DANIEL BERNOULLI

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΙΣ ΜΙΑΣ ΝΕΑΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ *

Υπό

Λ. θ. ΧΟΥΜΑΝΙΔΗ, και Α.Δ. ΚΑΡΑΠΑΝΝΗ

Καθηγητού Α.Β.Σ.Π. Επιστημονικού Συνεργάτου Α.Β.Σ.Π.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το ανά χείρας άρθρον του D. Bernoulli εδημοσιεύθη το πρώτον το έτος 1738 εις Λατινικήν γλώσσαν υπό τίτλον «Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis» (Παρουσίασις μιας νέας θεωρίας επί της μετρήσεως του κινδύνου), εις Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitane, Tomus V, σελ. 175- 192 (Μελέται της Αυτοκρατορικής Ακαδημίας Επιστημών της Πετρουπόλεως,Τομ,ν).

Η πρώτη μετάφρασις του δοκιμίου αυτού έγινε εις την Γερμανικήν γλώσσαν το έτος 1896 υπό του καθηγητού Alfred Pringsheim μετά σχολίων υπό του Dr Ludwig Fick. Η μετάφρασις του έργου αυτού από την Λατινικήν γλώσσαν εις την Αγγλικήν επραγματοποιήθη μόλις το 1954 υπό της καθηγήτριας Dr Louise Sommer (The American University, Washington, D.C.) και ετυπώθη εις το περιοδικόν «Econometrica», No 22, 1954, σελ. 23 - 36, συνοδευόμενον μετά σχολίων υπό του καθηγητού Karl Menger (Illinois Institute of Technology), ως και ειδικής βιβλιογραφίας επί της θεωρίας του D. Bernoulli («Econometrica»), 1954, σελ. 35-6).

* Η εις καθαρεύουσαν γλώσσαν μετάφρασις του κειμένου που θα ακολουθήση, δεν υποδηλοί και την κατά μέγιστον μέρος μετάφρασιν ενός εκ των δύο μεταφραστών, οι οποίοι εργάσθησαν εξ ίσου δια την παρουσίασιν της εργασίας ταύτης του D. Bernoulli. Προσέτι ο αναγνώστης δέον όπως έχη υπ' όψιν ότι αι υποσημειώσεις είναι των μεταφραστών.

Το έργον του Daniel Bernoulli τιμηθέν, ως θα είδομεν, υπό τόσων ονομαστών οικονομολόγων, μας παρεκίνησε να παρουσιάσωμεν εις μετάφρασιν την ανά χείρας εργασίαν του ίνα γνωρίσουν και οι Έλληνες οικονομολόγοι και σπουδασταί την βαθυστόχαστον διάννοιάν του. Εθεωρήσαμεν επίσης ότι θα έπρεπε αφ' ενός μεν, να εκθέσωμεν ωρισμένα βιογραφικά στοιχεία του συγγραφέως αφ' ετέρου δέ, να πλουτίσωμεν την μετάφρασιν μας με ιδικάς μας σημειώσεις προς καλλιτέραν ενημέρωσιν του αναγνώστου.

Ο Daniel Bernoulli είναι εν από τα εξέχοντα μέλη της οικογενείας των Ελβετών επιφανών μαθηματικών του 17ου και 18ου αιώνος. Πρόγονος της οικογενείας ήτο ο Nicholas Bernoulli έμπορος εις Βασιλείαν. Ως πρώτοι επίγονοι μαθηματικοί εις την οικογένειαν φέρονται οι αδελφοί Jacques I (1654- 1705) και Jean I (1667-1748) Bernoulli. Οι αδελφοί ούτοι εμπνεόμενοι από τας εργασίας του φιλοσόφου Leibniz ησχολήθησαν με τον απειρωστικόν και τον διαφορικόν λογισμόν. Ειδικώτερον ο πρώτος συνέγραψε την εργασίαν «Ars Conjectandi» εις την οποίαν αναπτύσσει θεωρίαν των πιθανοτήτων και την οποίαν όμως δεν επρόφθασε να εκδώση προλαβών αυτόν ο θάνατος. Δια την εργασίαν ταύτην ΐδε εις J.M. Keynes A Treatise on Probability, 1921, έκδ. Macmillan 1973, σελ. 372-3.

Ο Nicholas I Bernoulli (1687- 1759) ανεψιός των προαναφερθέντων ησχολήθη με την έκδοσιν του έργου του θείου του και είχε στενήν αλληλογραφίαν με τον μαθηματικόν της εποχής Pierre Remond de Montmort (1678 - 1719), η οποία επισυνάπτεται εις την δευτέραν έκδοσιν (1713) του έργου του δευτέρου «Essai d' analyse sur les jeux de hazard», (Paris, 1708). Εις τούτο υπέβαλε διάφορα ερωτήματα έν των οποίων καταλήγει με το επονομαζόμενον παράδοξον της Αγίας Πετρουπόλεως (St. Petersburg Paradox) το οποίο προσεπάθησε να λύση ο εξάδελφος του Daniel Bernoulli, όπως ο ίδιος αναφέρει εις το τελευταίον τμήμα της μελέτης του.

Ο Jean I είχε τρεις υιούς, τους Nicholas II (1695 - 1726), Daniel I (1700 - 1782) και Jean II (1710-1790) οι οποίοι ησχολήθησαν με τα μαθηματικά. Επιφανέστερος εξ αυτών ήτο ο δεύτερος, ο Daniel Bernoulli, ο οποίος εγεννήθη εις Groningen εις τας 29 Ιανουαρίου 1700 και απέθανε εις την Βασιλείαν εις τας 17 Μαρτίου 1782. Ο Daniel Bernoulli μολονότι εσπούδασε Ιατρικός επιστήμας εμελέτησε το πρώτον του μαθηματικόν βιβλίον όταν ήτο 25 ετών και είτα ησχολήθη κυρίως με το επάγγελμα των μαθηματικών. Το 1725 απεδέχθη πρόσκλησιν της ιδρυθείσης τότε Ακαδημίας της Πετρουπόλεως, όπου και παρέμεινε έως το 1773. Επιστρέφοντας εις την γενετειράν του έγινε και καθηγητής εις αυτήν δια να διδάξη την βοτανική ν αρχικώς και αργότερον το 1750 φυσικήν και φιλοσοφίαν. Τα έργα του εβραβεύθησαν τουλάχιστον δέκα φοράς από την Γαλλικήν Ακαδημίαν των Επιστημών. Υπήρξε μέλος των Ακαδημιών των Παρισίων, Βερολίνου και Πετρουπόλεως, ως επίσης και της Βασιλικής Ακαδημίας του Λονδίνου. Τα κύρια ενδιαφέροντα του συνεκεντρώνοντο εις την θεωρητικήν φυσικήν, όπου και ηρεύνησε μαθηματικώς το πρόβλημα της μετατοπίσεως υγρών σωμάτων, εις τας αρχάς της μηχανικής και της αστρονομίας και έγραψε το έργον «Recherches physiques et astronomique» (περιλαμβάνεται εις Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l' Académie Royale des Science, No 3, 1734, σελ. 93 - 122), ως επίσης και εις την θεωρίαν των πιθανοτήτων της οποίας σπουδαιότερα συμβολή είναι η παρούσα μελέτη του. (Δια την ιστορικήν εξέλιξιν της θεωρίας των πιθανοτήτων εις την Οικονομικήν Επιστήμην ίδε Bruno de Finetti : «Probability» εις International Encyclopedia of the Social Sciences, έκδ. Macmillan, 1968, τόμ. 11-12, σελ. 496 - 505). Βιογραφικά στοιχεία του D. Bernoulli εις «Encyclopedia of the Social Science», έκδ. Macmillan, 1968, τομ. 1-2, σελ. 65-68· επίσης εις «Econometrica», 1954, σελ. 23).

§ 1. Αφ' ης εποχής οι μαθηματικοί ήρχισαν την μελέτην της μετρήσεως του κινδύνου συνεφώνησαν επί της εξής προτάσεως : Αι αναμενόμεναι αξίαι υπολογίζονται δια του πολλαπλασιασμού εκάστου πιθανού κέρδους επί του αριθμού των τρόπων υπό τους οποίους τούτο επιτυγχάνεται, και είτα δια της διαιρέσεως του αθροίσματος του γινομένου αυτού, δια του συνολικού αριθμού των πιθανών περιπτώσεων όπου εις την θεωρίαν αυτήν, η θεώρηση των περιπτώσεων που είναι όλαι της αυτής πιθανότητος έχουν ισχύν.

Εάν ο κανών αυτός ηδύνατο να γίνη αποδεκτός, εκείνο που απομένει δια να γίνη εντός του πλαισίου αυτής της θεωρίας, συγκεντρούται εις την απαρίθμησιν όλων των εναλλακτικών καταστάσεων, την ταξινόμησίν των εις ίσης πιθανότητος περιπτώσεις και τελικώς, την καταχώρησίν των εις αντιστοίχους κατηγορίας

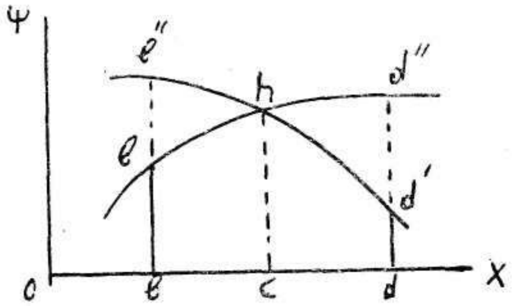
§ 2. Η ορθή εξέτασις των πολυαρίθμων αποδείξεων της προτάσεως ταύτης, η οποία έχει προηγηθή, δεικνύει ότι όλαι στηρίζονται επί μιας υποθέσεως : εφ' όσον δεν υφίσταται λόγος όπως συνάγωμεν ότι από δύο άτομα τα οποία αντιμετωπίζουν τους αυτούς κινδύνους, έκαστος τούτων θα πρέπει να προσδοκά την εκπλήρωσιν των επιθυμιών του ενώ οι προκαθοριζόμενοι κίνδυνοι υφ' εκάστου δέον όπως εκλαμβάνονται ίσοι εις αξίαν. Ουδέν χαράκτηριστικόν αυτών τούτων των ατόμων λαμβάνεται υπ' όψιν ειμή μόνον, εκείνα τα στοιχεία τα οποία έχουν σημασίαν δια τους όρους κινδύνου, πρέπει να σταθμίζωνται προσεκτικά. Η σχετική τότε διαπίστωσις δύναται να ευρέθη υπό την υψηλήν κρίσην δικαστών, οι οποίοι διορίζονται υπό της δημοσίας εξουσίας. Εις την πραγματικότητα όμως δεν υπάρχει ανάγκη αποφάσεως αλλά εξετάσεως, δηλ. θα πρέπει να θεσπισθούν κανόνες δια των οποίων οιοσδήποτε θα ηδύνατο να εκτίμηση τα εισοδήματα του εξ οιασδήποτε επικινδύνου επιχειρήσεως συμφώνως προς τας ειδικάς χρηματικός περιπτώσεις αυτού.

§ 3. Ίνα καταστήσωμεν τα ανωτέρω σαφή είναι ίσως ενδεδειγμένον να εξετάσωμεν το ακόλουθον παράδειγμα : Κάπως πτωχόν τι άτομον αποκτά εν λαχείον το οποίον του αποφέρει ίσην πιθανότητα δια τίποτε ή δια είκοσι χιλιάδας δουκάτα. Θα ηδύνατο το άτομον τούτο να αξιολόγηση την τύχην του ότι εκέρδισε δέκα χιλιάδας δουκάτα ; Δεν θα ηδύνατο να τύχη κακής συμβουλής και να πώληση το λαχείον του αντί εννέα χιλιάδας δουκάτων ; Κατ' εμέ φαίνεται η απάντησις να είναι αρνητική. Από της άλλης πλευράς τείνω να πιστεύσω ότι εις πλούσιος θα ηδύνατο να τύχη εσφαλμένης συμβουλής και να αρνηθή να αγοράση το λαχείον δια την τιμήν των εννέα χιλιάδων δουκάτων. Εάν δεν λανθάνω φαίνεται σαφώς ότι όλα τα άτομα δεν δύνανται να χρησιμοποιήσουν τον αυτόν κανόνα δια να αξιολογήσουν το τυχερόν παίγνιον. Ο κανών ως ούτος διετυπώθη εις την § 1, δέον κατά συνέπειαν να απεμπολήθή. Αλλά πας όστις εξετάζει το πρόβλημα με οξυδέρκειαν και ενδιαφέρον θα επιβεβαίωση ότι η έννοια της αξίας την οποία εχρησιμοποιήσαμεν εις τον εν λόγω κανόνα, δύναται να καθορισθή κατά τρόπον τοιούτον ώστε να καταστή η όλη διαδικασία παγκοσμίως αποδεκτή άνευ ουδεμίας επιφυλάξεως. Ίνα δε γίνη αυτό, ο προσδιορισμός της αξίας ενός αντικειμένου δεν θα πρέπει να βασισθή επί της τιμής του αλλά μάλλον επί της χρησιμότητος την οποίαν αποφέρει [1]. Η τιμή του αντικειμένου εξάρ-

1. Ο Daniel Bernoulli ειργάσθη επί του ηδονιστικού λογισμού της οριακής χρησιμότητος χρησιμοποιήσεις προς τούτο το μαθηματικόν εργαλείον προ της Μαθηματικής Σχολής ή Σχολής της Λωζάνης ή Σχολής της Οικονομικής Ισορροπίας. Η Σχολή της Βιέννης ή Αυστριακή Σχολή ή Υποκειμενική Σχολή ή Ψυχολογική Σχολή εσυστηματοποιησε τας υποκειμενικός αντιλήψεις των προ αυτής συγγραφέων ως ο Αριστοτέλης, ο de Covarubias, ο Galiani, ο de Lugo, ο Genovesi, ο Verri, ο Beccaria, ο Condillac, ο Bentham, ο Hermann, ο Lotz, ο μηχανικός Jenkin, ο μηχανικός Dupuit, ο Turgot, ο Say και ο Senior μέχρις ωρισμένου βαθμού κ.ά. Κατά την Αυστριακήν Σχολήν η ανταλλαγή γίνεται επί τη βάσει της απαρέσκειας δια το διδόμενον και της ηδονής δια το αποκτούμενον, η μέτρησις δε γίνεται επί τη βάσει της οριακής χρησιμότητος ήτοι της ικανοποιήσεως την οποίαν προσφέρει η εσχάτη μονάς του αποθέματος αγαθού τίνος. Εις την πράξιν της ανταλλαγής μεταξύ δύο ατόμων, αι απολαμβανόμεναι ηδοναί εξισούνται, ήτοι αι οριακαί χρησιμότητες των υπό ανταλλαγήν αγαθών καθίστανται ίσαι, οπότε η τιμή P δύο αγαθών X και Ψ, άνευ της μεσολαβήσεως του χρήματος θα είναι $\frac{PX}{\ } = \frac{UX}{\ }$, όπου U η οριακή χρησιμότης του αντιστοίχου αγαθού X, Ψ (Λ. Θ. Χουμανίδη : Η Αντικειμενική περί Αξίας Θεωρία, από της εποχής των Κλασσικών μέχρι σήμερον, Αθήναι 1984, εκδ. Σμπί-

τάται μόνον εξ αυτού τούτου και είναι ίση δι'όλους, η χρησιμότης του, εν τούτοις, εξαρτάται εκ των ιδιαιτέρων καταστάσεων του ατόμου, το οποίον προβαίνει εις την εκτίμησιν του αντικειμένου. Ούτω δεν υπάρχει αμφιβολία ότι εν κέρδος χιλίων δουκάτων είναι μεγαλυτέρας σημασίας δι' ένα πτωχόν παρά δι' ένα πλούσιον αν και αμφότεροι κερδίζουν το αυτό ποσόν[2].

λιας, σελ. 19). Κατά S.W. Jevons, ο οποίος ανήκει εις τους ιδρυτάς της Μαθηματικής Σχολής, εάν U είναι το σύνολο της χρησιμότητας που απολαμβάνεται από το αγαθόν X, τότε το U εις την μαθηματικήν γλώσσαν είναι συνάρτησις του X, όπου ΔX μέρος ποσότητος του X ενώ X+ΔX κάτι πλέον του X και η συνολική χρησιμότης θα είναι U+ΔU. Όθεν καθίσταται φανερόν ότι η αύξησις της χρησιμότητος ΔU οφείλεται εις την αύξησιν του αγαθού ΔX. Διαιροΰντες δε $\frac{\Delta U}{\Delta X}$ έχομεν τον τελικόν βαθμόν χρησιμότητος ή ως θα ελέγωμεν ημείς την οριακήν χρησιμότητα κατά την Αυστριακήν Σχολήν ή σπάνια κατά L. Walras (Σχολή Λοζάννης). (W.S. Jevons : The Theory, of Political Economy, 1871, έκδ. Penguin Books, London 1970, με εισαγωγή και σημειώσεις R. D. Collison Black, σελ. 109- 110). Ο ηδονιστικός υπολογισμός του συμφέροντος κατά τους διατυπώσαντας την θεωρίαν της οριακής



χρησιμότητος (Grentznutzen) προς ανάδειξιν της εν τη αγορά σχηματιζόμενης τιμής έχει ως εξής.

Εάν υποθέσωμεν ότι επί της OX παριστώνται αι τιμαί και επί της OΨ αι ποσότητες, τότε η τιμή της ισορροπίας θα είναι επί της τομής των καμπυλών, το h. Και είναι αυτό και μόνον αυτό διότι ουδεμία άλλη τιμή είναι η της ισορροπίας ήτοι της τιμής OC ποσότητος Ch. Διότι εάν εσχηματίζετο άλλη τιμή υποτεθήσθω η Od τότε η προσφερόμενη ποσότης dd θα ήτο μεγαλύτερα της ζητούμενης dd' και εάν η τιμή διεμορφούτο εις Oβ, τότε η ζητούμενη ποσότης ββ" θα ήτο μεγαλύτερα της προσφερόμενης ββ' και ούτως η προσφορά ευρισκομένη προ μεγαλυτέρας ζητήσεως θα ύψωνε την τιμήν (W.S. Jevons : op. cit., σελ. 140).

2. Καθίσταται σαφές ότι ο D. Bernoulli υποδηλώνει ότι υπάρχει διαφορετική δυνατότης εκπληρώσεως των αναγκών και διαφορετική εκτίμησις των αγαθών εις όρους χρησιμότητος μεταξύ των ατόμων τούτων επιθυμούντων την απόλαυσιν του μεγίστου της χρησιμότητος. Η άποψις αύτη διατυπωθείσα πρώτον υπό του Jeremy Bentham και υπό των ωφελιμιστών φιλοσό-

§ 4. Η συζήτησις, επί του θέματος, ανεπτύχθη ήδη μέχρι σημείου τοιούτου ώστε πας τις να δύναται να προχωρήση εις την έρευναν δια της ελαχίστης παραφράσεως μιας και της αυτής αρχής. Παρά ταύτα, εφ' όσον η υπόθεσίς είναι καθ' ολοκληρίαν νέα, ίσως απαιτεί κάποιαν διευκρίνησιν. Ένεκα τούτου απεφάσισα να εξηγήσω δια παραδείγματος τι διηρεύνησα. Εν τω μεταξύ ας χρησιμοποιήσωμεν τα ακολουθούντα αμέσως, ως θεμελιώδη κανόνα : Εάν η χρησιμότης πάσης δυνατής προσδοκίας κέρδους πολλαπλασιάζεται επί τον αριθμόν των τρόπων δια των οποίων τούτο δύναται να επιτευχθή, και είτα διαιρέσωμεν το άθροισμα αυτών των γινομένων δια του συνολικού αριθμού των δυνατών περιπτώσεων, θα επιτευχθή μια μέση χρησιμότης (ηθική προσδοκία), και το κέρδος το οποίον αντιστοιχεί εις αυτήν την χρησιμότητα θα ισούται με την αξίαν του υπό συζήτησιν κινδύνου[3].

φων του 18ου και 19ου αιώνος, προαπαιτεί απόλυτον μέτρον χρησιμότητος, προέτρεψε δε τον A.C. Pigou δυο αιώνες βραδύτερον να συμπεράνη ότι... «οιαδήποτε μεταφορά εισοδήματος από ένα σχετικώς πλούσιον εις ένα σχετικώς πτωχόν άνθρωπον όμοιας ιδιοσυγκρασίας, πρέπει να αυξάνη την συνολικήν ικανοποίησιν, δεδομένου ότι καθιστά δυνατήν την ικανοποίησιν επιτακτικότερων αναγκών εις βάρος ολιγώτερον επιτακτικών αναγκών» (A. C. Pigou : The Economics of Welfare, εκδ. Macmillan, 1924, σελ. 89). Αντιθέτως προς τον Pigou οι περισσότεροι των συγχρόνων οικονομολόγων αποφεύγουν την εξαγωγή ν συμπερασμάτων βασιζόμενων επι της μεταξύ δύο προσώπων συγκρίσεως της χρησιμότητος και των ηθικών κρίσεων (Επ' αυτού ίδε εις J. Harsanvi : Essays on Ethics Social Behavior and Scientific Explanation, έκδ. D. Reidel Pub. Co, S. Nath : A Reappraisal of Welfare Economics, έκδ. Routledge and Kegan Paul, 1969 κ.ά.) Ο L. von Mises κρίνων την θέσιν ταύτην του Bernoulli παρατηρεί ότι ούτος δεν αντελήφθη ότι δια τας εννοίας αξιολόγησις, επιλογή και δραστηριότης δεν υφίσταται είδος μετρήσεως ειμή μόνον διαβαθμίσεις. Επίσης αντέκρουσε την σύγκρισιν της χρησιμότητος μεταξύ πλουσίου και πτωχού που χρησιμοποιεί ο Bernoulli, διακηρύσσοντας ότι το επιλεγόμενο μέσον συγκρίσεως μεταξύ των ατόμων είναι αυθαιρέτου υποστάσεως (L. von Mises : Human Action, 1949, 3η έκδ. Contemporary Books, 1966, σελ. 126).

3. Την αρχήν εκτιμήσεως της χρησιμότητος ενός αβέβαιου αποτελέσματος υιοθετεί ο W.S. Jevons (op. cit., σελ. 99) χωρίς όμως να αναφέρη το όνομα ή το έργον του D. Bernoulli. Φαίνεται ότι ο Jevons εγνώρισε την ιδέαν αυτήν μελετών τα έργα του περίφημου μαθηματικού Pierre Simon Marquis de Laplace (1749- 1824), ακολουθών την θέσιν του υπέρ της χρησιμοποιήσεως της απαγωγικής (inductive) μεθόδου εις την ερμηνεία των οικονομικών φαινομένων. (W.S. Jevons : Papers and Correspondence, του Collison Blak, εκδ. Macmillan, 1981, τομ. IV. σελ. 147, τομ. V, σελ. 52, τομ. VII, σελ. 93). Ο δε Laplace εις το ευρέως γνωστόν έργον του «Théorie analytique des Probabilities, (1812) αναφέρεται εις την θεωρίαν και το μεταφρασθέν υφ' ημών άρθρον του D. Bernoulli. (Πβλ. J. A. Schumpeter : History of Economic Analysis, 1954, έκδ. Oxford University Press, 1976, σελ. 304 ft 8). Ο M. Pantaleoni (Pure Economics 1898, έκδ. A.M. Kelley 1957, σελ. 78) αναφέρει τον Bernoulli ως πρωτεργάτην της θεωρίας του τελικού βαθμού χρησιμότητος εν σχέσει προς τα προβλήματα που εξετάζονται επί τη βάσει των πιθανοτήτων.

§ 5. Ούτω καθίσταται προφανές ότι ουδεμία βαρύνουσα μέτρησις της αξίας κινδύνου τινός δύναται να επιτευχθή άνευ θεωρήσεως προς την χρησιμότητα του, εν άλλοις λόγοις, προς την χρησιμότητα οιουδήποτε προκύπτοντος κέρδους δια το άτομον ή αντιθέτως προς την ποσότητα κέρδους που απαιτείται ίνα επιτευχθή δεδομένη χρησιμότης.

Εν τούτοις καθίσταται προφανής η δυσχέρεια να επιτευχθή κάποια ακριβής γενίκευσις εφ' όσον η χρησιμότης ενός αντικειμένου δύναται να μεταβάλλεται αναλόγως των περιστάσεων. Επομένως παρ' όλον ότι εις πτωχός άνθρωπος γενικώς αποκομίζει μεγαλυτέραν χρησιμότητα από όσην είς πλούσιος εξ ενός ίσου κέρδους, είναι ουχ ήττον επίσης κατανοητόν, επί παραδείγματι, ότι εις πλούσιος αιχμάλωτος ο οποίος κατέχει δύο χιλιάδας δουκάτων αλλά έχει ανάγκη πλέον των δύο χιλιάδων δουκάτων ίνα εξαγόραση την ελευθερίαν του, θα δώσει υψηλοτέραν αξίαν επί κέρδους δύο χιλιάδων δουκάτων από όσην είς άλλος ο οποίος διαθέτει ολιγώτερον χρήμα από αυτόν[4]. Μολονότι απειράριθμα παραδείγματα του είδους τούτου δύνανται να εκτεθούν, όμως παρουσιάζουν άκρως σπανίας εξαιρέσεις. Κατά συνέπειαν, είναι καλλίτερον να λάβωμεν υπ' όψιν αυτό το οποίον συνήθως συμβαίνει και ίνα αντιληφθώμεν περισσότερον ορθώς το πρόβλημα θα συνάγωμεν ότι υφίσταται ανεπαίσθητος μικρά αύξησις εις τον πλούτον του ατόμου όστις εξελίσσεται με συνεχείς απειροελάχιστος αυξήσεις. Πιθανόν όμως τώρα πάσα αύξησις πλούτου, μη λαμβανομένου υπ' όψιν ποίας σημασίας είναι αύτη, θα έχη ως αποτέλεσμα πάντοτε μιαν αύξησιν εις την χρησιμότητα η οποία είναι αντιστρόφως ανάλογος προς την ποσότητα των ήδη κατεχομένων αγαθών. Δια να εξηγήσωμεν την υπόθεσιν ταύτην είναι αναγκαίον να προσδιορίσωμεν τι ηννόουν ομιλών περί της ποσότητος των αγαθών. Δια της εκφράσεως ταύτης εννοώ την διατροφήν, την ένδυσιν, παν τι το οποίον προστίθεται εις τας ανάγκας της ζωής,

O J.M. Keynes (op. cit.) όμως θεωρεί την έννοιαν του ηθικού κινδύνου που προβάλλει ο Bernoulli ως χαλαρών και μη γενικήν. Διότι διερωτάται ο Keynes,.. .«μήπως και η αξία μιας ποσότητος αρετής επίσης θα μεταβάλλεται με αυτόν τον τρόπον ; » (σελ. 353). Εάν ναί, τότε θα πρέπει να συμπεράνωμεν ότι ένα μικρότερο αλλά σχετικώς βέβαιον καλόν θα είναι επωφελέστερον εξ ενός μεγαλυτέρου αλλά περισσότερον βεβαίου καλού. Επομένως, εις την κοινωνίαν θα πρέπει να αναλαμβάνονται ηθικοί κίνδυνοι μόνον εις περίπτωσιν καθ' ή ν υπόσχονται εν μέγα πραγματικόν κέρδος, γεγονός όμως το οποίον δεν παρατηρείται καθολικώς (σελ. 354).

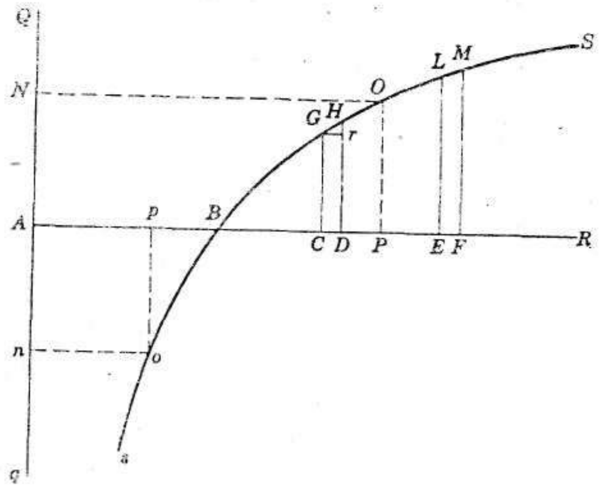
4. O Bernoulli επεκτείνει τη θεωρίαν του της μεταξύ δύο ατόμων συγκρίσεως της χρησιμότητος εισάγων και τον παράγοντα των συγκεκριμένων συνθηκών υπό τας οποίας τελεί το άτομον.

έτι και της πολυτελούς, παν τι το οποίον δύναται να συμβάλλη εις την επαρκή ικανοποίησιν παντός είδους ανάγκης. Εξ αυτού συνάγεται ότι ουδείς δύναται να ισχυρισθή ότι δεν κατέχει τίποτε υπ' αυτήν την έννοιαν, εκτός και αν λιμοκτονεί μέχρι θανάτου. Δια την μεγάλην πλειοψηφίαν το πλέον πολύτιμον μέρος των κατεχομένων και ούτως καθορισθέντων, θα συνίσταται εις την παραγωγικήν των ικανότητα και ο όρος τούτος λαμβάνεται υπ' όψιν ίνα περιλάβη έτι και το ταλέντον του επαίτου : είς ο οποίος επαιτών είναι ικανός να απόκτηση δέκα δουκάτα ετησίως, σπανίως θα επεθύμει να δεχθή ποσόν πεντήκοντα δουκάτων με την προϋπόθεσιν εις το εξής να απέχη της επαιτείας ή κατ' άλλον τρόπον προσπαθών να κερδίση χρήματα. Διότι θα έπρεπε ούτος να ζήση εξ αυτού του ποσού και αφού κατόπιν το έχει δαπανήση, τότε να πρέπει η ύπαρξίς του να τερματισθή. Αμφιβάλλω εάν αυτοί οι οποίοι δεν κατέχουν ένα φαρδίνι[5] και πιέζονται υπό οικονομικών υποχρεώσεων θα επεθύμουν να απελευθερωθούν των χρεών των ή και ακόμη να αποδεχθούν έν έτι μεγαλύτερον δώρον υπ' αυτήν την προϋπόθεσιν. Εάν όμως ο εν λόγω επαίτης επρόκειτο να αρνηθή μιαν τοιαύτην συμφωνίαν, εκτός και εάν επληρώνετο αμέσως ουχί ολιγώτερον των εκατό δουκάτων, και το εν λόγω άτομον που πιέζεται υπό των πιστωτών του ομοίως εξήτει χίλια δουκάτα, θα ηδυνάμεθα να είπωμεν ότι ο πρώτος είναι κάτοχος πλούτου αξίας εκατό και ο δεύτερος χιλίων δουκάτων, αν και κατά συνήθη τρόπον ομιλούντες, ο πρώτος δεν κατέχει τίποτε ο δε δεύτερος ολιγώτερον του τίποτε.

§ 6. Έχοντας προβή εις αυτήν την διευκρίνησιν, επιστρέφω εις την αναφοράν της προηγουμένης παραγράφου η οποία υπεστήριζεν ότι, εν απουσία του ασυνήθους η χρησιμότης η προκύπτουσα εκ πάσης μικράς αυξήσεως του πλούτου θα είναι αντιστρόφως ανάλογος προς την ποσότητα των κατεχομένων πρότερον αγαθών. Εξετάζοντες την ανθρωπίνην φύσιν, μας φαίνεται ότι η προαναφερθείσα υπόθεσις είναι κατάλληλος δια να έχη ισχύν δια τον πολύν κόσμον, δια τον οποίον αυτό το είδος της συγκρίσεως δύναται να εφαρμοσθή. Μόνον ελάχιστοι δεν δαπανούν εντελώς τα ετήσια αυτών εισοδήματα. Εάν όμως μεταξύ τούτων· τυγχάνει είς να έχει μιαν περιουσίαν αξίας εκατό χιλιάδων δουκάτων και είς άλλος περιουσίαν αξίας του αυτού αριθμού ημισίων δουκάτων, και ο πρώτος εισπράττει εκ της περιουσίας του εν ετήσιον εισόδημα πέντε χιλιάδων δουκάτων ενώ ο δεύτερος επιτυγχάνει τον ίδιον αριθμόν ημισίων δουκάτων εκ της περιουσίας του, είναι πασιφανές ότι δια τον πρώτον εν δουκάτον έχει επακριβώς την αυτήν σημασίαν που έχει το ήμισυ δουκάτον δια τον δεύτερον. Και κατά συνέπεια συνάγεται ότι το κέρδος του ενός δουκάτου δια τον πρώτον δεν θα είναι

5. Χαλκούν νόμισμα ίσον προς το 1/4 της αγγλικής πέννας.

μεγαλυτέρας αξίας από το κέρδος του ημίσεως δουκάτου δια τον δεύτερον. Συνεπώς, εάν έκαστος απολαμβάνει κέρδος ενός δουκάτου ο δεύτερος λαμβάνει την διπλασίαν χρησιμότητα εξ αυτού, έχων πλουτίσει κατά δύο ήμισυ δουκάτα[6]. Το επιχείρημα τούτο ισχύει εις πολλάς άλλας περιπτώσεις, αι οποίαι ως εκ τούτου, χρειάζεται να συζητηθούν κεχωρισμένως. Η πρότασις ισχύει ως επί το πλείστον δια την πλειονότητα των ανθρώπων, οι οποίοι δεν κατέχουν άλλην περιουσίαν εκτός της ικανότητος των προς εργασίαν, που είναι και η μόνη πηγή διαβιώσεως των. Είναι αληθές ότι υπάρχουν άνθρωποι δια τους οποίους έν δουκάτον έχει μεγαλυτέραν σημασίαν από τα πλείονα δουκάτα άλλων, οι οποίοι είναι ολιγώτερον πλούσιοι αλλά τούτων περισσότερον γενναιόδωροι. Εφ' όσον όμως θα ασχοληθώμεν τώρα μόνον με έν άτομον (κατά διαφόρους καταστάσεις αφθονίας), διακρίσεις του είδους τούτου δεν μας αφορούν. Ο άνθρωπος ο οποίος συγκινείται ολιγώτερον από έν κέρδος θα υπομείνη μιαν ζημίαν με μεγαλυτέραν υπομονήν. Καθώς όμως, εις ειδικάς περιπτώσεις, τα πράγματα πιθανώς δύνανται να συμβούν κατ' άλλον τρόπον, κατά πρώτον θα ασχοληθώ με την γενικωτέραν περίπτωσιν και εντεύθεν θα αναπτύξω την ιδικήν μου υπόθεσιν δια να ικανοποιήσω τους πάντας.



§ 7. Επομένως, έστω ότι το AB παριστά την ποσότητα των αγαθών που εξ αρχής κατείχοντο υπό τινός ατόμου. Εν συνεχεία επεκτείνοντας την AB θα προ-

6. Ο Bernoulli υποστηρίζει σαφώς την φθίνουσα οριακήν χρησιμότητα του χρήματος εν τη χρήσει της τελευταίας χρηματικής μονάδος του εισοδήματος. Προσέτι ο Bernoulli δεν συνδέει την ανταλλακτικήν ικανότητα ή την αγοραστικήν δύναμιν του χρήματος με την χρησι-

κύψη η καμπύλη BGLS της οποίας αι τεταγμέναι CG, DH, EL, FM κ.τ.λ. εμφαίνουν τ α ς χ ρ η σ ι μ ό τ η τ α ς, αι οποίαι αντιστοιχούν εις τας τετμημένας BC, BD, BE, BF κ.τ.λ. που παριστούν τα κέρδη εις πλούτον. Προχωρούντες ας δεχθώμεν ότι m, n, p, q κ.τ.λ. είναι αριθμοί δεικνύοντες αριθμόν τρόπων δι' ων δύνανται να προκύψουν κέρδη εις πλούτον BC, BD, BE, BF κ.τ.λ. Τότε (συμφώνως τη παραγράφω §4) η η θ ι κ ή προσδοκία που αφορά εις την επικίνδυνον πρότασιν δίδεται από :

$$PO = \frac{m.\,CG+n.DH+p.EL+q.FM+\ldots\ldots}{m+n+p+\ldots\ldots\ldots}$$

Εάν τώρα φέρομεν την AQ [7] ως κάθετον επί της AR και επ' αυτής μετρήσωμεν AN=PO, η ευθεία NO-AB [NO αφαιρούμενης της AB] παριστά το προσδοκώμενον καταλλήλως κέρδος, ή την αξίαν του ήδη επισημανθέντος κινδύνου[8]. Εάν επιθυμώμεν, πέραν τούτων, να γνωρίσωμεν πόσο μέγα είναι το στοιχηματιζόμενον ποσόν που θα επεθύμει να ριψοκινδυνεύση το άτομον με την προτεινομένην πρότασιν κινδύνου, τότε η καμπύλη μας πρέπει να επεκταθή προς την αντίθετον κατεύθυνσιν και κατά τοιούτον τρόπον ώστε η τετμημένη Bp να παριστά μιαν ζημίαν και η τεταγμένη ρο να παριστά την αντιστοιχούσα μείωσιν εις την χρησιμότητα. Εφ' όσον εις έν ειλικρινές παίγνιον η απαρέσκεια η προκύπτουσα εξ απώλειας δέον όπως είναι ίση προς την χρησιμότητα η οποία προ-

μότητα, ήτοι την εις πραγματικούς όρους ποσότητα των αγαθών που δύναται αύτη να αγοράση αλλά, μόνον με τον αριθμόν των μονάδων χρήματος που κατέχει. Εν άλλοις λόγοις θα ισχυριζώμεθα σήμερον ότι ο άνθρωπος, κατά τον Bernoulli, πάσχει πλήρως από την «αυταπάτην του χρήματος».

7. Το θετικό τμήμα του άξονος των γ δηλ. το AQ δεικνύει την συνολικήν χρησιμότητα που απολαμβάνει το άτομον εις περίπτωσιν κέρδους, ενώ το αρνητικόν τμήμα αυτού, δηλ. το Ag παριστά την συνολικήν απαρέσκειαν του ατόμου εις περίπτωσιν ζημίας. Διά μίαν απλή παρουσίασιν του διαγράμματος του Bernoulli βλ. R. Theocharis : Early Development in Mathematical Economics, 1961, 2η έκδ. Macmillan, 1983, σελ. 15-17, M. Blaug : The Economic Theory of Retrospect, 1962, έκδ. Cambridge University Press, 1979, σελ. 348-9, H. Spiegel : The Growth of Economic Thought, έκδ. Prentice Hall, 1971, σελ. 143-144.

8. Δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα BP εμφαίνει το εις πιθανότητας κέρδος του ατόμου.

κύπτει εξ επικερδείας, όθεν δέον όπως συνάγωμεν ότι An = AN ή ότι ρο = PO. Ούτω το Bρ θα εμφαίνη το στοιχηματιζόμενον ποσόν πέραν του οποίου δεν θα πρέπει να ριψοκινδυνεύσουν τα άτομα το οποία υπολογίζουν την χρηματικήν τους θέσιν.

Πόρισμα I

§ 8. Μέχρι τούδε οι επιστήμονες συνήθως εστήριζον την θέσιν των επί της υποθέσεως ότι όλα τα κέρδη δέον όπως αξιολογούνται αποκλειστικώς υπό ιδίους αυτών όρους, δηλ. επί τη βάσει των εγγενών των ποιοτήτων και ότι τα κέρδη ταύτα θα αποφέρουν πάντοτε μίαν χρησιμότητα ευθέως ανάλογον προς το κέρδος. Επ' αυτής της θέσεως η καμπύλη BS καθίσταται ευθεία γραμμή[9].

Εάν και πάλιν έχωμεν :

$$PO = \frac{m.\ CG + n\ .\ DH + p\ .\ EL + q\ .\ FM + \dots}{m + n + p + q + \ \dots}$$

και εάν, επ' αμφοτέρων των μελών της ως άνω εξισώσεως τεθούν οι αντίστοιχοι συντελεσταί, έπεται ότι :

$$BP = \frac{m.BC + n.BD + p.BE + q.BF + \dots}{m + n + p + q + \ \dots}$$

η οποία είναι σύμφωνος προς τον συνήθη αποδεκτόν κανόνα.

9. Δηλαδή, εάν η sBS ήτο ευθεία γραμμή, όπως υποθετικά θέτει ο Bernoulli η εις πιθανότητα ζημία Bρ θα ήτο ίση προς την εις πιθανότητα κέρδος BP.

Πόρισμα ΙΙ

§ 9. Εάν το AB ήτο απείρως μεγάλο, έτι και εν αναλογία προς το BF, το μεγαλύτερον πιθανόν κέρδος, το τόξον BM, δύναται να θεωρηθή ως μια απειροελάχιστους μικρά ευθεία γραμμή. Και πάλιν όμως εις την περίπτωσιν ταύτην ο συνήθης κανών εφαρμόζεται και δύναται να συνέχιση να θεωρείται κατά προσέγγισιν εν ισχύ επί παιγνίων στιγμής άνευ σημασίας[10].

§ 10. Έχοντας ασχοληθή με το πρόβλημα, κατά τον πλέον γενικό τρόπον, επιστρέφομεν τώρα εις την προαναφερθείσαν ιδιαιτέραν υπόθεσιν, η οποία, πράγματι, δικαιούται πρωτίστως προσοχής έναντι των άλλων. Κατά πρώτον η φύσις της καμπύλης sBS δέον όπως διερευνηθή υπό των προϋποθέσεων ως αύται ετέθησαν εις την παράγραφον § 7. Εφ' όσον επί της υποθέσεως μας πρέπει να θεωρήσωμεν απειροελαχίστως μικρά κέρδη, θα εκλάβωμεν τα κέρδη BC και BD ως σχεδόν ίσα, ούτως ώστε η διαφορά των CD να καταστή απειροελάχιστος μικρά. Εάν σύρωμεν την Gr ως παράλληλον προς την BR, τότε το rH θα παριστά τα απειροελαχίστως μικρά κέρδη εις χρησιμότητα δι άτομόν τι του οποίου η περιουσία είναι AC και που επιτυγχάνει τα μικρά κέρδη CD. Η χρησιμότης αύτη εν τούτοις θα έπρεπε να συσχετισθή όχι μόνον προς τα πολύ μικρά κέρδη CD προς τα οποία είναι ανάλογος, των λοιπών πραγμάτων όντων ίσων[11], αλλά επίσης και προς το AC, ήτοι την προηγουμένως κατεχομένην περιουσίαν προς την οποίαν αύτη είναι αντιστρόφως ανάλογος[12].

Ως εκ τούτου θετομεν :

$$AC = \chi, \quad CD = dx, \quad CG = y, \quad rH = dy \text{ και } AB = a.$$

10. Ο G. Stigler υποδεικνύει ότι εις την παράγραφον αυτήν ο D. Bernoulli προτείνει μιαν υπόθεσιν σταθεράς οριακής χρησιμότητος του πλούτου δια πολύ μικρής μεταβολής εις την ποσότητα του. (G. Stigler : The Development of Utility Theory, 1950, περιέχεται εις το Utility Theory-A Book of Readings του A. Page, έκδ. John Wiley, 1968, σελ. 87). Η έννοια της χρησιμότητος που χρησιμοποιεί ο Bernoulli είναι η της απολύτου (cardinal) χρησιμότητος. Επ' αυτών εις D. Ellsburg : Classic and Current Notions of Measurable Utility, Economic Journal, September 1954.

11. Υπόθεσις ceteris puribus.

12. Ο Bernoulli φαίνεται ωσάν να υποστηρίζη ότι δυνάμεθα να υποθέσωμεν πως η ηθική περιουσία ή χρησιμότης ενός ατόμου είναι αντιστρόφως ανάλογος προς την φυσικήν περιουσίαν αυτού. Τούτο όμως συμβαίνει όταν έχει ήδη χορηγηθή εις τα άτομα εν ελάχιστον επίπεδον

Και εάν το b παριστά κάποιαν σταθεράν λαμβάνωμεν

$$dy = \frac{bdx}{x} \text{ ή } y = b \log \frac{x}{a}$$ [13]

Η καμπύλη sBS ως εκ τούτου είναι λογαριθμική καμπύλη, η υφαπτόμένη της οποίας είναι παντού b και της οποίας η ασύμπτωτος είναι Qq.

αγαθών διαβιώσεως. Εις την περίπτωσιν ταύτην δυνάμεθα - αγνοώντας την αδηφάγον φύσιν των ατόμων - να υποθέσωμεν ότι η χρησιμότης ή η ευτυχία του ανθρώπου αυξάνεται συνεχώς με την αύξησιν του πλούτου, αλλά κατ' αντίστροφον λόγον ως προς τον ρυθμόν της αυξήσεως αυτού.

Ο J. Schumpeter (op. cit., σελ. 303) εξετάζων την θέσιν ταύτην του D. Bernoulli αναφέρει ότι ούτος κατηύθυνε την οικονομική σκέψιν προς δύο οδούς η μία προς την σχέσιν του ατόμου και των αγαθών κατ' αξιολογικήν κρίσιν του πρώτου επί των δευτέρων, τιθεμένης της χρησιμότητος εντός του ορίου της ποσότητος και η δευτέρα κατ' επέκτασιν της πρώτης προς την οριακήν χρησιμότητα του χρήματος μέσω του εισοδήματος.

13. Όπου (χ) ο συνολικός πλούτος του ατόμου που αποτελεί το άθροισμα των πρότερον κατεχομένων υπ' αυτού αγαθών (a) και των πιθανών του κερδών, (γ) η ικανοποίησις την οποίαν απολαμβάνει το άτομο από την κατοχήν πλούτου. Όπως είναι φανερόν από την εξίσωσιν $\frac{d\gamma}{dx} = \frac{b}{\chi}$ δηλ. η οριακή χρησιμότης του πλούτου ισούται προς το αντίστροφον τούτου. Υποθέτων ο Bernoulli ότι το (a) αποτελεί το αναγκαίον ποσόν πλούτου δια την διαβίωσιν των ατόμων, ολοκληρώνοντας έχομεν :

$\int_a^x b\frac{dx}{x} = b\,(\log x - \log a) = b \log \frac{x}{a}$. Η υπόθεσις Bernoulli, *όπως* αποκαλείται η σχέση αυτή χρησιμότητος και πλούτου (M. Blaug : op. cit., σελ. 349) εμφαίνει ότι η οριακή χρησιμότης του εισοδήματος, μειούται κατά το ίδιο ποσοστόν με το οποίο αυξάνεται το εισόδημα. Τοιουτοτρόπως η μορφή της οριακής χρησιμότητος του εισοδήματος είναι ορθογωνίου υπερβολής δεικνύουσα ότι μία κατά 10 % αύξησις του εισοδήματος φέρει προς μίαν κατά 10 % μείωσιν της οριακής χρησιμότητος, αδιάφορος προς το ύψος του εισοδήματος. Αντιθέτως προς την άποψιν ταύτην του Blaug ο J. Laird ισχυρίζεται ότι συμφώνως προς τον Bernoulli, η χρησιμότης θα αυξάνεται κατ' αριθμητικήν πρόοδον ενώ ο αντίστοιχος πλούτος με γεωμετρικήν πρόοδον (J. Laird : The Idea of Value, 1929, έκδ. A.M. Kelley, σελ. 325-6). Όσον αφορά δε εις τον σταθερόν συντελεστήν της εξισώσεως (b) ούτος είναι σταθερός δια κάθε άτομον, διαφέρει όμως μεταξύ των ατόμων προς τας διαφοράς εις τας προτιμήσεις των ή την έντασιν των συναισθημάτων των. Φαίνεται όμως ότι ο Bernoulli, όπως αναφέρει ο Schumpeter, (op. cit., σελ. 303 ft. 7), απέδωσε εις όλα τα άτομα τον αυτόν σταθερόν συντελεστήν (b) δεχόμενος, ούτως ασήμαντους διαφοράς μεταξύ των προτιμήσεων και αισθημάτων των ατόμων.

§11. Εάν τώρα συγκρίνωμεν το αποτέλεσμα τούτο προς ό,τι έχει λεχθή εις την παράγραφον 7, καθίσταται εμφανές ότι :

$$PO = b \log \frac{AP}{-}, \quad CG = b \log \frac{AC}{-}, DH = b \log \frac{AD}{-} \text{ κ.ο.κ.}$$

αλλά εφ' όσον έχωμεν :

$$PO = \frac{m.\ CG + n.\ DH + p.\ EL + q.\ FM + \ldots}{m+n+p+q+\ldots}$$

συνεπάγεται ότι :

$$b \log \frac{AP}{AB} = (mb\ og \frac{AC}{AB} + nb \log \frac{AD}{AB} + pb \log \frac{AE}{AB} + qb \log \frac{AF}{AB} + \ldots\ldots)$$
$$: (m+n+p+q+\ldots)$$

και ως εκ τούτου

$$AP = (AC^{m} \cdot AD^{n} \cdot AE^{p} \cdot AF^{q} \ldots) \frac{1}{m+n+p+q+\ldots}$$

Εάν τώρα αφαιρέσωμεν το AB, το εναπομένον μέγεθος BP, θα παριστά την αξίαν της συζητούμενης επικινδύνου προτάσεως.

§ 12. Ούτως, η προηγουμένη παράγραφος υποδεικνύει τον κατωτέρω κανόνα: Παν κέρδος πρέπει να προστίθεται εις την πρότερον κατεχομένην περιουσίαν, ακολούθως το άθροισμα αυτό πρέπει να υψούται εις την δύναμιν που δίδεται από τον αριθμόν των πιθανών τρόπων δια των οποίων δύναται να επιτευχθή κέρδος· οι όροι ούτοι εν συνεχεία πρέπει να πολλαπλασιασθούν ομού. Ακολούθως δε από το γινόμενον τούτο πρέπει να εξαχθή μια ρίζα, ο βαθμός της οποίας δίδεται από τον αριθμόν όλων των δυνατών περιπτώσεων, και τελικώς η αξία της αρχικής περιουσίας πρέπει να αφαιρείται από το μέγεθος τούτο, οπότε εκείνο που απομένει δεικνύει την αξίαν της συζητούμενης επικινδύνου προτάσεως. Η αρχή αύτη είναι βασική δια την μέτρησιν της αξίας των επικινδύνων προτάσεων κατά τας διαφόρους περιπτώσεις. Θα ήθελον να επεξεργασθώ την αρχήν ταύτην εις μιαν πλήρη θεωρίαν όπως έχει γίνει με την παραδοσιακήν ανάλυσιν, όπου δεν συμβαίνει τούτο παρά την σπουδαιότητα του και την πρωτοτυπίαν του, εξ αναληφθεισών, όμως, ήδη υποχρεώσεων δεν μου επιτρέπεται να αναλάβω αυτό το έργον. Ως εκ τούτου, προς το παρόν, θα σημειώσω μόνον τα περισσότερον σημαντικά σημεία μεταξύ εκείνων τα οποία εκ πρώτης όψεως συνέλαβεν η σκέψις μου.

§ 13. Κατά πρώτον, φαίνεται ότι εις πολλά παίγνια, ακόμη και εις εκείνα τα οποία είναι απολύτως τίμια, αμφότεροι οι παίκται δύναται να αναμένουν μήπως υποστούν ζημίαν. Πράγματι αύτη είναι παραίνεσις της φύσεως να αποφεύγουν όλοι τα ζάρια... Τούτο συνάγεται εκ της κοιλότητος της καμπύλης sBS ως προς του BR. Διότι ίνα το στοιχηματιζόμενον ποσόν, Bp, καταστή ίσον προς το προσδοκώμενον κέρδος, BP, είναι σαφές ότι η απαρέσκεια po η οποία προέρχεται από μίαν ζημίαν πάντοτε θα υπερέχη της χρησιμότητος του προσδοκώμενου κέρδους, PO. Αν και το αποτέλεσμα τούτο θα είναι απολύτως σαφές εις τους μαθηματικούς, παρ' όλα ταύτα θα το επεξηγήσω δια παραδείγματος ούτως ώστε να καταστή εις πάντας σαφές. Ας υποθέσουμε ότι εκ δύο παικτών κατεχόντων αμφοτέρων εκατό δουκάτα έκαστος θέτει το ήμισυ τούτων εις στοιχηματιζόμενον ποσόν εις έν παίγνιον το οποίον παρέχει τας ιδίας πιθανότητας εις αμφότερους τους παίκτας. Υπό αυτήν την υπόθεσιν έκαστος θα έχη πεντήκοντα δουκάτα συν τη προσδοκία κέρδους εκατόν επιπλέον δουκάτων. Εν τούτοις, το άθροισμα των αξιών αυτών των δύο στοιχείων συμποσούται, μετά του κανόνος της παραγράφου 12, μόνον εις $(50^{1}.\ 150^{1})1/_{2}$ ή -y^O .150, δηλ. ολιγώτερον από ογδοήκοντα επτά δουκάτα, εις τρόπον ώστε, αν και το παίγνιον διεξάγεται υπό τελείως ίσους όρους δι' αμφότερους τους παίκτας, έκαστος θα υφίσταται μιαν προσδοκώμενη ν ζημίαν περισσοτέρων των δεκατριών δουκάτων. Πρέπει εντόνως να δώσωμεν έμφασιν εις αυτήν την αλήθειαν, μολονότι είναι αυταπόδεικτος : Η απερισκεψία ενός παίκτου θα είναι μεγαλύτερα, όσον μεγαλύτερον είναι το τμήμα εκείνο της περιουσίας του το οποίον διακυβεύει εις έν τυχερόν παίγνιον. Προς τον σκοπόν τούτον θα μετατρέψωμεν το προηγούμενον παράδειγμα υποθέτοντας ότι ο είς εκ των παικτών, πριν θέσει τα πεντήκοντα δουκάτα του ως στοιχηματιζόμενον ποσόν, κατέχει διακόσια δουκάτα. Ο παίκτης αυτός υφίσταται μιαν αναμενομένην ζημίαν 200 --γ/50.250, η οποία δεν είναι πολύ μεγαλύτερα των έξ δουκάτων.

§ 14. Εφ' όσον ως εκ τούτου, καθείς ο οποίος στοιχηματίζει οποιοδήποτε τμήμα της περιουσίας του, οσονδήποτε μικρόν, επί ενός μαθηματικώς τιμίου τυχερού παιγνίου ενεργεί ανορθολογικώς, θα ήτο ενδιαφέρον να εξετάσωμεν πόσον μεγάλο πρέπει να είναι το όφελος που απολαμβάνει ο παίκτης έναντι του αντιπάλου του ούτως ώστε να αποφυγή οιανδήποτε αναμενομένην ζημίαν. Ας θεωρήσωμεν εκ νέου εν παίγνιον το οποίον είναι όσον το δυνατόν απλούστερον, και το οποίο προσδιορίζεται εκ δύο ίσης πιθανότητος αποτελέσματα έν των οποίων είναι ευμενές και το έτερον δυσμενές. Ας λάβωμεν το α ως το κέρδος το οποίον επιτυγχάνεται εις την περίπτωσιν του ευμενούς αποτελέσματος, και x ως το στοιχηματιζόμενον ποσόν το οποίον χάνεται εις την δυσμενή περίπτωσιν. Εάν η αρχικώς κατεχόμενη ποσότης αγαθών είναι a έχομεν

$$AB = a, \quad BP = \alpha, \quad PO = b \log \frac{a+a}{a+a}$$ (ίδε § 10), και εφ' όσον (εκ της § 7)

ρο = PO συνεπάγεται από την φύσιν της λογαριθμικής καμπύλης ότι

$$BP = \frac{a\alpha}{a+a}.$$ [14]

Εφ' όσον, το Bρ παριστά το στοιχηματιζόμενον ποσόν, τότε έχομεν :

$$x = \frac{a\alpha}{a+a}$$ ήτοι εν μέγεθος το οποίο είναι πάντοτε μικρότερον από το α, το προσδοκώμενον κέρδος. Εκ τούτου επίσης συνεπάγεται ότι εν άτομον που διακινδυνεύει ολόκληρον την περιουσίαν του ενεργεί ως ηλίθιος, οσονδήποτε μεγάλο δύναται να είναι το πιθανόν κέρδος. Ουδείς θα δυσκολευθή να πεισθή επ' αυτού ίνα εξέταση προσεκτικώς τους ορισμούς που εδώσαμεν ανωτέρω. Επιπροσθέτως, το αποτέλεσμα τούτο ρίπτει φως επί μιας δηλώσεως, η οποία είναι παγκοσμίως αποδεκτή εις την πράξιν : Δύναται να είναι λογικόν δια άτομα τίνα να επενδύσουν εις μιαν αβεβαίαν επιχείρησιν και εισέτι να είναι παράλογον να πράξουν το αυτό αλλά άτομα.

14. Ο A. Marshall (Principles of Economics, 1890, έκδ. Macmillan, 1977) αναφέρεται εις την αρχήν του Bernoulli (σελ. 11 και σελ. 693-4) την οποία αναπτύσσει επαρκέστερον μαθηματικώς βλ. και W. Fellner : Probability and Profit, εκδ. P. Irwin, 1965, σελ. 85. Την αρχή αυτήν ανέπτυξαν εις το πεδίον της ψυχολογίας την δεκαετία 1860 οι E. Weber και ο G.T. Fechner μετον επονομαζόμενο νόμο Weber - Fechner. Κατά τον ψυχολογικόν νόμον τούτον υποστηρίζεται ότι οι διαφορές εις τα αισθήματα είναι ευθέως ανάλογες προς την έντασιν των κινήτρων.

§ 15. Η διαδικασία η οποία συνήθως χρησιμοποιείται υπό των εμπόρων εις την ασφάλειαν των εμπορευμάτων που μεταφέρονται δια θαλάσσης φαίνεται να είναι αξία ιδιαιτέρας προσοχής. Τούτο δύναται πάλιν να εξηγηθή δια παραδείγματος. Ας υποθέσωμεν ότι ο Γάϊος, έμπορος από την Πετρούπολιν, ηγόρασε εμπορεύματα εις Άμστερδαμ τα οποία δύναται να πωλήση αντί δέκα χιλιάδων ρουβλίων εάν τα είχε εις την Πετρούπολιν. Δι' αυτό και παραγγέλει ταύτα να μεταφερθούν εκεί δια θαλάσσης, ευρισκόμενος όμως εν αμφιβολία εάν πρέπει να τα ασφάλιση ή όχι. Είναι δε ούτος καλώς ενημερωμένος του γεγονότος ότι κατ' αυτήν την εποχήν του έτους εκ των εκατό πλοίων που αναχωρούν από το Άμστερδαμ δια Πετρούπολιν συνήθως τα πέντε ναυαγούν. Παρά ταύτα δεν υπάρχει διαθέσιμος ασφάλεια κάτω της τιμής των οκτακοσίων ρουβλίων το φορτίον, ποσόν το οποίον θεωρεί ούτος σκανδαλωδώς υψηλόν. Ως εκ τούτου, το ερώτημα το οποίον προκύπτει είναι πόσον πλούτον πρέπει να καλύψει ο Γάϊος - εκτός των αναφερομένων εμπορευμάτων - ούτως ώστε να είναι σώφρον δι' αυτόν να αποφυγή την ασφάλισιν των εμπορευμάτων αυτών :[15] ; Εάν το x παριστά την περιουσίαν του, τότε το χ ομού με την αξίαν της προσδοκίας της ασφαλούς αφίξεως των εμπορευμάτων του δίδεται από $\sqrt[100]{(x+10.000)^{95}x^5} = \sqrt[20]{(x+10.000)^{19}x}$, κατά την περίπτωσιν που αποφεύγει την ασφάλειαν. Με την ασφάλειαν θα έχη μίαν ασφα-

Δηλ. η αίσθησις είναι λογαριθμική συνάρτησις των κινήτρων. (Επ' αυτού βλ. V.K. Dmitriew: Economic Essays on Value, Competition and Utility, 1904, έκδ. Cambridge Univ. Press, 1974, σελ. 208-10, G. Stigler : Ibid, σελ. 88, M. Blaug : Ibid, σελ. 349). Την αρχήν Bernoulli ηκολούθησαν οικονομολόγοι του 19ου αιώνος-ειδικότερον Ολλανδοί-δια την υποστήριξιν εθέσπισαν ως δικαιότερον το φορολογικόν δόγμα της ελαχίστης θυσίας έναντι του δόγματος της αναλογικής θυσίας που εβασίζετο εις την αρχή του Bernoulli (Βλ. G. Stigler : Ibid, σελ. 90 ft 142, 143, M. Blaug : Ibid, σελ. 353 - 4). Εκτός της απεμπολήσεως αυτής της αρχής του Bernoulli επήλθεν και ετέρα γενικώτερη τοιαύτη εκ μέρους των οικονομολόγων, εφ όσον η λογαριθμική συνάρτησης χρησιμότητος που ενεφανίζετο επί τη βάσει της αρχής αυτής προϋπέθετε και ισχυρούς μη ρεαλιστικούς περιορισμούς από της πλευράς της ζητήσεως. (K. Borch : The place of Uncertainty in the Theories of the Austrian School, εις το Carl Menger and the Austrian School of Economics, των J. Hicks, W. Weber, έκδ. Oxford ot the Clarendon Press, 1974, σελ. 72, K. Borch : The Economics of Uncertainty, 1968, 3η έκδ. Princeton Univ. Press, 1972, σελ. 34-46).

15. Η λήψις των επιχειρηματικών αποφάσεων υπό καθεστώς αβεβαιότητος απησχόλησε τους οικονομολόγους αρχής γενομένης από τον R. Cantillon και συνεχίζει εισέτι και σήμερον να τους απασχολεί (F., Knight, A. Hart, C. Schackle κ.ά.) Ο εκ των κλασσικών N. Senior αναφερόμενος εις την σχέσιν μεταξύ του ύψους κερδών και του ύψους κινδύνων που ενέχουν διάφοραι επιχειρήσεις δίδει παρόμοιον παράδειγμα με αυτό του Bernoulli, χωρίς όμως και να τον αναφέρει (N. Senior : An Outline of the Science of Political Economy, 1836, έκδ. A.M. Kelley, 1965, σελ. 209). Πιθανότατα επειδή, όπως και ο ηδονιστής Jevons, ήτο ενήμερος μόνον εκ του γενικού επί των πιθανοτήτων έργου του Laplace.

λή περιουσίαν της τάξεως των χ+9.200. Εξισώνοντας τα δύο ταύτα μεγέθη έχομεν :

$$(\chi+10.000)\ 19\ \chi = (\chi+9.200)\ 20,$$ ή κατά προσέγγισιν, χ= 5.043.

Ως εκ τούτου εάν ο Γάϊος, εκτός της προσδοκίας παραλαβής των εμπορευμάτων του κατέχει και έν ποσόν μεγαλύτερον των 5.043 ρουβλίων θα δικαιωθή μη αγοράζων ασφάλειαν. Τουναντίον, εάν ο πλούτος του είναι μικρότερος από το ποσόν αυτό πρέπει να ασφάλιση το φορτίον του. Και εάν η τεθείσα ερώτησις είναι : Ποία ελαχίστη περιουσία πρέπει να κατέχεται από το άτομον που προσφέρεται να χορήγηση αυτήν την ασφάλειαν ούτως ώστε ορθολογικώς να πράτη αυτό ; [16]. Πρέπει να απαντήσωμεν ως εξής :

έστω ότι γ είναι η περιουσία του, τότε

$$\sqrt[20]{(\gamma+800)^{19}.\ (\gamma-9.200)} = \gamma$$

ή κατά προσέγγισιν, γ = 14.243, ο αριθμός ο οποίος εξάγεται από τα προηγούμενα άνευ επιπρόσθετων υπολογισμών. Άτομόν τι με ολιγώτερον πλούτον θα είναι ανόητον να χορήγηση την ασφάλειαν, αλλά έχει νόημα δι' έν πλουσιώτερον άτομο να πράξη τούτο. Εξ αυτού του γεγονότος είναι σαφές ότι η εμφάνισις αυτού του είδους της ασφαλείας υπήρξε τόσον χρήσιμος εφ' όσον παρέχει πλεονεκτήματα εις όλα τα ενδιαφερόμενα άτομα. Παρομοίως, εάν ο Γάϊος ήτο εις θέσιν να επιτυχή ασφάλειαν εξακοσίων ρουβλίων θα ήτο απερίσκεπτος να την αρνηθή εάν κατείχεν ολιγώτερα από 20.478 ρούβλια, αλλά θα είχε όμως ενεργήση με πάρα πολύ επιφυλακτικότητα εάν ησφάλιζε τα εμπορεύματα του με αυτήν την τιμήν, όταν η περιουσία του ήτο μεγαλύτερα από τούτο το ποσόν. Από την άλλη πλευρά άτομόν τι θα ενήργει απερισκέπτως εάν επρόκειτο να προσφερθή ίνα υποστήριξη αυτήν την ασφάλειαν δι' εξακόσια ρούβλια, όταν ο ίδιος κατέχει περισσότερα από τούτο το ποσόν. Ουδείς όμως, οσονδήποτε πλούσιος, δεν θα διηύθυνε

16. Ο Bernoulli με άλλας λέξεις υποστηρίζει ότι η ορθολογική λήψις αποφάσεων του επιχειρηματία που αντιμετωπίζει αβέβαια αποτελέσματα, δεν πρέπει να στηρίζεται μόνον εις την μετρούμενην πιθανότητα επελεύσεως ενός γεγονότος - βασιζόμενη εις τας ατομικάς του εμπειρίας-αλλά και εις το συνολικόν πλούτον τον οποίον ούτος κατέχει.

τις υποθέσεις του καταλλήλως εάν προσωπικώς ανελάμβανε την ασφάλειαν δι' ολιγώτερα από πεντακόσια ρούβλια.

§ 16. Έτερος κανών που δύναται να αποδειχθή χρήσιμος μπορεί να εξαχθή εκ της θεωρίας μας. Αυτός είναι ο κανών συμφώνως προς τον οποίον είναι ενδεδειγμένον όπως διαιρούνται τα αγαθά, τα οποία εκτίθενται εις κάποιον κίνδυνον εις ζητήματα τινά παρά να διακινδυνεύονται όλα ομού. Θα εξηγήσω πάλιν τούτο ακριβέστερον δι' ενός παραδείγματος. Ο Σεμπρόνιος κατέχει αγαθά εις την οικίαν του συνολικής αξίας 4.000 δουκάτων και επιπροσθέτως κατέχει 8.000 δουκάτα εις αξίαν εμπορευμάτων, τα οποία ευρίσκονται εις ξένας χώρας από τας οποίας δύναται να μεταφερθούν μόνον δια θαλάσσης. Εν τούτοις, η καθημερινή μας εμπειρία μας έχει διδάξη ότι από τα δέκα πλοία το έν καταστρέφεται. Υπό τας προϋποθέσεις ταύτας, υποστηρίζω, ότι εάν ο Σεμπρόνιος εμπιστεύεται όλα τα εμπορεύματα του των 8.000 δουκάτων εις έν πλοίον η προσδοκία του δια τα εμπορεύματα του αξίζει 6.751 δουκάτα. Ήτοι

$$\sqrt{12.000^{9} \,.\, 4.000^{1}} - 4.000^{1}$$

Εάν όμως επρόκειτο να εμπιστευθή ούτος ίσας μερίδας εκ των εμπορευμάτων του εις δύο πλοία η αξία της προσδοκίας του θα είναι :

$$\sqrt[100]{12.000^{81} \,.\, 8.000^{18} \,.\, 4.000} - 4.000, \text{ δηλ. } 7.033 \text{ δουκάτα.}$$

Κατ'αυτόν τον τρόπον η αξία των προσδοκιών επιτυχίας του Σεμπρόνιου θα αυξάνεται ευμενέστερα όσον μικρότερα είναι η αναλογία που εμπιστεύεται εις έκαστον πλοίον. Εν τούτοις, η προσδοκία του ποτέ δεν θα υπερβή εις αξίαν τα 7.200 δουκάτα. Η ακολουθούμενη αύτη τακτική θα είναι εξ ίσου χρήσιμος δι' εκείνους οι οποίοι επενδύουν τας περιουσίας των εις ξένον συνάλλαγμα και εις άλλας επικίνδυνους επιχειρήσεις.[17]

17. Δια μίαν αξιολόγησιν της απόψεως του Bernoulli περί του τρόπου λήψεως των επιχειρηματικών αποφάσεων υπό καθεστώς αβεβαιότητος και κινδύνων βλ. K. Arrow : Utility, Attitudes, Choises-A Review Note (1958), σελ. 59, K. Arrow : Utility and Expectation in Eco-

§ 17. Εξαναγκάζομαι να παραλείψω πολλά πρωτότυπα σχόλια αν και ταύτα δεν θα ήταν σαφώς άχρηστα. Και μολονότι άτομον τι το οποίον είναι αρκούντως συνετόν, λόγω φυσικού ενστίκτου, ηδύνατο να συνειδητοποίηση και αυθορμήτως να εφαρμόση τα πλείστα εξ όσων έχω εξήγηση, μετά δυσκολίας κάποιος πιστεύει ότι είναι δυνατόν να ορίση αυτά τα προβλήματα με την ακρίβειαν που έχομε χρησιμοποιήσει εις τα παραδείγματα μας. Καθώς δε όλαι μας αι προτάσεις εναρμονίζονται πλήρως με την εμπειρίαν θα ήτο λάθος να ετύγχανον αμελείας από μέρους μας ένεκα αφαιρέσεων αι οποίαι στηρίζονται επί αμφιβόλων υποθέσεων. Και τούτο ενισχύεται επί πλέον εκ του ακολούθου παραδείγματος το οποίον ενέπνευσε τας σκέψεις αυτάς και του οποίου η ιστορία έχει ως ακολούθως : Ο εντιμότατος εξάδελφος μου, ο ονομαστός Nicolas Bernoulli, καθηγητής Νομικής εις το Πανεπιστήμιον της Βασιλείας, κάποτε υπέβαλλε πέντε προβλήματα εις τον εξόχως διακεκριμένον μαθηματικόν Montmort. Τα προβλήματα αυτά αντεγράφησαν εις την εργασίαν του M. de Montmort, «L' analyse sur les yeux de hazard» σελ. 402. Το τελευταίον εξ αυτών των προβλημάτων τίθεται ως ακολούθως :0 Πέτρος στρίβει έν νόμισμα και συνεχίζει να πράττη τούτο έως ότου το νόμισμα έλθη «κεφάλι» πίπτοντας εις το έδαφος. Συμφωνεί δε να δώση εις τον Παύλον έν δουκάτον εάν επιτυχή «κεφάλι» κατά την πρώτην ρίψιν και δύο δουκάτα εάν το επιτυχή κατά την δευτέραν, τέσσαρα εάν το επιτυχή κατά την τρίτην, οκτώ εάν το επιτυχή κατά την τετάρτην, κ. Ο.Κ. εις τρόπον ώστε με κάθε επιπλέον ρίψιν ο αριθμός των δουκάτων που πρέπει να πλήρωση διπλασιάζεται. Άς υποθέσωμεν ότι επιζητείται να προσδιορίσωμεν την αξίαν των προσδοκιών του Παύλου. Ο προαναφερθείς εξάδελφος μου επραγματεύθη το πρόβλημα αυτό εις έν γράμμα του προς εμέ επιζητώντας την γνώμην μου. Μολονότι ο πρότυπος υπολογισμός εμφαίνει ότι η αξία της προσδοκίας του Παύλου είναι απείρως μεγάλη, πρέπει, λέγει, να γίνη αποδεκτόν ότι οιοσδήποτε αρκετά λογικός άνθρωπος θα επώλει την τύχην του, με μεγάλην ευχαρίστησιν, αντί είκοσι δουκάτων. Η αποδεκτή μέθοδος υπολογισμού, πράγματι, αξιολογεί τας προσδοκίας του Παύλου απείρως αν και

nomic Behavior (1963), (σελ. 127-8) αμφότερα περιέχονται εις το Collected Papers of K. Arrow - Individual Choise Under Certainty and Uncertainty, έκδ. The Belknap Press, 1984. Δια την συσχέτισιν της θέσεως αυτής του Bernoulli με την επενδυτικήν συμπεριφοράν των επιχειρηματιών βλ. M. Freimer, M. Gordon : Investment Behaviour with Utility a Concave Function of Wealth, περιέχεται εις Risk and Uncertainty των K. Borch, J. Mossin, εκδ. Macmillan, 1968, σελ. 99-102.

ουδείς θα επεθύμει να τας αγοράσει εις μίαν μετρίως υψηλήν τιμήν[18]. Παρά ταύτα όμως, εάν εφαρμόσωμεν τον νέον μας κανόνα εις το πρόβλημα τούτο δυνάμεθα να εύρωμεν την λύσιν και τοιουτοτρόπως να λύσωμεν τον γόρδιον δεσμόν. Η λύσις του προβλήματος δια της αρχής μας έχει ως ακολούθως.

§ 18. Ο αριθμός των περιπτώσεων που πρέπει να θεωρηθούν ενταύθα είναι άπειρος : Κατά το ήμισυ των περιπτώσεων το παίγνιον θα τελείωση εις την πρώτην ρίψιν του νομίσματος, κατά το έν τέταρτον των περιπτώσεων με την τετάρτην, κ.Ο.Κ. Εάν παραστήσωμεν τον αριθμόν των περιπτώσεων έως το άπειρον δια Ν. είναι σαφές ότι υπάρχουν 1/2 Ν περιπτώσεις υπό τας οποίας ο Παύλος κερδίζει έν δουκάτο ν, 1/4 Ν περιπτώσεις εις τας οποίας ούτος κερδίζει δυο δουκάτα» 1/8 Ν περιπτώσεις εις τας οποίας κερδίζει τέσσαρα, 1/16 Ν. περιπτώσεις εις τας οποίας κερδίζει οκτώ, κ.ο.κ. Εάν παραστήσωμεν την περιουσίαν του Παύλου δια a : η υπό συζήτησιν πρότασις τότε θα αξίζη :

$$\sqrt[N]{(a+1)^{N/2}.\ (a+2)^{N/4}.\ (a+4)^{N/8}.\ (a+8)^{N/16}\ldots\ldots\ldots\ldots} - a$$

$$= \sqrt[2]{(a+1)}\ .\ \sqrt[4]{(a+2)}\ .\ \sqrt[8]{(a+4)}\ .\ \sqrt[16]{(a+8)}\ldots\ldots\ldots\ldots - a$$

§ 19. Από τον ως ανωτέρω τύπον, ο οποίος αξιολογεί τα προσδοκώμενα κέρδη του Παύλου, συνάγεται ότι η αξία των θα αυξάνεται με το μέγεθος της περιου-

18. Το ανωτέρω πρόβλημα αναφέρεται εις την σύγχρονον βιβλιογραφίαν ως «Παράδοξον της Αγίας Πετρουπόλεως» (Paradox of St. Peterburg). Δια ανάλυσιν και κριτικήν του εν λόγω παραδόξου βλ. P. Samuelson : Probability and the Attempts to Measure Utility (1950), σελ. 117 — 126, του ιδίου, Utility, Preference and Probability (1952), σελ. 127-136, του ιδίου, The St. Petersburg Paradox as a Divergent double Limit (1960), σελ. 146- 152. Ο Samuelson εις τα άρθρα του αυτά τα οποία περιλαμβάνονται εις The Collected Scientific Papers of P.A. Samuelson, έκδ. The M.I.T. Press, 1966, υπεραμύνεται της εννοίας της τακτικής χρησιμότητος έναντι της έννοιας της απολύτου χρησιμότητος του εισοδήματος που χρησιμοποιεί ο Bernoulli. Δια μίαν ιστορικήν και πολύπλευρον παρουσίασιν του παραδόξου αυτού βλ. P. Samuelson : St. Petersburg Paradoxes - Defanged, Dissected and Historically Described, εις Journal of Economic Literature, 1977, σελ. 24-55. Επίσης ίνα καταστή ευχερώς προσιτή εις μη μαθηματικούς η παρουσίασις αύτη του ανωτέρω παραδόξου βλ. J.M. Keynes : Treatise on Probability, 1921, έκδ. Macmillan, 1973, σελ. 349-356, W. Fellner, Ibid, σελ. 101 - 108, K. Borch : The Economics of Uncertainty, σελ. 14-5 και σελ. 23-33.

σίας του Παύλου και ποτέ δεν θα φθάση την άπειρον αξίαν εκτός εάν ο πλούτος του Παύλου καθίσταται ταυτοχρόνως άπειρος. Επιπροσθέτως εξάγωνεν τα ακόλουθα πορίσματα : Εάν ο Παύλος δεν έχει καμμίαν ιδιοκτησίαν η αξία της προσδοκίας του θα ήτο

$$\sqrt[2]{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \sqrt[16]{8} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

η οποία συμποσούται ακριβώς εις δύο δουκάτα. Εάν κατέχη δέκα δουκάτα η ευκαιρία του θα ήξιζε κατά προσέγγισιν τρία δουκάτα, και θα ήξιζε κατά προσέγγισιν τέσσερα δουκάτα, εάν ο πλούτος του ήτο εκατό δουκάτα και έξι δουκάτα εάν κατείχε χίλια δουκάτα. Εξ αυτού δυνάμεθα ευχερώς να είδωμεν τι υπερβολική περιουσία πρέπει κάποιος άνθρωπος να κατέχη ώστε να έχη νόημα δι' αυτόν να αγοράσει την ευκαιρίαν του Παύλου αντί δώδεκα δουκάτων. Το ποσόν το οποίον πρέπει να πλήρωση ο αγοραστής εις αυτήν την πρότασιν διαφέρει πως από το ποσόν που θα ήξιζε δι' αυτόν, όταν αύτη ήτο ήδη υπό την κατοχήν του. Ως εκ τούτου, εφ' όσον, η διαφορά αύτη είναι υπερβολικώς μικρά, εάν το a (η περιουσία του Παύλου) είναι μεγάλο, δυνάμεθα να τας εκλάβωμεν ως ίσας. Εάν παραστήσωμεν την τιμήν αγοράς με χ, η αξία της περιουσίας μπορεί να προσδιορισθεί δια μέσου της εξισώσεως

$$\sqrt[2]{(a+1-x)} \cdot \sqrt[4]{(a+2-x)} \cdot \sqrt[8]{(a+4-x)} \cdot \sqrt[16]{(a+8-x)} \ldots\ldots\ldots = a$$

και εάν το a είναι εις μέγας αριθμός, η εξίσωσις αύτη θα εκπληρώνεται κατά προσέγγισιν υπό της :

$$x = \sqrt[2]{a+1} \cdot \sqrt[4]{a+2} \cdot \sqrt[8]{a+4} \cdot \sqrt[16]{a+8} \ldots\ldots\ldots$$

Μετά την ανάγνωσιν του δοκιμίου αυτού εις την Society απέστειλα έν αντίγραφον εις τον προαναφερθέντα κ. Nicolas Bernoulli, δια να λάβη θέσιν επί της προτεινομένης υπ' εμού λύσεως εις τας δυσκολίας που είχεν ούτος υποδείξει. Εις γράμμα που μου έγραψε το 1732 μου εδήλωσε ότι δεν ήτο με κανένα τρόπο απογοητευμένος με την πρότασίν μου επί της εκτιμήσεως επικινδύνων προτάσεων, όταν αύται εφαρμόζονται εις την περίπτωσιν ατόμου, το οποίον πρέπει να εκτίμηση τας ιδίας αυτού προσδοκίας. Εν τούτοις, νομίζει ότι η περίπτωσις διαφέρει εάν εν τρίτον άτομον, ως εάν ήτο εις τη ν θέσιν ενός κριτού, πρέπει να εκτίμηση τας προσδοκίας κάθε συμμετέχοντος εις έν παίγνιον συμφώνως με το αίσθημα του δικαίου και την δικαιοσύνη ν. Ήδη έχω πραγματευθεί το πρόβλημα εις την §2. Ακολούθως αυτός ο διακεκριμένος λόγιος με επληροφόρησε ότι ο ονομαστός μαθηματικός, Cramer, ανέπτυξε θεωρίαν επί του ιδίου θέματος μερικά έτη πριν παρουσιάσω το δοκίμιόν μου.[19] Πράγματι ευρον την θεωρίαν του τόσο παρόμοια με την ιδικήν μου ώστε μου φαίνεται απίστευτο ότι, ανεξαρτήτως εργασθέντες εφθάσαμεν εις τόσον εγγύς συμφωνίαν επ' αυτού του θέματος. Ως εκ τούτου μου φαίνεται ότι αξίζει να παραθέσω τις λέξεις με τας οποίας ο ονομαστός Cramer πρώτος αυτός περιέγραψε την θεωρίαν του εις επιστολή ν του προς τον εξαδελφόν μου το 1728. Οι λέξεις του είναι αι ακόλουθοι: «Ίσως λανθάνω, αλλά πιστεύω ότι έχω λύση το ασύνηθες πρόβλημα που υποβάλλατε εις τον M. de Montmort, εις την επιστολήν σας της 9ης Σεπτεμβρίου 1733, (πρόβλημα 5, σελ. 402). Χάριν απλουστεύσεως θα υποθέσω ότι ο Α ρίπτει έν νόμισμα εις τον αέρα και ο Β δεσμεύεται να δώσει εις τον Α έν δουκάτον εάν κατά την πρώτην ρίψιν, το νόμισμα πέση με τον σταυρό του προς τα επάνω και δυο δουκάτα εάν πέση κατ' αυτόν τον τρόπο και κατά την δευτέραν ρίψιν, τέσσαρα δουκάτα εάν συμβή τούτο κατά την τρίτην ρίψιν, οκτώ δουκάτα εάν συμβή αυτό κατά την τετάρτην ρίψιν κ.ο.κ. Το παράδοξον σύγκειται εις το άπειρον άθροισμα, το οποίον ως ισοδύναμον δίδουν οι υπολογισμοί και το οποίον ισοδύναμον πρέπει ο Α να πλήρωση εις τον Β. Τούτο φαίνεται παράλογον, καθώς ουδείς λογικός άνθρωπος θα επεθύμει να πλήρωση 20 δουκάτα ως ισοδύναμον. Επεζητήσατε μίαν εξήγησιν της διαφοράς μεταξύ των μαθηματικών υπολογισμών και της κοινής εκτιμήσεως. Πιστεύω ότι αύτη απολήγει από το γεγονός ότι, εις την θεωρίαν τους, οι μαθηματικοί, εκτιμούν τα χρήματα εις αναλογίαν προς την ποσότητα τους ενώ, εις την πρά-

19. Το έτος 1728 (J. Schumpeter : op. cit. σελ. 303 ft. 7).

ξ ι ν, οι άνθρωποι με κοινή λογικήν εκτιμούν τα χρήματα εις αναλογίαν προς την χρησιμότητα που μπορούν να λάβουν απ' αυτά. Η μαθηματική προσδοκία[20] καθίσταται άπειρος εκ της τεραστίας ποσότητος την οποίαν δύναμαι να κερδίσω εάν το νόμισμα αργήση πολύ να πέση με τον σταυρό του προς τα άνω, ίσως εις εκατοντάδας ή χιλιάδας ρίψεις. Εις την πραγματικότητα εάν σκεφθώ, ως λογικός άνθρωπος, το ποσόν αυτό δεν αξίζει τίποτε πλέον δι' εμέ, δεν μου προξενεί περισσοτέραν ευχαρίστησιν και δεν με επηρεάζει περισσότερον δια να δεχθώ *το* παίγνιον από ότι θα με επηρεάση έν ποσόν ανερχόμενον μόνον εις δέκα ή είκοσι εκατομμύρια δουκάτα. Ας υποθέσωμεν, ως εκ τούτου, ότι κάθε ποσόν υπεράνω των 2^{24}= 166.777.216 δουκάτων θεωρείται απ' αυτόν ίσης αξίας προς 2^{24} δουκάτα ή ακόμη καλύτερον, ότι δεν δύναμαι να κερδίσω περισσότερα απ' αυτό το ποσόν, αδιάφορον πόσον χρονικόν διάστημα απαιτείται πριν το νόμισμα πέση με τον σταυρό του προς τα άνω. Εις την περίπτωσιν ταύτην, η προσδοκία μου είναι

$$\frac{1}{2}.1+\frac{1}{4}.2+\frac{1}{8}.4\ldots\ldots+\frac{1}{2^{25}}.2^{24}+\frac{1}{2^{26}}.2^{24}+\frac{1}{2^{27}}.2^{24}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots.\ (24\ \text{φοράς})\ldots+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ \ldots.=12+1=13.$$

Κατ' αυτόν τον τρόπον η ηθική μου προσδοκία μειώνεται κατ' αξίαν 13 δουκάτων και το ισοδύναμον που πρέπει να πληρωθή δι' αυτό παρομοίως μειώνεται - αποτέλεσμα το οποίον φαίνεται πολύ περισσότερον λογικόν από αυτό που το καθιστά άπειρον.

Μέχρι τούδε η παρουσίασις είναι κάπως ασαφής και υπόκειται εις αντίφασιν. Εάν πράγματι, είναι αληθές ότι η ποσότης 2^{25} μας εμφανίζεται ως μη μεγαλύτερα της ποσότητος 2^{24}, καμμία, οποιαδήποτε προσοχή, δεν θα έπρεπε να δοθή εις την ποσότητα που δύναται να κερδηθή μετά την εικοστήν τετάρτην ρίψιν. Επειδή μόλις πριν κάνουμε την εικοστήν πέμπτην ρίψιν είμαι

20. Καλείται και μαθηματική ελπίς.

σίγουρος ότι σταματώ με όχι ολιγώτερα από 2^{24}-1 δουκάτα, μία ποσότητα η οποία, συμφώνως προς αυτήν την θεωρία, δύναται ναθεωρηθή ισοδύναμος προς το 2^{24}. Ως εκ τούτου δύναται ορθώς να λεχθή ότι η προσδοκία μου αξίζει μόνο δώδεκα δουκάτα, και όχι δεκατρία. Εν τούτοις, όσον αφορά εις την συμφωνίαν μεταξύ της βασικής αρχής που ανεπτύχθη από τον προαναφερθέντα συγγραφέα και της ιδικής μου, τα όσα ήδη ελέχθησαν σαφώς δεν προτίθεται να ληφθούν ως αναιρούντα την αρχήν αυτήν. Αναφέρομαι εις την πρότασιν ότι οι λογικοί άνθρωποι πρέπει να εκτιμούν τα χρήματα συμφώνως με την χρησιμότητα που αποκομίζουν εκ τούτων[21]. Τούτο δε το θέτω ίνα αποφύγω να οδηγήσω κάποιον όπως κρίνη ολόκληρον αυτήν την θεωρίαν δυσμενώς. Και τούτο είναι ακρβώς εκείνο το οποίον ο διακεκριμένος C. Cramer διατυπώνει, εκφράζων δια του ακολούθου τρόπου ακριβώς αυτό το οποίον θα ηδυνάμεθα να συμπεράνωμεν. Συνεχίζει ούτος ως εξής: «Το ισοδύναμον δύναται να γίνεται μικρότερον, ακόμη και εάν υιοθετήσωμεν κάποιας εναλλακτικός υποθέσεις επί της ηθικής αξίας του πλούτου. Διότι αυτό το οποίον μόλις υπέθεσα δεν ισχύει πλήρως εφ' όσον, ενώ είναι αληθές ότι 100 εκατομμύρια παρέχουν μεγαλυτέραν ικανοποίησαν από ότι τα 10 εκατομμύρια, δεν αποδίδουν και δεκαπλάσια τοιαύτην. Εάν επί παραδείγματι, υποθέσωμεν ότι η ηθική αξία των αγαθών είναι ευθέως ανάλογος προς την τετραγωνική ρίζα των μαθηματικών των ποσοτήτων, δηλ. ότι η ικανοποίησις που παρέχεται εκ 40.000.000 είναι διπλασία αυτής η οποία παρέχεται εκ 10.000.000, η ψυχική μου προσδοκία γίνεται :

$$\frac{1}{2}\sqrt{1}+\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{8}\sqrt{4}+\frac{1}{16}\sqrt{8}+\cdots=\frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

Παρά ταύτα το μέγεθος τούτο δεν είναι και το ισοδύναμον που επιζητούμε, διότι το ισοδύναμον τούτο δεν είναι ανάγκη να ισούται προς την ηθικήν μου προσδοκίαν, αλλά μάλλον πρέπει να είναι τοιούτου μεγέθους ώστε ο πόνος ο

21. Οι λογικοί δηλ. άνθρωποι αντιμετωπίζουν τα στοιχήματα όχι από της πλευράς των χρηματικών των αποτελεσμάτων αλλά από τας ηθικός αξίας ή την χρησιμότητα των αποτελεσμάτων αυτών.

οποίος προκαλείται εκ της απώλειας του να ισούται προς την ηθική προσδοκίαν της ευχαριστήσεως, την οποίαν ελπίζω να αποκομίσω εκ των κερδών μου.[2]2. Ως εκ τούτου, το ισοδύναμον πρέπει επί τη βάσει υποθέσεως μας, να ισούται προς :

$$\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{6-4\sqrt{2}}\right) = 2{,}9\ldots\ldots\ldots$$

το οποίον συνεπώς είναι μικρότερο του 3, τω όντι ασήμαντος ποσότης αλλά παρ' όλα ταύτα, πιστεύω ότι είναι εγγύτερον του 13 προς τας κοινάς εκτιμήσεις».

22. Ο Gramer υπεστήριξε διαφορετικήν έναντι του Bernoulli υπόθεσιν δια την μορφήν της συναρτήσεως της οριακής χρησιμότητος ήτοι την $ly = K \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (J. Schumpeter : op. cit.)