ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΣΦΗΝΟΕΙΔΩΝ ΣΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΥΣΤΕΡΗΣΕΩΝ

Τού κ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ν. ΤΖΙΑΦΕΤΑ,
Επ. Καθηγητή Ε. Μ. Πολυτεχνείου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η θεωρία των σφηνοειδών έτυχε μεγάλης αναπτύξεως κατά την τελευταία εικοσαετία, βρίσκοντας μεγάλη εφαρμογή σε πολλά τεχνικά και φυσικά προβλήματα. Ειδικώτερα στη Στατιστική συνέβαλε τόσο στην επίλυση προβλημάτων, όσο και στη βελτίωση της μεθοδολογίας επιλύσεως. Στα επόμενα δίνουμε ένα παράδειγμα για τον προσδιορισμό των κατανομών με υστέρηση επιδράσεως τυχαίων μεταβλητών (lag distributions) που εμφανίζονται σε πολλά οικονομετρικά μοντέλα. Όπως προκύπτει από την παρατιθέμενη μεθοδολογία, η προσέγγιση είναι πολυπλοκώτερη, σε σύγκριση με άλλες μεθόδους. Η ανάπτυξη, όμως, αλγορίθμων και η χρήση των υπολογιστικών μηχανών διευκολύνουν την εφαρμογή της μεθοδολογίας, η οποία, σε συνδυασμό με την καλλίτερη ακρίβεια, κρίνεται προσφορώτερη για τη διερεύνηση οικονομετρικών μοντέλων.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Είναι γνωστό ότι για τον προσδιορισμό κατανομών υστερήσεως τίθεται, συνήθως σαν βάση, ότι η επίδραση των υστερήσεων μπορεί να προκύψει υπό τη μορφή μίας πολυωνυμικής συναρτήσεως, η οποία προσδιορίζεται με ανάλυση παλινδρομήσεως από τα εμπειρικά δεδομένα. Η μεθοδολογία αυτή, παρά το αποδεκτό θεωρητικό υπόβαθρο (Dhrymes, 1971), δημιουργεί σοβαρά προβλήματα κατά τις εφαρμογές. Έτσι, παρότι μπορούμε να δεχθούμε θεωρητικά ότι μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι δυνατόν να παρασταθεί από μία ακολουθία προσεγγιστικών πολυωνύμων, εν τούτοις τα πολυώνυμα που θα παρεμβληθούν, σε συγκεκριμένα σημεία παρεμβολής, εμφανίζουν σημαντικές αποκλίσεις, όταν τα σημεία παρεμβολής δεν είναι αρκετά πυκνά, ώστε οι αποκλίσεις να τεθούν σε κάποιο δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης (Fahrion, 1977). Αυτό σημάνει ότι τα πολυώνυμα παρεμβολής εξαρτούνται από τη θέση και το πλήθος των σημείων παρεμβολής (Almon, 1965). Μία άλλη δυσκολία που προκύπτει από την παρεμβολή των πολυωνύμων αφορά το βαθμό του πολυωνύμου παρεμβολής, του οποίου η αύξηση οδηγεί αφενός μεν σε καλλίτερη προσέγγιση, αφετέρου δε σε ανάλογη αύξηση της διαστάσεως του παλινδρομικού συστήματος. Γίνεται, λοιπόν, φανερό ότι είναι αρκετά δύσκολο να προσδιορισθούν πολυώνυμα παρεμβολής αρκετά λεία (μικρού βαθμού) και συγχρόνως να εμφανίζουν αποκλίσεις που να μην υπερβαίνουν ορισμένα όρια. Για το λόγο αυτό καταφεύγουμε στη διερεύνηση εφαρμογής συναρτήσεων σφηνοειδών, μερικές από τις οποίες ικανοποιούν τις παραπάνω αντιφάσκουσες ιδιότητες.

2. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΕ ΥΣΤΕΣΗΣΕΙΣ

Έστω το γραμμικό μοντέλο με υστέρηση της μορφής :

$$y_t = \sum_{i=1}^{N} g(z_i)\, x_{t-z_i} + u_t, \qquad Z_i \in N \cup \{0\},\ t = Z_N+1, \dots, T, \tag{2.1}$$

για το οποίο ισχύουν οι κλασικές υποθέσεις της θεωρίας των ελαχίστων τετραγώνων, δηλαδή $E(u_t) = 0$, $\Delta(u_t) = \sigma^2$, και $\text{Συνδ}(u_{t_1}, u_{t_2}) = 0$, για $t_1 \neq t_2$.

Τα βάρη των υστερήσεων $g(Z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, μπορούν να θεωρηθούν συναρτήσεις σφηνοειδών, εάν για τα σημεία παρεμβολής, $x_0, X_1, \dots, x_s$, όπου

$$Z_0 < X_1 < X_2 < \dots < X_k < Z_N,$$

υπάρχει η $(n-1)$ συνεχής παράγωγος της συναρτήσεως $g(t)$, η οποία μπορεί να παρασταθεί με πολυώνυμα το πολύ βαθμού n στα υποδιαστήματα :

$$(-\infty, X_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, X_k), (x_k, +\infty).$$

Αποδεικνύεται (Greville, 1969) ότι τότε ισχύει :

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} a_j \varphi_j(t) + \sum_{j=n+1}^{n+\kappa} c_j \varphi_j(t) \qquad (2.2)$$

ό π

$$\varphi_j = \begin{cases} t^j, & j=0,1,\ldots,n \\ (t-x_j)_+^n, & j=n+1,\ldots,n+k. \end{cases}$$

$$(t-x_j)_+^n = \begin{cases} 0, & t \leq x_j \\ (t-x_j)^n, & t > x_j \end{cases} \qquad (2.4)$$

Το σύνολο των σφηνοειδών n βαθμού στα σημεία παρεμβολής $x_l, \ldots, x_k$ συμβολίζουμε με $S_n,k\ (x_{lt}, \ldots, x_k)$.

Εάν θέσουμε :

$S = (g\ (z_0). \cdots, g(^zN))'$, $b = (a_0, \ldots, akCi, \ldots, c_k)'$,
$Y = (YZN+I, \cdots, YT)'$, $U = (UZN_{+1}, \cdots, u_T)'$ (2.5)

$$X = (x_{t-z_j})_{\substack{t=z_N+1,\ldots,N, \\ j=0,\ldots,N}} \quad T = (\varphi_i(z_j))_{\substack{j=0,\ldots,N \\ i=0,\ldots,n+k}}$$

τότε η σχέση (2.1) γράφεται :

$$Y = XTb + u \qquad (2.6)$$

οπότε η εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων (OLS) θα είναι :

$$\hat{b} = (T'X'XT)^{-1}T'X'Y \qquad 2.7)$$
$$\hat{g} = T\hat{b}. \qquad (2.8)$$

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ

Ο προσδιορισμός των εκτιμήσεων (2.7) και (2.8) είναι ανέφικτος, σε πολλές περιπτώσεις, λόγω της χρησιμοποιήσεως της βάσεως των σφηνοειδών $(\varphi_j)_{i=0}$ οποία οδηγεί σε αριθμητικές αστάθειες στον υπολογισμό του πίνάκα αντιστροφής. Τη δυσκολία αυτή μπορούμε να ξεπεράσουμε με αλλαγή της βάσεως,εφαρμόζοντας την ακόλουθη πρόταση του Peano (Davis, 1963, σελίδα 70).

Πρόταση Peano. Εάν $L : C^{n+1}_{[a,b]} \rightarrow R$, με $L(p_n) = 0$, όπου p_n πολυώνυμο το πολυ βαθμού η, τότε ισχύει :

$$L(f) = \int_a^b K(t)\, f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{34}$$

όπου ο πυρήνας Peano είναι;

$$K(t) = \frac{1}{n!} L_x((x-t)^n_+). \tag{3.2}$$

Θεωρώντας, έτσι, τα βοηθητικά σημεία παρεμβολής εκτός του διαστήματος $[x_1, x_k]$, δηλαδή :

$$x_{-n} < x_{-n+1} < \cdots < x_0 < x_1 \text{ καί } x_k < x_{k+1} < \cdots < x_{n+k+1} \tag{3-3}$$

και σαν στοιχεία της νέας βάσεως τις (n+1) - διαιρεμένες διαφορές των $m(t,x) = (x+1)(x-t)^n_+$, τότε ο πυρήνας του Peano θα έχει τη μορφή :

$$K(t) = \frac{1}{(n+1)!} L_x(m(t,x)). \tag{3.4}$$

Θέτοντας $[x_{i-j}] = m(t, x_{i-j})$, για $j = n+1, n, \ldots, 0$, τότε, για σταθερό i, προκύπτει ,η ακόλουθη αναδρομική σχέση :

$$[x_{i-j}, x_{i-j+1}, \ldots, x_i] = \frac{[x_{i-j+1}, \ldots, x_i] - [x_{i-j}, \ldots, x_{i-1}]}{x_i - x_{i-j}}. \tag{3.5}$$

Το γενικό σχήμα υπολογισμού παραθέτουμε στον επόμενο πίνακα 1

Έτσι, τελικά, τα στοιχεία της βάσεως θα είναι :

$$mi\ (t) = [Xi\__{n}\text{-}i,\ Xi\text{-}n, \cdot\ \cdot\ \text{-}\Lambda]\cdot \qquad (3:6)$$

Αποδεικνύεται (Greville, 1969) ότι το σύνολο με στοιχεί{!(mi (t)}$^{n+k+1}$

είναι βάση για τα S_n,k και ότι υπάρχουν τα μονοσήμαντος ορισμένα μονόμετρα μεγέθη s_{15}. . ,Sn_,_k-i, έτσι ώστε :

$$g(t) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n+k+1} s_j m_j\ (t), & tG[x_0,\ Xk{+}i] \\ 0, & \text{αλλού}. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Κατ' αυτό τον τρόπο επιτυγχάνουμε αρκετά μικρές τιμές για τα μη διαγώνια στοιχεία των πινάκων των κανονικών εξισώσεων, για τον προσδιορισμό των εκτιμήσεων (2,7)L και (2.8),_ αποφεύγοντας τις αριθμητικές αστάθειες κατά την αντιστροφή.

Πίνακας 1

0	1	2	....	n+1
$[x_{i-n-1}]$	$[x_{i-n-1}, x_{i-n}]$	$[x_{i-n-1}, x_{i-n}, x_{i-n+1}]$		
$[x_{i-n}]$	$[x_{i-n}, x_{i-n+1}]$	$[x_{i-n}, x_{i-n+1}, x_{i-n+2}]$		
$[x_{i-n+1}]$	$[x_{i-n+1}, x_{i-n+2}]$			
$[x_{i-n+2}]$				
$\vdots$				$[x_{i-n-1}, \ldots, x_i]$
$[x_{i-2}]$	$[x_{i-2}, x_{i-1}]$	$[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$		
$[x_{i-1}]$	$[x_{i-1}, x_i]$			
$[x_i]$				

4. ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΦΗΝΟΕΙΔΩΝ

Μπορούμε να αποδείξουμε, τώρα, ότι mi (t) έχει τις ιδιότητες μίας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.

α) Κατά την πρόταση του Peano, για $C^{n+1}_{[x_{i-n-1},x_i]}$ ισχύει:

$$f[x_{i-n-1},\dots,x_i] = \int_{x_{i-n-1}}^{x_i} \frac{1}{n!(n+1)} L_x (n+1)(x-t)_+^n \; f^{(n+1)}(t)dt$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_{i-n-1}}^{x_i} m_i(t) f^{(n+1)}(t)dt \qquad (4.1)$$

οπότε, για $f(x)=x^{n+1}$, θα είναι:

$$\int_{x_{i-n-1}}^{x_i} m_i(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} m_i(t)dt=1. \qquad (4.2)$$

β) Η θετικότητα των m i(t), για t£ (xi_n+i, xi, προκύπτει με τη σύγκριση των συντελεστών των αντιστοίχων πολυωνύμων παρεμβολής του Lagrange ή του Newton. Έτσι, έχοντας το πολυώνυμο :

$$m_i(t) = \sum_{j=i-n-1}^{i} \frac{(n+1)(x_j-t)_+^n}{v'(x_j)} \qquad (4.3)$$

και την (n-1) παράγωγο

$$m_i^{(n-1)}(t) = (-1)^{n-1}(n+1)! \sum_{j=i-n-1}^{i} \frac{(x_j-t)_+}{v'(x_j)} \qquad (4.4)$$

διαπιστώνουμε ότι δύο διαδοχικά mj θα έχουν διαφορετικά πρόσημα και επί πλέον τα σημεία Xi_n_i θα έχουν την τιμή 0[1]. Έτσι, προκύπτει ότι στο διάστημα

(1) Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι:

$$f[x_0,\dots,x_j] = \sum_{i=0}^{j} \frac{f(x_i)}{v'(x_i)}, \text{ όπου } v(t) = \prod_{i=0}^{j}(t-x_i).$$

(xi-n_i,Xi) θα υπάρχουν (η-1) απλές μηδενικές θέσεις των mi (n⁻i).(t). Κατά το θεώρημα του Rolle κάθε μηδενική θέση των mi ($^{n-1)}$ (t) κείται μεταξύ δύο μηδενικών θέσεων των *mi* (^{n}~$^{2)}$ (t). Αυτό σημαίνει ότι mi($^{n-2)}$ (t) έχει (n-2) απλές μηδενικές θέσεις. Έτσι, καταλήγουμε αναδρομικά ότι m; (t) δεν θα έχει μηδενικές θέσεις στο διάστημα (xi_$_n$-1, xi)· Επειδή δε mi (t) = .(n+1) (xj-t)/v' (χι)>0 σημαίνει ότι m, (t) είναι θετικό, για tG(XM, Xi).

5. ΕΚΛΟΓΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Υποθέτουμε κατ' αρχήν, ότι η συνάρτηση πυκνότητας των σφηνοειδών εμφανίζει ελάχιστη διασπορά. Με βάση την υπόθεση αυτή θα πρέπει να εκλέξουμε εκείνα τα σημεία παρεμβολής, ώστε, για μονοσήμαντο προσδιορισμό των m, (t), ο βαθμός του παλινδρομικού συστήματος να είναι όσον το δυνατόν μικρότερος. Για το λόγο αυτό είναι αναγκαίο να προσδιορίσουμε τη διασπορά σ^2 με βάση τη γνωστή υπολογιστική διαδικασία. Έτσι, βρίσκουμε (Fahrion, 1978) ότι :

$$\sigma_i^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{1}{(n+2)^2(n+3)}\left[\sum_{j=i-n-1}^{i} x_j^2 - \frac{1}{(n+2)}\Big(\sum_{j=i-n-1}^{i} x_j\Big)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2(n+3)}\left[(n+1)\sum_{j=i-n-1}^{i} x_j^2 - \sum_{l,m=i-n-1}^{i} x_l x_m\right]$$

$$\sigma^2_i = \frac{1}{(n+2)^2(n+3)}(x^i)'\,A(x^i). \qquad (5.1)$$

$$x_i)\begin{bmatrix} n+1 & & & -1 \\ & n+1 & & \\ & & \cdots & \\ -1 & & \cdots & n+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{i-n-1} \\ \vdots \\ x_i \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε, λοιπόν, μία εκλογή σημείων παρεμβολής, έτσι ώστε :

$$\{t_1,\ldots,t_{n+k+1}\} \subseteq \{z_0,\ldots,z_N\}, \qquad (5.2)$$

όπου $z_0 = t,< t_2 < . ., . . < t_{n+kk+1} = ZN$ (5:3)

και $ti < Xi < t_{n+i+1)} i = 1,. . .,k.$ (5.4)

Η σχέση (5.4) είναι αναγκαία για το μονοσήμαντο προσδιορισμό των σφηνοειδών παρεμβολής (Schoenberg and Whitney, 1953).

Για το βέλτιστο προσδιορισμό ξεκινούμε από τα βοηθητικά σημεία (3.3) ελαχιστοποιώντας το μέγεθος Z, οπού

$$Z = (x^1, \dots, x^{n+k+1}) \begin{bmatrix} A & & O \\ & A & \\ O & \cdots & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n+k+1} \end{bmatrix}$$

με τους γραμμικούς περιορισμούς (5.4).

Μία δεύτερη εναλλακτική δυνατότητα, για τη λύση του προβλήματος, προκύπτει με τον αυθαίρετο a priori προσδιορισμό βοηθητικών σημείων. Π.χ., θεωρώντας τα σημεία :

$$\chi_0 = \min (ti, X1\text{-}h),\ x_{fc+1} = \max (x_k, xk+h)$$

$$x\_i = x_0\text{-}jh, \quad xj+k+i = Xk+i+jh,\ j\,p = 1,. . .,n,$$

σε απόσταση $h = (\chi k\text{-}X1) / (k\text{-}1)$, παίρνοντας, έτσι, το ελάχιστο της διασποράς στα σημεία $x_x.,.. . ,Xk$- Με τη μέθοδο αυτή παραμένει ανοικτό το ερώτημα, εάν μία άλλη a priori εκλογή, π.χ. με τριγωνομετρικές αποστάσεις, θα οδηγούσε σε καλλίτερα αποτελέσματα.

Επίσης θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τα σημεία παρεμβολής ως συμπληρωματικές μεταβλητές, οπότε θα θέταμε ένα μη γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης.

6. ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ

Θέτοντας την προϋπόθεση ότι τα βάρη υστερήσεων δεν είναι στοχαστικά και επιθυμούντες μία όσο το δυνατόν λεία κατανομή υστερήσεως, καταφεύγουμε υποχρεωτικά στην εκλογή συναρτήσεων σφηνοειδών. Έτσι, εάν

$$M == (mi\,(tj)\,)i,_{j=1,\ldots,n+}k_{+1} \quad \text{και} \quad g = Ms,$$

τότε η σχέση (2.1) γράφεται;

$$Y=(x_{£}\_tj)_{t\_} \quad \backslash \quad Ms + u. \qquad (6.1)$$
$$j= 1^{N},\ldots,n\text{-}fk4T \quad ..$$

Μία εκτίμηση του s θα είναι :

$$\hat{s} = (XM)^{-1}\, Y,$$

όπου ο αντίστροφος πίνακας εμφανίζει σχετική ευστάθεια με τις τεθείσες προϋποθέσεις για τα σφηνοειδή. Έτσι, προκύπτει ότι :

$$E(g) \cdot M\, E(\hat{s}) = Ms = g \qquad (6.3)$$

και επίσης

$$E(\hat{g}\,\hat{g}') = M\, E(\hat{s}\,\hat{s}')\, M' = \hat{\sigma}^2 M(M'X'XM)^{-1}M'. \qquad 4\ )$$

$$\begin{aligned} \hat{g} &= M(XM)^{-1}Y := R(Xg+u) \\ \hat{g}-g &= (RX-I)g+Ru = R^*g+Ru \\ (\hat{g}-g)(\hat{g}-g)' &= R^*gg'R^* + \hat{\sigma}^2 RR', \end{aligned} \qquad (6.5)$$

οπότε ο πίνακας των μέσων τετραγωνικών αποκλίσεων θα είναι:

$$'\ E|(g\text{-}g)\ (g\text{-}g)\ '] \,"= \quad R^*gg'R^*+\sigma^{J}RF^{1}{}' \qquad (6.6)$$

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ανακεφαλαιώνοντας όσα αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους μπορούμε να συνοψίσουμε τα ακόλουθα :

α) Η λήψη συναρτήσεων σφηνοειδών δίνει ικανοποιητικές λύσεις στο πρόβλημα του προσδιορισμού των κατανομών υστερήσεων, καθ' όσον η κύρτωση γίνεται ελάχιστη, β) Η εκλογή k σημείων παρεμβολής εξαρτάται, κυρίως, από τα εμπειρικά δεδομένα." Ακολουθώντας την πρόταση του Wold (1974) θα πρέπει τα σήμεαί να βρίσκονται στην περιοχή τουλάχιστον 4-5 παρατηρουμένων σημείων.

γ) Η εκλογή της μέγιστης υστέρησης αποτελεί ουσιώδες πρόβλημα. Γενικώς, δεν υπάρχει κριτήριο για το μήκος της υστέρησης. Συνήθως, παίρνουμε ένα αρκετά μεγάλο διάστημα L ZN U, (L, U G N) και διευρευνούμε, οπισθοδρομικά, ένα πλήθος στατιστικών υποθέσεων, ήτοι Hi (i= U- 1, . .., L), προσδιορίζοντας την περιοχή απόρριψης από την ανισότητα $\hat{g}^{2}i)\hat{\sigma}t^{2}$.

δ) Ανάλογα μπορεί να ελεγχθεί η προσαρμοστικότητα των εκλεγμένων συναρτήσεων. Π.χ., θέτοντας τις κλασικές OLS υποθέσεις, χρησιμοποιούμε τον πίνακα των μέσων τετραγωνικών αποκλίσεων των επεξηγούντων μεταβλητών, του οποίου το ίχνος μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρο καταλληλότητας της προσαρμογής (Amemiya and Morimune, 1974).

ε) Τέλος, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η υπόθεση για το βαθμό υστέρησης των, συναρτήσεων των σφηνοειδών μπορεί να ελεγχθεί με το κριτήριο F (Fahrion 1978).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Almon, S. (1965) : The Distributed Lag Between Capital Appropriations and Expenditures, Econometrica 33, 178 - 196.
2. Amemiya, T. and Morimune, K. (1974) : Selecting the Optimal Order of Polynomial in the Almon Distributed Lag, Review of Economics and Statistics 56, 378 - 386.
3. Davis, P. J. (1963) : Interpolation and Approximation, Blaisdell Publishing Company.
4. Dhrymes, P. J. (1971): Distributed Lags ; Probles of Estimation and Formulation, Holden Day Inc.
5. Fahrion, R. (1977) : Auswirkungen von Schâtzfehlern bei der Bestimmung polynomialer Lag - Verteilungen, Oper. Research Verfahren, Bd. 26.
6. Fahrion, R. (1978) : Die Spline - Funktion als flexibles Instrument zur Schatzung von Lag-Verteilungen, in Spline - Funktionen in der Statistik, Sondernheft no 14 der Deutschen Stat. Gesellschaft.
7. Grevjlle, T. N. E. (1969) : Theory and Applications of Spline Functions,. Academic Press.
8. Schoenberg, I. J. and A. Whitney (1953) : On Polyà Frequency Functions III; The Possiti vity of Translation Determinants with an application to the Interpolation Problem by Spline Curves,T ranc. Amer. Math. Soc. 74, 246 - 259.
9. Widder, D.· V. (1971) : Introduction to Transform Theory, Academic Press.
10. Wold, S. (1974) : Spline Functions in Data Analysis, Technomerries 16, 1 - 11.