Η ΕΞΟΜΟΙΩΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΝ ΕΝΟΣ ΑΝΗΓΜΕΝΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Του κ. ΑΛΕΞΗ ΛΑΖΑΡΙΔΗ (Ph. D.)

Ή εργασία αυτή αναφέρεται κατά βάση σέ μια πρόσφορη μέθοδο πού μπορεί να εφαρμοστεί για την εξομοίωση τών αποκλίσεων ενός άνηγμένου γραμμικού δυναμικού συστήματος ταυτοχρόνων εξισώσεων. Ύποτίθεται ότι τό σύστημα περιγράφεται άπό τή σχέση (system transition equation):

$$x(t)=Ax(t-1)+Bu(t)+Bz(t)+b+e(t) \tag{1}$$

όπου

$x \pounds E^n$ είναι τό διάνυσμα πού ορίζει τήν κατάσταση του συστήματος σέ κάθε χρονική περίοδο t.

$u \pounds E^m$ είναι τό διάνυσμα των μεταβλητών μέ τις όποιες επιτυγχάνεται ό έλεγχος του συστήματος.

$Z \varepsilon E^q$ είναι τό διάνυσμα τών εξωγενών μεταβλητών.

$b \pounds E^n$ είναι τό διάνυσμα τών σταθερών όρων, καί

$\varepsilon \pounds E^\eta$ είναι τό διάνυσμα τών αποκλίσεων (noise vector), πού υποτίθεται ότι είναι εκτιμητής του θεωρητικού διανύσματος ξΕΕn.

Οι πραγματικές μήτρες A, B καί D, πού υποτίθεται ότι είναι γνωστές, ορίζονται στο $E^n x E^n$, $E^n x E^m$ καί $E^n x E^q$, αντίστοιχα.

(Τό Ε στίς παραπάνω παραστάσεις παριστάνει τόν Εύκλείδιο χώρο).

Σημειώνεται ότι τό σύστημα ελέγχου πού περιγράφεται άπό τή σχέση (1) μπορεί να θεωρηθεί σαν άνηγμένη μορφή τοϋ αντίστοιχου διαρθρωτικού οικονομετρικού υποδείγματος. (Για λεπτομέρειες αναφορικά μέ τό μετασχηματισμό ενός οικονομετρικού υποδείγματος σε ισοδύναμο σύστημα ελέγχου, βλέπε Lazaridis, 1978, σελίδες 670-671, και Lazaridis, 1980, σελίδες 1244-1251).

"Αν υποτεθεί ότι υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία για Κ χρονικές περιόδους, πού χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση των συντελεστών τών διαρθρωτικών εξισώσεων, καί ότι ή μεγαλύτερη χρονική υστέρηση ανέρχεται σε ρ περιόδους, τότε ή προσδιοριστική (deterministic) τροχιά τοϋ συστήματος μπορεί να υπολογιστεί για N = K - ρ χρονικές περιόδους—δεδομένου του χ(0)—από τή σχέση:

$$\hat{x}(t)=A\hat{x}(t-1)+Bu(t)+Dz(t)+b$$

$$t=1,2,\ldots,N$$

Τό στοχαστικό σύστημα, όπως προαναφέρθηκε, έχει τή μορφή πού καθορίζεται άπό τή σχέση (1). Για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο m, τό στοχαστικό διάνυσμα-κατάσταση δίδεται άπό τή σχέση (βλ. Λαζαρίδης, 1980 σελ. 32-33):

$$x(m)=A^{m}x(O)+\sum_{j=O}^{m-1}A^{m-j-1}Bu(j+1)+\sum_{j=O}^{m-1}A^{m-j-1}Dz(j+1)+\sum_{j=O}^{m-1}A^{m-j-1}b$$

$$+A^{m-1}e(1)+A^{m-2}e(2)+,\ldots\ldots,+Ae(m-1)+e(m) \qquad (1.\alpha)$$

"Αν, στή συνέχεια, θεωρήσουμε τό σύστημα

$$\hat{\hat{x}}(t)=Ax(t-1)+Bu(t)+Dz(t)+b \qquad (1\cdot\beta)$$

τότε—έχοντας υπόψη τή σχέση (1.α)—για τή συγκεκριμένη χρονική περίοδο m, θά είναι :

$$\hat{\hat{x}}(m)=Ax(m-1)+Bu(m)+Dz(m)+b$$

$$=A\left[A^{m-1}x(O)+\sum_{j=O}^{m-2}A^{-j-1}Bu(j+1)+\sum_{j=O}^{m-2}A^{m-j-1}Dz(j+1)+\sum_{j=O}^{m-2}A^{m-j-1}b\right.$$

$$+A^{m-2}e(1)+A^{m-3}e(2)+\ldots\ldots e(m-1)\Big] + Bu(m)+Dz(m)+b$$

$$=> \hat{\hat{x}}(m)=A^m x(0)+\sum_{j=0}^{m-1} A^{m-j-1}Bu(j+1)+\sum_{j=0}^{m-1} A^{m-j-1}Dz)j-1)$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1} A^{m-j-1}b + A^{m-1}e(1)+A^{m-2}e(2)+, \ldots, Ae(m-1) \qquad (1.\gamma)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.α) και (1.γ) διαπιστώνεται εύκολα ότι τό διάνυσμα των αποκλίσεων για τή χρονική περίοδο m [δηλ. τό e(m)], μπορεί να υπολογιστεί άπό τή σχέση

$$e(m)=x(m)-\hat{\hat{x}}(m)$$

όπου τό διάνυσμα $\hat{\hat{x}}(m)$ δίδεται άπό τή σχέση (1.β).

Για κάθε μία άπό τις Ν χρονικές περιόδους, τό διάνυσμα x(t), t = 1, 2, .., Ν εΐναι παρατηρήσιμο, ένω, όπως προαναφέρθηκε, τό διάνυσμα $\hat{x}(t)$ μπορεί να υπολογιστεί άπό τή σχέση (1.β). Έτσι είναι εύκολη πλέον ή εκτίμηση τοϋ διανύσματος των αποκλίσεων για Ν χρονικές περιόδους.

Υπενθυμίζεται ότι διάνυσμα των αποκλίσεων e(t) είναι εκτιμητής του θεωρητικού διανύσματος ξ(t) για τό όποιο υποτίθεται δτι :

$$\xi \sim N(0, \Xi)$$

όπου

$$\Xi\delta_{t,s}=E[\xi(t)\ \xi'(_8)] \qquad (2)$$

(τό δt,s είναι τό λεγόμενο Kronecker δέλτα. Ό τόνος υποδηλώνει αναστροφή, και τό Ε τήν προσδωκόμενη τιμή).

Σύμφωνα με τόν Kuo (1977, σελίδες 484-485) ή στάσιμη (stationary) μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων τοϋ διανύσματος e ορίζεται άπό τή σχέση:

$$VC(e)=E[[e-E(e)]\ [e'-E(e\ )]]=\Omega \qquad (3)$$

Παριστάνοντας τά εξωτερικά γινόμενα e(t).e'(t) μέ Q(t), t = 1, 2, ... N, και έχοντας υπόψη ότι E(e) = 0, τότε—δεδομένης της υποθέσεως ότι E[e(t) e'(s)] = 0—ή σχέση (3) υποδηλώνει πώς ή μήτρα Ω είναι ή προσδοκώμενη τιμή της σειράς {Q(l), Q(2), ..., Q(N)}. Ή κάθε Q(t) μήτρα θα έχει τή μορφή :

$$Q(t) = \begin{bmatrix} e_1(t)e_1(t), & e_1(t)e_2(t), & \ldots, & e_1(t)e_n(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_n(t)e_1(t), & e_n(t)e_2(t), & \ldots, & e_n(t)e_n(t) \end{bmatrix}$$

όπου d υποδηλώνει τα στοιχείο i του διανύσματος e.

Εκείνο πού έχει ιδιαίτερη σημασία στην προκειμένη περίπτωση είναι το έξης :

Κάθε μία από τίς Q(t) μήτρες (t = 1, 2, ..., N) είναι ιδιάζουσα γιατί αποτελείται άπό n γραμμικά εξαρτώμενα διανύσματα. Το άθροισμα όμως των μήτρων αυτών—καί συνεπώς καί ό μέσος τους—δίνει μια μήτρα πού είναι θετικά ορισμένη, εφόσον όλα τά στοιχεία του διανύσματος είναι e διάφορα του μηδενός.

Είναι εύκολο συνεπώς να έχουμε μια θετικά ορισμένη μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων, εάν παραληφθούν τά μηδενικά στοιχεία (αν φυσικά υπάρχουν τέτοια στοιχεία) άπό το διάνυσμα e.

Είναι ευνόητο ότι ή μήτρα Ω είναι συμμετρική. Δεδομένου ότι ή αντίστροφη της Ω έχει τίς ϊδιες ιδιότητες (συμμετρική καί θετικά ορισμένη), είναι δυνατό εφαρμόζοντας τήν παραγοντοποίηση του Cholesky (Cholesky's factorization), να καθορίσουμε μια κάτω τριγωνική καί μή ιδιάζουσα μήτρα L, τέτοια ώστε νά ισχύει ή σχέση :

$$LL' = \Omega^{-1} \quad . \qquad (4)$$

Θεωρώντας τήν τετραγωνική μορφή $e'\Omega^{-1}e$, καί έχοντας υπόψη τή σχέση (4) θά έχουμε :

$$e'Q\text{-}ie = e'LI/e = (L'e)' \quad (L'e)$$

'Ορίζοντας τό διάνυσμα y σαν

$$y = L' e$$

τότε γίνεται εύκολα αντιληπτό δτι :

$$E(y) = 0 \quad \text{και}$$

$$E[[y-E(y)] \quad [y-E(y)]'] = E[(L'e) \qquad (L'e)'] = L'E(ee')L = L'\Omega L \qquad (5)$$

'Από τη σχέση (4) βρίσκουμε :

$$LL' = \Omega^{-1}$$

$$\Omega \; LL'' = I$$

$$L'OLL' = L' \qquad (5.\alpha)$$

Πολλαπλασιάζοντας άπό τα δεξιά τή σχέση (5.α) επί τη μήτρα $(L')^{-1}$ βρίσκουμε τελικά :

$$L'\Omega LL'(LTi = L'(L')-i \; => \; L \; \Omega L = I$$

Έτσι διαπιστώνεται δτι αν υποθέσουμε πώς $e \sim N(0,\Omega)$ τότε ή συνάρτηση

πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) του διανύσματος y ορίζεται άπό τή σχέση :

$$f(y) = \text{σταθερά}.\exp\left(-\tfrac{1}{2} \|L'e\|_I^2\right) \qquad (\text{όπου } \exp(x) = e^x)$$

πού συνεπάγεται ότι $y \sim N(0,I)$.

"Αν λοιπόν έχουμε στή διάθεση μας τυχαίους αριθμούς N(0,1) σαν στοιχεία τοϋ διανύσματος y, είναι εύκολος ό υπολογισμός τυχαίων στοιχείων μέ στοχαστικές Ιδιότητες παρόμοιες μέ εκείνες πού έχουν υποτεθεί για τα στοιχεία τοϋ διανύσματος e. "Αν υποτεθεί ότι τα τυχαία αυτά στοιχεία απαρτίζουν τό διάνυσμα $\hat{e}$, τότε μπορούν να υπολογιστούν άπό τή σχέση :

$$\hat{e} = (L')^{-1} y \qquad (6)$$ 1

Για τή χρησιμοποίηση του προγράμματος πού έχουμε καταρτίσει, τα διανύσματα e(t), t = 1, *2*, ..., N, θα πρέπει να δίδονται σαν στήλες μιας μήτρας, της G π.χ. Δηλαδή ή μήτρα G θα *έχει* τή μορφή :

$$G=[e(1),\ e(2),\ ....\ e(N)]$$

Υπενθυμίζεται ότι άπό τα διανύσματα των αποκλίσεων θα πρέπει νά παραληφθούν τα μηδενικά τους στοιχεία.

Χαρακτηριστικά και τρόπος χρησιμοποιήσεως τοϋ προγράμματος (SIMNOISE).

Το πρόγραμμα έχει γραφεί σε standard FORTRAN για τον υπολογιστή UNIVAC 1106 τοϋ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. 'Αποτελείται από τό κυρίως πρόγραμμα (MAIN) και 6 υποπρογράμματα.

Τό όνομα, ή φύση των υπολογισμών κ.λπ. πού εκτελούν τό κυρίως πρόγραμμα και τα διάφορα υποπρογράμματα είναι :

MAIN : 'Ελέγχει τήν είσοδο των δεδομένων, συντονίζει τις φάσεις εκτελέσεως τών διαφόρων υπολογισμών καί ρυθμίζει τήν παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

RANDOM : Δημιουργεί και αποθηκεύει τυχαίους αριθμούς πού παίρνουν τιμές άπό τό 0 εως τό 1.

RANDY : Σέ συνδυασμό μέ τό προηγούμενο ύποπρόγραμμα δημιουργεί τυχαίους αριθμούς N(0,1) σαν στοιχεία τοϋ διανύσματος y. Ή μαθηματική διαδικασία πού ακολουθείται περιγράφεται στό επόμενο κεφάλαιο.

CHOLES : 'Ελέγχει αν μια συμμετρική μήτρα είναι θετικά ορισμένη εφαρμόζοντας τήν παραγοντοποίηση τοϋ Cholesky. "Αν ή μήτρα Ω είναί συμμετρική και θετικά ορισμένη, τότε ισχύει ή σχέση $\Omega = UU'$ όπου U είναι μια κάτω τριγωνική μήτρα. Τό ύποπρόγραμμα υπολογίζει τήν Ω^{-1} άπό τή σχέση :

$\Omega^{-1} = (U^{-1})'\ U^{-1}$, όπου ή μήτρα U^{-1} υπολογίζεται μέ τήν επίλυση μιας ομάδας εξισώσεων. Σύμφωνα μέ τή σχέση (4) θά είναι $L=(U^{-1})$.

COMEAN : Υπολογίζει τή μήτρα $E[e(t)e'(t)]$.

SYMETR : Λόγω τοΰ περιορισμένου εύρους της λέξεως (Word field) στους διάφορους υπολογιστές, είναι δυνατό να μην είναι συμμετρική ή ή μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων λόγω περικοπών και στρογγυλεύσεων. Τό ύποπρόγραμμα SYMETR εξασφαλίζει τήν απαραίτητη συμμετρικότητα.

PRINTM : Τυπώνει μια πραγματική μήτρα, άνά 10 στήλες σε πεδίο 120 διαστημάτων. "Αν τά στοιχεία της μήτρας είναι, συγκριτικά, μεγάλοι ή πολύ μικροί αριθμοί, τότε γράφονται μέ Ε FORMAT. Διαφορετικά γράφονται μέ F FORMAT.

Σύμφωνα μέ τον τρόπο πού έχει καταρτιστεί τό πρόγραμμα, τά δεδομένα πού χρειάζονται καθώς καί ή σειρά μέ τήν οποία θα πρέπει να δοθούν αυτά, είναι :

1. Σέ μία κάρτα δίδονται αρχικά οί ακέραιοι αριθμοί Ν, Μ, ΝΝ. όπου

   $N = K - \rho$, όπως καθορίστηκε προηγουμένως.
   Μ είναι ό αριθμός των μή μηδενικών στοιχείων του διανύσματος e καί
   ΝΝ είναι τό σύνολο τών χρονικών περιόδων για τίς όποιες ζητείται να εξομοιωθεί τό διάνυσμα e τών αποκλίσεων.

   Σημειώνεται ότι θα πρέπει να είναι Ν, $NN<40$.

2. Στή συνέχεια δίδονται οί σειρές της μήτρας G, της οποίας, όπως προαναφέρθηκε, οί Ν στήλες αποτελούνται άπό τά διανύσματα e(t) ($t = 1, 2, ..., N$) άπό τά όποια έχουν παραληφθεί τά μηδενικά στοιχεία.

Σημειώνεται ότι όλοι οί αριθμοί, είτε ακέραιοι είτε πραγματικοί, θα πρέπει να χωρίζονται μεταξύ τους μέ ενα κόμμα.

Τό πρόγραμμα καλείται άπό τή βιβλιοθήκη τοΰ υπολογιστή μέ τίς έξης εντολές :

```
QRUN, F-, —, —, 3,100     (Run κάρτα)

ΩASG, AX ALEXI * SIMNOISE, F

ΟXQT ALEXI * SIMNOISE . SIMNOISE

           }
        Δεδομένα
           }
```

ΩFIN

Το γράμμα Ω μπορεί να διατρηθεΐ πιέζοντας ταυτόχρονα τό πλήκτρο NUMERIC και τό πλήκτρο του γράμματος C.

Διευκρινίζεται τέλος, δτι τό πρόγραμμα **SIMNOISE,** για την εξομοίωση τών αποκλίσεων ενός άνηγμένου συστήματος ταυτοχρόνων εξισώσεων, μπορεί **να** χρησιμοποιηθεί άπό όποιονδήπουε χρήστη τοϋ υπολογιστή του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Δημιουργία τυχαίων N(0,1) αριθμών

Υποτίθεται ότι ή τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τήν ορθογώνια κατανομή (rectangular distribution) και παίρνει τιμές πού κείνται μεταξύ τοϋ ο καί τοϋ α

$$f(X)= \frac{1}{c-o} = \frac{1}{c}$$ τητας τής X θα είναι :

$$E(X)= \int_{o}^{c} Xf(X)dX = \int_{o}^{c} X \frac{1}{c} dx = \frac{1}{c} \left[\frac{X^2}{2}\right]_{o}^{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{c^2}{2} = \frac{c}{2}$$

Ή διακύμανση, V(X), θα είναι :

$$V(X)= \int_{o}^{c} [X-E(X)]^2 f(X)dX$$

$$= \int_{o}^{c} X^2f(X)dX-2E(X) \int_{o}^{c} Xf(X)dX+[E(X)]^2 \int_{o}^{c} f(X)dX$$

$$= \int_{o}^{c} X^2f(X)dX - [E(X)]^2$$

$$= \frac{1}{c} \int_{o}^{c} X^2 dX - \frac{c^2}{4} = \frac{1}{c} \left[\frac{X^3}{3} \right]_{o}^{c} - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{12}$$

Συνεπώς αν $c=1$, θα προκύψουν :

$E(X)=0,5$

$V(X)=1/12$

Έχοντας στή διάθεση μας τυχαίους αριθμούς (pseudorandom numbers) πού παίρνουν τιμές στο διάστημα (0,1), τότε είναι δυνατή ή δημιουργία μιας τυχαίας μεταβλητής X πού ακολουθεί την ορθογώνια κατανομή στο διάστημα άπο τό α έως τό β, άπο τη σχέση :

$$X = \alpha + (\beta - \alpha) R$$

όπου R είναι ένας τυχαίος αριθμός πού αναφέρθηκε προηγουμένως (pseudorandom number).

Υποτίθεται στή συνέχεια ότι έχουμε στή διάθεση μας ένα δείγμα 16 παρατηρήσεων μιας μεταβλητής πού ακολουθεί τήν ορθογώνια κατανομή στο διάστημα από 0 έως 1. "Οπως έχει αποδειχθεί θα είναι :

$E(X)=05, \quad V(X)=1/12$

Ή άνηγμένη κατανομή Z τών μέσων δίδεται άπό τή σχέση :

$$Z = \frac{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i - 0,5}{\sqrt{1/12}/\sqrt{16}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{16} x_i - 0,5.16}{16}}{\dfrac{1}{8\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}\,\left(\sum_{i=1}^{16} x_{i-8}\right)}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{i=1}^{16} x_{i-8}\right)$$

Σύμφωνα μέ τα όσα αναπτύχθηκαν παραπάνω αν Ri είναι ένας τυχαίος αριθμός στό διάστημα (0,1), τότε θα Ισχύει ή σχέση :

$$Z = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{i=1}^{16} R_{i-8}\right)$$

'Εάν στη συνέχεια θέλουμε να δημιουργήσουμε τυχαίους αριθμούς $N(\mu,\sigma^2)$ τότε σύμφωνα και με το κεντρικό οριακό θεώρημα (Rao, 1965, σελίδα 170) θα πάρουμε τό στοιχείο Yj της κανονικής αυτής κατανομής από τή σχέση :

$$Yj = \mu+\sigma\times Z = \mu+\sigma \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sum_{i=1}^{16} R_{i-8} \right) \right]$$

όπου σ ή τυπική απόκλιση τής κανονικής κατανομής. Για μ = 0 καί σ = 1 θα είναι:

$$Yj = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sum_{i=1}^{16} R_{i-8} \right)$$

Στή συνέχεια παίρνοντας διαδοχικά άλλα δείγματα (16 κάθε φορά) τής τυχαίας μεταβλητής X, δημιουργούμε μια κανονική κατανομή με στοιχεία τα Yj πού έχουν μέσο 0 καί διακύμανση 1.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Athans, M. (1972), «The Discrete Time Linear-Quadratic-Gaussian Stochastic Control Problem», Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 1, No. 4, pp. 449-491.

Bellman, R. (1961), Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York.

Dhrymes, P. J. (1970), Econometrics: Statistical Foundations and Applications, Happer and Row Publishers, New York.

Kuo, B. C. (1977), Digital Control System, SRL Publishing Company, Champaing, Illinois

Lazaridis, A. (1978), «On the Computation of the Optimal Controls for a Linear Plant with Time-Varying Weighting Matrices in the Quadratic Cost Functional», ΣΠΟΥΔΑΙ, Τόμος ΚΗ', Τεύχος 4, σελίδες 656-680.

Lazaridis, A. (1980), «Application of Optimal Control for Determining the Optimal Price Policy in the Greek Cattle Industry», International Journal of Systems Science, Vol. 11, No. 10, pp. 1241-1264.

Λαζαρίδης, Α. (1980), "Αριστος Έλεγχος (Optimal Control). Θεωρία και Εφαρμογές σε Δυναμικά Οικονομικά Συστήματα. Θεσσαλονίκη.

Rao, C.R. (1965), Linear Statistical Inference and its Applications, John Wiley and Sons, New York.

Tocher, K. D. (1963), The Art of Simulation, The English University Press, London.

Wilkinson, J. H. and Reinsch C, (1971), Handbook for Automatic Computation, Vol. II Linear Algebra, Springer-Verlag, Berlin.