.440 & 39.295 \\ & 98.002 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{1t} - 37.600 \\ Y_{2t} - 84.450 \end{bmatrix}$$

ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ τὴ χ^2 κατανομὴ μὲ 2 βαθμοὺς ἐλευθερίας. ἱκανοποιώντας ἔτσι, γιὰ 95 %, τὴ σχέση:

$$Q\,(Y_{1t},\ Y_{2t}) \leqslant 5.99.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Bharucha-Reid, A. T., «Elements of the Theory of Marcov Processes and Applications» Mc Graw Hill, 1960.

2. Dorfman, R., Samuelson P. and R. M. Solow, «Liqear Programming and Economic Analysis», McGraw Hill, 1958.

3. Feller, W., «An Introduction to Probability Theory and its Applications», Vol. I, II, J. Wiley, 1966, 1968.

4. Fox, K. A., Sengupta, J. K. and Thorbecke, E. «The Theory of Quantitative Economic Policy with Applications to Economic Growth and Stabilization», North Holland Pub., 1966.

5. Haavelmo, T. «A Study in the Theory of Economic Evolution», North Holland Pub., 1954.

6. Holt, C. C., Modigliani F., Muth J. F. and Simon H. A., «Planning Production, Inventories and Work Force», Prentice Hall, 1960.

7. Murphy, R. E. «Adaptive Processes in Economic Systems» Academic Press, 1965.

8. Sengupta, S. S., «Operatioςs Research and Sellers Competition», J. Wiley, 1967.

9. Steindl, J. «Random Processes and the Growth of Firms», Hofner, 1965.

10. Tintner, G. and S. S. Sengupta, «Stochastic Economics», Academic Press, 1972.

11. Whittle, P., «Prediction and Regulation», English Univ. Press, 1963.

12. Wiener, N. «God and Golen Inc.», MTT Press, 1964.