# ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΕΚΤΑΣΗΣ ΚΛΑΔΩΝ ΓΕΩΡΓΙΚΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ ΤΕΩΣ ΛΙΜΝΗΣ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ

Του Δρα ΒΑΣΙΛΗ Δ. ΜΑΝΟΥ

Τομέα Αγροτικής Οικονομίας Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Η πρόβλεψη της εξέλιξης των τεχνικοοικονομικών μεγεθών της αγροτικής μας οικονομίας αποτελεί αναμφίβολα σπουδαίο παράγοντα άσκησης αποτελεσματικής αγροτικής πολιτικής. Οι προβλέψεις αυτές βοηθούν σημαντικά στη σχεδίαση της αγροτικής πολιτικής, στον προγραμματισμό της γεωργικής παραγωγής και της εμπορίας των γεωργικών προϊόντων και γενικά στη λήψη ορθολογιστικότερων αποφάσεων.

Η παρούσα εργασία αναφέρεται στην πρόβλεψη της εξέλιξης της καλλιεργούμενης έκτασης των κυριότερων κλάδων γεωργικής παραγωγής και του οικονομικού αποτελέσματος της περιοχής τέως λίμνης Γιαννιτσών, που καλύπτει έκταση 160.000 περίπου στρεμμάτων και είναι μια από τις δυναμικότερες περιοχές της χώρας. Για τις προβλέψεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν απλά μοντέλα χρονολογικών σειρών και στοχαστικές διαδικασίες γεννήσεων και θανάτων, που παρουσιάζονται και αναλύονται στο πρώτο μέρος της εργασίας ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή τους από τους ασχολούμενους με τη λήψη των αγροτικών αποφάσεων.

Με έτος αναφοράς το 1982 και στοιχεία της περιόδου 1976-82 προβλέπεται αφενός επέκταση του βαμβακιού, του καλαμποκιού, του σιταριού, του καπνού, της βιομηχανικής ντομάτας και των οπωροφόρων δένδρων και σημαντική μείωση της έκτασης των τεύτλων και αφετέρου αύξηση του ακαθάριστου εισοδήματος της περιοχής κατά 4,1 % σε σταθερές τιμές και στασιμότητα του μεταβλητού κόστους αυτής.

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η προοπτική εξέλιξης των τεχνικοοικονομικών μεγεθών είναι πάντα αβέβαιη μια και δεν υπάρχει καμμιά ιστορική σύγκριση που να ορίζει πως οι παρούσες συνθήκες μπορούν να μεταφρασθούν σε μελλοντικές. Αντί αυτού γίνονται εκτιμήσεις με τη χρησιμοποίηση σχέσεων που εφαρμόσθηκαν στο παρελθόν σε παρόμοιες περιπτώσεις. Με τις εκτιμήσεις αυτές, που ονομάζονται προβλέψεις (forecasts), οι ασχολούμενοι με τη λήψη των αποφάσεων προσπαθούν να δημιουργήσουν μια γέφυρα μεταξύ των διαθέσιμων πληροφοριών και εκείνων που είναι επιθυμητές αλλά δεν μπορούν να ληφθούν κατ' ευθείαν, ελπίζοντες να λάβουν ικανοποιητικές εκτιμήσεις των μελλοντικών συνθηκών για την αξιολόγηση της ακολουθούμενης πολιτικής τους.

Για την πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών μιας μεταβλητής, από μια σειρά διαχρονικών παρατηρήσεων αυτής που έγιναν σε ίσα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα (χρονολογική σειρά), έχουν αναπτυχθεί διάφοροι μέθοδοι ή τεχνικές που ονομάζονται τεχνικές πρόβλεψης. Οι τεχνικές αυτές ανάλογα με το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιούν, τον αριθμό των μεταβλητών και το είδος τους (ποσοτικές ή ποιοτικές, δυνάμενες να ελεχθούν ή όχι, προσδιοριστικές ή στοχαστικές) και το διάστημα πρόβλεψης (βραχύ, μέσο, μακρύ) μπορεί να είναι απλές, όπως τα απλά μοντέλα χρονολογικών σειρών, σύνθετες, όπως οι μέθοδοι Bayes και Box-Jenkins, ή πολύ σύνθετες, όπως οι διάφορες στοχαστικές διαδικασίες (π.χ. αλυσίδες Markov, διαδικασίες Poisson, διαδικασίες γεννήσεων και θανάτων), η προσομοίωση (Simulation), η μέθοδος Delphi, κ.λ.π.

Στην εργασία αυτή γίνονται προβλέψεις για την εξέλιξη της έκτασης των κυριότερων κλάδων γεωργικής παραγωγής (σιτάρι, καλαμπόκι, καπνός, βαμβάκι, κ.λ.π.) και του ακαθάριστου γεωργικού εισοδήματος και του μεταβλητού κόστους της περιοχής τέως λίμνης Γιαννιτσών. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν απλά μοντέλα χρονολογικών σειρών και στοχαστικές διαδικασίες γεννήσεων και θανάτων. Η προσαρμογή και εκτίμηση των μοντέλων αυτών βασίσθηκε σε χρονολογικές σειρές των παραπάνω μεγεθών κατά την περίοδο 1976—82. Τα απαραίτητα τεχνικοοικονομικά δεδομένα που αφορούσαν το σχέδιο παραγωγής της μελετούμενης περιοχής, τις τιμές των προϊόντων και των συντελεστών παραγωγής, τις αποδόσεις των κλάδων παραγωγής, κ.λ.π., συγκεντρώθηκαν από διάφορες υπηρεσίες του Υπουργείου Γεωργίας, από τα 34 χωριά που περιβάλλουν τη μελετούμενη περιοχή, και από 73 γεωργικές εκμεταλλεύσεις της περιοχής επιμελημένα επιλεγμένων. Αναλύθηκαν επίσης 968 δελτία λογιστικής παρακολούθησης κλάδων παραγωγής που συγκεντρώθηκαν από το Εργαστήριο Γεωργικής Οικονομικής Έρευνας του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης σε συνεργασία με τους Οργανισμούς Καπνού και Βάμβακος και την Επιθεώρηση Γεωργίας Κεντρικής και Δυτικής Μακεδονίας.

## 2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΕΝΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

Μια χρονολογική σειρά αποτελείται από τις διαδοχικές παρατηρήσεις $\chi_1$, $\chi_2$, $\chi_3, \cdots$ μιας μεταβλητής Χ που έγιναν σε ίσα χρονικά διαστήματα. Με βάση τη σειρά αυτή μπορούν να γίνουν προβλέψεις για τις μελλοντικές τιμές της μεταβλητής Χ.

Κάθε χρονολογική σειρά είναι μίγμα των παρακάτω τεσσάρων παραγόντων:

α) της τάσης,

β) της εποχικότητας,

γ) των διακυμάνσεων ή παλινδρομήσεων με μη σταθερή περίοδο, και

δ) του τυχαίου σφάλματος.

Ένα μαθηματικό μοντέλο που περιλαμβάνει τους παράγοντες α, β, και δ έχει συνήθως την παρακάτω μορφή :

$$x_t = a+bt+S_{j(t)}+e_t \tag{1}$$

όπου j (t) εκφράζει την εποχή της περιόδου t (π.χ. εβδομάδα μήνα, εποχή έτους)
$S_{j(t)}$ είναι ο παράγοντας για την εποχή j(t)

et= το τυχαίο σφάλμα στη περίοδο t, που υποτίθεται ότι είναι τυχαία μεταβλητή με αναμενόμενη τιμή μηδέν (E(et) = 0) και σταθερή διακύμανση ($Var(e_t) = \sigma^2$).

Παράγοντας συμπεριφοράς του τύπου γ μπορεί να προκύψει και από αυτοσυσχέτιση των τιμών του σφάλματος $e_t$.

Το παραπάνω μοντέλο (1) είναι σφαιρικό μοντέλο γιατί τείνει να εφαρμοσθεί σ' ολόκληρη τη χρονολογική σειρά. Στην πράξη, χρησιμοποιούνται τοπικά μοντέλα που δίνουν προβλέψεις βασιζόμενες στις όσο το δυνατό πιο πρόσφατες παρατηρήσεις της σειράς ή σ' όλες τις παρατηρήσεις αυτής με ιδιαίτερη όμως βαρύτητα στις πιο πρόσφατες απ' αυτές.

Τα μοντέλα χρονολογικών σειρών που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία αυτή είναι :

**I. Το μοντέλο του κινητού μέσου όρου (moving average)**

$$x_t = M + e_t \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $e_t$ ανεξάρτητα με $E(e_t)=0$ και M ο αναμενόμενος μέσος των παρατηρήσεων της σειράς.

Το μοντέλο αυτό, που είναι σφαιρικό, δίνει σαν καλύτερη πρόβλεψη το μέσο M, μια και $E(x_t) = M$. Στην πράξη χρησιμοποιείται σαν τοπικό μοντέλο λαμβάνοντας πάντοτε εκτιμήσεις για το M από n πρόσφατες παρατηρήσεις της σειράς, δηλαδή

$$\hat{M}_t = \frac{1}{n}\left(X_t + X_{t-1} + \text{——} + X_{t-n+1}\right)$$

όπου $\hat{M}_t$ ο εκτιμητής του M την περίοδο t για την πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών της μεταβλητής X. Ο $M_t$, όπως είναι φανερό, δίνει την ίδια βαρύτητα στις n πρόσφατες παρατηρήσεις. Ο κινητός μέσος όρος $M_t$ ανανεώνεται όταν προκύπτει μια νέα παρατήρηση $\chi_{t+1}$ της σειράς από τον τύπο

$$\hat{M}_{t+1} = \hat{M}_t + \frac{1}{n}\left(x_{t+1} - x_{t-n+1}\right)$$

Η μέθοδος του κινητού μέσου όρου συναντάται με διάφορες παραλλαγές, όπως ο κινητός μέσος τριών σημείων, πέντε σημείων, κ.λ.π. και χρησιμοποιείται τις πιο πολλές φορές σαν συμπληρωματική μέθοδος για τη διερεύνηση ύπαρξης εποχιακών και κυκλικών διακυμάνσεων, και την άρση αυτών (deseasonalised series) πριν γίνει ανάλυση της τάσης της σειράς.

## II. Το μοντέλο απλής εκθετικής εξομάλυνσης (single exponential smoothing)

Το μοντέλο αυτό προσπαθεί να λάβει υπόψη όλες τις παρατηρήσεις της σειράς, δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες απ' αυτές. Είναι κατάλληλο για σειρές που δεν παρουσιάζουν εποχιακές διακυμάνσεις.

Αν με St παρασταθεί ο εκθετικά ομαλοποιημένος μέσος όρος την περίοδο t

τότε

$$S_t = ax_t + a(1-a)x_{t-1} + a(1-a)^2x_{t-2} + \ldots$$

όπου a σταθερά θετική μικρότερη της μονάδας, που δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις της σειράς. Κανονικά η σταθερά a πρέπει να παίρνει τιμές στο διάστημα 0-0.3 (Howard).

Η πρόβλεψη $S_t$ ανανεώνεται με τη νέα παρατήρηση $x_{t+1}$, της σειράς από

τον τύπο

$$S_{t+1} = ax_{t+1} + (1-a)\ S_t$$

ή από τον τύπο

$$S_t = S_{t-1} + aet$$

όπου et = Xt — $S_{t-1}$ παριστάνει το σφάλμα πρόβλεψης την περίοδο t+1.

Η εφαρμογή του ομαλοποιημένου εκθετικά μέσου όρου για την πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών μιας μεταβλητής προϋποθέτει καλή γνώση των χρονολογικών σειρών και μεγάλη πρακτική εξάσκηση τόσο για την αντιμετώπιση ειδικών καταστάσεων που παρουσιάζονται στην κατανομή της σειράς, όπως η διέγερση (impulse), ο βηματισμός (step), η τάση (trend) κ.λ.π., όσο και για τον έλεγχο του υποδείγματος.

Η μέθοδος αυτή έχει βελτιωθεί από τους Brown και Trigg - Leach, κυρίως όσο αφορά τη σταθερά a. Στα μοντέλα αυτών, η παράμετρος a δεν θεωρείται σταθερή αλλά μεταβαλλόμενη ανάλογα με τις αλλαγές στην πορεία παρατηρήσεων της σειράς (adaptive smoothing or delayed smoothing).

Πολλές φορές στο μοντέλο του ομαλοποιημένου εκθετικά μέσου όρου γίνεται παράλληλα και εκθετική ομαλοποίηση των προβλέψεων $S_t$ για καλύτερα αποτελέσματα (double exponential smoothing). Η ομαλοποίηση αυτή γίνεται με τον τύπο

$$SS_t = aSt+(1-a)SSt_{t-1}$$

όπου SSt ο εκθετικά ομαλοποιημένος μέσος της πρόβλεψης St.

### III. Τα μοντέλα παλινδρόμησης (regression models)

Τα μοντέλα αυτά είναι οι γνωστές συναρτήσεις μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών, που οι παράμετροι τους εκτιμώνται με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων.

Για την ανάλυση μιας χρονολογικής σειράς μιας μεταβλητής Χ και **την** πρόβλεψη των μελλοντικών της τιμών, συναρτήσει μόνο του χρόνου, χρησιμοποιούνται τα μοντέλα μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, στα οποία εξαρτημένη είναι **η** μεταβλητή Χ και ανεξάρτητη η χρονική περίοδος t (μέρα, εβδομάδα κ.λ.π.). Τα μοντέλα αυτά προκύπτουν από ολόκληρη τη σειρά, κι όλες οι παρατηρήσεις έχουν **την** ίδια βαρύτητα, αντίθετα με τις δύο προηγούμενες μεθόδους που δίνουν μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες απ' αυτές.

Στις παρατηρήσεις $\chi_{1;}$ $\chi_2$, $\chi_{3...}$, μιας χρονολογικής σειράς προσαρμόζεται μια συνάρτηση

$$x_t = f(t)+et$$

όπου $e_t$ είναι το τυχαίο σφάλμα που υπακούει στις υποθέσεις που αναφέρθηκαν στην αρχή της παραγράφου, δηλαδή $e_t$ είναι τυχαία μεταβλητή με E(et) = 0 και Var(et) = $\sigma^2$. Με βάση τη συνάρτηση αυτή, που ελέγχεται για την ακρίβεια εκτίμησης και την ικανότητα πρόβλεψης της (π.χ. ύπαρξη αυτοσυσχέτισης, πολυσυγγραμμικότητας, έλεγχος του συντελεστή προσδιορισμού, κατασκευή διασχημάτων εμπιστοσύνης), γίνονται προβλέψεις για μια ή περισσότερες χρονικές περιόδους.

Τα γνωστότερα μοντέλα παλινδρόμησης, που χρησιμοποιούνται στις προβλέψεις είναι

α) Το γραμμικό μοντέλο

$$x_t = a+bt$$

β) Το εκθετικό μοντέλο

$x_t = ae^{bt}$ όπου e η βάση νεπέρειων λογαρίθμων

γ) Το πολυωνυμικό μοντέλο

$$x_t = a+b_1t+b_2t2+b_3t^3 + \dots$$

δ) Το απλό τροποποιημένο εκθετικό μοντέλο

$$x_t = c+ab^t$$

ε) Το μοντέλο Gompertz

$$\log x_t = \log c+(\log a)bt$$

στ) Το λογιστικό μοντέλο

$$\frac{1}{x_t} = c+ab^t$$

ζ) Η ανάλυση σε σειρές Fourier

$$x_t = \sum_{k=1}^{n} k \ (a_k \text{ συν } \omega t+bk \text{ ημ } \omega t)$$

όπου $\omega=\frac{2\pi}{\nu}$ η βασική συχνότητα, ν ο αριθμός παρατηρήσεων σ' ένα εποχιακό κύκλο, $a_k$ και $b_k$ παράμετροι που εκτιμώνται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, και κ δείκτης άθροισης (αριθμός αρμονικών).

Τα μοντέλα α,β και γ χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της τάσης χρονολογικών σειρών. Αν η σειρά παρουσιάζει εποχιακές διακυμάνσεις πρέπει να γίνει προηγουμένως άρση αυτών με τη μέθοδο του κινητού μέσου όρου.

Ομοίως τα μοντέλα δ, ε και στ χρησιμοποιούνται κι αυτά για την ανάλυση της τάσης σειρών που δεν παρουσιάζουν όμως συνεχή κίνηση σε ευθεία ή καμπύλη αλλά καταλήγουν σε ουρά (tail-off). Είναι μονότονες συναρτήσεις και έχουν γίνει γνωστές ως μέθοδοι των τριών σημείων. Ειδικά τα ε και στ είναι κατάλληλα για σειρές που εμφανίζουν σχήμα S.

Τέλος, το μοντέλο ζ είναι κατάλληλο για σειρές που παρουσιάζουν κυκλικές ή εποχιακές διακυμάνσεις (π.χ. εβδομαδιαία κατανάλωση κρέατος). Η ανάλυση Fourier προσαρμόζει ένα σύνολο κύκλων στη χρονολογική σειρά, που όλοι είναι αρμονικοί του κύματος με περίοδο ίση με το μήκος της σειράς. Κάθε όρος της σειράς εκφράζεται σαν άθροισμα αρμονικών σύμφωνα με τον τύπο ζ.

## 3. ΑΛΥΣΙΔΕΣ ΤΟΥ MARKOV ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΘΑΝΑΤΩΝ

### 3.1. Αλυσίδες του Markov

Σ' ένα στοχαστικό μοντέλο οι παρατηρήσεις της ακολουθίας

θεωρούνται σαν παρατηρήσεις μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών

Xo> Xι·. X2 · · · Xt

Μια τέτοια ακολουθία, που σύντομα γράφεται : \ Xt : t>0}, καλείται στοχαστική διαδικασία ή ανέλιξη. Ειδικότερα αν οι τυχαίες μεταβλητές $X_t$ είναι διακεκριμένες, η ακολουθία {Xt : t)0} λέγεται στοχαστική διαδικασία διακεκριμένου χρόνου. Στη διαδικασία αυτή που είναι εξελικτική ως προς τη διάσταση του χρόνου, η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $X_0$, $X_1$, ..., Xt υπολογίζεται από τον τύπο :

$$Pt\ (X_0 = X_0 \ldots Xt = x_t) = Pt\ (Xt = xt/X_0 = x_0$$

$$X_{t-1} = X_{t-1}). \ \ldots \ P_1 \ ( X_1/X_0 = X_0) \cdot P_0(X_0 = x_0)$$

όπου $P_0(X_0=x_0)$ η αρχική κατανομή της μεταβλητής $X_0$ και

$$Pt(X_t = Xt/X_0 = x_0, \cdots X_{t-1} = x_{t-1}) = g(t,x_t/x_0,x..,x_{t-1})$$

η υπό συνθήκη κατανομή της μεταβλητής $X_t$, δοθέντος ότι $X_0 = \chi_0$, $X_1 = x_1$ .. .

.... ,$X_{t-1} = X_{t-1}$

Στην ειδική περίπτωση που για τις διακεκριμένες τυχαίες μεταβλητές $X_0$, $X_t$, $X_2$. .. ισχύει :

$$g(t,x_t/x_0, x_1, \ldots x_{t-1}) = P_t(Xt = xt/X_{t-1} = x_{t-1}) = g(t,x_t/x_{t-1})$$

η στοχαστική διαδικασία { Xt : t>0 \ λέγεται αλυσίδα του Markov μια και πληροί την ιδιότητα του Markov «το μέλλον είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητο του παρελθόντος, δοθέντος του παρόντος», δηλαδή

P(μέλλον/παρόν, παρελθόν) = P(μέλλον/παρόν)

Οι πιθανότητες $P(X_t = x_t/X_{t-1} = X_{t-1})$ ή

$pu = P(X_t = j \ /X_{t-1} = i)$ αν $x_t = j$ και $x_{t-1} = i$

αναφέρονται ως πιθανότητες μετάβασης (transition probabilities) και δεν εξαρτώνται άμεσα από το χρόνο t.

Οι πιθανότητες μετάβασης, για τις οποίες ισχύει πάντα $\sum_j p_{ji} = 1$ για κάθε j, σ' ένα εξελικτικό σύστημα που περιγράφεται από την αλυσίδα του Markov

$\{ X_t : t > 0 \}$ μετρούν την πιθανότητα να μεταβεί το σύστημα στην κατάσταση j, δοθέντος ότι ήταν στην κατάσταση i.

Από το στοχαστικό πίνακα P = (pij) των πιθανοτήτων μετάβασης που περιγράφει το σύστημα στο χρόνο t= 1, μπορεί να βρεθεί η ολική κατάσταση του συστήματος στο χρόνο t= 2,3,4... από τους πίνακες $\underline{P}^n$, n = 2,3,4,... (n- step transition).

Ειδικά για το μακρινό μέλλον, η κατάσταση του συστήματος βρίσκεται από τη σχέση

$$\lim \underline{P}^t, \quad t \to \infty$$

Οι αλυσίδες του Markov χρησιμοποιούνται πολλές φορές σε συνδυασμό με το Δυναμικό Προγραμματισμό για την περιγραφή εξελικτικών συστημάτων δια μέσου του χρόνου, που σε κάθε όμως χρονική στιγμή μπορούν να βρεθούν και σε μια διαφορετική κατάσταση. Με τη χρησιμοποίηση των αλυσίδων του Markov, έχουν βρεί λύση πολλά προβλήματα συμπεριφοράς οικονομικών και κοινωνικών μεγεθών, όπως π.χ. η επαγγελματική κινητικότητα από γενιά σε γενιά, η συμπεριφορά καταναλωτών για την προώθηση προϊόντων στην αγορά, ο έλεγχος των αποθεμάτων ανάλογα με τη ζήτηση, η αντικατάσταση ή επισκευή του μηχανικού εξοπλισμού ανάλογα με το ρυθμό λειτουργικότητας του, η σχεδίαση της εκπαίδευσης ανάλογα με το ρυθμό των εισαγομένων και αποφοιτούντων μαθητών, η πρόβλεψη του καιρού, κ.λ.π.

Στη γεωργική οικονομική έρευνα έχουν χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη του μεγέθους των εκμεταλλεύσεων, των δαπανών και του ακαθάριστου γεωργικού εισοδήματος αυτών, για την ανάλυση της συμπεριφοράς των παραγωγών σε σχέση με τις τεχνολογικές βελτιώσεις (σπόροι, συνθήκες καλλιέργειας), κ.λ.π.

## 3.2. Διαδικασίες γεννήσεων και θανάτων

Αν $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ είναι δύο ακολουθίες μη αρνητικών αριθμών, που παριστάνουν αντίστοιχα τους ρυθμούς γεννήσεων και θανάτων ενός πληθυσμού, τότε η στοχαστική διαδικασία $\{X_t : t > 0\}$ λέγεται διαδικασία γεννήσεων και θανάτων, αν αυτή είναι αλυσίδα του Markov συνεχούς χρόνου με πεδίο τιμών το σύνολο 0,1,2,... και απειροστές πιθανότητες μετάβασης τις :

$$p_{ij}^{(\delta t)} = \begin{cases} \lambda_i \delta t + 0(\delta t) & \\ \mu_i \delta t + 0(\delta t) & j = i-1,\ i>0 \\ 1-(\lambda_i+\mu_i)\delta t + 0(\delta t) & j = i,\ i>0 \\ 0\ (\delta t) & \text{αλλού} \end{cases} \quad (1)$$

όπου δt παριστάνει την απειροστή μεταβολή του χρόνου.

Σε μια διαδικασία γεννήσεων και θανάτων, ένα σύστημα (π.χ. πληθυσμός) που βρίσκεται στην κατάσταση i μπορεί να κάνει μόνο δύο δυνατές μεταβάσεις, δηλαδή να μεταβεί από την κατάσταση i στην κατάσταση i+1 που αντιστοιχεί σε γέννηση και από την κατάσταση i στην κατάσταση i- 1 που αντιστοιχεί σε θάνατο ή τέλος να παραμείνη στην ίδια κατάσταση που σημαίνει ότι ο πληθυσμός μένει αμετάβλητος. Οι μεταβάσεις αυτές γίνονται με ρυθμούς όπως προ-

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_1 & j = i+1 \\ \mu_1 & j = i - 1 \\ 1-(\lambda_i+\mu_i) & J = li \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2)$$

κύπτει από την παραγώγιση των πιθανοτήτων μετάβασης Pij(δt) ως προς το χρόνο.

Αναλυτικότερα, το σύστημα βρίσκεται για ένα χρονικό διάστημα στην κατάσταση i (δηλαδή $X_t$ = Xt) που έχει αρνητική εκθετική κατανομή με παράμετρο λi+μi, και έπειτα μεταβαίνει είτε στην κατάσταση i+1 (δηλαδή $X_{t+1} = x_t + 1$) που αντιστοιχεί σε γέννηση, είτε στην κατάσταση i-1 (δηλαδή $X_{t-1} = x_{t-1)}$ που αντιστοιχεί σε θάνατο, με πιθανότητες $\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$ και $\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}$ αντίστοιχα. Άλλες μεταβάσεις δεν είναι δυνατές.

Το τυχαίο μέγεθος Xt αποδεικνύεται (Balmer, Feller) ότι πληρεί τη διαφορική - διαφοροεξίσωση

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda i\text{-}1Pi\text{-}1(t) - (\lambda i+\mu i)Pi(t)+\mu_{i+1}P_{i+1}(t),\ i = 0,\ 1,2,.\ . \quad (3)$$

με αρχική συνθήκη $p_i(0) = \begin{cases} 1 \text{ για } i = x_0 \\ 0 \text{ αλλού} \end{cases}$

όπου $p_i(t) = P(X_t = i) = \sum_j p_j(^{t-1})\, p_{ij}$ είναι οι περιθωριακές πιθανότητες.

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, που είναι δυνατή μόνο όταν οι ρυθμοί μετάβασης λi και μi έχουν συγκεκριμένη συναρτησιακή μορφή, γίνεται με τον προσδιορισμό της εξελικτικής συμπεριφοράς της αλυσίδας Markov ή από την εξίσωση

$$\lim \frac{dp_i(t)}{dt} = 0, \; t \to \infty$$

Στη\ οικονομική πραγματικότητα το τυχαίο μέγεθος Xι παριστάνει ένα οικονομικό μέγεθος, π.χ. το ακαθάριστο προϊόν μιας χώρας την περίοδο t, και οι παράμετροι $\lambda_{xi}$ (i=xt) και $\mu_{\chi\tau}$ τους ρυθμούς αύξησης και μείωσης αυτού αντίστοιχα. Σε τέτοια προβλήματα, μπορεί να υποτεθεί ότι η τυχαία μεταβλητή Xt ακολουθεί το αυτοπαλίνδρομο μοντέλο :

$$x_t = a_0 + a x_{t-1} \tag{4}$$

που είναι εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές και έχει λύση την :

$$xt = B + Aat, \quad t = 1,2,... \tag{5}$$

όπου $B = \frac{a_0}{1-a}$, A = Xo-B και xt η τιμή της $X_t$ τη χρονική στιγμή t.

Αν επιπλέον υποτεθεί ότι για τους ρυθμούς αύξησης και μείωσης ισχύει

$$\lambda_{\chi}\iota = \kappa c \text{ και } \mu_{\chi t} = c x_t \tag{6}$$

τότε η μορφή της εξίσωσης (3) προκύπτει ως εξής :

Εκτιμάται η (4) με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων από μια χρονολογική σειρά της μεταβλητής $X_t$, βρίσκεται η λύση της από την (5) και στη συνέχεια υπολογίζεται ο αναμενόμενος συντελεστής μεταβολής της τιμής της Xt την περίοδο t από τη σχέση

$$E(X_t) = \frac{B + Aa^t}{\bar{x}_t}$$

οπου $\bar{x}_t = \frac{\sum_{t=0}^{v-1} x_t}{v}$ μέσος της χρονολογικής σειράς με ν ορούς.

Από τη σχέση (7) που με κατάλληλο μετασχηματισμό μπορεί να πάρει την αρνητική εκθετική μορφή

$$E(X\ ) = d - re^{-st}$$

βρίσκονται τελικά οι ρυθμοί αύξησης και μείωσης $\lambda_x t$ και $\mu_{xt}$ λόγω των ισοτήτων

$$k = d \quad \text{και} \quad c = s$$

αφού όπως είναι γνωστό η εξίσωση

$$x_t = ac - cx_t \text{ έχει λύση την } x_t = a - (a - x_0)e^{-ct}$$

Με τη διαδικασία που περιγράφηκε είναι δυνατή τόσο η πρόβλεψη της τιμής του τυχαίου μεγέθους Xt το χρόνο t και η κατασκευή διαστήματος εμπιστοσύνης γι' αυτή, όσο και ο υπολογισμός των πιθανοτήτων αύξησης ή μείωσης της τιμής της στο απειροστό διάστημα δι (τύποι 6). Τέλος από την εξίσωση (3), που τώρα πλέον έχει γνωστή μορφή και μπορεί να λυθεί, βρίσκονται οι περιθωριακές πιθανότητες

$$_{P}i(t) = P\ (X_t = i = x_t)$$

που δίνουν την πιθανότητα η μεταβλητή $X_t$ να έχει την τιμή Xt την περίοδο t.

## 4. ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΗΣ ΚΑΛΛΙΕΡΓΟΥΜΕΝΗΣ ΕΚΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΚΛΑΔΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Για την πρόβλεψη της εξέλιξης της καλλιεργούμενης έκτασης των κλάδων χρησιμοποιήθηκαν τα περιγραφέντα μοντέλα χρονολογικών σειρών. Με τα μοντέλα αυτά και με βάση στοιχεία της περιόδου 1976-82 γίνονται προβλέψεις για την καλλιεργούμενη έκταση των κλάδων του σιταριού, του καλαμποκιού, του καπνού, των τεύτλων, του βαμβακιού (ανεξάρτητα αν είναι χειρουσυλλογής ή μηχανοσυλλογής), της ντομάτας και των δένδρων (συνολικά) για το σύνολο της περιοχής τέως λίμνης Γιαννιτσών που όπως αναφέρθηκε περιλαμβάνει καλλιεργούμενη έκταση 160.000 περίπου στρεμμάτων. Αν και το μέγεθος των χρονολογικών σειρών είναι μικρό εν τούτοις πιστεύεται ότι τα εκτιμηθέντα μοντέλα μπορούν να ερμηνεύσουν ικανοποιητικά την τάση και τις κυκλικές διακυμάνσεις των σειρών, αφού στο διάστημα μιας εφταετίας μπορούν να φανούν οι τυχόν τάσεις αύξησης ή μείωσης των δενδρωδών καλλιεργειών και οι διακυμάνσεις των ετήσιων κλάδων λόγω των εφαρμοζομένων συστημάτων αμειψισποράς.

Στη χρονολογική σειρά της έκτασης κάθε κλάδου παραγωγής και σύμφωνα με τα κριτήρια :

α) της τάσης της σειράς

β) της διασποράς των τιμών της απο έτος σε έτος

γ) του ύψους του σφάλματος πρόβλεψης

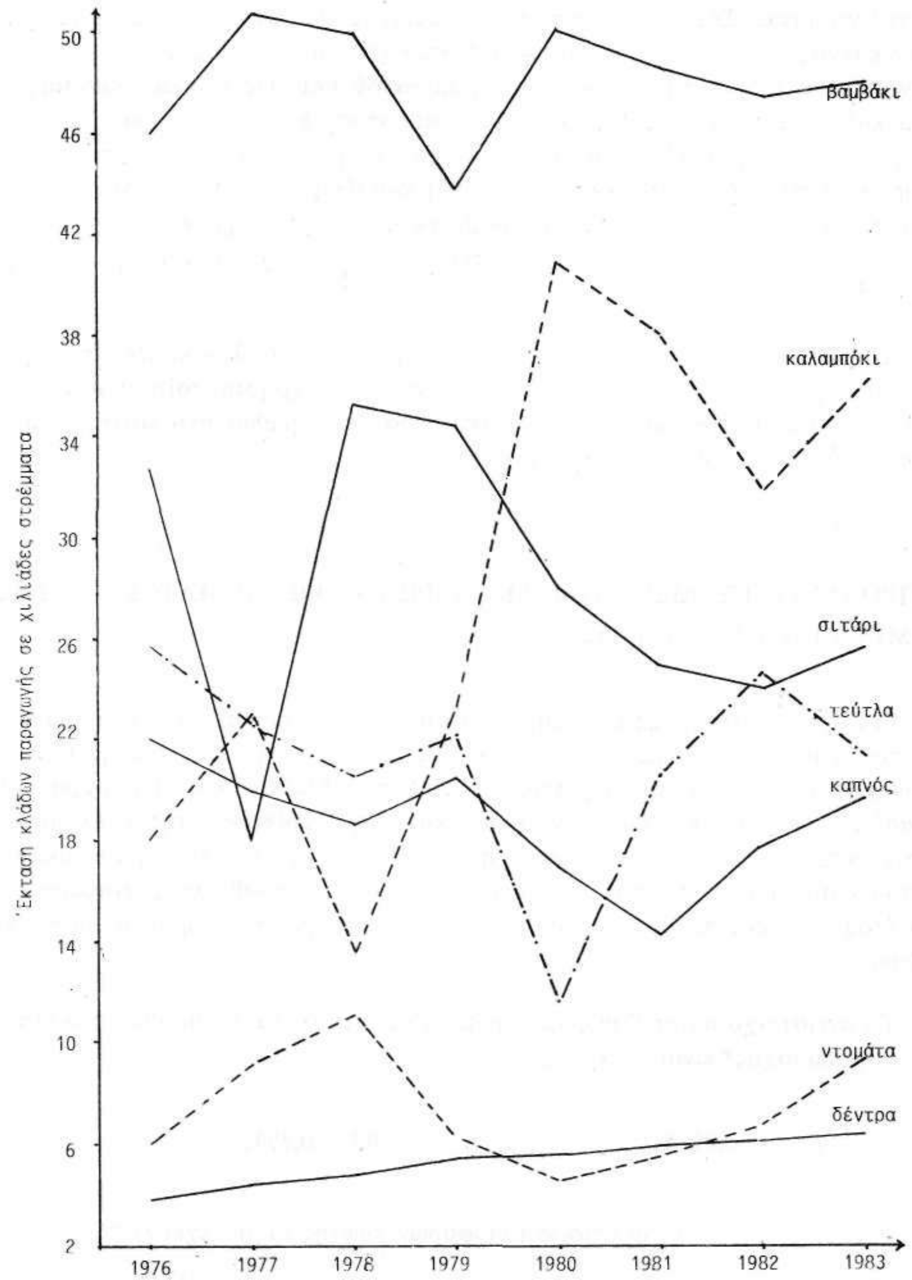
δ) του ύψους του συντελεστή προσδιορισμού προσαρμόσθηκε ένα από τα περιγραφέντα μοντέλα. Έτσι η έκταση του σιταριού φαίνεται να ακολουθεί το γραμμικό μοντέλο ($R^2 = 0{,}7265$), σύμφωνα με το οποίο η προβλεπόμενη να καλλιεργηθεί έκταση αυτού το 1983 ανέρχεται σε 25853 στρ., παρουσιάζοντας αύξηση 3,0% σε σχέση με το 1981 και 7,4% σε σχέση με το 1982 (πίνακας 1, σχήμα 1). Την εξέλιξη της έκτασης του καλαμποκιού ερμηνεύει

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Είδος χρησιμοποιηθέντος μοντέλου και εκτιμητές των παραμέτρων αυτού για την πρόβλεψη της έκτασης των κυριότερων κλάδων παραγωγής το έτος 1983 στο σύνολο της τέως λίμνης Γιαννιτσών

| Κλάδοι παραγωγής | Είδος μοντέλου | Εκτιμητές των παραμέτρων | Συντελεστές προσδιορισμού $R^2$ | Μέση καλλιεργ. έκταση 1976-82 σε στρ. | Προβλεπομένη έκταση σε στρ. για το 1983 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Σιτάρι | $x_t = a + bt$ | a=33182<br>b=-916,1 | 0,7265 | 28199 | 25853 |
| 2. Καλαμπόκι | $\frac{1}{x_t} = c + a.b^t$ | c=0<br>a=0,0001<br>b=0,4507 | 0,8068 | 26933 | 36167 |
| 3. Βαμβάκι | $S_{t+1} = ax_{t+1} + (1-a)S_t$ | a=0,45 | - | 48906 | 48063 |
| 4. Καπνός | $x_t = \sum_{i=0}^{3} a_i t^i$ | $a_0$=18051<br>$a_1$=-4585<br>$a_2$= 1236<br>$a_3$= 2364 | 0,7819 | 18626 | 19738 |
| 5. Τεύτλα | $S_{t+1} = ax_{t+1} + (1-a)S_t$ | a =0,30 | - | 21168 | 21328 |
| 6. Ντομάτα | $x_t = \sum_{i=0}^{4} a_i t^i$ | $a_0$= 6948<br>$a_1$=-7575<br>$a_2$= 3591<br>$a_3$= 8216<br>$a_4$=-4134 | 0,8670 | 7115 | 9643 |
| 7. Δένδρα | $x_t = c + ab^t$ | c = 7225<br>a =-3567<br>b =0,8054 | 0,9682 | 5204 | 6593 |

καλύτερα το λογιστικό μοντέλο ($R^2 = 0{,}8068$), σύμφωνα με το οποίο η καλλιέργεια του καλαμποκιού προβλέπεται να αυξηθεί το 1983 κατά 4260 στρ. ή 13,3 % Η προβλεπόμενη να καλλιεργηθεί το 1983 έκταση των 36167 στρ. υπολείπεται κατά 5% της αντίστοιχης του 1981. Τα πολυωνυμικά μοντέλα τρίτου και τέταρτου βαθμού, με αντίστοιχους συντελεστές προσδιορισμού 0,7819 και 0,8670, ερμηνεύουν καλύτερα την εξέλιξη της καλλιεργούμενης έκτασης του καπνού




Σχήμα 1 : Καλλιεργηθείσα (1976 – 82) και προβλεπόμενη (1983) έκταση των κυριότερων κλάδων παραγωγής στο σύνολο της τέως λίμνης Γιαννιτσών και της ντομάτας. Σύμφωνα μ' αυτά προβλέπεται το 1983 να παρουσιάσει αύξηση ο μεν καπνός 10,2 %, η δε ντομάτα 40,6 % σε σχέση με το 1982. Τέλος, στις μεν χρονολογικές σειρές της έκτασης του βαμβακιού και των τεύτλων προσαρμόζεται καλύτερα το μοντέλο του εκθετικά ομαλοποιημένου μέσου όρου (με σταθερές εξομάλυνσης 0,45 και 0,30 αντίστοιχα), στη δε χρονολογική σειρά των δένδρων το εκθετικό μοντέλο με συντελεστή προσδιορισμού 0,9682. Με τη χρησιμοποίηση των μοντέλων αυτών προβλέπεται αύξηση της καλλιεργούμενης έκτασης του βαμβακιού (1,2 %) και των δένδρων (6,1 %), και μείωση της έκτασης των τεύτλων (12,7 %).

Η πρόβλεψη της καλλιεργούμενης έκτασης των παραπάνω κλάδων παραγωγής για έτη πέρα από το 1983, μπορεί να γίνει με τη χρησιμοποίηση των αντίστοιχων εκτιμηθέντων μοντέλων, με μικρότερο όμως βαθμό αξιοπιστίας, λόγω του μικρού εύρους των χρονολογικών σειρών.

## 5. ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΟΥ ΑΚΑΘΑΡΙΣΤΟΥ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Για την πρόβλεψη της εξέλιξης του αναμενόμενου ακαθάριστου εισοδήματος και του αναγκαιούντος μεταβλητού κόστους της περιοχής τέως λίμνης Γιαννιτσών χρησιμοποιήθηκαν στοχαστικές διαδικασίες Markov και ειδικότερα διαδικασίες γεννήσεων και θανάτων. Όπως και στην περίπτωση της καλλιεργούμενης έκτασης των κλάδων παραγωγής, έτσι και στην περίπτωση του ακαθάριστου εισοδήματος και του μεταβλητού κόστους οι προβλέψεις αναφέρονται στο έτος 1983 και στηρίζονται σε χρονολογικές σειρές της περιόδου 1976-82 (πίνακας 2).

Το αντίστοιχο αυτοπαλίνδρομο γραμμικό μοντέλο για το ακαθάριστο εισόδημα της περιοχής* είναι :

$$x_t = 420126+0,8963x_{t-1}, \qquad R^2 = 0,8941$$

Το μοντέλο αυτό, που είναι εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης, έχει λύση

* δεν περιλαμβάνει τις επιδοτήσεις

**ΠΙΝΑΚΑΣ 2**

**Ακαθάριστο εισόδημα και μεταβλητό κόστος της περιοχής τέως λίμνης Γιαννιτσών για την περίοδο 1976-82 και προβλεπόμενη εξέλιξη αυτών για το έτος 1983**

| Έτος (t) | Ακαθάρ. εισόδημα ($x_t$)(χιλ.δρχ.) | Μεταβλητό κόστος ($y_t$) (χιλ.δρχ.) |
|---|---|---|
| 1976 | 884157 | 498026 |
| 1977 | 1075976 | 530674 |
| 1978 | 1181439 | 567931 |
| 1979 | 1354296 | 566805 |
| 1980 | 1796993 | 572691 |
| 1981 | 2653809 | 589337 |
| 1982 | 2476904 | 615905 |
| Μ.Ο. 1976-82 | 1631939 | 563053 |
| 1983 | 2579557 | 614715 |

$$x_t = 4051360 - 3167203 \, . \; 0{,}8963^t$$

που μετασχηματιζόμενη δίνει

$$x_t = 4051360 - 3167203 . e^{-0{,}1095t}$$

Συνεπώς, το αναφερόμενο ποσοστό μεταβολής (αύξησης ή μείωσης) του ακαθάριστου εισοδήματος στο έτος t σε σχέση με το μέσο ακαθάριστο εισόδημα που παρατηρήθηκε την περίοδο 1976 - 82 είναι :

$$E(X_t) = 2{,}4825 - 1{,}940 e^{-0{,}1095t}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτουν οι μέσοι ρυθμοί αύξησης και μείωσης του ακαθάριστου εισοδήματος

$$\lambda_{xt} = 0{,}2718$$

$$\mu_{xt} = 0{,}1095_{xt}$$

καθώς και η διαφορική - διαφοροεξίσωση αυτού

$$\frac{dPx_t(t)}{dt} = 0,2718P_{x_t-1}(t)-(0,2718+0,1095x_t)P_{x_t}+0,1095(x_t+1)P_{x_t+1}(t)$$

Έτσι, η πιθανότητα να αυξηθεί το ακαθάριστο εισόδημα κατά χίλιες δραχμές στο απειροστό διάστημα δt της περιόδου t, είναι 0,2718(δt), ενώ η πιθανότητα να μειωθεί αυτό, ανέρχεται σε 0,1095xt(δt). Δηλαδή είναι πιθανότερο κατά 16 % περίπου το ακαθάριστο εισόδημα να παρουσιάσει αύξηση παρά μείωση για το έτος 1983. Το προβλεπόμενο ακαθάριστο εισόδημα το έτος 1983 ανέρχεται σε 2.579.557 χιλ. δρχ. παρουσιάζοντας αύξηση 4,1 % (102,7 εκατομμύρια δραχμές), με αντίστοιχο 95,45 % διάστημα εμπιστοσύνης 2579557 ± 398508.

Το αντίστοιχο γραμμικό μοντέλο για το μεταβλητό κόστος της περιοχής έχει τη μορφή :

$$y_t = 158933+0,7487 \quad y_{t-1}, \qquad R^2 = 0,7976$$

όπου το $y_t$ μετράται σε χιλιάδες δραχμές και περιλαμβάνει την αξία των σπόρων, των λιπασμάτων και των φαρμάκων, τα καύσιμα των ιδιόκτητων μηχανημάτων, την αμοιβή της ξένης εποχιακής ανθρώπινης και μηχανικής εργασίας, καθώς και τα αρδευτικά τέλη, το φόρο παραγωγής και την εισφορά ΟΓΑ. Η εξίσωση αυτή έχει λύση την:

$$y_t = 632443 - 134417.e^{-0,2894t}$$

και συνεπώς ο αναμενόμενος συντελεστής μεταβολής του μεταβλητού κόστους στο έτος t σε σχέση με το μέσο μεταβλητό κόστος της περιόδου 1976 - 82, καθώς και οι πιθανότητες αύξησης ή μείωσης αυτού είναι :

$$E(Y_t) = 1,1232 - 0,2387.e^{-0,2894t}$$

$$\lambda_{yt} = 0,3251$$

$$\mu_{yt} = 0,2894y_t$$

Τέλος, η διαφορική - διαφοροεξίσωση για το μεταβλητό κόστος έχει τη μορφή :

$$\frac{dPy_t(t)}{dt} = 0,3251Py_{t-1}(t) - (0,3251+0,2894y_t)Py_t(t)+0,2894(yt+1)Py_{t+}i(t)$$

Έτσι, το μεταβλητό κόστος προβλέπεται να παρουσιάσει στασιμότητα, μια και η πιθανότητα αύξησης αυτού (32,5 %) δεν διαφέρει ουσιαστικά από την πιθανότητα μείωσης του (28,9 %). Πράγματι, για το έτος 1983 προβλέπεται ότι το μεταβλητό κόστος θα είναι 614715 χιλιάδες δραχμές, μένοντας περίπου στο ίδιο επίπεδο μ' αυτό του έτους 1982. Το αντίστοιχο 95,45 % διάστημα εμπιστοσύνης για την τιμή αυτή είναι 614715±76992.

Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι το ακαθάριστο εισόδημα της περιοχής τέως λίμνης Γιαννιτσών θα συνεχίσει την ανοδική πορεία του και το 1983, παρουσιάζοντας αύξηση 4,1 % σε σταθερές τιμές του 1981. Αντίθετα το μεταβλητό κόστος προβλέπεται να παραμείνει στάσιμο. Η αύξηση του ακαθάριστου εισοδήματος με πιθανότητα 27,1 % και η στασιμότητα του μεταβλητού κόστους με αντίστοιχη πιθανότητα 38,6 %, ενισχύεται και από το γεγονός ότι ο συντελεστής μεταβολής το έτος 1983 σε σχέση με τη μέση τιμή του στην περίοδο 1976- 82 είναι για μεν το πρώτο 1,5807, για δε το δεύτερο 1,0917.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή αναλύθηκαν και εφαρμόσθηκαν απλά μοντέλα χρονολογικών σειρών και στοχαστικά μοντέλα γεννήσεων και θανάτων για την πρόβλεψη της εξέλιξης της έκτασης των κυριότερων κλάδων γεωργικής παραγωγής και του οικονομικού αποτελέσματος της περιοχής τέως λίμνης Γιαννιτσών. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της μελέτης, προβλέπεται για το 1983 σημαντική αύξηση της έκτασης των πέντε από τους εφτά συνολικά κλάδους γεωργικής παραγωγής που εξετάσθηκαν (δένδρα 6,1 %, σιτάρι 7,4%, καπνός 10,2%, καλαμπόκι 13,3% και ντομάτα 40,2%), μικρή αύξηση της έκτασης του βαμβακιού (1,2%) και σημαντική μείωση της έκτασης των τεύτλων (12,7 %). Τα αποτελέσματα αυτά, που συμφωνούν με την αναμενόμενη γεωργική πρακτική στην περιοχή, δείχνουν ότι οι κλάδοι παραγωγής που τελευταία απολαμβάνουν καλύτερων τιμών θα επεκταθούν σε βάρος των τεύτλων, παρά το σταθερό γεωργικό εισόδημα που προσφέρει ο κλάδος αυτός.

Το ακαθάριστο γεωργικό εισόδημα της περιοχής προβλέπεται να συνεχίσει την ανοδική πορεία του και να αυξηθεί κατά 103 εκατ. δρχ. ή 4,1 % σε σταθερές τιμές 1981. Αντίθετα το μεταβλητό κόστος της περιοχής προβλέπεται να παραμείνει στα επίπεδα του 1982. Τα αποτελέσματα αυτά, που άλλωστε αναμένονταν, συμφωνούν και με τις προβλέψεις της έκτασης των καλλιεργούμενων κλάδων, παρά το ότι έγιναν με ανεξάρτητο τρόπο.

Τα αποτελέσματα της μελέτης, από τα οποία όπως είναι φανερό προκύπτουν χρήσιμες τάσεις και ενδείξεις της πορείας των κυριότερων μεγεθών της μελετούμενης περιοχής, θα μπορούσαν να βοηθήσουν σημαντικά στην άσκηση αποτελεσματικότερης πολιτικής στην περιοχή και θα έπρεπε να ληφθούν υπόψη από τους υπεύθυνους φορείς. Από την άλλη μεριά η ακολουθούμενη μεθοδολογία, καθώς και η περιγραφή και η ανάλυση των χρησιμοποιηθέντων μοντέλων, θα μπορούσε να φανεί χρήσιμη και να αποτελέσει οδηγό για την ανάληψη παρόμοιων μελετών τόσο σε επίπεδο περιοχής όσο και σε ολόκληρη τη χώρα.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


1. Balmer, D., «Markov chains and related topics», London School of Econocmics, London 1980.
2. Feller, W. «An Introduction to Probability Theory and its Applications», vol. II, Wiley 1971.
3. Howard, R., «Dynamic Probabilitic Systems, vol. I: Markov Models», Wiley 1971.
4. Karlin, S. and H. Taylor, «A First Course in Stochastic Processes (2nd edition) », Academic Press 1975.
5. Makridakis, S., Wheelwright, S. and V. McGee, «Forecasting : Methods and Applications», Wiley 1983.
6. Μάνος, Β. «Προγραμματισμός γεωργικής παραγωγής τέως λίμνης Γιαννιτσών. Δυνατότητες και προϋποθέσεις αύξησης γεωργικού εισοδήματος [περιοχής», Επιστημονική Επετηρίδα Γεωπονικού Τμήματος Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, τόμος ΚΕ, παράρτημα αριθμ. 6,1984.
7. Safia, J. and R. Lave, «Markovian Decision Processes with Probabilistic Observation of States», Management Science, vol. 20, 1973.

8. Wood, D. and R. Fildes, «Forecasting for Business, Methods and Applications», Longman Business Series 1976.

9. Υπουργείο Γεωργίας, Γενικός Οργανισμός Εγγείων Βελτιώσεων πεδιάδων Θεσσαλονίκης - Λαγκαδά, «Έκθεση επί της λειτουργίας των αρδευτικών έργων περιοχής δικαιοδοσίας ΓΟΕΒ πεδιάδων Θεσσαλονίκης - Λαγκαδά κατά τις περιόδους 1976-82», Θεσσαλονίκη 1977- 1983.

10. Ζήσου, Α. και Γ. Τζιαφέτας, «Στοχαστικά μοντέλα για τις δημόσιες επενδύσεις και το ακαθάριστο εθνικό εισόδημα στην Ελλάδα», Σπουδές, τόμος 31, Σεπτέμβριος 1981.