ΕΠΙΛΟΓΗ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΟΣ

(ΜΕΡΟΣ II)

Ύπό

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΔΙΑΚΟΓΙΑΝΝΗ (B.Sc, M.Sc, M.Sc,)

Εις την πρόσφατη εργασία μου μέ τίτλο «'Επιλογή αρίστου χαρτοφυλακίου κάτω άπό συνθήκες αβεβαιότητος» (Μέρος Ι),[1] έδωσα μία πλήρη εικόνα τής επιλογής χαρτοφυλακίου μέ τήν βοήθεια τής κατωτέρω υποθέσεως :

a) ή συνάρτησις χρησιμότητος ενός μή ριψοκίνδυνου επενδυτού προσεγγίζεται άπό ενα πολυώνυμον δευτέρου βαθμοϋ.

Εις το παρόν άρθρον θα ασχοληθώ μέ τήν επιλογή χαρτοφυλακίου στηριζόμενος εις τήν άκόλουθον ύπόθεσιν :

b) Αϊ πιθανότητες των κατανομών των κερδών των χρεωγράφων, τα οποία απαρτίζουν τα χαρτοφυλάκια ενός μή ριψοκίνδυνου επενδυτού προσεγγίζουν τάς κανονικάς κατανομάς.

Ό Tobin [2] υπέθεσε ότι αί κατανομαΐ των κερδών τών χρεωγράφων και τών χαρτοφυλακίων έχουν τόν αυτόν τύπον κατανομής, δπου ή κατανομή εξαρτάται μόνον άπό τήν μέσην τιμήν και τήν τυπικήν άπόκλισιν. Τότε απέδειξε ότι αί καμπύλαι αδιαφορίας ενός μή ριψοκίνδυνου επενδυτού, εις τόν (Γ,σ.) χώρον έχουν θετικήν κλίσιν. Έπί πλέον υπήρξε ο πρώτος ό όποιος άπέδειξεν τήν κυρτότητα τών καμπυλών αδιαφορίας, ενός μή ριψοκίνδυνου επενδυτού, εϊς τόν (Γ,σ) χώρον.

Ό Fama [3] υπογράμμισε ότι, ή μόνη διπαραμετρική κατανομή τών κερδών, ή οποία συμφωνεί μέ τά αποτελέσματα του Tobin είναι ή κανονική κατανομή.

Επιπροσθέτως ô Fama μέ τήν βοήθειαν τής υποθέσεως b' καί τών υποθέσεων :

(A) Ό χρόνος διαιρείται εις δύο περιόδους, μίαν τρέχουσαν περίοδον, έστω t — 1 καν μίαν μελλοντνκήν, έστω t. "Ενας, μή ριψοκίνδυνος επενδυτής κατά τήν περίοδον t — 1 έχει πλοϋτον Wt — 1 τόν όποιον πρέπει να κατανέμει :

(a_t) εις παρούσας καταναλώσεις Ct_j

($α_2$) εις μίαν έπένδυσιν $(W_{t-1}—C_{t-1})$ εις χρεώγραφα, ήτοι εις τι χαρτοφυλάκιον.

(B) Ή έπένδυσις αυτή θα εφοδιάσει τον έπενδυτήν μέ ενα πλοΰτον, έστω Wt, ό όποιος πρέπει να καταναλωθεί πλήρως κατά τήν περίοδον t.

(C) Ή χρησιμότης του επενδυτού αυξάνεται (μειώνεται), αυξανομένης (μειούμενης) της καταναλώσεως του.

άπέδειξεν τό θεώρημα του αποδοτικού συνόλου.[4] Ό Fama και ό Miller[5] έπανέλαβον τήν άπόδειξιν του θεωρήματος του αποδοτικού συνόλου και ερμήνευσαν άλγεβρικώς τήν ίσορροπίαν του επενδυτού, αλλά μόνον διά τό (Γ σ) άποδοτικόν σύνολον.

Τέλος απέδειξαν τό συμπέρασμα ότι, αί καμπύλαι αδιαφορίας ενός μή ριψοκίνδυνου επενδυτού είναι κυρταί εις τόν (Γ σ) χώρον.

Ή εργασία αυτή αποτελείται άπό δύο τμήματα. Εις τό πρώτον τμήμα στηριζόμενοι εις τάς υποθέσεις του Fama άποδεικνύομε τό θεώρημα τοΰ αποδοτικού συνόλου. Δηλαδή :

> «Τό άριστον χαρτοφυλάκιον ενός μή ριψοκίνδυνου επενδυτού είναι κέρδους κινδύνου άποδοτικόν και διάφορον τοΰ σφαιρικού χαρτοφυλακίου ελαχίστου κινδύνου».[6]

Ή άπόδειξις ή οποία εκτίθεται είναι περισσότερον πλήρης και σαφής των μέχρι σήμερον εκτεθειμένων αποδείξεων. Επίσης ερμηνεύεται άλγεβρικώς ή ισορροπία τοΰ έπενδυτοΰ.

Εις τό δεύτερον τμήμα αποδεικνύονται παρόμοια συμπεράσματα άλλα αυτήν τή φορά υπάρχει τό (Γ'σ') άποδοτικόν σύνολον. Έκτος τούτου αποδεικνύεται ότι ένας μή ριψοκίνδυνος επενδυτής δεν επενδύει εξ ολοκλήρου τα χρήματα του εις τό περουσιακόν στοιχεϊον F, τό όποιον έχει $σ_F = 0$[7]

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Ύποθέτομεν ότι δίδεται ένας αριθμός Ν χρεωγράφων κινδύνου, όπου Ν *E* [1,2, ..., η]. Εις τό άρθρο αυτό θα χρησιμοποιηθούν οί κάτωθι συμβολισμοί;

V : Ό (N χ N) πίναξ συνδιακυμάνσεως των κερδών των N χρεωγράφων κινδύνου.

R : Το (N X 1) διάνυσμα των αναμενόμενων (ή μέσων) κερδών των N χρεωγράφων κινδύνου.

ι Το (N X 1) μοναδιαίο διάνυσμα.

Χρ : Ένα (N χ 1) διάνυσμα αποφάσεων επενδυτικών αναλογίων, ορίζων ενα αύθαίρετον χαρτοφυλάκιο ν ρ.

Ό περιορισμός τον όποιον ικανοποιεί το διάνυσμα Χρ δύναται νά διατυθεΐ ως :

$$X_p^t \iota = 1$$

Γρ : Τό (βαθμωτόν) άναμενόμενον (ή μέσον) κέρδος τοϋ χαρτοφυλακίου ρ.

$\sigma\rho^2$: Ή (βαθμωτή) διακύμανσις των κερδών ενός χαρτοφυλακίου ρ.

U : Παράγων, συμβολίζων μίαν συνάρτησιν χρησιμότητος.

E : Παράγων δηλώνων άναμενομένας (ή μέσας) τιμάς.

'Οποιοδήποτε πρόσθετον σύμβολον χρησιμοποιείται εις τήν παρούσαν έργασίαν, εξηγείται όπου το σύμβολον πρωτοεμφανίζεται.

Συμφώνως μέ τήν θεωρία τοϋ χαρτοφυλακίου εκαστον χαρτοφυλάκιον ρ έχει τάς κάτωθι ιδιότητας :

(P_1) Άναμενόμενον (ή μέσον) κέρδος του ρ : $\Gamma\rho = X^tR$

(P_2) Διακύμανσις των κερδών του ρ : $\sigma\rho^2 = X^tVX$

(P_3) Τυπική άπόκλισις τών κερδών τοϋ ρ : $\sigma\rho = \sqrt{X^tUX}$

Καθ' όλην τήν εκτασιν τοϋ άρθρου αύτοϋ ύποθέτομεν :

(H_1) Ό πίναξ V είναι μή ιδιάζων.

(H_2) Τό διάνυσμα R περιέχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά αναμενόμενα κέρδη.

(H_3) Τα στοιχεία τοϋ διανύσματος Χρ δύναται να εΐναι όποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί τοιοϋτοι ώστε : $X_p^t i = 1$.

I. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΔΙΑ ΤΟ (Γ σ) ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΝ ΣΥΝΟΛΟΝ

Ύποθέτομεν ότι ένας μή ριψοκίνδυνος επενδυτής, κατά τήν περίοδο t— 1, έχει πλοΰτον W_{t-1}, τον όποιον πρέπει νά κατανέμει :

(ι) Εις παρούσας καταναλώσεις C_{t-1}

(ιι) Είς μίαν έπένδυσιν $(W_{t-1}—C_{t-1})$ είς χρεώγραφα, ήτοι εις τι χαρτοφυλάκιον

'Ακόμη, ύποθέτομεν $C_t = Wt$, όπου Wt είναι ό πλούτος του επενδυτού, κατά τήν περίοδον t, καί

$$U(C_t) = U(C_{t-1}\ C_t)$$

ούτως, ώστε :

$$E[U(Ct)] = E[U(C_{t-1}\ C_t)]^8$$

Κατά τήν περίοδον t — 1 τό πρόβλημα του επενδυτού είναι να κατανέμει τόν πλοϋτον του W_{t-1} είς κατανάλωσιν C_{t-1} καί είς μίαν έπένδυσιν $(W_{t-1} - C_{t-1})$ εις τι χαρτοφυλάκιον κατά τοιούτον τρόπον ώστε να μεγιστοποιήσει τήν άναμενομένην χρησιμότητα $E[U(C_{t-1}, Ct)]$. Τώρα ύποθέτομεν ότι ή $U(C_{t-1}\ C_t)$ είναι γνησίως αύξουσα καί τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμος είς τό C. Τότε

$$\frac{dU(C_{t-1}\ C_t)}{dC_{t-1}} > 0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{dU(C_{t-1}C_t)}{dC_t} > 0 \qquad (1.2)$$

Έν συνεχεία, επειδή ό επενδυτής είναι μή ριψοκίνδυνος θα ισχύουν, έξ ορισμού, αί κάτωθι σχέσεις :

$$\frac{d^2U(C_{t-1}\ C_t)}{dC^2_{t-1}} < 0 \qquad (1.3)$$

$$\frac{d^2U(C_{t-1}\ C_t)}{dC_t^2} < 0 \qquad (1.4)$$

"Εστω, ότι τό χαρτοφυλάκιον ρ τοϋ επενδυτού περιέχει Ν χρεώγραφα-όπου $N E [1,2, \ldots, \eta]$. "Εστω, ακόμη, ότι Rι παριστά τό κέρδος τοΰ χρεωγράφου ι, από τό τέλος της περιόδου t — 1 εως τό τέλος της περιόδου t. Εις τό τέλος της περιόδου t — 1 Ri, είναι μία τυχαία μεταβλητή και δύναται μόνον νά περιγραφεί βάσει μιας πιθανότητος κατανομής.

Εις τό σημεϊον αυτό άναπτύσσομεν τήν εξής ύπόθεσιν :

«Αί πιθανότητες κατανομών των κερδών Ri προσεγγίζουν τάς κανονικάς κατανομάς».

Συμφώνως μέ τήν ανωτέρω ύπόθεσιν $R_1,$ R_2, ..., R_n έχουν κανονική ν πιθανότητα κατανομής. Επομένως ή κοινή κατανομή τών $R_1,$ R_2, ..., R_n πρέπει να είναι πολυμεταβλητή κανονική κατανομή. Επομένως ή κατανομή εκάστου γραμμικού συνδυασμού τών $R_1,$ R_a, ..., Rn θα είναι κανονική. Ούτω, ή κατανομή τών κερδών τοΰ χαρτοφυλακίου ρ χαρακτηρίζεται πλήρως από τό άναμενόμενον κέρδος, Γρ, και άπό τήν τυπικήν άπόκλισι τών κερδών, σ_ρ (ή τήν διακύμανσιν τών κερδών, $\sigma\rho^2$).

Ας άναφέρομεν τώρα τα κάτωθι δύο λήμματα.

ΛΗΜΜΑ 1.1 : Έάν ή κατανομή του Rp είναι κανονική, ή αναμενόμενη χρησιμότης $E[U(C_{t-1}$ $C_t]$ είναι μία συνάρτησις τών C_{t-1}, Γρ, σρ, ήτοι :

$$E[U(C_{t-1} C_t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} U(C_{t-1} (W_{t-1} - C_{t-1}) [1 + \Gamma_\rho + \sigma_\rho z] f (z) dz \quad (1.5)$$

όπου :
$$z = \frac{R_\rho - \Gamma_\rho}{\sigma_\rho} \quad (1.6$$

ΛΗΜΜΑ 1.2 : Ύποθέτομεν :

(ι) Τήν ίσχύν τών ανισοτήτων (1.1), (1.2), (1.3) καί (1.4).

(ιι) Ή κατανομή τοΰ R_p είναι κανονική.

Τότε, διά σταθεράν τιμήν τοΰ σ_ρ, ή E[U{Ct-1Ct)] είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτησις τοΰ Γ_ρ.

Άπό τήν άλλην πλευράν δια σταθεράν τιμήν του Γ_ρ ή $E[U(C_{t-1}$ QCt] είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτησις τοΰ σ_ρ.[9]

"Ας άποδείξωμεν τώρα το καλούμενον θεώρημα τοϋ αποδοτικού συνόλου και ας δώσομεν μίαν άλγεβρικήν παράστασιν της ισορροπίας τοϋ επενδυτού.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ 1.3. Το άριστον χαρτοφυλάκιον ενός μή ριψοκίνδυνου επενδυτού είναι κέρδους/κινδύνου άποδοτικόν και διάφορον του σφαιρικού χαρτοφυλακίου ελαχίστου κινδύνου.[10]

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

Ό αντικειμενικός στόχος τοϋ έπενδυτοϋ είναι να μεγιστοποιήσει την άναμενομένην χρησιμότητα.[11]

$E[U(C_{t-1} \quad c_t]$

$$= \int_{-\propto}^{+\propto} U(C_{t-1} \ (W_{t-1} - C_{t-1})[1 + X^tR + \sqrt{X^tVX} \ \ z] \ f(z)dz \qquad (1.7)$$

ύποκειμένην εις τον περιορισμόν

$$X'\iota = 1 \qquad (1.8)$$

όπου :

$$\Gamma = XtR \qquad (1.9)$$

$$\underline{\sigma}^2 = X^tVX \qquad (I.10)$$

Πράγματι ή έξίσωσις τοϋ Lagrange είναι

$$L = \int_{-\propto}^{+\propto} U(C_{t-1} \ (W_{t-1} - C_{t-1}) \ [1 + X^tR + \sqrt{X^tVX}z] \ f(z)dz - \lambda(X^t \ \iota - I)$$

όπου λ είναι ό πολλαπλασιαστής τοϋ Lagrange.

Ύποθέτοντες δτι αί συνθήκαι δευτέρας τάξεως δια μεγίστας τιμάς ισχύουν, έξισώνομεν τάς μερικάς παραγώγους της L μέ τό μηδέν, άπλοποιοΰμεν και παρατηροϋμεν τάς συνθήκας πρώτης τάξεως. "Ητοι :

$$\frac{dL}{dX} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU(C_{t-1}C_t)}{dC_t} [R + \frac{VX}{\sqrt{X^tVX}} z] f(z)dz - \lambda\iota = 0 \tag{1.11}$$

Ή έξίσωσις (1.11) δίδει :

$$R \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU(C_{t-1}C_t)}{dC_t} f(z)dz + \frac{VX}{\sigma_{M_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU(C_{t-1}C_t)}{dC^t} zf(z)dz = \lambda i \tag{1.12}$$

όπου M_1 είναι τό άριστον χαρτοφυλάκιον τοϋ επενδυτού.

Ή έξίσωσις (1.12) δύναται να μετατραπεί εις την :

$$R \frac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma_{M_1}} + \frac{VX}{\sigma_{M_1}} \frac{dE[U(C_{t-1} C_t)]}{d\sigma_{M_1}} = \lambda\iota \tag{1.13}$$

Διαιροΰντες αμφότερα τα μέλη της έξισώσεως (1.13) διά

$$\frac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma_{M_1}} \sigma_{M_1}$$

καί διευθετοΰντες εκ νέου τους όρους της προκυπτούσης έξισώσεως, λαμβάνομεν

$$\frac{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma_{M_1}}}{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma_{M_1}}} VX = (R\iota) \left(\sigma_{M_1} - \frac{\sigma_{M_1}\lambda}{\dfrac{E[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma_{M_1}}} \right) \tag{1.14}$$

Έάν πολλαπλασιάσωμεν αμφότερα τα μέλη τής έξισώσεως (1.14) μέ V"[1] (R ι) καί λάβομεν υπ' όψει τάς εξισώσεις (1.8) καί (1.9), έχομεν :

$$\frac{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma_{M_1}}}{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma_{M_1}}} \begin{pmatrix} \Gamma_{M_1} \\ 1 \end{pmatrix} = A \left(\sigma_{M_1} - \frac{\sigma_{M_1}\lambda}{\dfrac{E[U(C_{t-1}C_t)}{d\Gamma_{M_1}}} \right) \tag{1.15}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} R^tV^{-1}R & R^tV^{-1}c \\ R^tV^{-1}c & c^tV^{-1}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Επειδή ό Α είναι ένας καθορισμένος θετικός πίναξ, ή έξίσωσις (1.15) δίδει :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{M1} \\ -\dfrac{\sigma_{M1}\lambda}{\dfrac{dE[U(C_{t-1}\,C_t)]}{d\Gamma_{M1}}} \end{pmatrix} = -\frac{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma_{M1}}}{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma_{M1}}} \cdot A^{-1}\begin{pmatrix} \Gamma_{M1} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Άντικαθιστώντες τήν έξίσωσιν (1.17) εις την έξίσωσιν (1.15), άπλοποιοΰντες και λύοντες ώς προς Χ, λαμβάνομεν :

$$X = V^{-1}(R\ c)A^{-1}\begin{pmatrix} \Gamma_{M1} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Επομένως, συμφώνως προς το θεώρημα 1 του Roll[12] συμπεραίνομεν, ότι τό άριστον χαρτοφυλάκιον ενός μή ριψοκίνδυνου επενδυτού είναι ελαχίστης τυπικής αποκλίσεως.[13]

Ούτω, μέ τήν βοήθειαν τοϋ λήμματος 1.2 συμπεραίνομεν, ότι τό άριστο χαρτοφυλάκιον τοΰ επενδυτού θα είναι κέρδους/κινδύνου άποδοτικόν.

'Από τήν άλλην πλευράν δυνάμεθα νά λάβωμεν από τήν έξίσωσιν (1.17) :

$$-\frac{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma_{M1}}}{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma_{M1}}} = \frac{(ac-b^2)\sigma_{M1}}{c\sigma_{M1}-d} \tag{1.19}$$

ήτοι, ή κλίσις της καμπύλης αδιαφορίας (έξίσωσις [1.5]) είναι ίση μέ τήν κλίσιν τοϋ (Γ σ) αποδοτικού συνόλου εις τό σημεϊον M_1. Μέ αλλάς λέξεις, ή καμπύλη αδιαφορίας, ή οποία δίδει τήν μεγίστην άναμενομένην χρησιμότητα εις τόν έπενδυτήν, εφάπτεται του (Γ σ) αποδοτικού συνόλου εις τό σημεϊον M_1.[14]

Εις τήν συνέχειαν ύποθέτομεν ότι υπάρχει μη ριψοκίνδυνος επενδυτής του οποίου το άριστον χαρτοφυλάκιον είναι το σφαιρικόν χαρτοφυλάκιον ελαχίστου κινδύνου.

Τότε πρέπει νά υπάρχει μία καμπύλη αδιαφορίας εφαπτομένη του συνόλου ελαχίστης τυπικής αποκλίσεως εις τό σημεϊον Γc= b/c. Δια Γc = b/c ή εξίσωσις (1.19) δίδει :

$$\frac{\dfrac{E[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma G}}{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma G}} = -\infty$$

Ή τελευταία έξίσωσις συνεπάγει

$$\frac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma G} = -\infty \tag{1.20}$$

ή

$$\frac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma G} = 0 \tag{1.21}$$

Αί εξισώσεις (1.20) και (1.21) αντίκεινται εις τό λήμμα 1.2.

Ο.Ε.Δ.

II ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΔΙΑ ΤΟ (Γ σ) ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΝ ΣΥΝΟΛΟΝ

Ύποθέτομεν ότι δίδεται ένας αριθμός Ν χρεωγράφων κινδύνου, όπου Νi? [1,2, ., 4,] και ενα περουσιακό στοιχείο ελευθέρου κινδύνου F.

"Εστω ρ τό χαρτοφυλάκιον τό προκύπτον εκ του συνδυασμού ενός ελαχίστης τυπικής αποκλίσεως χαρτοφυλακίου Μ' (όπου Γ_{M1} Γ_G) καί του F. Τότε :

$$\Gamma_\rho = X^tR + (1- \quad {}_Xtc)\Gamma_F \tag{II.1}$$

$$\sigma_\rho 2 = \quad X^tVX \tag{11.2}$$

Ούτω εχομεν :

$E[U(C_{t-1}\quad Ct)]$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} U(C_{t-1}.(W_{t-1} - C_{t-1})[1 + X^tR + (1—Xc)\Gamma_F + z\sqrt{X^tVX}])f(z)dz \qquad \text{(H 3)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

Άς άποδείξωμεν τώρα το θεώρημα του αποδοτικού συνόλου :

Το άριστον χαρτοφυλάκιον ενός μη ριψοκίνδυνου επενδυτού είναι (Γ'σ') άποδοτικόν και διάφορον του περιουσιακού στοιχείου ελευθέρου κινδύνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

Ό αντικειμενικός στόχος του επενδυτού είναι ή μεγιστοποίησις της αναμενόμενης χρησιμότητας του, διδομένης άπό τήν έξίσωσιν (Π·3)

Έάν ύποθέσωμεν ότι αϊ συνθηκαι δευτέρας τάξεως για μεγίστας τιμάς ισχύουν, τότε αί συνθηκαι πρώτης τάξεως είναι :

$$\frac{dL}{dV} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU(C_{t-1}C_t}{dC_t} \left[R - \Gamma_F t + \frac{VX}{\sqrt{X^tVX}} \quad z \right] f(z)dz = 0 \qquad \text{(II.4)}$$

Έκ της έξισώσεως (Π.4) ευκόλως παράγομεν τήν

$$(R - \Gamma_F t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU(C_{t-1}C_t)}{dC_t} f(z)dz + \frac{VX}{\sigma_q} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU(C_{t-1}C_t)}{dC_t} zf(z)dz = 0 \qquad \text{(II.5)}$$

όπου q είναι το άριστον χαρτοφυλάκιον του επενδυτού.

Ή έξίσωσις (II.5) είναι ισοδύναμος μέ τήν έξίσωσιν :

$$- \frac{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma q}}{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma q}} VX = (R - \Gamma_F t)\sigma q \qquad \text{(Π.6)}$$

Άλλά,

$$\sigma_q = -\frac{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma q}}{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]/}{d\Gamma q}} \qquad \frac{\Gamma_q - \Gamma_F}{\alpha - 2C\Gamma_F + C\sigma^2_F} \tag{Π.7}$$

Συνδυάζοντες τάς εξισώσεις (ΙΙ.6) και (ΙΙ.7) λαμβάνομεν :

$$X = \frac{\Gamma_q - \Gamma_F}{\alpha - 2b\Gamma_F + C\Gamma_F^2} V^{-1} (R - \Gamma_F \iota) \tag{II.8}$$

Ή τελευταία έξίσωσις ευκόλως παράγει :

$$1 - X^{t}\iota = \frac{\alpha - b\Gamma_F - b\Gamma_q + C\Gamma_F\Gamma_q}{\alpha - 2b\sigma_F + C\Gamma_F^2} \tag{II.9}$$

Ήτοι :

$$Xq = \begin{bmatrix} X \\ 1 - X^{t}\iota \end{bmatrix}$$

Επομένως, το άριστον χαρτοφυλάκιον του επενδυτού είς αυτήν τήν περίπτωσιν εΐναι ελαχίστης τυπικής αποκλίσεως.

Άλλα

$$\frac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma q} > 0$$

Ούτω, το άριστον χαρτοφυλάκιον ενός τοιούτου επενδυτού θα είναι (Γ'σ') άποδοτικόν.

Είς αυτό τό σημεΐον ύποθέτομεν ότι υπάρχει μή ριψοκίνδυνος επενδυτής, τοΰ οποίου τό άριστον χαρτοφυλάκιον είναι τό περιουσιακόν στοιχεΐον ελευθέρου κινδύνου.

Ή εξίσωσις *(11.6)* δίδει :

$$-\frac{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma q}}{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma q}} = \frac{\Gamma q - \Gamma_F}{\sigma q}$$

"Αρα :

$$-\frac{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma_F}}{\dfrac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma F}} = \infty$$

ή ισοδυνάμως

$$\frac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\sigma F} = -\infty$$

ή $$\frac{dE[U(C_{t-1}C_t)]}{d\Gamma_F} = 0$$

ΟΕΔ

τό όποιον είναι άτοπον.[15]

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Εις τό παράρτημα αυτό άναφέρομεν χωρίς άπόδειξιν ότι :

(ΠΙ) "Ενα χαρτοφυλάκιον M_1 είναι ελαχίστης διακυμάνσεως (τυπικής αποκλίσεως) εάν καί μόνον εάν :

$$X_{M1} = V^{-1}(R\iota)A^{-1}\begin{pmatrix} \Gamma_{M1} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A1}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} R^tV^{-1}R & R^tV^{-1}\iota \\ R^tV^{-1}\iota & \iota^tV^{-1}\iota \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \tag{A2}$$

είναι «ό πληροφοριακός πίνακας ελαχίστου κινδύνου»

(Roll [Rl], Merton [Ml])

(Π2) Το ελαχίστης διασποράς σύνολον δίδεται από την κάτωθι έξίσωσιν :

$$G^2 = \frac{a - 2b\Gamma + C\Gamma^2}{ac - b^2} \tag{A3}$$

Το ελαχίστης τυπικής αποκλίσεως σύνολον ορίζεται άπό τόν κλάδο της υπερβολής.

$$\sigma = \sqrt{\frac{a - 2b\Gamma + c\Gamma^2}{ac - b^2}} \tag{A4}$$

(Roll [R], Merton [Ml])

(Π3) Ύποθέτομεν την ΰπαρξιν ενός μοναδικού ελευθέρου κινδύνου περιουσιακού στοιχείου F, παράγοντος σταθερόν άναμενόμενον κέρδος Γρ. Εις αυτήν τήν περίπτωσιν το χαρτοφυλάκιον q είναι ελαχίστης τυπικής αποκλίσεως εάν και μόνον εάν :

$$X_q = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\Gamma_q - \Gamma_F}{a - 2b\Gamma_F + c\Gamma_F^2} \quad V^{-1}(R - \Gamma_F\iota) \\ \dfrac{a - b\Gamma_F - b\Gamma_q - c\Gamma_F\Gamma_q}{a - 2b\Gamma_F + c\Gamma_F^2} \end{array} \right| \tag{A5}$$

(Merton [Ml])

(Π4) "Οταν υπάρχει τό περουσιακόν στοιχεΐον ελευθέρου κινδύνου το ελαχίστης τυπικής αποκλίσεως σύνολον δίδεται άπό τις δύο κάτωθι ήμιευθεΐες.

$$\Gamma = \Gamma_F + (\Gamma_M - \Gamma_F)\sigma \tag{A 6}$$

όπου Μ είναι τό χαρτοφυλάκιον τό εύρισκόμενον εις τό σημεΐον επαφής του κλάδου της υπερβολής (Α4) και τής ήμιευθείας τής διερχόμενης εκ του ΓF. 'Εάν $\Gamma_M >$ ΓF τό άποδοτικόν σύνολον :

$$\Gamma = \Gamma_F + (\Gamma_M - \Gamma_F)\ \Gamma \tag{A 7}$$

συμβολίζεται μέ (F'σ').

(Merton [Ml])

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[B 1] Black F.: "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing". Journal of Business, July 1972, pp. 444 - 455.

[D 1) Diacogiannis G.P.: "On Efficient Set Mathematics and Return - Beta Linearity" Msc Thesis by Research, U.M.I.S.T. 1979.

[D 2] Διακογιάννης Γ.Π.: «'Επιλογή Αρίστου Χαρτοφυλακίου κάτω άπα Συνθήκες Αβεβαιότητος». ΜΕΡΟΣ 1 «Σπουδαί», τεύχος 2, 1981, σ. 496-515.

[F 1] Fama E.F.: "Risk Return and Equilibrium". Journal of Political Economy, January - February 1971, pp. 30 - 55.

[F2] Fama E.F. and Miller M.H.: "The Theory of Finance". Driden Press Hinsdale, Illionais 1972.

[F 3] Francis S.C.: "Investments - Analysis and Management" 2nd Ed, McGraw - Hill Book Co 1976.

[M 1] Merton R.C.: "An Analytic Deviation of Efficient Portfolio Frontier". Journal of Financial and Quantitative Analysis, September 1972, pp. 1851 - 1872.

[R 1] Roll R.: "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests, Part I on the Past and Potential Testability, of the Theory", Journal of Financial Economics, March 1977, pp. 29 - 77.

[S 1] Sharpe W.F.: "Portfolio Thery and Capital Markets" New York McGraw Hill, Co 1970.

[T 1] Tobin J.: "Liquidity Preference as Behaviour Toward Risk". Review of Economic Studies, February 1958, pp. 65 - 86.

1. Βλέπε [D 2].

2. Βλέπε [T I].

3. Βλέπε [F 1] υποσημείωσις 7, σ. 38.

4. Γενικώς ό Fama και ό Tobin χρησιμοποιούν όμοια επιχειρήματα. Ή μόνη διαφορά είναι ότι ό Tobin δεν λαμβάνει τήν άπόφασιν ώς προς τήν κατανάλωσιν Ct-1..

5. See [F 2].

6. Τό σφαιρικόν χαρτοφυλάκιον ελαχίστου κινδύνου είναι κέρδους/κινδύνου άποδοτικόν. Επομένως εκ τοϋ θεωρήματος του αποδοτικού συνόλου, τό όποιον άπέδειξεν ό Fama (ή ό Fama καί Miller) προκύπτει ότι υπάρχει μή ριψο-

κίνδυνος επενδυτής έπιλέγων ως άριστον χαρτοφυλάκιόν του τό σφαιρικό χαρτοφυλάκιον ελαχίστου κινδύνου. Τό συμπέρασμα αυτό είναι λανθασμένον (βλέπε Θεώρημα 1.3).

7. Ό Fama και ό Miller [F 2] (σ. 232 - 233) ô Francis [F 3] (σ.277-278) και ό Sharpe σ. 254) αναφέρουν περιπτώσεις εις τάς οποίας ένας μη ριψοκίνδυνος επενδυτής δύναται να επενδύσει εξ ολοκλήρου τα χρήματα του εις τό περουσιακόν στοιχεΐον ελευθέρου κινδύνου. Αυτό είναι λανθασμένον εις τήν περίπτωσιν κατά τήν οποίαν ισχύει ή ύπόθεσις b (βλέπε Θεώρημα II.1).

8 $$C = \left\{ C_2 = (C_{t-1}\ C_t) \right.$$

- 1 = ή τιμή της καταναλώσεως του επενδυτού κατά τήν περΐοδον t - 1

Ct = ή τιμή της καταναλώσεως τοϋ επενδυτού κατά τήν περίοδον t.

'Εάν ύποθέσομεν ότι, για τα στοιχεία τοΰ C ισχύουν τα αξιώματα τοΰ υποδείγματος της αναμενόμενης χρησιμότητος, δυνάμεθα να συμπεράνωμεν ότι αί έπιθυμίαι ενός επενδυτού δύνανται να αντιπροσωπευθούν άπό τήν συνάρτησιν χρησιμότητος:

$$U C_2 \quad R : \quad (C_{t-1} \quad Ct \quad U(C_2) = U_1(C_{t-1}Ct)$$

9. Αι αποδείξεις των λημμάτων 1.1 και 1.2 υπάρχουν εις [F2] (σ. 223 - 226).

10. Πληροφορίες δια τό σφαιρικόν χαρτοφυλάκιόν ελαχίστου κινδύνου δίδονται άπό τους [R 1] και [D 1].

11. «Γενικώς ύποθέτομεν τήν ΰπαρξιν μιας τελείας κεφαλαιαγοράς (δι' όρισμόν της τελείας κεφαλαιαγοράς βλέπε [F 2] σ. 277).

12. Βλέπε [R 1].

13. Δι' έκάστην σταθεράν τιμήν του C_{T-1} μεγιστοποιοΰντες τήν $E[U(Q_{t-1}Ct)]$ συμπεραίνομεν ότι τό άριστον χαρτοφυλάκιόν τοΰ επενδυτού είναι κέρδους/κινδύνου άποδοτικόν. Επομένως αυτό τό συμπέρασμα θα ισχύει και δια τήν άρίστην τιμήν τοΰ C_{t-1}

14. Ό Fama και Miller [F2] απέδειξαν, ότι αί καμπύλαι αδιαφορίας εις αυτήν τήν περίπτωσιν είναι κυρταί (σ. 226 - 228). Επίσης τό κέρδους/κινδύνου άποδο τικόν σύνολον είναι κυρτόν (έπειδή $\frac{d^2\sigma_{M1}}{d\Gamma^2_{M1}} > 0$).

Επομένως ή καμπύλη αδιαφορίας εφάπτεται εξωτερικός τοϋ κέρδους/κινδύνου αποδοτικού συνόλου. Ούτω το άριστον χαρτοφυλάκιον ενός τοιούτου επενδυτού θα είναι μοναδικόν.

15. Το χαρτοφυλάκιον το εύρισκόμενον εις τό σημεΐον επαφής τοϋ κλάδου της υπερβολής (Α 4) (βλέπε Παράρτημα Α) και της ήμιευθείας της διερχόμενης έκ του ΓF, είναι ορθογώνιον τοϋ F. Επομένως ή μελέτη μου αύτη συμφωνεί και μέ την θεωρία τοϋ Black [Β 1].